

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051801

以光反射法放大氣球膜的共振模態

學校名稱： 國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 林河宏	李育賢
高二 郭家澤	楊素菀

關鍵詞： 克拉德尼、聲波成像、Bessel function

摘要

本研究以堅固的圓形筒套上氣球膜或是奶粉蓋後，貼上鏡片反射紅光，觀察不同振動頻率下的光線圖案。本研究的實驗方法，能初步解決氣球膜不易觀察共振模態的問題，並在過程中發現，反射光的圖案多數是呈現直線的，推測可能是同心圓共振膜態反饋的結果。

壹、動機

起初，我們對音樂波對於氣球皮上的反射光圖案感到興趣，於是我們想說是否可以用類似克拉德尼的振動方式同時觀察氣球皮表面在共振時沙子的分佈，不過沙子在氣球皮上無法呈現這樣的效果。



圖 1、氣球皮以聲音趨動砂子無法呈現出共振模態(自行拍攝)

在沙子的實驗過程中，沙子在共振但沒有明顯圖形成像，即使在我們不斷地改良下實驗仍無法進行。

於是，我們持續使紅光反射貼在氣球膜上的鏡片，再將光反射到牆壁上，觀察不同頻率下共振模態時反射光圖案的大小變化，此時發現若不是播放音樂而是只播放固定頻率的聲音時，反射光圖案多數會呈現直線。

在我們請教老師後，似乎發現這是一個可以找到氣球皮共振頻率的新方法，最後，我們往這個方向持續的深入實驗與探索。

貳、實驗目的

因為氣球膜沒辦法用肉眼或是砂子觀察共振模態，所以我們使用紅光反射貼在氣球膜上的鏡片，再將光反射到牆壁上觀察單一頻率在不同頻段下紅光直線長度變化。

研究中已初步確認大面積的氣球皮共振模態反射的紅光會呈現直線的圖案，因此，我們不斷實驗，並確認直線在最大振幅時，記錄下共振模態的頻率數值，進而分析氣球表面共振時的物理現象。

參、實驗器材

藍芽音箱、紅光發射裝置、小的方型鏡片、氣球、奶粉罐、膠帶圈、金屬垃圾筒

	
所使用到的設備架構	Frequency Generator App

圖 2、以手機程式控制無線藍芽喇叭的頻率(自行拍攝與截取)

肆、研究方法

先找到堅固的筒狀物(實驗多次後小奶粉罐和膠帶圈的面積最理想)，再將氣球用橡皮固定在筒狀物上，把鏡片貼在氣球皮上(不使用反光貼紙因為反射光易發散)，以紅光投射鏡片，調整紅光發射器的角度，使紅光能在反射鏡片後投射在牆壁上，觀察不同頻率下紅光的振動模態，並針對最大直線振幅做記錄。

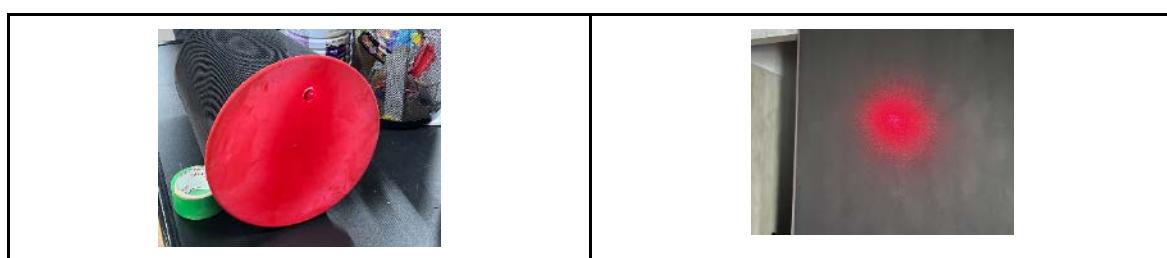


圖 3、將方形鏡片改為圓形亮片會造成紅光反射後不為圓點(自行拍攝)

伍、研究結果

一、奶粉罐套氣球皮

		
盡可能保持平整	奶粉罐放置音響前面	觀察其反射紅光圖案

圖 4、實驗裝置(自行拍攝)

		
記錄圖像時需在黑暗空間 長時間曝光	多數頻率非共振時光點為 點狀	實驗裝置

圖 5、實驗環境(自行拍攝)

圖案						
頻率	31 Hz	45 Hz	91 Hz	257 Hz	322 Hz	404 Hz

圖 6、初步實驗結果(自行拍攝)

由初步的實驗結果可以得知，在共振態的時候反射圖案的長期間曝光多呈現直線，偶爾有類 8 字或是稍不規則的直線，但初步確認我們可以使用光點變成直線再變回光點的過程中，找到最長直線的頻率值，得知此共振態的頻率。

由初步的實驗結果後，我們做一系列的觀測，最終以鏡片在下圖的位置(編號 A、B、C)做完整的記錄，這樣的結果有助我們討論找到某些規律。

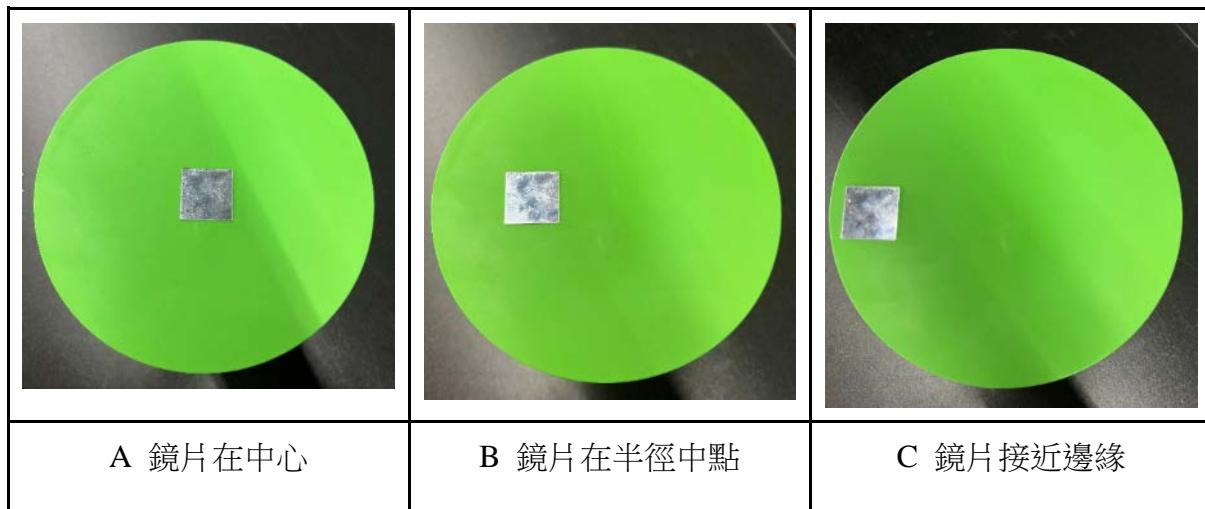


圖 7、鏡片位置(自行拍攝)

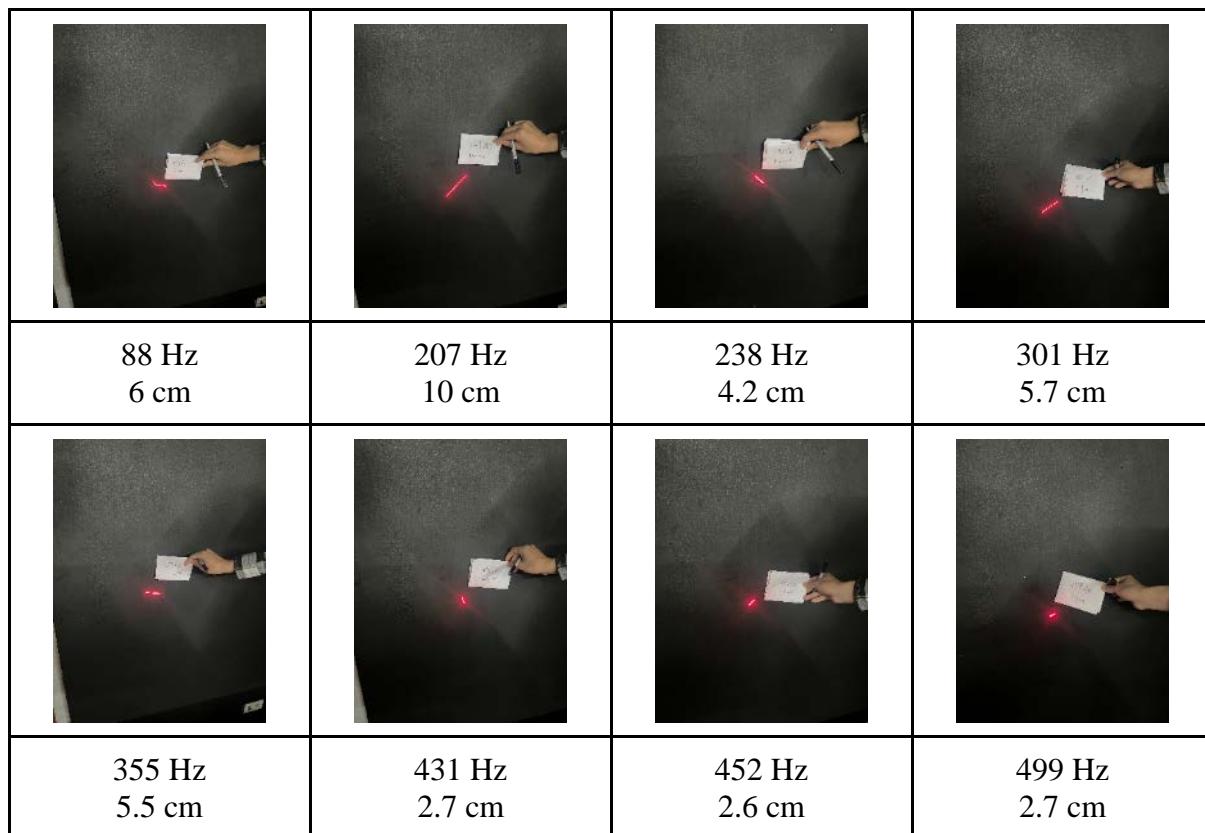


圖 8、鏡片 A 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

				
共振頻率 最長長度	46 Hz 2.3 cm	94 Hz 23 cm	262 Hz 24 cm	287 Hz 17 cm
				
	323 Hz 17.5 cm	342 Hz 17.5 cm	403 Hz 10 cm	433 Hz 5.5 cm
	487 Hz 2.5 cm			

圖 9、鏡片 B 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

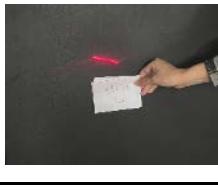
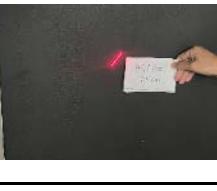
				
	48 Hz 4 cm	97 Hz 23.2 cm	181 Hz 10.5 cm	260 Hz 8.5 cm
				
	289 Hz 12 cm	391 Hz 7 cm	471 Hz 4.5 cm	500 Hz 4.3 cm

圖 10、鏡片 C 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

由以上實驗初步觀察到鏡片貼在中間(編號 A)共振的頻率和 B、C 位置比較不能對上，而 B 和 C 的共振頻率在低頻的前幾個比較有符合的情形。

二、膠帶圓框

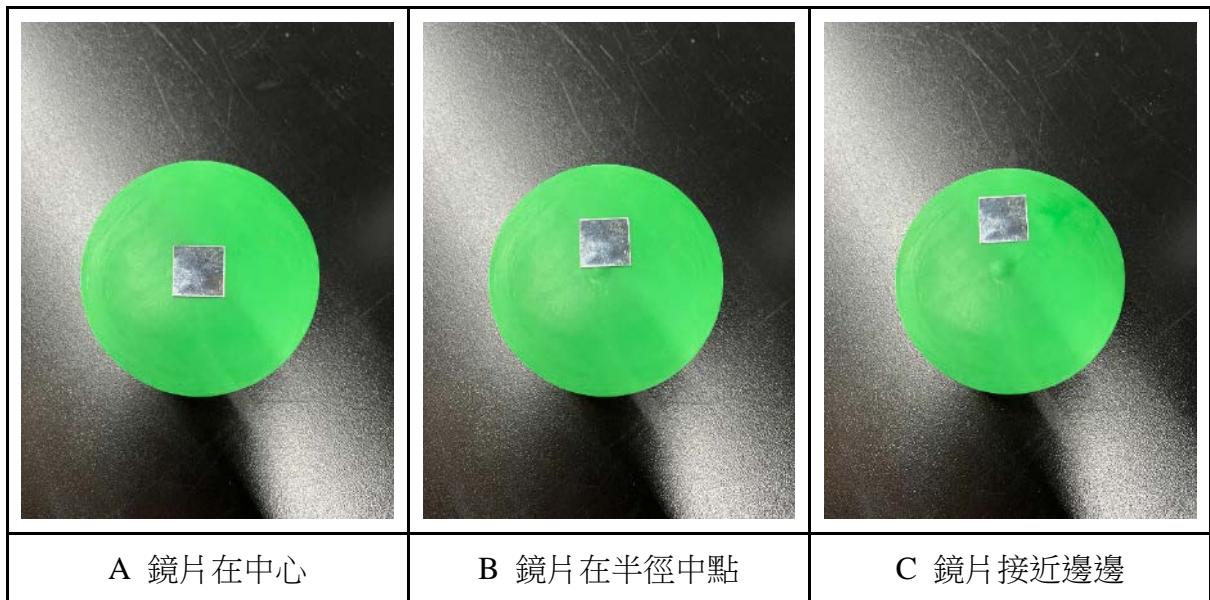


圖 11、不同鏡片位置示意圖

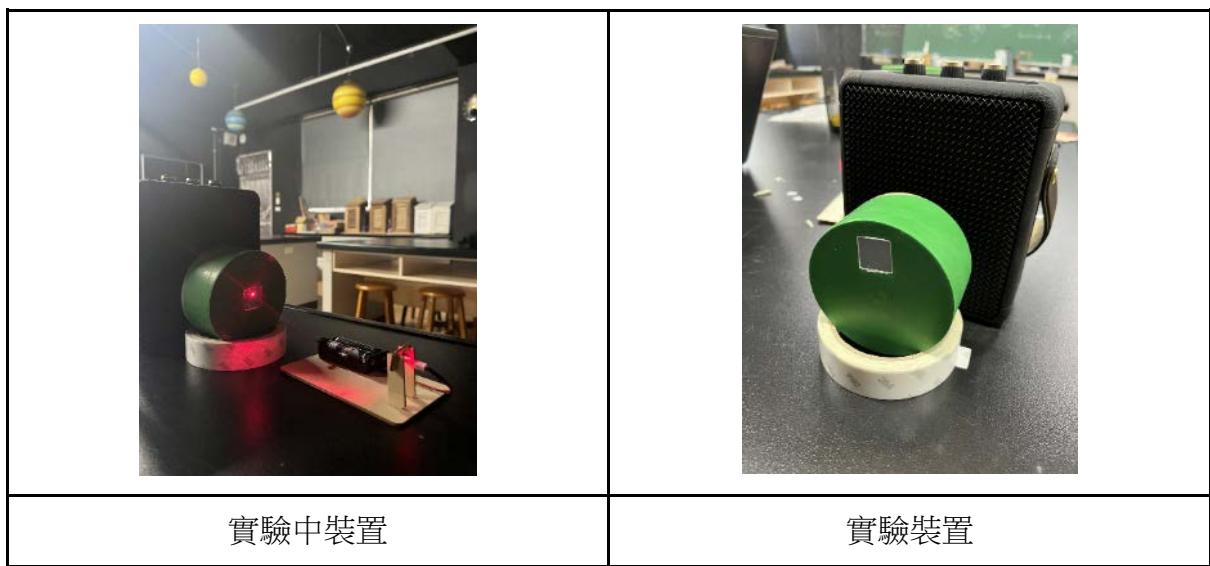


圖 12、以膠帶框做為實驗裝置(自行拍攝)

				
117 Hz 3.9 cm	227 Hz 1 cm	271 Hz 2.3 cm	305 Hz 3 cm	407 Hz 3 cm

圖 13、鏡片 A 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

					
69 Hz 3 cm	135 Hz 9 cm	274 Hz 2.5 cm	327 Hz 2 cm	365 Hz 3.2 cm	417 Hz 1.4 cm

圖 14、鏡片 B 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

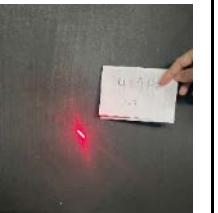
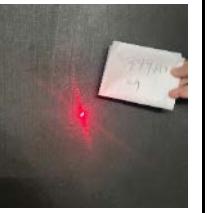
				
71 Hz 2.3 cm	141 Hz 8 cm	288 Hz 2 cm	417 Hz 1.5 cm	499 Hz 0.7 cm

圖 15、鏡片 C 位置共振頻率及其圖形長度(自行拍攝)

由較小半徑的膠帶框套氣球可以明顯觀察到，B 和 C 在低頻的共振頻率能初步對應(第一次共振 69Hz vs. 71Hz，第二次共振 135Hz vs. 141Hz)，而振動主要為直線可以判斷，這個應該是同心圓形式的共振模型。

由初步實驗結果我們排除鏡片黏貼於圓心的資料分析，因為存在不少變因而無法歸納有規律的結果。

三、大奶粉蓋

我們認為氣球皮除了同心圓共振還會有其他的共振模態，所以我們使奶粉罐原有的蓋子做為振動模組，且也有研究指出(參考資料二)，奶粉蓋的共振以沙子也不易呈現，若有也多為同心圓態，正好使用我們的方法可以輕鬆觀察出這樣的共振模式。

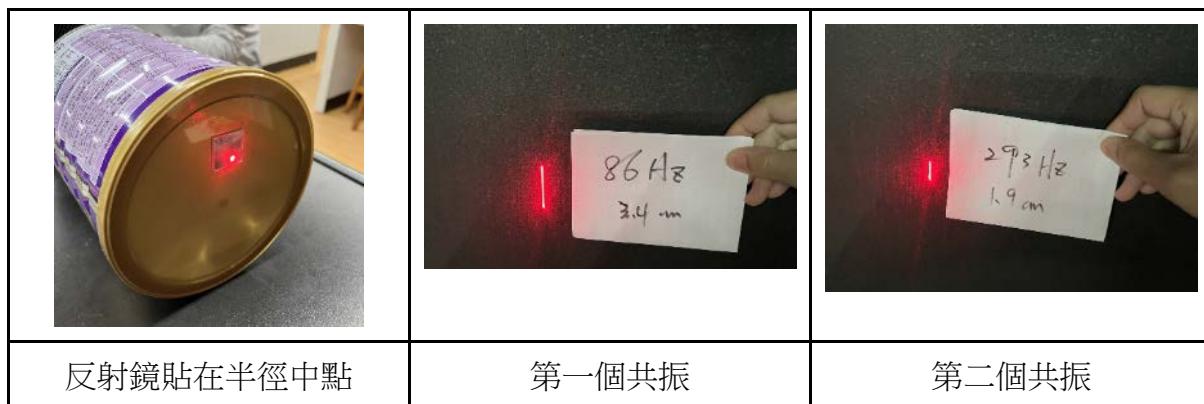


圖 16、鏡片在半徑中點的共振結果(自行拍攝)

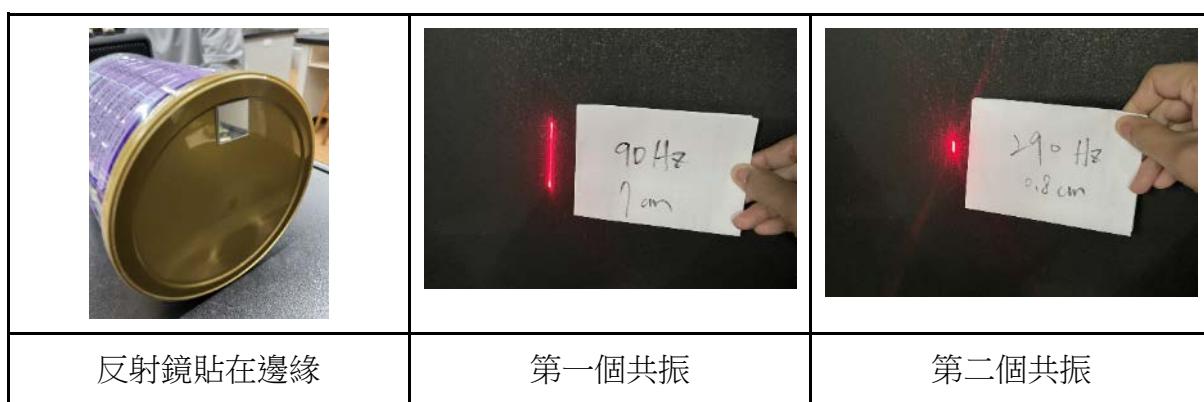


圖 17、鏡片在邊緣的共振結果(自行拍攝)

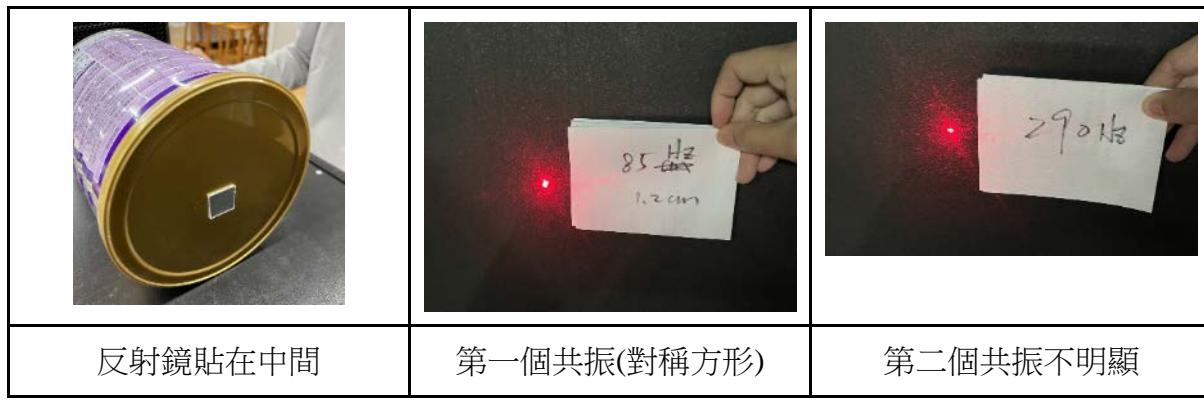


圖 18、鏡片在中間的共振結果(自行拍攝)

由奶粉罐的實驗可以觀察到，鏡片若不是貼在中心，共振的結果主要為直線，方向與同心圓共振模型的振動方向一致。

四、小奶粉罐

依理論推測，同樣材質的共振模態會相似，只差在面積較小時，頻率會較大，因此以小奶粉罐再次實驗可以驗證二次的共振結果是一樣的，只是較小面積的蓋子在同一個共振態時頻率會比較高。

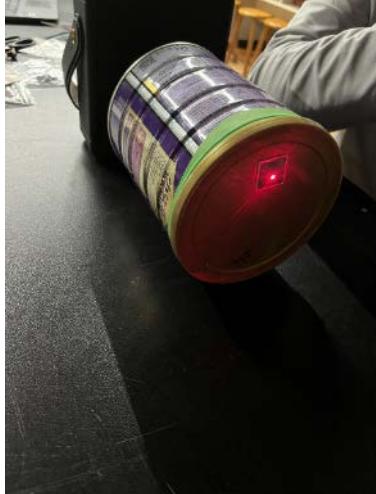
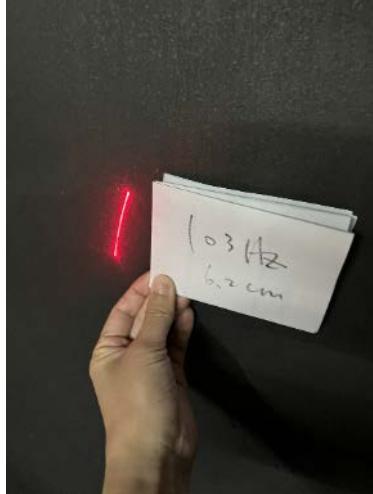
		
反射鏡貼在半徑中點	第一個共振	第二個共振

圖 19、鏡片在半徑中點的共振結果(自行拍攝)

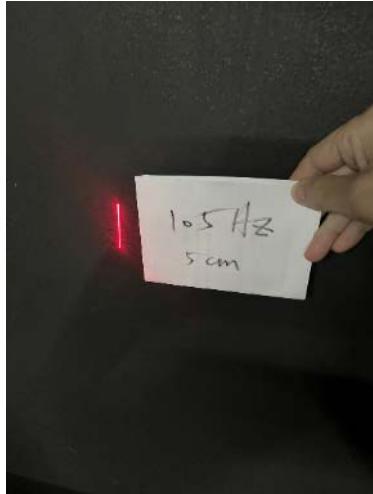
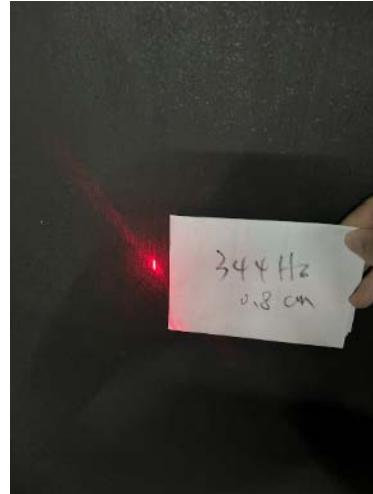
		
反射鏡貼在半徑邊緣	第一個共振	第二個共振

圖 20、鏡片在半徑邊緣的共振結果(自行拍攝)

五、大氣球皮

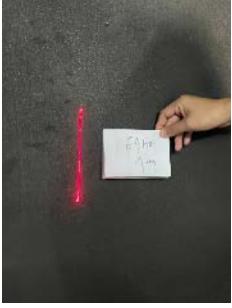
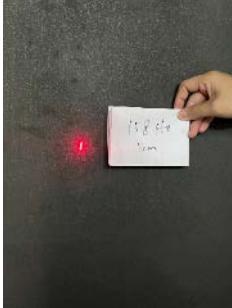
			
38Hz 3.5cm	67Hz 17cm	127Hz 1cm	158Hz 1cm
			
187Hz 2.5cm	212Hz 1cm	300Hz 2.5cm	

圖 21、鏡片在半徑中點(自行拍攝)

			
39Hz 4cm	72Hz 30cm	128Hz 3cm	152Hz 1.5cm

圖 22、鏡片接近外圍(自行拍攝)

由以上的實驗可知，把鏡子貼在較外圈，在 39Hz、72Hz、128Hz、152Hz 皆為直線最大的圖案，與鏡片貼在半徑中點上有一致的共振頻率，且頻率有接近等差級數的關係。至於鏡片貼在半鏡的中點上會多振出幾個圖案，我們推測在半徑中點的振幅比較大以外，非同心圓對稱的圖案較邊邊位置有機會被呈現出來。

為了確認鏡片黏貼的方向對於實驗的結果是否造成影響，我們把大氣球皮主要 2 個鏡片黏貼位置旋轉 45 度再次實驗。

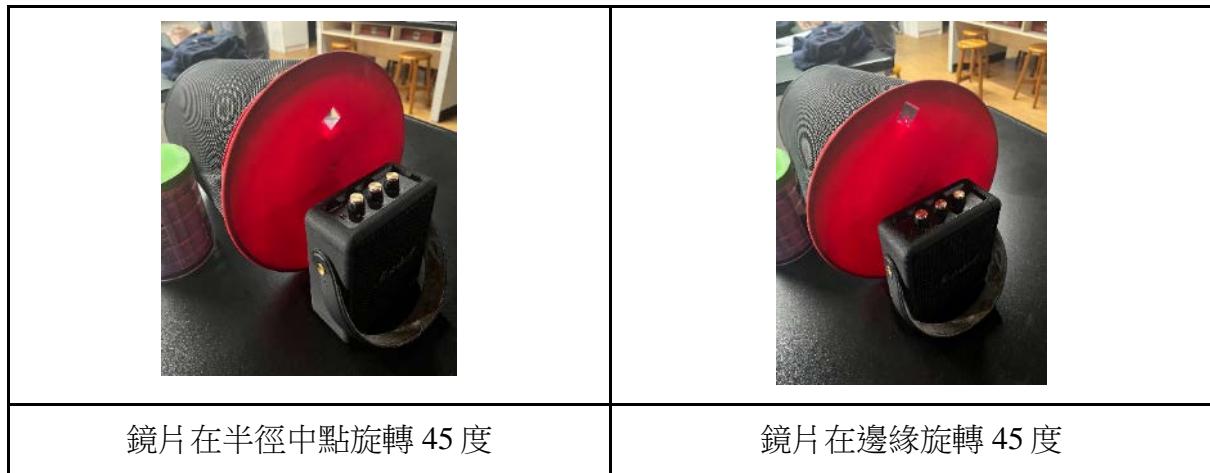


圖 23、鏡片旋轉(自行拍攝)

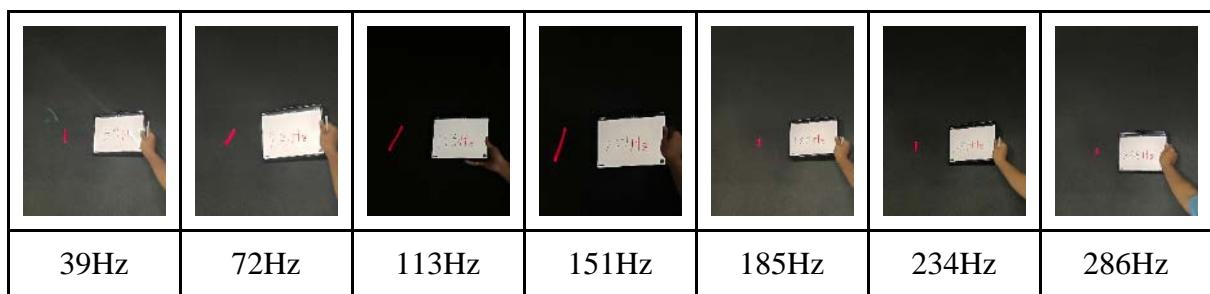


圖 24、鏡片在半徑中點旋轉 45 度的實驗結果(自行拍攝)

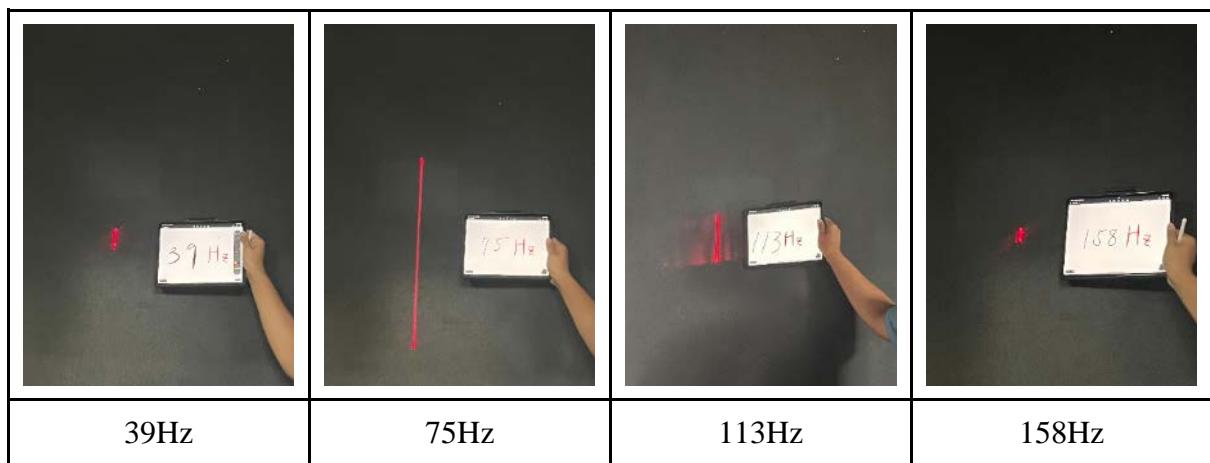


圖 25、鏡片在邊緣旋轉 45 度的實驗結果(自行拍攝)

由實驗的結果可以觀察到，共振的頻率與鏡片的角度無關，若貼在邊緣處對於實驗結果也沒有太大的影響，但在把鏡片貼在半徑的中間，原來的直線會略有旋轉，推測方型鏡片黏貼的位置對於振動的方向應該會略有影響。

陸、討論

現成的看見聲波玩具組	多數共振圖案為混亂的圖

圖 27、播放音樂的圖形(自行拍攝)

一開始我們購買的玩具中，我們拿來播放音樂觀察有趣的形狀，直到要參與科展我們使用固定的頻率來做觀察，多數共振的圖案還是不規則狀，在請教老師後我們嘗試多種實驗，才把實驗做出初步的規律結果。

同心圓共振模態 方型鏡片平行	同心圓共振模態 方型鏡片旋轉 45 度	以側向切面觀察光線的反射 會在直線上運動

圖 28、同心圓共振模態鏡片反射光呈現直線說明圖(自行繪製)

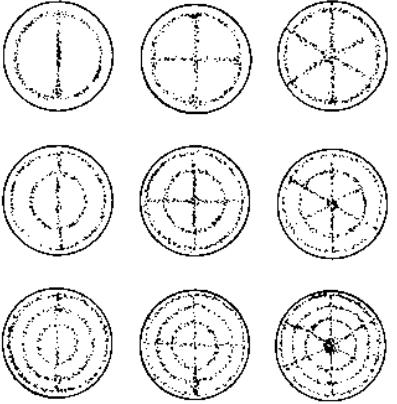
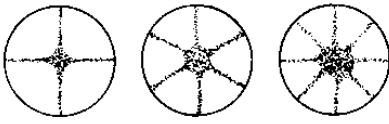
綜合多次實驗結果來看，以大氣球皮為例，我們發現在鏡片位置改變後，皆有 $39 \pm 1\text{Hz}$ 、 $71 \pm 4\text{Hz}$ 、 $120 \pm 8\text{Hz}$ 、 $155 \pm 3\text{Hz}$ 共振模態，時此紅光所產生的共振模態圖形非常接近垂直直線，因此根據參考資料我們大膽推測當產生這樣的垂直直線時，氣球膜有很大的機率產生了類似同心圓的共振模態，而當頻率逐漸增加時，可能會有非同心圓的方向共振的能量，或者是受到鏡片黏貼方向的影響，使紅光產生的波形非垂直，可能為橫線或斜直線。

由維基百科中，我們找到這樣子圓形的共振模式可以用 Bessel function 套入得到共振模態的結果，但我們因為使用了氣球膜與奶粉蓋實驗，在氣球膜與低頻率的氣球皮中，我們推測應該是 Bessel function 中的 Vibration of a circular membrane。Vibration of a circular membrane 這振動膜態上面的數字(x, y) y 是同心圓 1~3，x=1 是對稱共振，x=2 是十字共振，此時多就是混合態，因為我們的實驗系列第一個共振模態的結皆是垂直的直線，也以推測我們實驗能明確的能做出 y=1 的結果，而 y=2 之後的共振有時候應該有機會混入其他的振動膜態。



圖 29、圓形共振膜態在不同條件下的共振結果(參考資料四)

搭配上圖(參考資料四)的結果與下圖(參考資料五)的呈現可知，我們很難避免同心圓與其他對稱態的共振模式同時存在，但是，若在圓的面積較大、材料較厚或是彈性較差的材料中，在低頻時通常可以讓第一個對稱共振出來前，至少多觀察到 2~3 個同心圓共振的模態(參考資料二)，而大的氣球皮或許也類似泡泡膜(參考資料一)，在低頻時更容易有同心圓共振模態，且本實驗結果有更好觀察的特性，若找到適當的參數，會是值得推廣的實驗方法。

 <p>Figure 9-4. Various combinations of circumferential and radial wavenumbers occurring simultaneously.</p>	 <p>Figure 9-2. Chladni plates with nodal diameters of 2, 3, and 4 which give wavenumbers of 4, 6, and 8 respectively around the circumference. A nodal diameter of 1 does not occur when the edge of the plate is free to move.</p>
<p style="text-align: center;">對稱的共振模態</p>	 <p>Figure 9-3. Chladni plates with nodal circles only, that divide the plates into 2, 3, 4, and 5 parts.</p>
<p style="text-align: center;">混合的共振模態</p>	<p style="text-align: center;">同心圓的共振模態</p>

停 30、共振模態的說明(參考資料五)

柒、結論

本研究的方法初步解決氣球膜在過往不易觀察共振模態實驗方式，理論上應該能發現更多的共振模態，但因為聲頻變高時，振幅就會下降，氣球皮與奶粉蓋本身的振幅就已經不大，導致在高頻時不易呈現共振結果。

本研究初步發現，我們以鏡片貼在氣球皮或是奶粉蓋上反射紅光，容易反應出直線共振模態的結果，而實驗系列第一個共振模態的結果皆是垂直的直線，推測應該是同心圓的基態結果。

參考資料

- 一、膜上的波扭。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會作品
- 二、由克拉德尼圖形探討會變的波速。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品
- 三、戴明鳳(民 99)。一維駐波與二維共振的克拉尼圖案。清華大學普通物理實驗講義
- 四、Vibration of a circular membrane。

取自：https://en.wikipedia.org/wiki/Vibration_of_a_circular_membrane

五、The Chladni Figures and Wavenumbers。

取自：<https://fusionanomaly.net/ernstchladni.html>

【評語】051801

本作品以反射鏡貼在氣球膜來觀察氣球膜的共振模態，將光點投影至牆面，觀察光點變化來判斷氣球膜的振動狀態，進行系統化實驗變因，並以物理模型(Bessel函數)分析圓形膜的共振模態，具有實驗物理系統化探究及物理原理分析法方法精神。

惟部分數據紀錄應留意有效數字的表示方式，可以重複實驗次數並將實驗數據可作誤差分析，提高數值可靠性。

另若能將點光學實驗改進，以模擬出對應球膜理論干涉圖樣，使研究更具完整性。

作品海報

以光反射法放大 氣球膜的共振膜態



實驗中的裝置(自行拍攝照片)

氣球膜因材質柔軟，難以清楚觀察其共振模態。本研究嘗試將氣球膜或奶粉蓋覆於堅固圓筒上，並貼上能反射紅光的鏡片，藉由觀察反射光在不同振動頻率下所形成的圖案，解決傳統觀察困難的問題。初步觀察結果顯示，光線圖案多為直線，推測可能來自同心圓共振模態的反饋特性。

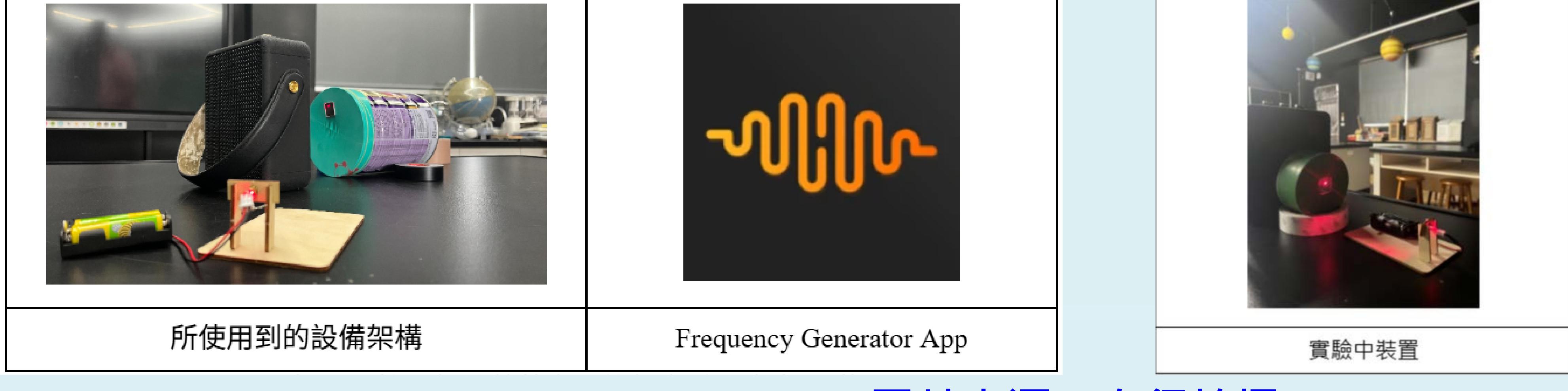
我們對聲波作用下，氣球膜反射光圖案的變化產生興趣，起初嘗試模仿克拉德尼圖形的方式，在膜面上灑沙觀察其共振模態，期望能看見如沙紋般的圖案。然而由於氣球膜材質柔軟、形變不易穩定傳遞至沙粒，即使經過多次改良，實驗仍無明顯成效。



[圖片來源：自行拍攝](#)

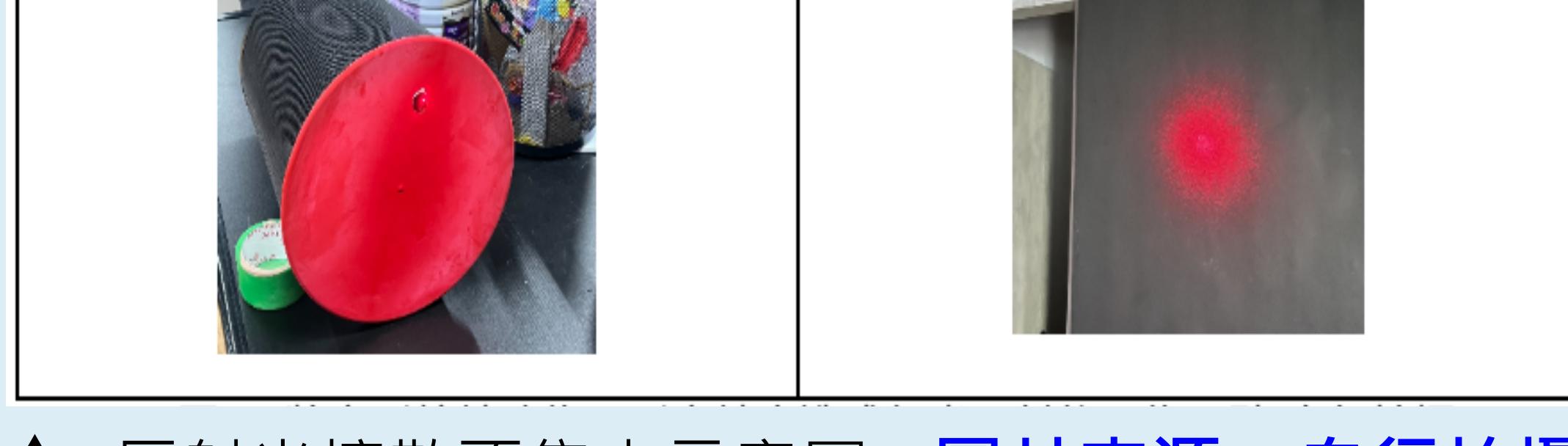
因此，我們轉而使用反射紅光的鏡片貼於氣球膜上，將反射光投射至牆面，觀察在單一頻率、不同頻段下，光線圖案的變化情形。意外發現當氣球膜產生共振時，反射光多數會呈現明顯的直線圖樣。我們進一步記錄在不同頻率下直線最長時的情形，作為判斷共振模態的依據。

藍芽音箱、紅光發射裝置、小的方形鏡片、不同大小的氣球、奶粉罐、膠帶圈、金屬垃圾筒

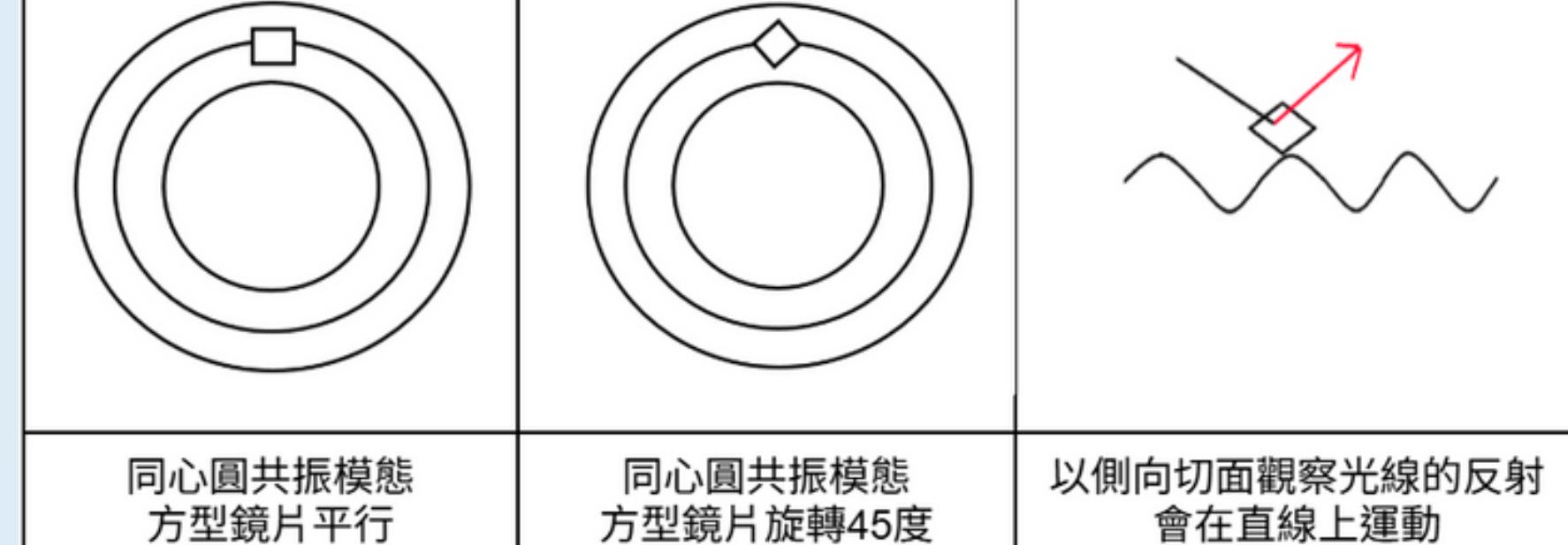


[圖片來源：自行拍攝](#)

- 選擇堅固的筒狀物，確認小奶粉罐與膠帶圈最適合用作固定架。
- 將氣球剪開並覆蓋於筒口，用橡皮筋固定使氣球膜表面保持緊繃。
- 在氣球膜中央貼上一片小鏡片。(避免使用反光貼紙或亮片)
- 使用紅光發射器調整發射角度，使紅光能精準照射在鏡片上。
- 透過播放不同固定頻率的聲音驅動氣球膜振動，觀察牆面上反射紅光所形成的振動圖案變化。
- 針對紅光反射形成的直線圖案振幅最大時，詳細記錄該頻率數值，作為分析氣球膜共振模態的重要依據。
- 重複實驗多次以確認結果的穩定性與重現性。



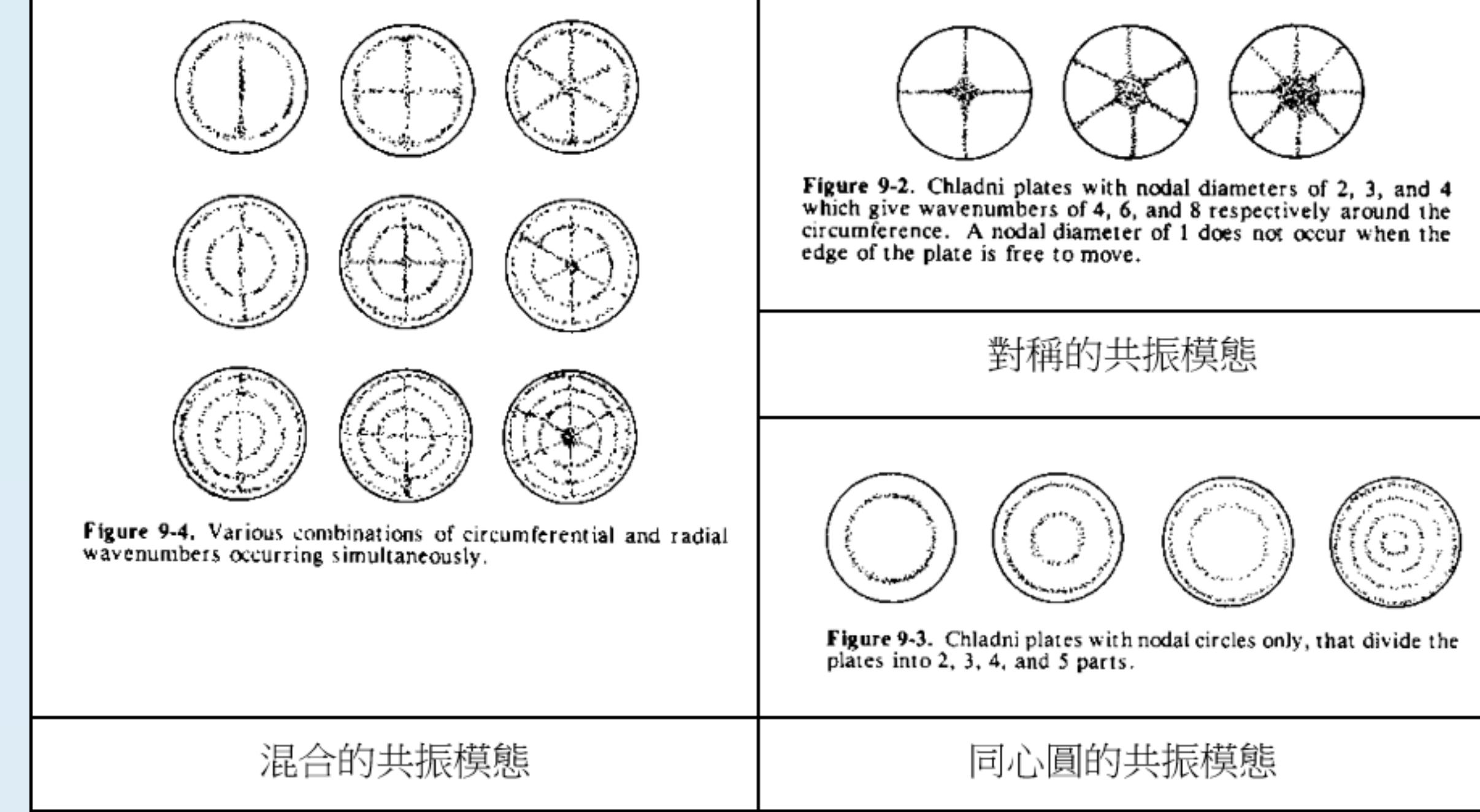
▲ 反射光擴散不集中示意圖 [圖片來源：自行拍攝](#)



同心圓共振模態
方型鏡片平行

同心圓共振模態
方型鏡片旋轉45度

以側向切面觀察光線的反射
會在直線上運動

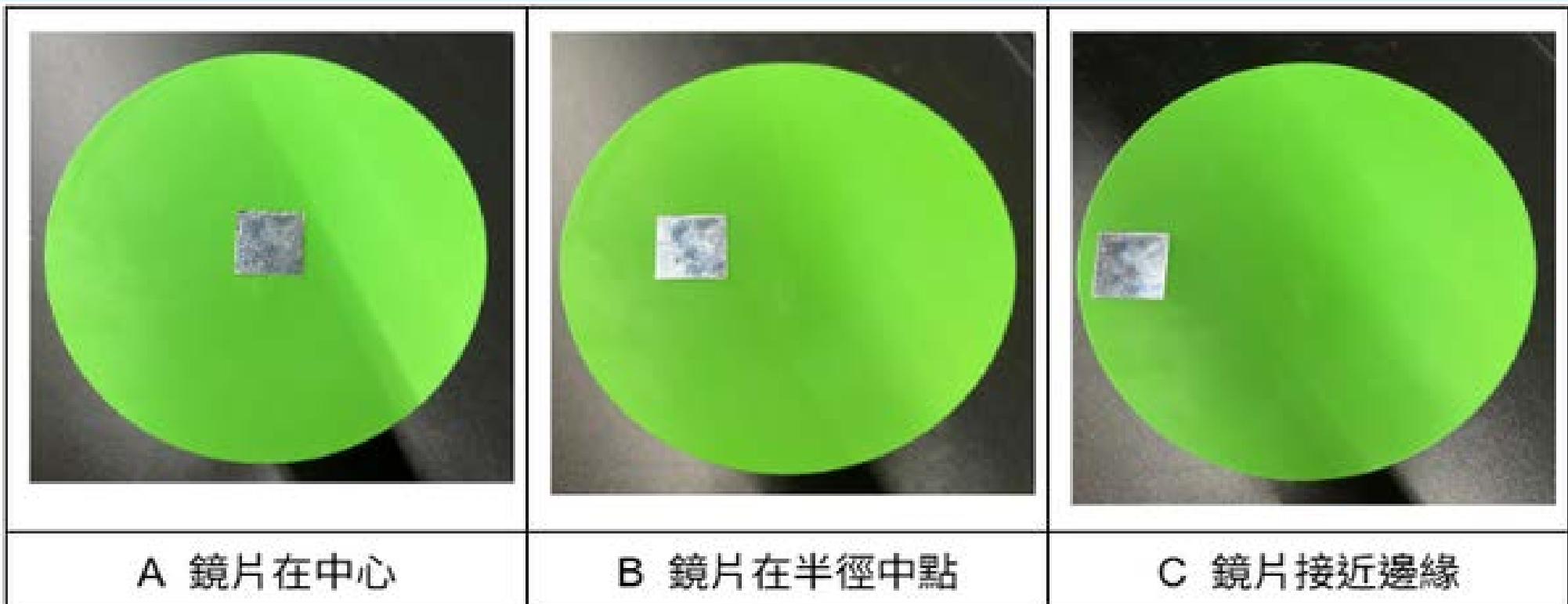


[圖片來源：取自 The Chladni Figures and Wavenumbers](#)

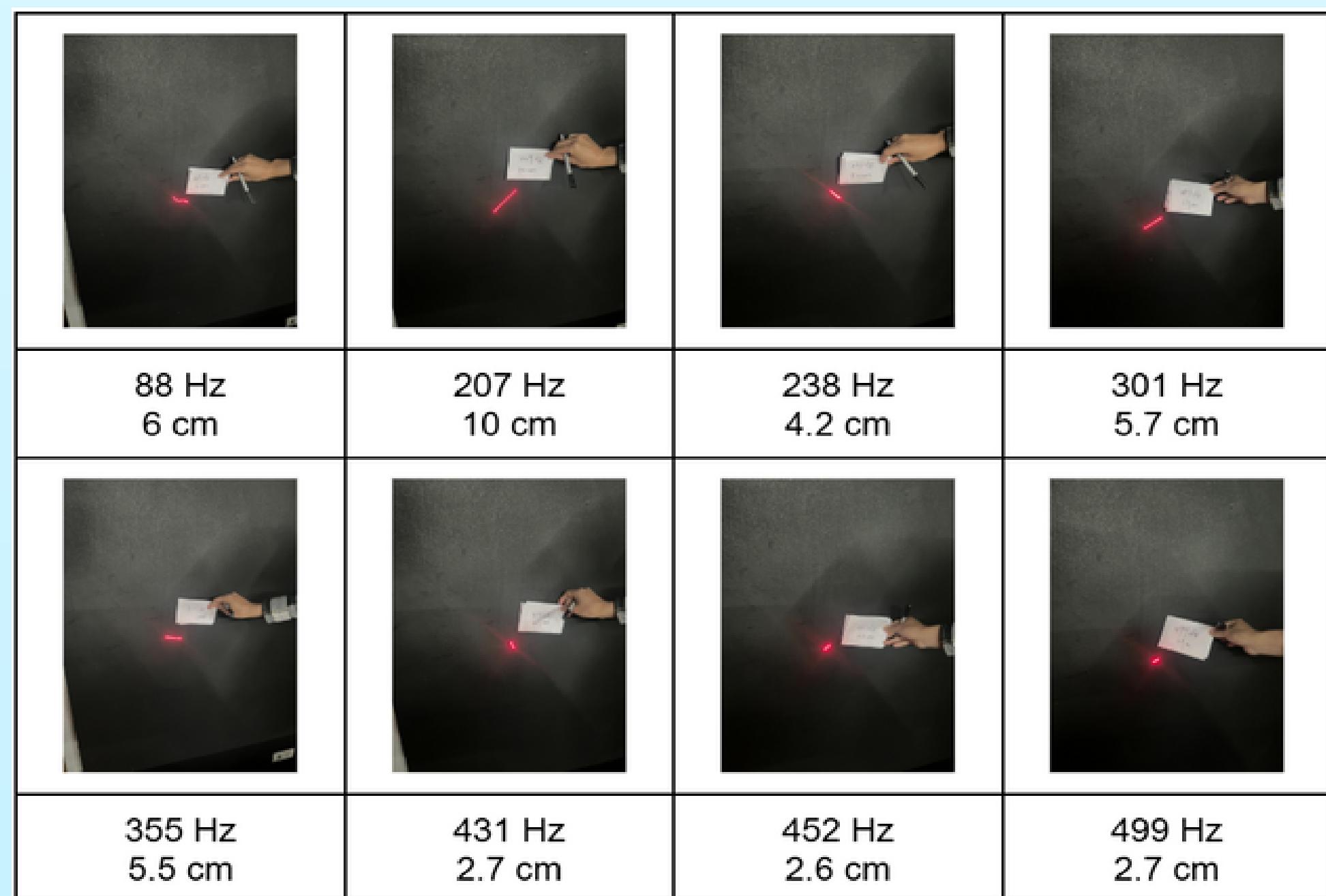
[圖片來源：自行繪製](#)

本研究旨在探索紅光反射圖案作為觀察氣球膜共振的新方法，突破傳統觀測的限制，並分析膜面在聲波驅動下的物理共振特性

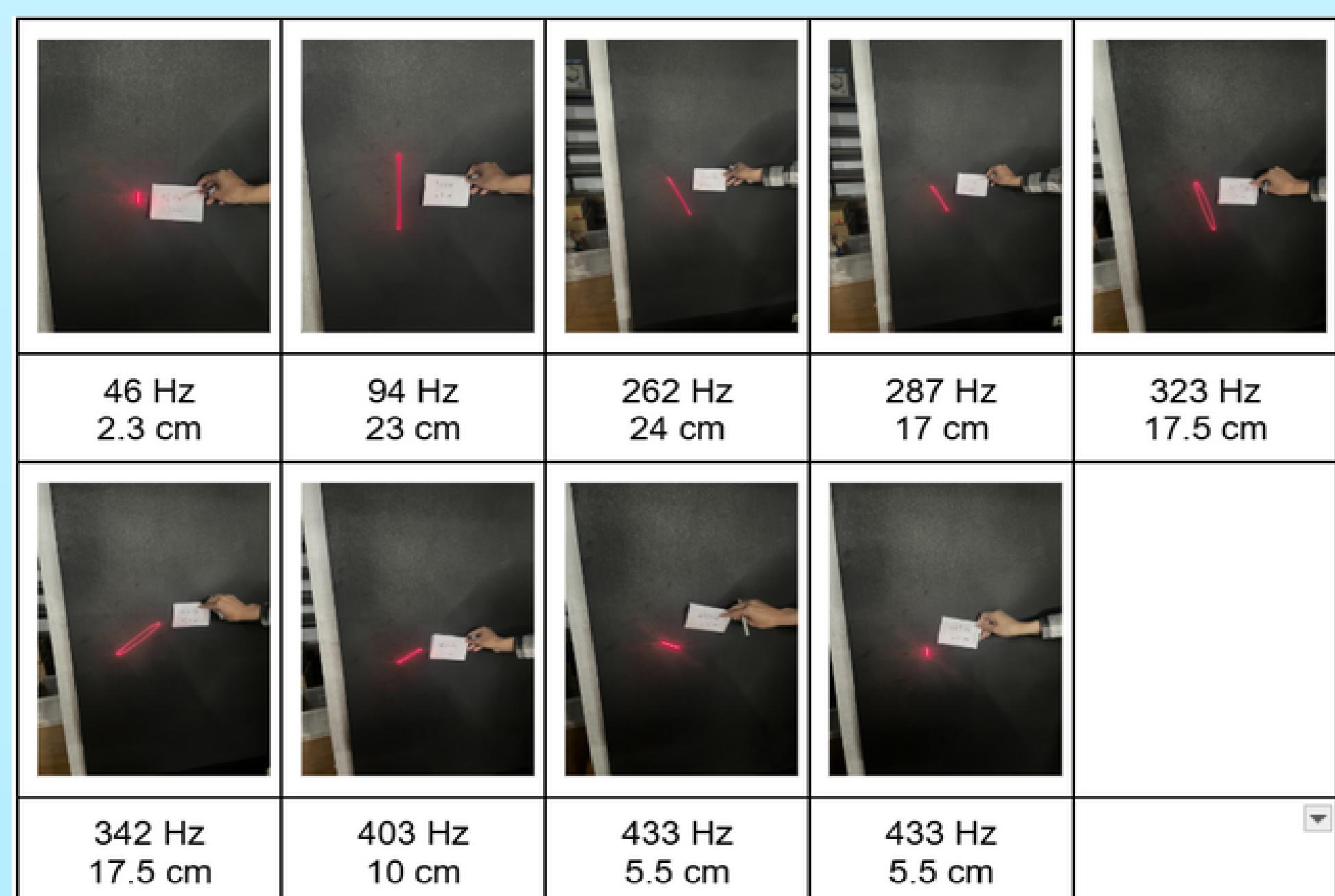
一、奶粉罐套氣球皮



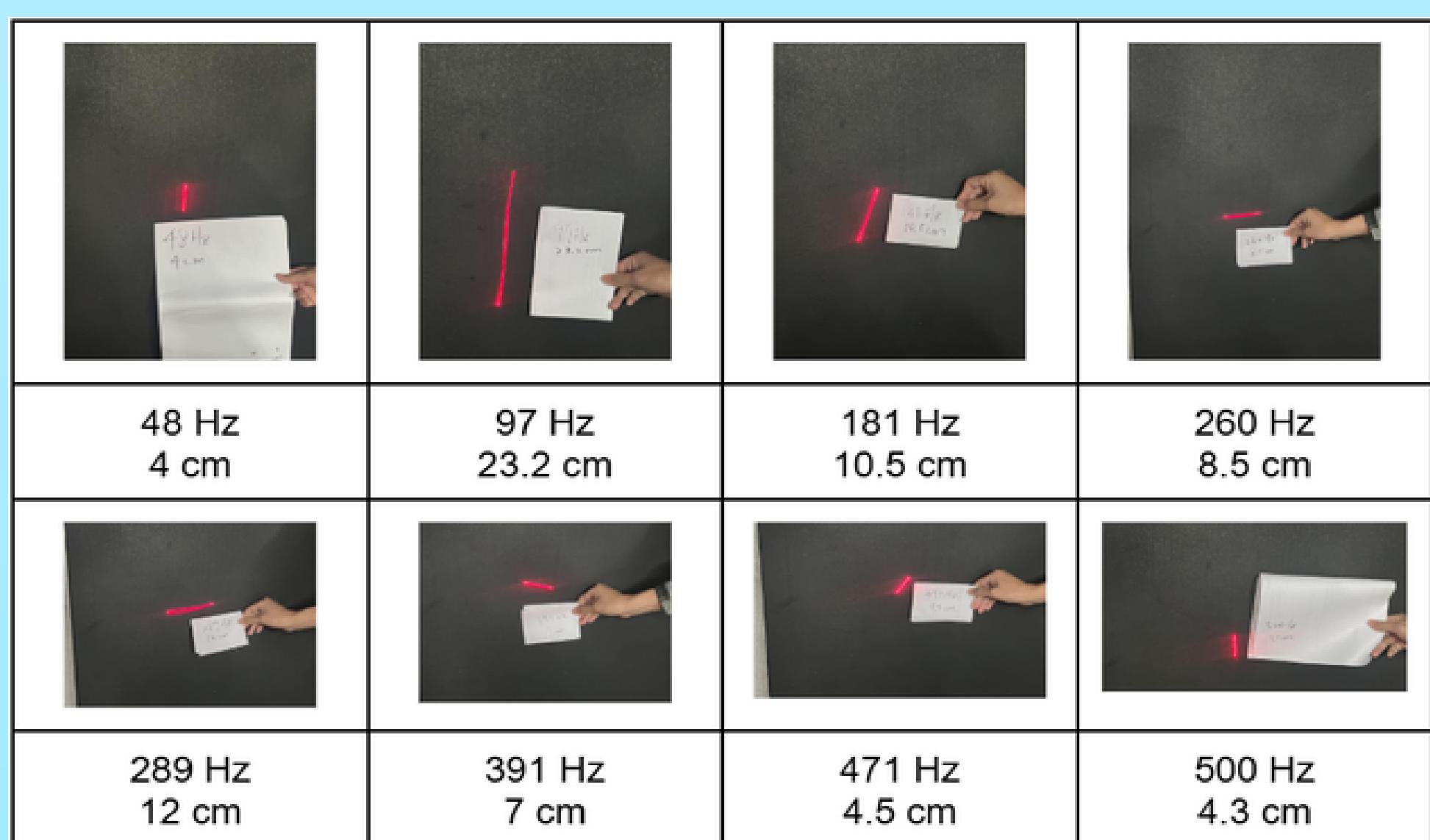
直徑約12cm



鏡片擺放在圓心上



鏡片擺放在半徑中點上



鏡片擺放在接近邊緣

四、小奶粉罐的蓋子

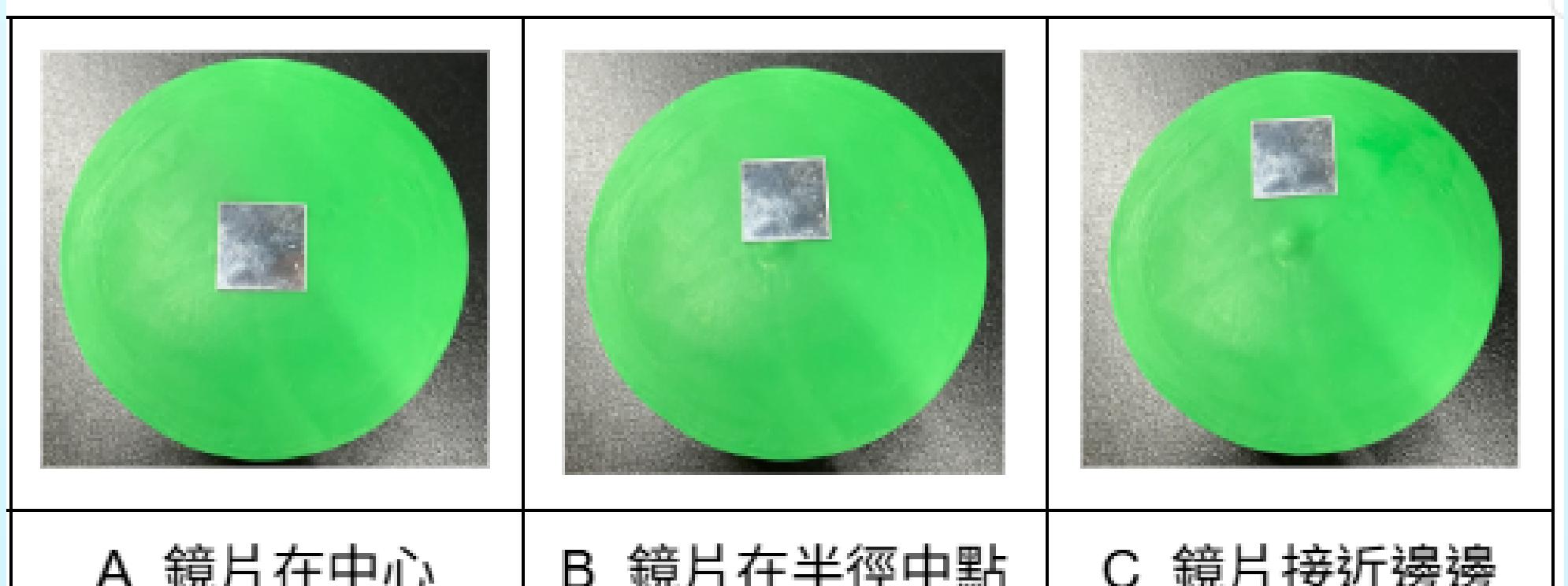


鏡片在半徑中點的共振結果

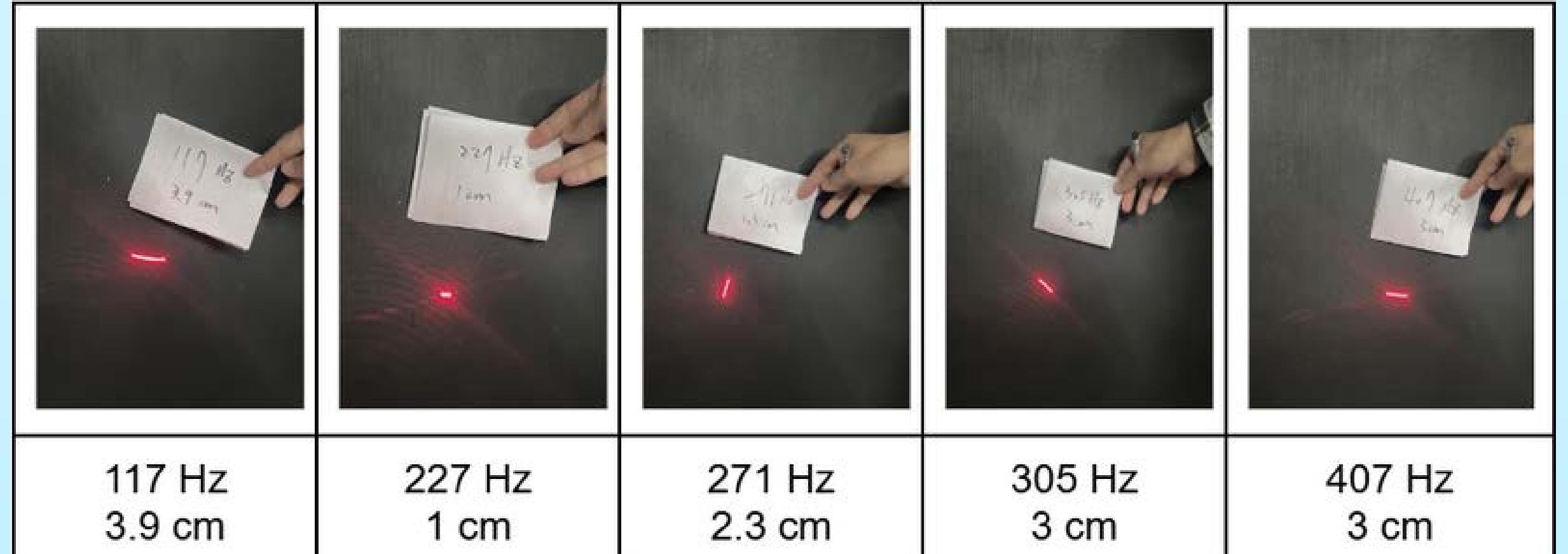


鏡片在半徑邊緣的共振結果

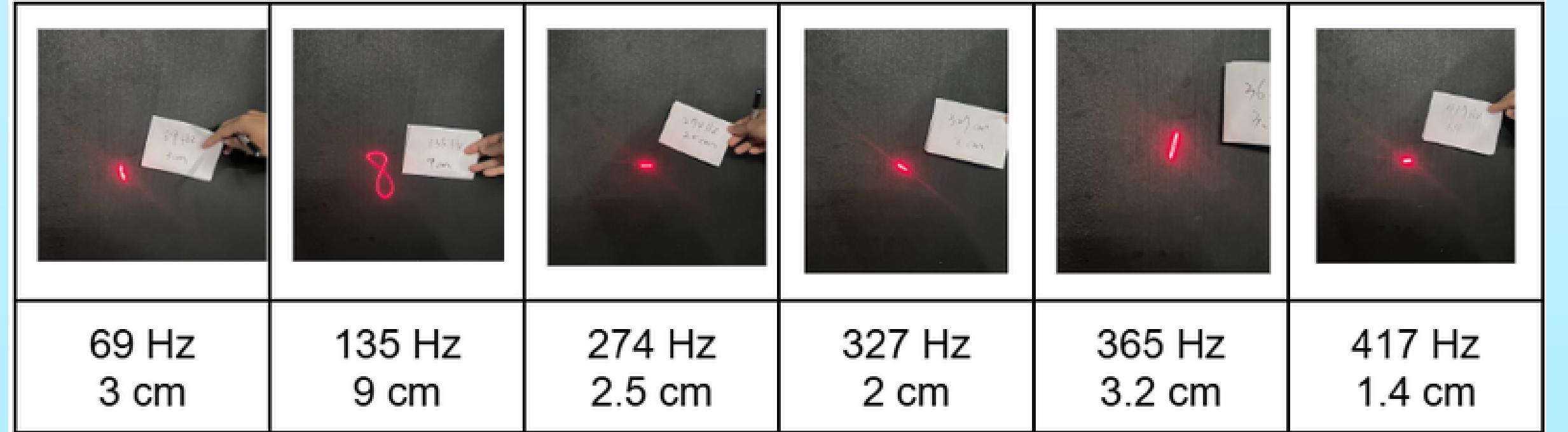
二、膠帶圓框套氣球皮



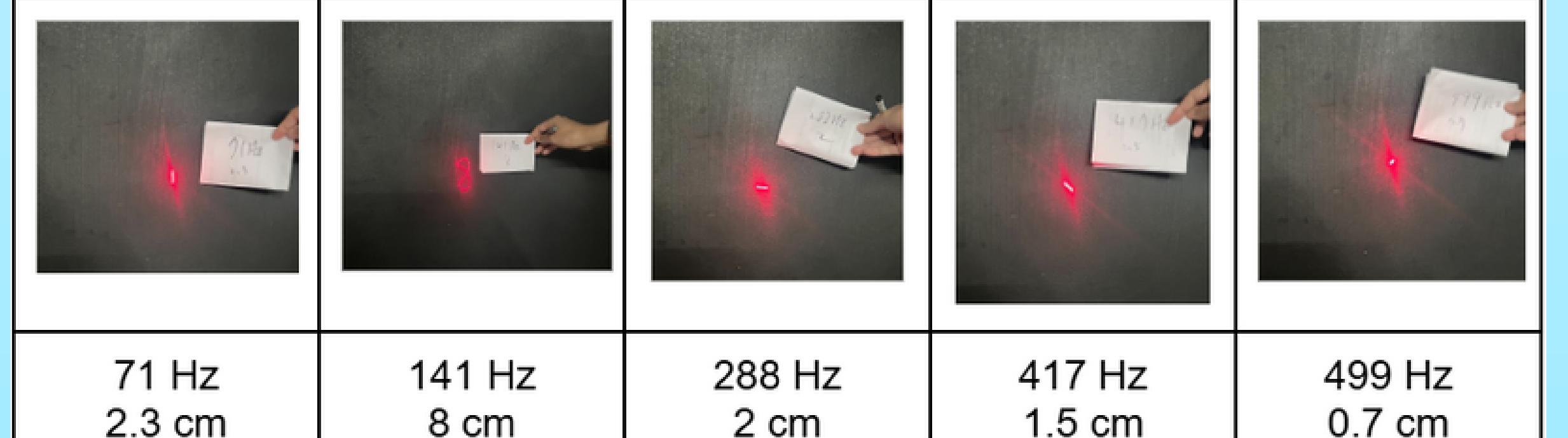
直徑約7cm



鏡片擺放在圓心上

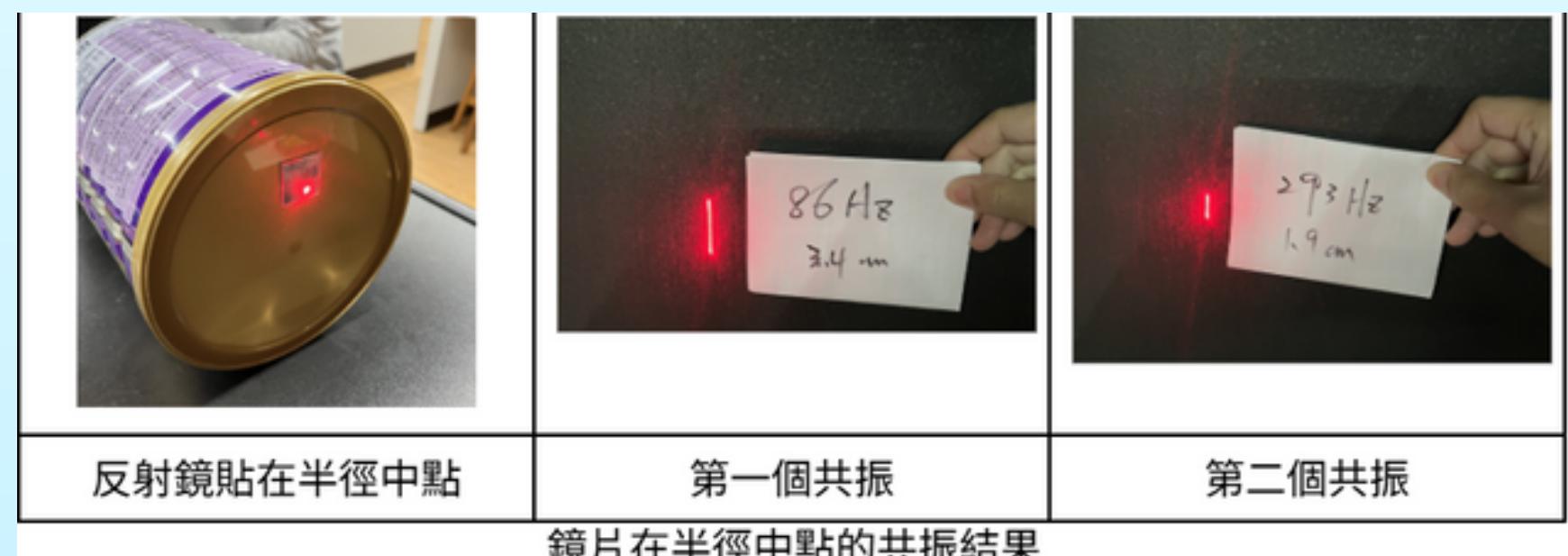


鏡片擺放在半徑中點上

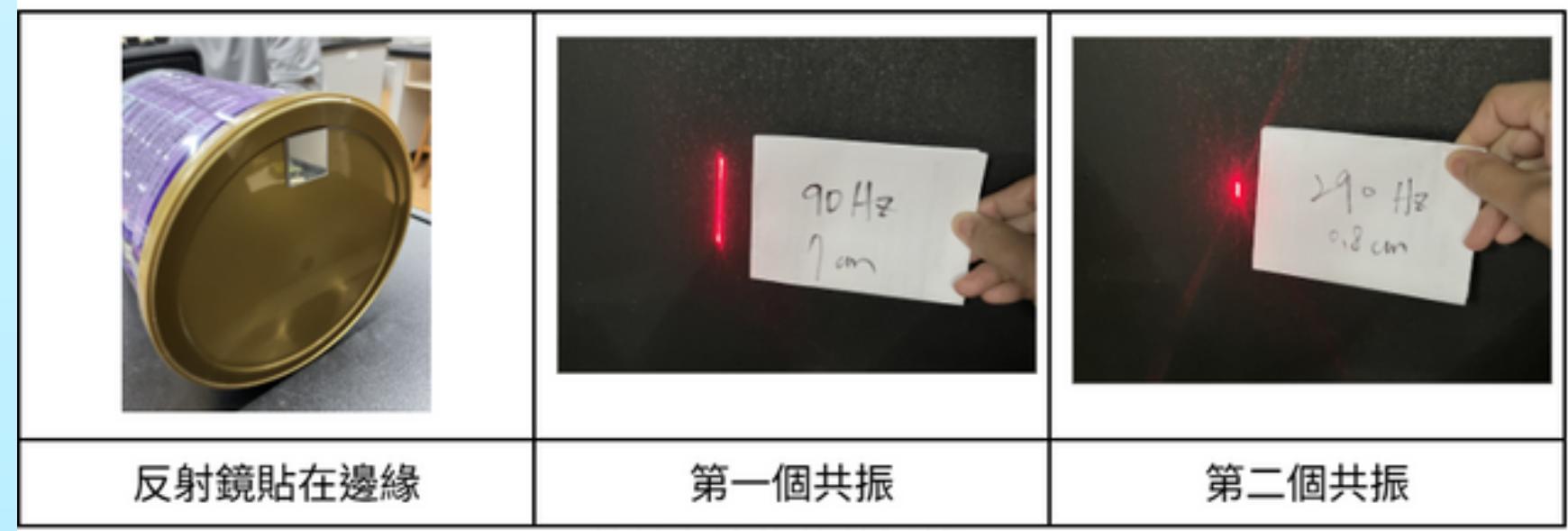


鏡片擺放在接近邊緣

三、大奶粉罐的蓋子



鏡片在半徑中點的共振結果



鏡片在邊緣的共振結果

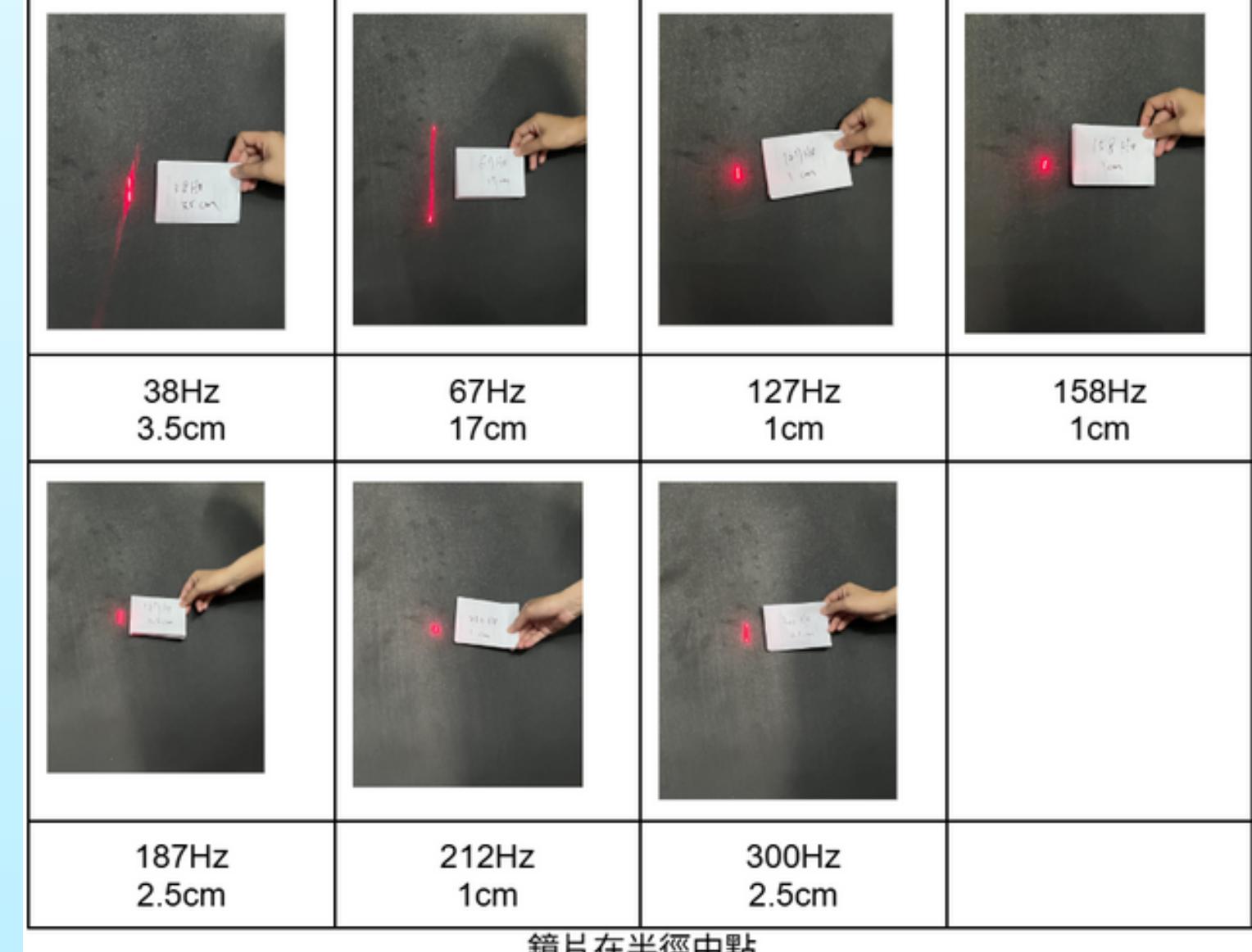


鏡片在中間的共振結果

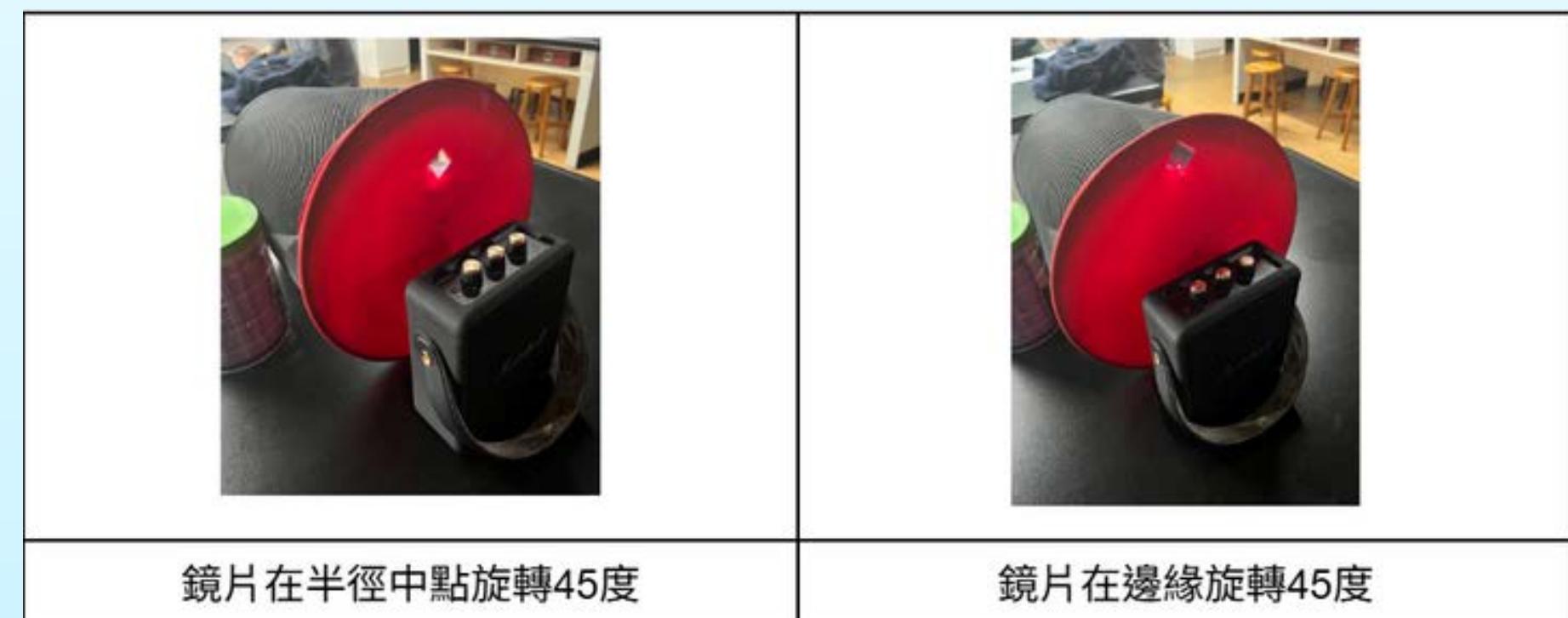
實驗中發現，當鏡片貼在非中心位置時，振動主要呈直線方向，且其方向與同心圓共振模態一致。進一步以小型奶粉罐進行實驗，結果顯示在相同模態下，較小面積的蓋子確實具有較高的共振頻率。

初步發現，我們以鏡片貼在氣球皮或是奶粉蓋上反射紅光，容易反應出直線共振膜態的結果，而實驗系列第一個共振模態的結果皆是垂直的直線，推測應該是同心圓的基態結果。

五、垃圾桶套大氣球 皮

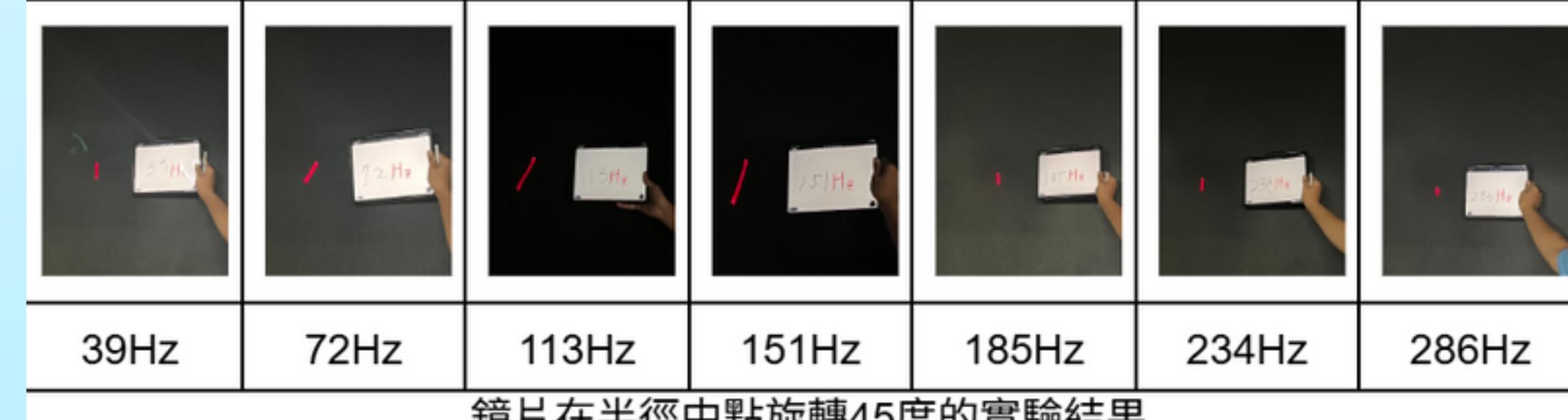


鏡片擺放在半徑中點上



鏡片在半徑中點旋轉45度

鏡片在邊緣旋轉45度



39Hz

72Hz

113Hz

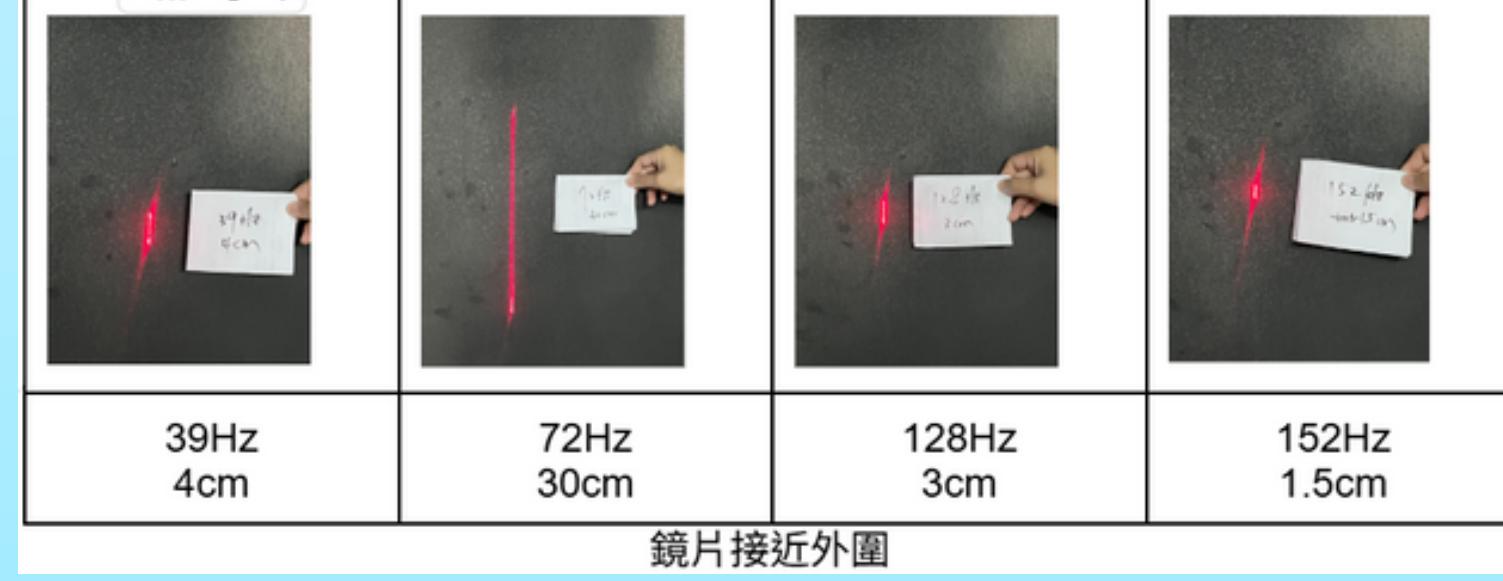
151Hz

185Hz

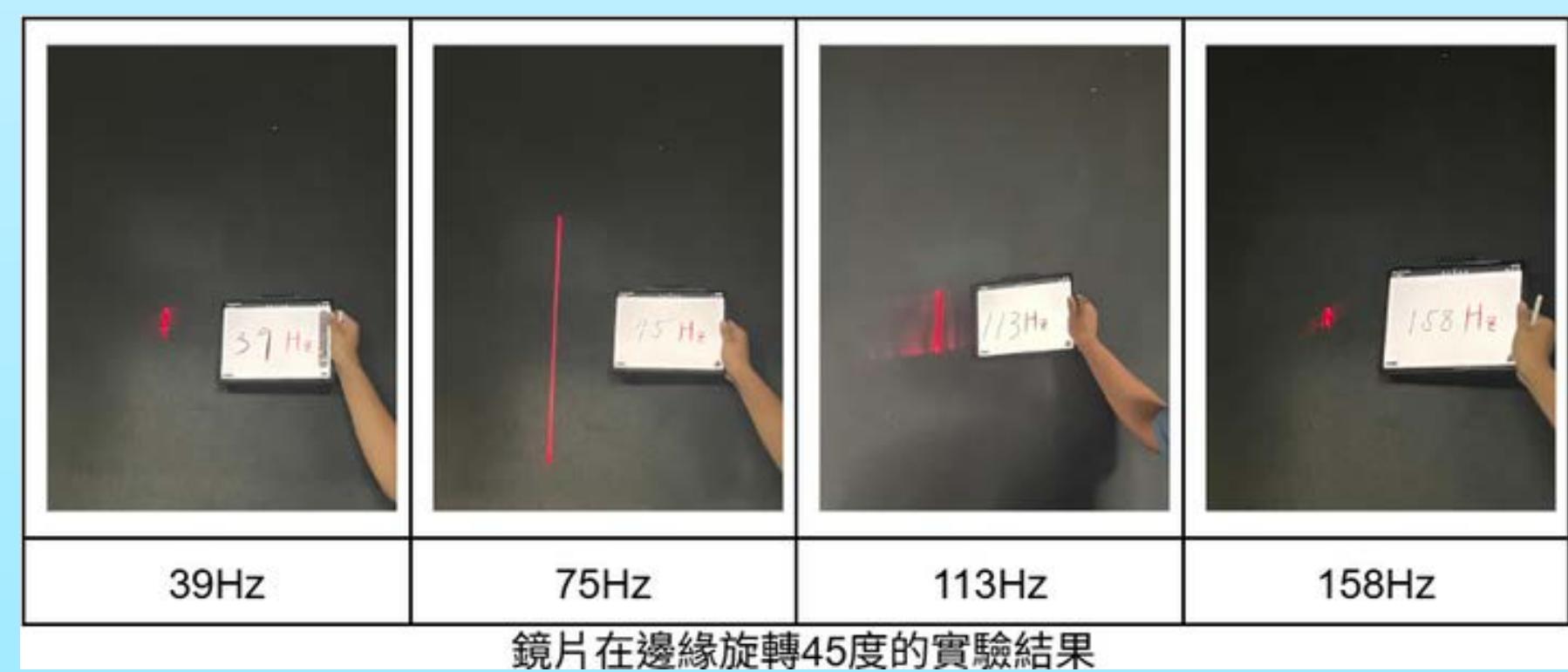
234Hz

286Hz

鏡片在半徑中點旋轉45度的實驗結果



鏡片擺放在接近邊緣



39Hz

75Hz

113Hz

158Hz

鏡片在邊緣旋轉45度的實驗結果

圖片來源：自行拍攝

更大尺寸的氣球進行實驗結果顯示，當鏡片貼於較外圈位置時，在 39 Hz、72 Hz、128 Hz 與 152 Hz 處皆出現主要為直線形狀的共振圖案，且與鏡片貼於半徑中點時所觀察到的共振頻率一致。此外，鏡片貼於半徑中點時，觀察到更多樣的共振圖案。我們推測，這可能與中點位置振幅較大，以及非同心圓對稱的模態在此顯現有關。

鏡片位置旋轉 45 度後重新進行實驗。結果發現與鏡片黏貼角度無明顯關聯；即使鏡片貼於邊緣，也不影響主要振動模態。

陸 > 討論

多次實驗結果顯示，以大面積氣球膜為例，即使更換鏡片位置，仍穩定出現主要共振頻率。在這些頻率下，反射紅光多呈現垂直直線，代表氣球膜在共振時具有高度對稱性。

根據文獻及維基百科中對圓形膜振動的描述，我們參考 **Bessel function** 模型進行推測。共振模態可由兩個參數(x, y)描述：其中 y 代表同心圓的數量（即徑向節點數），而 x 代表對稱性程度， $x=1$ 為對稱模態， $x=2$ 為十字模態。從我們觀察到的第一個共振圖樣為穩定的垂直直線推斷，其應對應於 $y=1$ 的同心圓基態模態。



取自：[維基百科](#)，
[Vibration of a circular membrane](#)

柒 > 結論

我們透過以紅光反射的簡易方法，成功觀察並記錄氣球膜在不同頻率下的共振特徵，並初步與理論模型建立連結。此結果證實本方法具備辨識膜類材料振動模態的潛力，為日後進一步探討共振現象提供基礎與方向。

研究發現，將鏡片貼於氣球膜或奶粉蓋表面並利用紅光反射，能有效呈現直線形共振模態。其中，實驗中第一階共振模態皆呈現垂直直線，並推測對應氣球膜的同心圓基態振動模式。

主要參考資料

一、膜上的波扭。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會作品

二、由克拉德尼圖形探討會變的波速。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品