中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050420

MN 倍角整數三角形

學校名稱：新北市立海山高級中學

作者：	指導老師：
高二 張晉銘 高二 李政誼 高一 董睿婷	洪婉凌 董維新

關鍵詞：三邊整數生成器、第二型 Chebyshev 多項式、Heronian Triangle

摘要

看到大學入學考試中心九十九學年度學科能力測驗試題 G 中有關 2 倍角三角形，就產生討論其三邊整數生成器的發想，便由此出發，證明該三邊整數生成器為全起源整數三邊生成器，並討論其整數邊三邊的數論性質與相關性質，再延伸至 3 倍角整數邊三角形、4 倍角整數邊三角形乃至於 *n* 倍角整數邊三角形，得到其三邊全起源生成器與推廣至 *MN* 倍角整數邊三角形三邊整數生成器、討論相關特性並推廣至 *n* 倍角整數 *Heronian* 三角形。

壹、前言

一、研究動機：

國中接觸到畢氏定理，覺得十分的有趣，後來看到蔡聰明的**數學拾貝**[1]提到畢氏數生成器竟然能夠產生所有的畢氏數，覺得很驚訝，高中看到餘弦定理時，想要對 $60°$ 與 $120°$ 的三角形討論三邊整數產生器，但在搜索文獻時查到陳學儀的**從 3, 5, 7 出發–擬畢氏三角形之研究**[2]已經完成討論。後來做到大學入學考試中心九十九學年度學科能力測驗試題 G 中有關 2 倍角三角形，就產生討論 2 倍角三角形三邊整數生成器的發想，但在郭家愷的 ***n* 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**[3]中已有相關討論，但我們還是覺得可以繼續討論出不同的發展方向，並將其延伸至 *MN* 倍角三角形三邊整數生成器與相關特性。

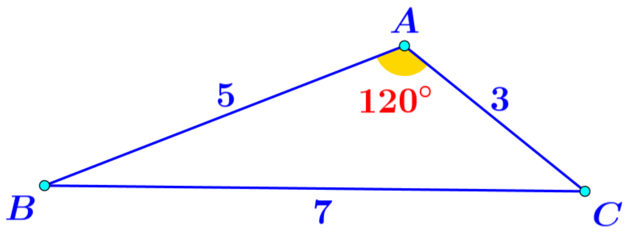


圖 1　Eisenstein triple(本圖片由作者自行繪製)

二、名詞定義與解釋：

(一)若三角形中兩角度的比例恰為 $M:N$，則稱該三角形為 *MN* 倍角三角形。在本文中，ΔABC 中不失一般性下規定為 $\angle A:\angle B = M:N$，其中 $M<N$；若 $M=1$，$N=n$ 時，則簡稱為 *n* 倍角三角形。

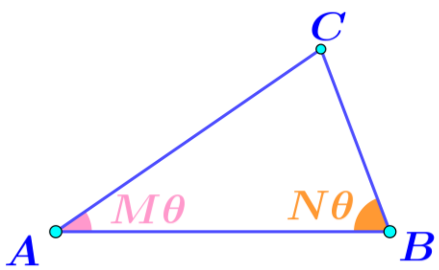


圖 2　*MN* 倍角三角形
(本圖片由作者自行繪製)

(二)若三角形的三邊長均為有理數，稱為（三邊）有理數三角形，若三角形的三邊長均為整數，稱為（三邊）整數三角形，顯然透過相似形邊長伸縮，有理數三角形可以相似

變成整數三角形。有理數三角形若進一步面積亦為有理數，稱為 *Heronian* 三角形，相同地，整數三角形若面積為整數，稱為整數 *Heronian* 三角形，顯然透過相似形邊長伸縮，*Heronian* 三角形可以相似變成整數 *Heronian* 三角形。配合 *MN* 倍角三角形的概念，可以產生 *MN* 倍角整數三角形與 *MN* 倍角整數 *Heronian* 三角形。

(三)若三角形三邊可表為參數式而生成正整數三邊稱為三邊整數生成器；進一步，若能滿足三邊互質則稱為起源三邊整數生成器；而三邊整數生成器若能生成出所有滿足該性質的三邊則稱為全三邊整數生成器，例如能生成所有滿足 2 倍角三角形三邊正整數的生成器稱為全 2 倍角三邊整數生成器。

三、研究目的：

由 2 倍角三邊關係與三邊整數生成器出發，討論其三邊的數論性質與相關性質，再延伸至 3 倍角整數三角形三邊關係與三邊整數生成器、4 倍角整數三角形三邊關係乃至於 n 倍角整數三角形與 *MN* 倍角整數三角形三邊整數生成器與相關特性。

四、文獻回顧：

(一)文獻回顧時發現在大陸國八教材中有 2 倍角與 n 倍角三角形，經查詢相關資料，發現其為平面幾何相關的性質，提供輔助線做法與證明思路，與本作品研究方向不同。

(二)在蔡聰明的**數學拾貝**[1]一版第 209 頁提到定理 3：(起源畢氏三元數定理)

設 (x,y,z) 為畢氏三元數且 y 為偶數，則 (x,y,z) 為原始的畢氏三元數之充要條件為存在互質的自然數 p 與 q，一奇一偶且 $p>q$，使得 $x=p^2-q^2$，$y=2pq$，$z=p^2+q^2$。定理 4：(畢氏三元數的全三邊整數生成定理)當 p,q,k 在自然數中變動時，三參數公式 $x=k(p^2-q^2)$，$y=2kpq$，$z=k(p^2+q^2)$ 可以產生所有的畢氏三元數，但該結果可能會重複。

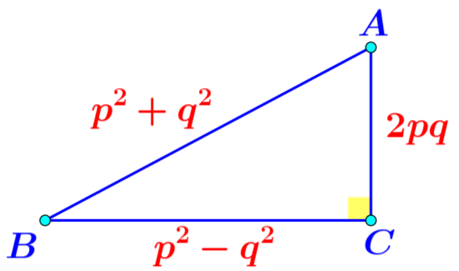


圖 3 畢氏三元數
(本圖片由作者自行繪製)

(三)參考陳學儀的**從 3, 5, 7 出發–擬畢氏三角形之研究**[2]的作品可以得到擬畢氏三角形(有一夾角 120 度)與迷擬畢氏三角形(有一夾角 60 度)的畢氏數製造機、數論相關性質與邊界關係討論，其內容提供我們研究的方向，但是經專家的提點，發現 Eisenstein triple

就是[2]中所討論的畢氏數製造機。

(四)在我們討論的過程中比較挫敗的是發現早期研究的結果許多都與郭家愷(2013)[3]的作品內容類似，雖然推導過程不盡相同，但我們將這部份放在研究結果的 2 倍角整數三角形問題初步分析中推導並說明，並整理異同如下表 1。

表 1　本作品與 ***n* 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**[3]比較表（作者自行製表）

	作品名稱	***n* 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**[3]	我們作品的結果
2 倍角三角形	a,b,c 三邊關係	$a^2+ac=b^2$（定理 1）	$ac=b^2-a^2$
	整數三邊生成器	$a=n^2$	$r=n\,,\,s=n+m$
		$b=mn+n^2$（定理 2）	
		$c=m^2+2mn$	
		$a=n^2$	$a=r^2$
		$b=mn$	$b=rs$
		$c=m^2-n^2$	$c=s^2-r^2$
		$a=n^2$	$r=n\,,\,s=m-n$
		$b=mn-n^2$	
		$c=m^2-2mn$	
	生成器參數限制	$m<n$	$r<s<2r$
3 倍角三角形	a,b,c 三邊關係	$ac^2=(a+b)(a-b)^2$	$ac^2=(a+b)(b-a)^2$
	整數三邊生成器	$a=n^3$	$a=r^3$
		$b=mn(m+2n)$	$b=r(s^2-r^2)$
		$c=(m+n)(m^2+2mn-n^2)$	$c=s(s^2-2r^2)$
	關聯性	遞迴式	遞迴式與逆遞迴式
	其他	討論至四邊形	三邊大小、證明 全起源與邊界關係

五、相關知識預備：

本作品運用柴比雪夫（Chebyshev）多項式，相關概念參考[4][5]如下：第一型柴比雪夫多項式是處理 $\cos n\theta$，以 $x=\cos\theta$ 表示 $\cos n\theta$ 的展開式，以 $T_n(x)$ 來表示該多項式，滿足遞迴關係 $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\,,\,n\geq 2$，$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$。然而我們主要使用的是第二型柴比雪夫多項式，主要處理 $\sin n\theta$，正確說法是 $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$，以 $x=\cos\theta$ 表示 $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ 的展開式，

以$U_n(x)$來表示該多項式，須滿足$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x), n\ge 2$，$U_0(x)=1$，$U_1(x)=2x$。

(一)Vieta-Fibonacci 多項式$V_{n+1}(x)=U_n(\frac{x}{2})$，參考[6]：

遞迴關係$V_{n+1}(x)=xV_n(x)-V_{n-1}(x), n\ge 2$，$V_1(x)=1$，$V_2(x)=x$，顯然$\deg V_n(x)=n-1$。

[說明]

由$U_n(x)$遞迴關係將x代換成$\frac{x}{2}$得$U_{n+1}(\frac{x}{2})=2\cdot\frac{x}{2}U_n(\frac{x}{2})-U_{n-1}(\frac{x}{2}), n\ge 1$，換成

Vieta-Fibonacci 多項式得$V_{n+2}(x)=xV_{n+1}(x)-V_n(x), n\ge 1$，換足標得

$V_{n+1}(x)=xV_n(x)-V_{n-1}(x), n\ge 2$。

(二)Vieta-Fibonacci 變形多項式$V_n(s,r)=r^{n-1}\times V_n(\frac{s}{r})=r^{n-1}\times U_{n-1}(\frac{s}{2r})$，參考[7]：

[說明]

令$x=\cos\theta=\frac{s}{2r}$且$\deg V_n(x)=n-1$，故$U_{n-1}(\frac{s}{2r})=V_n(\frac{s}{r})=\frac{V_n(s,r)}{r^{n-1}}=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$，即

$V_n(s,r)=r^{n-1}\times V_n(\frac{s}{r})=r^{n-1}\times U_{n-1}(\frac{s}{2r})$。

(三)$U_n(x)$、$V_n(x)$與$V_n(s,r)$各多項式，經由定義推出其前 8 項如表 2。

表 2　$n=0\sim 7$時柴比雪夫多項式$U_n(x)$、Vieta-Fibonacci 多項式$V_{n+1}(x)$與 Vieta-Fibonacci 變形多項式$V_{n+1}(s,r)$的比較

n	$U_n(x)$	$U_n(\frac{x}{2})=V_{n+1}(x)$	$V_{n+1}(s,r)$
0	1	1	1
1	$2x$	x	s
2	$4x^2-1$	x^2-1	s^2-r^2
3	$8x^3-4x$	x^3-2x	s^3-2sr^2
4	$16x^4-12x^2+1$	x^4-3x^2+1	$s^4-3s^2r^2+r^4$
5	$32x^5-32x^3+6x$	x^5-4x^3+3x	$s^5-4s^3r^2+3sr^4$
6	$64x^6-80x^4+24x^2-1$	$x^6-5x^4+6x^2-1$	$s^6-5s^4r^2+6s^2r^4-r^6$
7	$128x^7-192x^5+80x^3-8x$	$x^7-6x^5+10x^3-4x$	$s^7-6s^5r^2+10s^3r^4-4sr^6$

由表 2 中可以看出多項式$U_n(x)$、$V_n(x)$與$V_n(s,r)$的次數分別為n次、$n-1$次與$n-1$次

齊次，當 n 為奇數時，$U_{n-1}(x)$、$V_n(x)$ 為偶函數；當 n 為偶數時，$U_{n-1}(x)$、$V_n(x)$ 為奇函數。當 n 為奇數時，$V_n(s,r)$ 為 s 的偶函數；當 n 為偶數時，$V_n(s,r)$ 為 s 的奇函數；$V_n(s,r)$ 恆為 r 的偶函數。多項式 $U_n(x)$、$V_n(x)$ 與 $V_n(s,r)$ 的係數正負交錯（次數相差 2 次）得以下定理 1 與定理 2。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $V_n(s,r)$ 為整係數 s,r 的 $n-1$ 次齊次多項式形如：$V_n(s,r)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i s^{n-1-i}r^i$，其中奇數項係數 $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$，偶數項係數 $a_0,a_2,a_4,\cdots\in\mathbb{Z}$，其中 $a_{4m}>0$，$a_{4m+2}<0$，$a_{4m+1}=a_{4m+3}=0$，$m=0,1,2,\cdots$。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $V_n(s,r)$ 遞迴關係 $V_{n+1}(s,r)=sV_n(s,r)-r^2V_{n-1}(s,r),n\geq 2$，$V_1(s,r)=1$，$V_2(s,r)=s$。

定理 1 主要是利用 $V_n(s,r)$ 為整係數多項式，故 s,r 代入整數後，結果為整數，形成三邊整數生成器。定理 2 為 $V_n(s,r)$ 的遞迴關係，其詳盡證明可參考[7]。

貳、研究設備及器材

筆記型電腦、Microsoft Word 2019、Microsoft Excel 2019、Geogebra。

參、研究過程或方法

本研究中所有圖片皆為作者經諮詢老師協助，使用 Geogebra 軟體繪製。

一、2 倍角整數三角形問題初步分析：

透過討論 2 倍角整數三角形，得到其三邊關係式與三邊整數生成器並驗證其正確性，再由三角不等式得到三邊整數生成器限制式，這些結果於[3]中都有類似的結果。

二、2 倍角整數三角形問題進階討論：

由前段初步分析為基礎而進階討論得到以下概念：比較三邊大小順序得到 r,s 限制關係。經由討論三邊整數生成器的公因數關係得到定理、相關引理與性質。進一步仿照畢氏數生成器與擬畢氏三角形生成器作法，證明所得到的三邊整數生成器為全起源三邊整數生成器。討論三內角的正餘弦值特性並討論邊界關係。

三、3 倍角整數三角形問題討論：

透過討論 3 倍角整數三角形，得到其三邊關係式與三邊整數生成器並驗證其正確性，比較三邊大小順序得到 r,s 限制關係，經由討論三邊整數生成器的公因數關係得到定理、相關引理與性質，進一步仿照畢氏數生成器與擬畢氏三角形生成器作法，證明所得到的三邊整數生成器為全起源三邊整數生成器與討論邊界關係。

四、由 4 倍角整數三角形問題轉至 n 倍角整數三角形問題討論：

由討論 4 倍角整數三角形，得到其三邊關係式，但發現要轉出三邊整數生成器有其困難性，經引入柴比雪夫第二型多項式後，可得到 n 倍角整數三角形的三邊整數生成器，運用[3]的定理 3 逆向遞迴與數論特性可證明該三邊整數生成器為全起源三邊整數生成器，進一步得到 r,s 限制並比較三邊大小順序得到 r,s 限制關係與邊界定理。

五、*MN* 倍角整數三角形問題討論：

仿 n 倍角整數三角形的三邊整數生成器，運用柴比雪夫第二型多項式，可得到 MN 倍角整數三角形的三邊整數生成器並證明與圖解說明，惟數論特性證明尚差一些，無法得到該三邊整數生成器為全起源三邊整數生成器。

六、n 倍角整數 *Heronian* 三角形問題討論：

將 n 倍角整數三角形的全起源三邊整數生成器，結合畢氏數全起源三邊整數生成器，可以得到 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源三邊整數生成器。

肆、研究結果

一、2 倍角整數三角形問題初步分析：

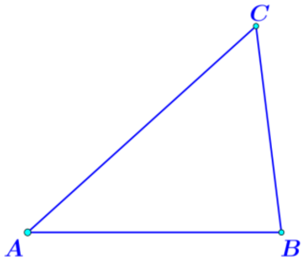


圖 4　99 學測 G
(本圖片由作者自行繪製)

我們的敘述皆以 a,b,c 表三角形三邊長，條件定為 $\angle B = 2\angle A$，稱 ΔABC 為 2 倍角三角形。大學入學考試中心九十九學年度學科能力測驗試題 G 會更動為：已知 ΔABC 中，$a = \overline{BC} = 2$，$b = \overline{AC} = 3$ 且 $\angle B = 2\angle A$，則 $\overline{AB} = \dfrac{5}{2}$，現解題如下：

因為 $\angle B = 2\angle A$，大角對大邊，故知 $b > a$，設 $\overline{AB} = c$，由正弦定理得知 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 代

入已知條件得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin 2A}=\dfrac{c}{\sin(\pi-3A)}$ ，考慮第一個等號知 $\dfrac{\sin 2A}{\sin A}=\dfrac{b}{a}$ 運用倍角公式 $\sin 2A=2\sin A\cos A$ 可得到 $\cos A=\dfrac{b}{2a}<1$，這裡會得到限制條件 $a<b<2a$ 。計算第一項等於第三項得知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin 3A}{\sin A}$ ，運用三倍角公式 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ 可得 $\dfrac{c}{a}=3-4\sin^2 A$ $=4\cos^2 A-1=4(\dfrac{b}{2a})^2-1=\dfrac{b^2-a^2}{a^2}$ ，得 $c=\dfrac{b^2-a^2}{a}$ ，代入 $a=2$ ，$b=3$ ，可得 $c=\underline{\dfrac{5}{2}}$ 。

(一)整理關係式得到 $ac=b^2-a^2$ 即 $b^2=a^2+ac$ ，此結果為[3]中定理 1。若設 $a=r$ ，$b=s$ ，則 $c=\dfrac{s^2-r^2}{r}$ 並不一定是整數，由相似形概念同乘 r 倍可得 $a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 即得 2 倍角三角形的三邊整數生成器。在[3]中定理 2 是 $a=n^2$，$b=mn+n^2$，$c=m^2+2mn$，比較後可得 $r=n$ ，$s=n+m$ ；另一組在[3]中出現的是 $a=m^2$ ，$b=mn-m^2$ ，$c=n^2-2mn$ ，比較後可得 $r=m$ ，$s=n-m$ ，故知此三組三邊整數生成器是相同的。

驗證條件：若 $a=r^2$ ，$b=rs$ ，$c=s^2-r^2$ ，則

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{r^2s^2+(s^2-r^2)^2-r^4}{2rs(s^2-r^2)}=\frac{r^2(s^2-r^2)+(s^2-r^2)^2}{2rs(s^2-r^2)}=\frac{r^2+(s^2-r^2)}{2rs}=\frac{s}{2r}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{r^4+(s^2-r^2)^2-r^2s^2}{2r^2(s^2-r^2)}=\frac{r^2(r^2-s^2)+(s^2-r^2)^2}{2r^2(s^2-r^2)}=\frac{s^2-2r^2}{2r^2}=2(\frac{s}{2r})^2-1$$

$=2\cos^2 A-1=\cos 2A$ ，$\because 0<A,B<\pi \quad \therefore B=2A$ ，在[3]中亦有類似的驗證。

(二)由三角不等式得到三邊整數生成器限制式：

三角不等式為兩小邊之和大於最大邊，故先判定最大邊，但是 $\angle B=2\angle A$，大角對大邊，故知 $b>a$ ，即 $s>r$ ，a 必不為最大邊。

1. 若 b 為最大邊則需滿足 $a+c>b$ ，即 $r^2+s^2-r^2>rs$ ，得 $s>r$ 。

2. 若 c 為最大邊則需滿足 $a+b>c$ ，即 $r^2+rs>s^2-r^2$ ，$s^2-rs-2r^2<0$ ，得 $s<2r$ 。

綜合 1、2 得 $r<s<2r$ ，此結果在[3]中有類似的結果。但我們將條件轉為

$\cos 0=1>\cos A=\dfrac{s}{2r}>\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$ ，即 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$ 。

二、2 倍角整數三角形問題進階討論：

(一)由三邊大小順序求限制式，已知 $b>a$ ，$2r>s>r$ ：

1. 若 $c>b>a$，需滿足 $s^2-r^2>rs$，同除 r^2 得 $(\frac{s}{r})^2-\frac{s}{r}-1>0$，解得 $2>\frac{s}{r}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

轉為 $\cos 0=1>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\cos\frac{\pi}{5}$，得 $0<A<\frac{\pi}{5}$。

2. 若 $b>c>a$，需滿足 $rs>s^2-r^2>r^2$，同除 r^2 得 $(\frac{s}{r})^2-\frac{s}{r}-1<0$ 與 $(\frac{s}{r})^2>2$，解得

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>\frac{s}{r}>\sqrt{2}$，轉為 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$，得 $\frac{\pi}{5}<A<\frac{\pi}{4}$。

3. 若 $b>a>c$，需滿足 $r^2>s^2-r^2$，解得 $\sqrt{2}>\frac{s}{r}>1$，轉為

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$，得 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{3}$。

(二)生成器進一步限制：

若要要求 $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$，即 $(r,s)\neq 1 \Leftrightarrow (a,b,c)\neq 1$。

[證明]

若 $(r,s)\neq 1$，則存在質數 p，滿足 $p|r$ 且 $p|s \Rightarrow p^2|rs$ 且 $p^2|r^2$ 且 $p^2|s^2$

$p^2|(s^2-r^2) \Rightarrow p^2|a$ 且 $p^2|b$ 且 $p^2|c \Rightarrow (a,b,c)\neq 1$。

若 $(a,b,c)\neq 1$，則存在質數 p，滿足 $p|a$ 且 $p|b$ 且 $p|c \Rightarrow p|r^2$ 且 $p|rs$ 且 $p|(s^2-r^2)$

可得 $p|r^2$ 且 $p|s^2 \Rightarrow p|r$ 且 $p|s \Rightarrow (r,s)\neq 1$。

若 $a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$，則

性質 1 $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$。

引理 1 若 $(r,s)=d$，則 $(a,b,c)=d^2$。

引理 2 若 (a,b,c) 存在有非完全平方的質因數 p，則非由整數生成器 $a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 所生成。其為整數生成器生成後乘上倍數 p。

[推論] 整數生成器 $a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 無法生成所有三邊整數的 2 倍角三角形。

定理 3 若 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>r$，則 $a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 為 2 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

以下我們以兩種方法證明定理 3。

[證明 1]

考慮 a 的標準分解式 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k}$ 中，某個質因數的次方非偶數，不失一般性下，設其為 p_1^{2t-1}，其中 $t \in \mathbb{N}$，然而若要求 c 為正整數，則 $c = \dfrac{b^2 - a^2}{a} = \dfrac{b^2}{a} - a$，意味著 p_1^{2t-1} 整除 b^2，即 p_1^t 整除 b，得到 p 整除 $\dfrac{b^2}{a}$ 與 $\dfrac{b^2}{a} - a = c$，故知 p 同時整除 a,b,c 不滿足起源三邊整數生成器要求，產生矛盾。

故知 a 的所有質因數次方皆為偶數，得到 $a = r^2$，$b = rs$，$c = s^2 - r^2$，故得證。

[證明 2]

仿照畢氏數生成器與擬畢氏三角形生成器作法，由 $c = \dfrac{b^2 - a^2}{a}$ 同除以 a 得到

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2} = (\dfrac{b}{a})^2 - 1$，因為 a,b,c 皆為正整數，故令 $y = \dfrac{c}{a}$，$x = \dfrac{b}{a}$，轉成 $y = x^2 - 1$，圖形表一拋物線，因其過有理點 (x, y)，可令 $x = \dfrac{s}{r}$，$r, s \in \mathbb{N}$，$(r, s) = 1$，$s > r$ 代入

解出 $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{s}{r} = \dfrac{b}{a} \\ y = \dfrac{s^2 - r^2}{r^2} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$，$\because (r, s) = 1 \Rightarrow (r^2, s^2) = 1 \Rightarrow (r^2, s^2 - r^2) = 1$，得到三邊整數生成器 $a = r^2$，$b = rs$，$c = s^2 - r^2$。可得到數對 (r, s) 與 2 倍角三角形的起源三邊整數 a,b,c 形成一一對應且映成。故得證。

由證明可知該生成器含所有 2 倍角整數三角形的起源三邊且不重複生成，得強化定理 3。

$\boxed{\text{強化定理 3}}$ 若 $r, s \in \mathbb{N}$，$(r, s) = 1$，$2r > s > r$，則 $a = r^2$，$b = rs$，$c = s^2 - r^2$ 為 2 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

但是由前面推論得知該生成器無法包含所有 2 倍角整數三角形的三邊，仿照畢氏數生成器作法，取 $a = tr^2$，$b = trs$，$c = t(s^2 - r^2)$ 為全整數三邊生成器。

$\boxed{\text{定理 4}}$ 若 $t, r, s \in \mathbb{N}$，$(r, s) = 1$，$2r > s > r$，則 $a = tr^2$，$b = trs$，$c = t(s^2 - r^2)$ 為 2 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

畢氏數的三邊生成器在兩奇數時會重複，但定理 4 是個很強的定理，既能找到全部的三

邊整數生成器又能夠不重複。

(三)由餘弦定理得知，若三邊為有理數，則三內角餘弦值為有理數，可得以下定理 5。

$\boxed{\text{定理 5}}$ (1) ΔABC 為三邊(有理數)三角形（即 $a,b,c \in \mathbb{Q}$），C 對 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H，則

$\overline{AH}, \overline{BH} \in \mathbb{Q}$（即 $\cos A, \cos B, \cos C \in \mathbb{Q}$）。

[證明]

由餘弦定理得知當 $a,b,c \in \mathbb{Q}$ 時，$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}$，同理 $\cos B, \cos C \in \mathbb{Q}$，相同地，

$\overline{AH} = b\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} \in \mathbb{Q}$，同理 $\overline{BH} \in \mathbb{Q}$。

若進一步要求 ΔABC 面積（以後以 $|\Delta ABC|$ 表示）為有理數，則此時 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CH} = \dfrac{2|\Delta ABC|}{\overline{AB}} \in \mathbb{Q}$，此種三角形稱為 *Heronian* 三角形。可得到 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的三角比 $\sin A$、$\cos A$ 等皆為有理數，得到以下定理 5(2)。

$\boxed{\text{定理 5}}$ (2) ΔABC 為 *Heronian* 三角形（即 $a,b,c \in \mathbb{Q}$ 且面積為有理數），C 對 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H，則 $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH} \in \mathbb{Q}$（即 $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B, \cdots \in \mathbb{Q}$）。

(四)在[2]的引理 3 提到：設 a 為最小邊長，當 $b \to \infty$ 時，$c-b \to \dfrac{a}{2}$，我們仿照討論：

考慮 $\dfrac{b-a}{c} = \dfrac{rs-r^2}{s^2-r^2} = \dfrac{r}{s+r}$，由 $r < s < 2r$，得 $\dfrac{1}{3} < \dfrac{b-a}{c} = \dfrac{r}{s+r} < \dfrac{1}{2}$，若固定 c 的大小，即 $s^2 - r^2 = c \Rightarrow s = \sqrt{r^2+c}$，當 $a = r^2 \to \infty$，$\dfrac{b-a}{c} = \dfrac{r}{s+r} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+c}+r} \to \dfrac{1}{2}$，其結果與[2]引理 3 很相似，圖形如圖 5。

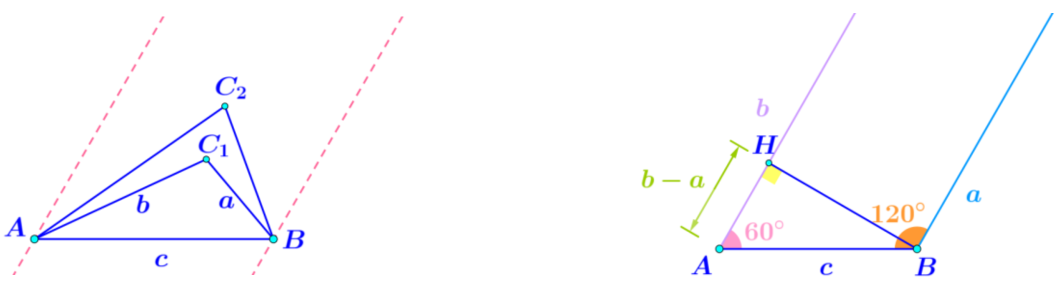


圖 5　2 倍角邊界關係討論(本圖片由作者以 Geogebra 自行繪製)

$\boxed{\text{定理 6}}$ 若固定 c 的大小，當 $a \to \infty$，$\dfrac{b-a}{c} \to \dfrac{1}{2}$，$\angle A \to \dfrac{\pi}{3}, \angle B \to \dfrac{2\pi}{3}$。

三、3 倍角整數三角形問題討論：

滿足$\angle B = 3\angle A$則稱ΔABC為 3 倍角三角形，求解如下：因$\angle B = 3\angle A$，大角對大邊，故知$b > a$，代入正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin 3A} = \dfrac{c}{\sin(\pi - 4A)}$，考慮$\dfrac{\sin 3A}{\sin A} = \dfrac{b}{a}$，運用三倍角公式$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$可得$\dfrac{b}{a} = 3 - 4\sin^2 A$，$\sin^2 A = \dfrac{3a-b}{4a}$，$\cos^2 A = \dfrac{a+b}{4a} < 1$，得到限制條件$a < b < 3a$，計算第一項等於第三項得$\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin 4A}{\sin A}$，運用倍角公式$\sin 4A = 2\sin 2A\cos 2A$ $= 4\sin A\cos A\cos 2A$，得到$\dfrac{c}{a} = 4\cos A\cos 2A$ $= 4\sqrt{\dfrac{a+b}{4a}}(\dfrac{a+b}{4a} - \dfrac{3a-b}{4a}) = \sqrt{\dfrac{a+b}{a}}\dfrac{b-a}{a}$，解出$c = \sqrt{\dfrac{a+b}{a}}(b-a)$，其三邊關係為$ac^2 = (a+b)(b-a)^2$。驗證三邊關係如下：

轉變三邊關係為$b^2 - a^2 = \dfrac{ac^2}{b-a}$與$\dfrac{c^2}{(b-a)^2} = \dfrac{a+b}{a}$，檢驗$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{\frac{ac^2}{b-a} + c^2}{2bc}$ $= \dfrac{ac^2 + c^2(b-a)}{2bc(b-a)} = \dfrac{c}{2(b-a)}$，$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4(\dfrac{c}{2(b-a)})^3 - 3\dfrac{c}{2(b-a)}$ $= \dfrac{c}{2(b-a)}(\dfrac{c^2}{(b-a)^2} - 3) = \dfrac{c}{2(b-a)}(\dfrac{a+b}{a} - 3) = \dfrac{c(b-2a)}{2a(b-a)}$，$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{c^2 - \frac{ac^2}{b-a}}{2ac}$ $= \dfrac{c^2(b-a) - ac^2}{2ac(b-a)} = \dfrac{bc-2ac}{2a(b-a)} = \cos 3A$。$\because 0 < A, B < \pi \quad \therefore B = 3A$。

由$c = \sqrt{\dfrac{a+b}{a}}(b-a)$為整數知可設$a + b = s^2$，$a = r^2$，但$c = \dfrac{s(s^2-2r^2)}{r}$並不是整數，透過伸縮同乘 r 倍得$a = r^3$，$b = r(s^2 - r^2)$，$c = s(s^2 - 2r^2)$可得 3 倍角三角形的三邊整數生成器。

(一)驗證條件：若$a = r^3$，$b = r(s^2 - r^2)$，$c = s(s^2 - 2r^2)$，則

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{r^2(s^2-r^2)^2 + s^2(s^2-2r^2)^2 - r^6}{2r(s^2-r^2)s(s^2-2r^2)} = \frac{s^2(s^2-r^2)(s^2-2r^2)}{2sr(s^2-r^2)(s^2-2r^2)} = \frac{s}{2r}$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{r^6 + s^2(s^2-2r^2)^2 - r^2(s^2-r^2)^2}{2r^3 s(s^2-2r^2)} = \frac{s^6 - 5s^4r^2 + 6s^2r^4}{2r^3 s(s^2-2r^2)}$$

$$= \frac{s^2(s^2-2r^2)(s^2-3r^2)}{2r^3 s(s^2-2r^2)} = \frac{s(s^2-3r^2)}{2r^3} = 4(\frac{s}{2r})^3 - 3(\frac{s}{2r}) = 4\cos^3 A - 3\cos A = \cos 3A$$

$\because 0 < A, B < \pi \quad \therefore B = 3A$。

值得注意的是在此處與 2 倍角有相同的$\cos A = \dfrac{s}{2r}$。

(二)由限制式得到三邊大小順序：

由$\angle B=3\angle A$與大角對大邊知$b>a$，即$s>\sqrt{2}r$，則a必不為最大邊。由$b<3a$或

$\cos A=\frac{s}{2r}<1$，得$2r>s>\sqrt{2}r$，即$\cos 0=1>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$，$0<A<\frac{\pi}{4}$。

1. 若$c>b>a$，需滿足$s(s^2-2r^2)>r(s^2-r^2)$，除以r^3得$8(\frac{s}{2r})^3-4(\frac{s}{2r})^2-4\frac{s}{2r}+1>0$。

已知$\frac{\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{7\pi}{7}$是方程式$\cos 3\theta=-\cos 4\theta$的四根，令$x=\cos\theta$，展開後可得

$4x^3-3x=-8x^4+8x^2-1\Rightarrow 8x^4+4x^3-8x^2-3x+1=0\Rightarrow(x+1)(8x^3-4x^2-4x+1)=0$，

因為$\cos\pi$為$x+1=0$的根，所以$\cos\frac{\pi}{7},\cos\frac{3\pi}{7},\cos\frac{5\pi}{7}$為$8x^3-4x^2-4x+1=0$的三根。

且$\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{3\pi}{7}>\cos\frac{5\pi}{7}$，故$8(\frac{s}{2r})^3-4(\frac{s}{2r})^2-4\frac{s}{2r}+1>0$的解為

$1>\cos A=\frac{s}{2r}>\cos\frac{\pi}{7}$，$0<A<\frac{\pi}{7}$。

2. 若$b>c>a$，需滿足$r(s^2-r^2)>s(s^2-2r^2)>r^3$，解$(\frac{s}{2r})^3-\frac{1}{2}(\frac{s}{2r})^2-\frac{1}{2}\frac{s}{2r}+\frac{1}{8}<0$與

$(\frac{s}{r})^3-2\frac{s}{r}-1>0$，得$\cos\frac{\pi}{7}>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，即$\frac{\pi}{7}<A<\frac{\pi}{5}$。

3. 若$b>a>c$，需滿足$r^3>s(s^2-2r^2)$，解得$\frac{1+\sqrt{5}}{4}>\cos A=\frac{s}{2r}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{\pi}{5}<A<\frac{\pi}{4}$。

(三)生成器進一步限制：

若要$(a,b,c)=1$其充要條件為$(r,s)=1$，即$(r,s)\neq 1\Leftrightarrow(a,b,c)\neq 1$。

[證明]

若$(r,s)\neq 1$，則存在質數 p，滿足$p\mid r$且$p\mid s\Rightarrow p^3\mid r^3$且$p^3\mid s^2r$且$p^3\mid sr^2$且$p^3\mid s^3$。

$p^3\mid a$，$p^3\mid(s^2r-r^3)=b$，$p^3\mid(s^3-2sr^2)=c\Rightarrow p^3\mid a$且$p^3\mid b$且$p^3\mid c\Rightarrow(a,b,c)\neq 1$。

若$(a,b,c)\neq 1$，則存在質數p滿足$p\mid a=r^3$，$p\mid b=(s^2r-r^3)$，$p\mid c=(s^3-2sr^2)$，由$p\mid r^3$

得$p\mid r\Rightarrow p\mid 2sr^2\Rightarrow p\mid(c+2sr^2)=s^3\Rightarrow p\mid s\Rightarrow(r,s)\neq 1$，得證。

若$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$，則

$\boxed{\text{性質 2}}$ $(a,b,c)=1$其充要條件為$(r,s)=1$。

$\boxed{\text{引理 3}}$ 若$(r,s)=d$，則$(a,b,c)=d^3$。

$\boxed{\text{引理 4}}$ 若(a,b,c)存在有非完全立方的質因數p，則非由整數生成器$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$所生成。其為整數生成器生成後乘上倍數p。

[推論] 整數生成器$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$無法生成所有三邊整數的 3 倍角三角形。

$\boxed{\text{定理 7}}$ $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$為 3 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

[證明]

由三邊關係$ac^2=(a+b)(b-a)^2$同除以a^3得到$(\frac{c}{a})^2=(1+\frac{b}{a})(\frac{b}{a}-1)^2$，因為 a,b,c 皆為正整數，故令$y=\frac{c}{a}$，$x=\frac{b}{a}>1\ (\because b>a)$皆為有理數，轉成$y^2=(1+x)(x-1)^2$，得$(\frac{y}{x-1})^2=1+x$，因 x,y 皆為有理數，$\frac{y}{x-1}$為有理數$\frac{s}{r}$，$r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$代入解出

$$\Rightarrow\begin{cases}1+x=\dfrac{s^2}{r^2}\\ \dfrac{y}{x-1}=\dfrac{s}{r}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{s^2-r^2}{r^2}=\dfrac{b}{a}\\ y=\dfrac{s(s^2-2r^2)}{r^3}=\dfrac{c}{a}\end{cases}，\because(r,s)=1\Rightarrow(r^2,s^2)=1\Rightarrow(r^2,s^2-r^2)=1$$

$\Rightarrow(r^2,s^2-2r^2)=1$，得到三邊整數生成器$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$。可得到數對$(r,s)$與 3 倍角三角形的起源三邊整數 a,b,c 形成一一對應且映成。故得證。

由上面證明可以得到該生成器包含所有的 3 倍角三角形的起源三邊整數且不重複，故得到強化後的定理 7。

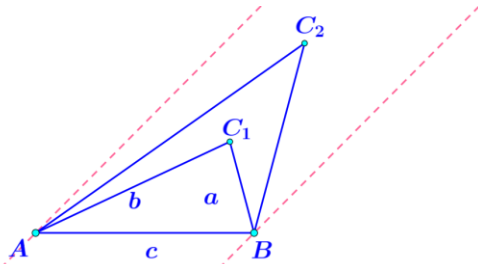
$\boxed{\text{強化定理 7}}$ 若 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>\sqrt{2}\,r$，則$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$為 3 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

但是由推論得知該生成器無法包含所有三邊整數的 3 倍角三角形，仿照畢氏數生成器與擬畢氏三角形生成器作法，取$a=tr^3$，$b=tr(s^2-r^2)$，$c=ts(s^2-2r^2)$為全整數三邊生成器。

$\boxed{\text{定理 8}}$ $t,r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>\sqrt{2}r$，則 $a=tr^3$，$b=tr(s^2-r^2)$，$c=ts(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

(四)我們仿照[2]引理 3 討論：

考慮 $\dfrac{b-a}{c}=\dfrac{s^2r-r^3-r^3}{s(s^2-2r^2)}=\dfrac{r}{s}$，由 $2r>s>\sqrt{2}r$，得 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{b-a}{c}=\dfrac{r}{s}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，若固定 c 的大小，即 $s^3-2sr^2=c\Rightarrow 1-2(\dfrac{r}{s})^2=\dfrac{c}{s^3}$，當 $a=r^3\to\infty$，$s>r\to\infty$，知 $\dfrac{c}{s^3}\to 0$，$1-2(\dfrac{r}{s})^2=\dfrac{c}{s^3}\to 0$，$\dfrac{b-a}{c}=\dfrac{r}{s}\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$，圖形如圖 6。



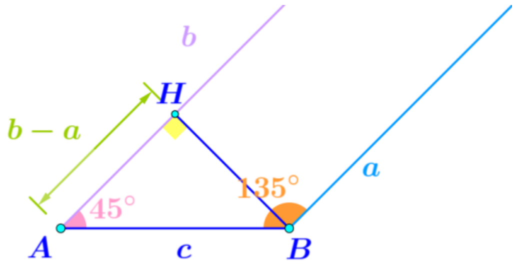


圖 6　3 倍角邊界關係討論(本圖片由作者以 Geogebra 自行繪製)

$\boxed{\text{定理 9}}$ 若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{4},\angle B\to\dfrac{3\pi}{4}$。

四、由 4 倍角整數三角形問題轉至 n 倍角整數三角形問題討論：

滿足 $\angle B=4\angle A$ 則稱 ΔABC 為 4 倍角三角形，求解如下：因 $\angle B=4\angle A$，大角對大邊，故知 $b>a$，代入正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin 4A}=\dfrac{c}{\sin(\pi-5A)}$，考慮等號 $\dfrac{\sin 4A}{\sin A}=\dfrac{b}{a}$，由倍角公式 $\sin 4A=2\sin 2A\cos 2A=4\sin A\cos A\cos 2A$，$\dfrac{b}{a}=4\cos A(2\cos^2 A-1)=8\cos^3 A-4\cos A$ ...(A)

知 $8\cos^3 A-4\cos A>0$，令 $T=\cos^2 A\geq\dfrac{1}{2}$，和角公式展開 $\sin 5A=\sin A(16\cos^4 A-12\cos^2 A+1)$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin 5A}{\sin A}=16\cos^4 A-12\cos^2 A+1$，解出 $T=\dfrac{3\pm K}{8}$ (負不合)，$K=\sqrt{5+4\dfrac{c}{a}}$，式(A)平方得 $16\cos^2 A(2\cos^2 A-1)^2=\dfrac{b^2}{a^2}$ 代入 $16(\dfrac{3+K}{8})(2\times\dfrac{3+K}{8}-1)=\dfrac{b^2}{a^2}$，整理 $K^3+K^2-5K+3=\dfrac{8b^2}{a^2}$，$K(K^2-5)=\dfrac{b^2}{a^2}-3-K^2$，將 K^2 代入得到 $K\times\dfrac{4c}{a}=\dfrac{8b^2-8a^2-4ac}{a^2}$，$K=\dfrac{2b^2-2a^2-ac}{ac}$，平方移項得 $(2b^2-2a^2-ac)^2=ac^2(5a+4c)$，乘開得 $a^4+b^4+a^3c=a^2c^2+2a^2b^2+ab^2c+ac^3$ 為 4 倍角三角形的三邊關係式。

但是由 4 倍角三角形的三邊關係式要轉出生成器卻是非常困難，由前面的討論可以發現 2 倍角三角形的三邊關係式為 a,b,c 的二次式，生成器 a,b,c 為 r,s 二次式；3 倍角三角形的三邊關係式為 a,b,c 的三次式，生成器 a,b,c 為 r,s 三次式。故知 4 倍角三角形的三邊關係式為 a,b,c 的四次式，生成器 a,b,c 為 r,s 四次式，這個四次式不容易導出。且 n 倍角三角形的三邊關係式為 a,b,c 的 n 次式，生成器 a,b,c 為 r,s 的 n 次式，這個可能就更加的困難了。參閱了相關的資料後，發現 $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=U_n(x)$ 與柴比雪夫多項式相關，引入討論。

(一)n 倍角整數三角形的三邊生成器討論

滿足 $\angle B=n\angle A$ 則稱 ΔABC 為 n 倍角三角形，求解如下：因 $\angle B=n\angle A$，大角對大邊，故知 $b>a$，代入正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin nA}=\dfrac{c}{\sin(\pi-(n+1)A)}$，考慮等號 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin nA}{\sin A}=U_{n-1}(x)$，其中 $x=\cos A$，考慮等號 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin(n+1)A}{\sin A}=U_n(x)$，令 $\cos A=x=\dfrac{s}{2r}$（原因理由後補），故 $U_n(\dfrac{s}{2r})=\dfrac{V_{n+1}(s,r)}{r^n}$，得知 $\dfrac{b}{a}=U_{n-1}(\dfrac{s}{2r})=\dfrac{V_n(s,r)}{r^{n-1}}$，$\dfrac{c}{a}=U_n(\dfrac{s}{2r})=\dfrac{V_{n+1}(s,r)}{r^n}$，可得到 $a=r^n$，$b=r\times V_n(s,r)$，$c=V_{n+1}(s,r)$。

若 ΔABC 為 4 倍角三角形滿足 $\angle B=4\angle A$，$n=4$，可得到 4 倍角三角形三邊生成器為 $a=r^4$，$b=r(s^3-2sr^2)$，$c=s^4-3s^2r^2+r^4$。整理 n 倍角三角形的三邊生成器如表 3。

表 3　n 倍角三角形的三邊生成器，其中 n 從 2 到 8

n	n 倍角三角形	a	b	c
2	2 倍角三角形	r^2	rs	s^2-r^2
3	3 倍角三角形	r^3	$r(s^2-r^2)$	s^3-2sr^2
4	4 倍角三角形	r^4	$r(s^3-2sr^2)$	$s^4-3s^2r^2+r^4$
5	5 倍角三角形	r^5	$r(s^4-3s^2r^2+r^4)$	$s^5-4s^3r^2+3sr^4$
6	6 倍角三角形	r^6	$r(s^5-4s^3r^2+3sr^4)$	$s^6-5s^4r^2+6s^2r^4-r^6$
7	7 倍角三角形	r^7	$r(s^6-5s^4r^2+6s^2r^4-r^6)$	$s^7-6s^5r^2+10s^3r^4-4sr^6$
8	8 倍角三角形	r^8	$r(s^7-6s^5r^2+10s^3r^4-4sr^6)$	$s^8-7s^6r^2+15s^4r^4-10s^2r^6+r^8$

引理 5　若要要求 $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$，即 $(r,s)\neq 1 \Leftrightarrow (a,b,c)\neq 1$。

[證明]

若$(r,s)\neq 1$，則存在質數p滿足$p|r$且$p|s \Rightarrow p^n|r^n$且

$p^n|rV_n(s,r)$且$p^n|V_{n+1}(s,r) \Rightarrow p^n|a$且$p^n|b$且$p^n|c \Rightarrow (a,b,c)\neq 1$。

若$(a,b,c)\neq 1$，則存在質數p，滿足$p|a$且$p|b$且$p|c$，由$p|a \Rightarrow p|r^n \Rightarrow p|r$，再由

$p|c \Rightarrow p|s^n \Rightarrow p|s \Rightarrow (r,s)\neq 1$。

(二)n倍角整數三角形與$n+1$倍角整數三角形的遞迴式討論

在郭家愷(2013)的 ***n* 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**[3]中提到遞迴關係為[3]定理 3（n 倍角整數邊三角形製造機），現在考慮內接於同一圓的三角形序列

$\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2, \cdots, \Delta A_nB_nC_n, \cdots$，設$\angle A_n, \angle B_n, \angle C_n$的對邊分別為$a_n, b_n, c_n$，且

$\angle A_n = \theta$，$\angle B_n = n\theta$，如圖 7。令$\Delta A_nB_nC_n$為上述內接於同一圓的三角形序列，則其三

邊符合下列遞迴關係，對於所有$n \geq 3$，$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}} \end{cases}$，證明見[3]，利用和角恆等式。

我們增加了$\Delta A_1B_1C_1$，並考慮了反向的遞迴，得到定理 10（加強版[3]定理 3）。

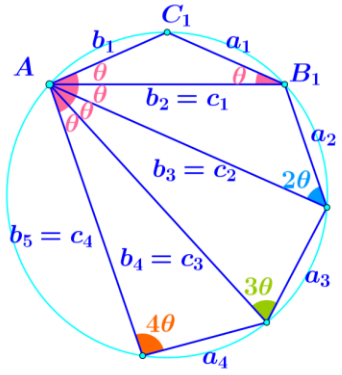


圖 7　n 倍角整數三角形與 $n+1$ 倍角整數三角形的遞迴(本圖片由作者以 Geogebra 自行繪製)

$\boxed{\text{定理 10}}$（加強版[3]定理 3）令$\Delta A_nB_nC_n$為上述內接於同一圓的三角形序列，則其三邊長符合

下列遞迴關係，對於所有$n \geq 2$，$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}} \end{cases}$與$\begin{cases} a_{n-1} = a_n \\ b_{n-1} = \dfrac{b_n^2 - a_n^2}{c_n} \\ c_{n-1} = b_n \end{cases}$，其中可取$\begin{cases} a_1 = r \\ b_1 = r \\ c_1 = s \end{cases}$。

$\boxed{\text{引理 6}}$ 若 $a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1},a_n,b_n,c_n$ 為正整數，則 $c_n \mid (b_n^2-a_n^2)$。

[證明]

當 n=1 時，$c_1 \mid (b_1^2-a_1^2)=0$，當 n=2 時，由三邊關係 $ac=b^2-a^2$ 知 $c_2 \mid (b_2^2-a_2^2)$，對於所有 $n\geq 3$，將 $a_n=a_{n-1}$、$b_n=c_{n-1}$ 代入 $c_n=\dfrac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}}$ 得 $b_n^2-a_n^2=c_nb_{n-1}$，故知 $c_n \mid (b_n^2-a_n^2)$。

透過定理 10，我們說明前段由第二型柴比雪夫多項式所推出的生成器為全生成器。

(三)n 倍角整數三角形全整數起源生成器討論

若 $\angle A_n,\angle B_n,\angle C_n$ 的對邊分別為 a_n,b_n,c_n，且 $\angle A_n=\theta$，$\angle B_n=n\theta$，即 $\Delta A_nB_nC_n$ 為 n 倍角三角形且 a_n,b_n,c_n 為整數，由定理 10 得知 $a_n=a_{n-1}$、$b_n=c_{n-1}$ 與 $c_n=\dfrac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}}$ 均為有理數，則可遞迴至 a_1,b_1,c_1 亦為有理數，但 $\Delta A_1B_1C_1$ 為等腰三角形，兩底角 $\angle A_1=\angle B_1=\theta$，$\dfrac{\text{腰}}{\text{底}}=\dfrac{a}{c}$ 為有理數，令其為 $\dfrac{s}{r}$，其中 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，可得知 $\cos\theta=\dfrac{s}{2r}$，此為柴比雪夫多項式中的 $\cos\theta=x=\dfrac{s}{2r}$ 的原因理由補與此處，則知配合引理 5 得知每組 n 倍角三角形三邊 a_n,b_n,c_n 為互質的整數，必恰對應一組有理數 a_1,b_1,c_1 與腰底比 $\dfrac{s}{r}$，其中 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，知每組 a_n,b_n,c_n 與 r,s 一一對應，故知前段由第二型柴比雪夫多項式所推出的生成器為全整數起源生成器。

(四)由遞迴數列說明 n 倍角有理數三角形並伸縮得 n 倍角整數三角形生成器

由[3]定理 3 遞迴得到 4 倍角有理數三角形並伸縮得 4 倍角整數三角形生成器如表 4。

表 4　由[3]定理 3 遞迴得到 4 倍角有理數三角形並伸縮得 4 倍角整數三角形生成器

n	初始 4 倍角有理數三角形			伸縮得 4 倍角整數三角形生成器		
	a	b	c	a	b	c
1	r	r	s	r^4	r^4	r^3s
2	r	s	$\dfrac{s^2-r^2}{r}$	r^4	r^3s	$r^2(s^2-r^2)$
3	r	$\dfrac{s^2-r^2}{r}$	$\dfrac{s(s^2-2r^2)}{r^2}$	r^4	$r^2(s^2-r^2)$	$rs(s^2-2r^2)$
4	r	$\dfrac{s(s^2-2r^2)}{r^2}$	$\dfrac{s^4-3s^2r^2+r^4}{r^3}$	r^4	$r(s^3-2sr^2)$	$s^4-3s^2r^2+r^4$

由表 4 可對應前項的證明，4 倍角整數三角形若三邊互質的a_4, b_4, c_4必可對應回 1 倍角即等腰三角形，腰底比為$\dfrac{s}{r}$，進行遞迴得到 4 倍角有理數三角形三邊再伸縮得 4 倍角整數三角形生成器。

(五)n 倍角整數三角形生成器中 r, s的限制與三邊大小關係討論

n 倍角三角形中由$\cos\theta = \dfrac{s}{2r} < 1$可得$s < 2r$，再由$\angle C = \pi - (n+1)\theta > 0$得$\theta < \dfrac{\pi}{n+1}$，即$\cos\theta = \dfrac{s}{2r} > \cos\dfrac{\pi}{n+1}$，合併成$1 > \cos\theta = \dfrac{s}{2r} > \cos\dfrac{\pi}{n+1}$，即$2r > s > 2r\cos\dfrac{\pi}{n+1}$。進一步推論三邊關係，由大角對大邊且$\angle B = n\angle A \geq \angle A$得知$b \geq a$，則知三邊關係為$c \geq b \geq a$或$b \geq c \geq a$或$b \geq a \geq c$，其中關鍵為 $c=b$ 與 $c=a$。

1. $c=b$ 且$\angle A = \theta$，$\angle B = n\theta$則$\angle C = n\theta$，內角和$(2n+1)\theta = \pi$，$\theta = \dfrac{\pi}{2n+1}$。

2. $c=a$ 且$\angle A = \theta$，$\angle B = n\theta$則$\angle C = \theta$，內角和$(n+2)\theta = \pi$，$\theta = \dfrac{\pi}{n+2}$。

討論得知$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2n+1}$，$1 > \cos\theta > \cos\dfrac{\pi}{2n+1}$，$c > b > a$。

$\dfrac{\pi}{2n+1} < \theta < \dfrac{\pi}{n+2}$，$\cos\dfrac{\pi}{2n+1} > \cos\theta > \cos\dfrac{\pi}{n+2}$，$b > c > a$。

$\dfrac{\pi}{n+2} < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$，$\cos\dfrac{\pi}{n+2} > \cos\theta > \cos\dfrac{\pi}{n+1}$，$b > a > c$。

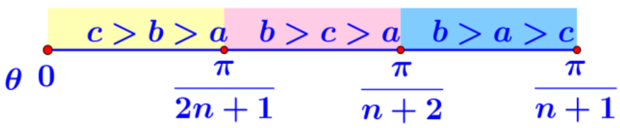


圖 8 圖示三邊大小關係(本圖片由作者自行繪製)

(六)n 倍角整數三角形邊界定理討論：

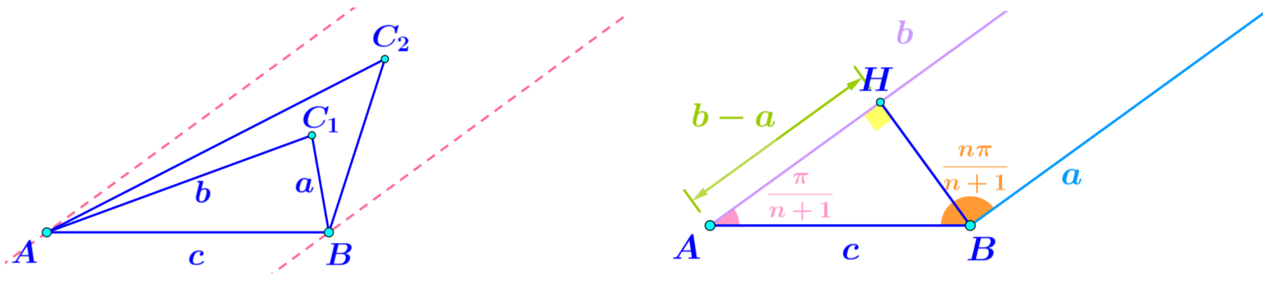


圖 9 n 倍角邊界關係討論(本圖片由作者以 Geogebra 自行繪製)

仿照 2 倍角與 3 倍角整數三角形來討論邊界關係，我們發現固定 c 的大小再考慮

$a=r^n\to\infty$ ， $s>r\to\infty$ ，則 $b>a\to\infty$ ，得到 $\angle C\to 0$ ，即 $\angle C=\pi-(n+1)\theta\to 0$ ，

$\angle A=\theta\to\dfrac{\pi}{n+1}$ ， $\angle B=n\theta\to\dfrac{n\pi}{n+1}$ ，得到 $\dfrac{b-a}{c}\to\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ ，圖形如圖 9。

定理 11　若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$ ， $\dfrac{b-a}{c}\to\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ ， $\angle A\to\dfrac{\pi}{n+1}$ ， $\angle B\to\dfrac{n\pi}{n+1}$ 。

五、*MN* 倍角整數三角形問題討論：

在討論 *MN* 倍角整數三角形前，我們從[7]得到預備定理與定理 12。

預備定理 若 $(M,N)=1$ ，則 $(U_{M-1}(x),U_{N-1}(x))=1$ ，即 $(V_M(x),V_N(x))=1$ ，即

$(V_M(s,r),V_N(s,r))=1$ 。

定理 12 若 $(M,N)=1$ ，則 $(V_M(x),V_N(x))=1$ ，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=1$ 。

若 $(M,N)=d$ ，則 $(V_M(x),V_N(x))=V_d(x)$ ，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=V_d(s,r)$ ，

或是 $(V_M(x),V_N(x))=V_{(M,N)}(x)$ ，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=V_{(M,N)}(s,r)$ 。

(一)*MN* 倍角三角形的三邊整數生成器證明：

滿足 $\angle A:\angle B=M:N$ 則稱 ΔABC 為(*M*,*N*)倍角三角形，設 $\angle A=M\theta$ ， $\angle B=N\theta$ ，

$M<N$，大角對大邊，故知 $b>a$，代入正弦定理 $\dfrac{a}{\sin M\theta}=\dfrac{b}{\sin N\theta}=\dfrac{c}{\sin(\pi-(M+N)\theta)}$ ，

考慮 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin M\theta}{\sin(M+N)\theta}=\dfrac{\dfrac{\sin M\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin(M+N)\theta}{\sin\theta}}=\dfrac{V_M(x)}{V_{M+N}(x)}$ ，其中 $x=\cos\theta$ ，同理 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{V_N(x)}{V_{M+N}(x)}$ ，

令 $\cos\theta=x=\dfrac{s}{2r}$ ，知 $U_{n-1}(\dfrac{s}{2r})=V_n(\dfrac{s}{r})=\dfrac{V_n(s,r)}{r^{n-1}}$ ，得知 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\dfrac{V_M(s,r)}{r^{M-1}}}{\dfrac{V_{M+N}(s,r)}{r^{M+N-1}}}=\dfrac{r^N\times V_M(s,r)}{V_{M+N}(s,r)}$ ，

$\dfrac{b}{c}=\dfrac{r^M\times V_N(s,r)}{V_{M+N}(s,r)}$ ，可得 $a=r^N\times V_M(s,r)$ ， $b=r^M\times V_N(s,r)$ ， $c=V_{M+N}(s,r)$ 。

若 $(M,N)=1$ ，則 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=1$ ，故知其為三邊整數生成器。

(二)圖示 *MN* 倍角三角形的起源生成器：

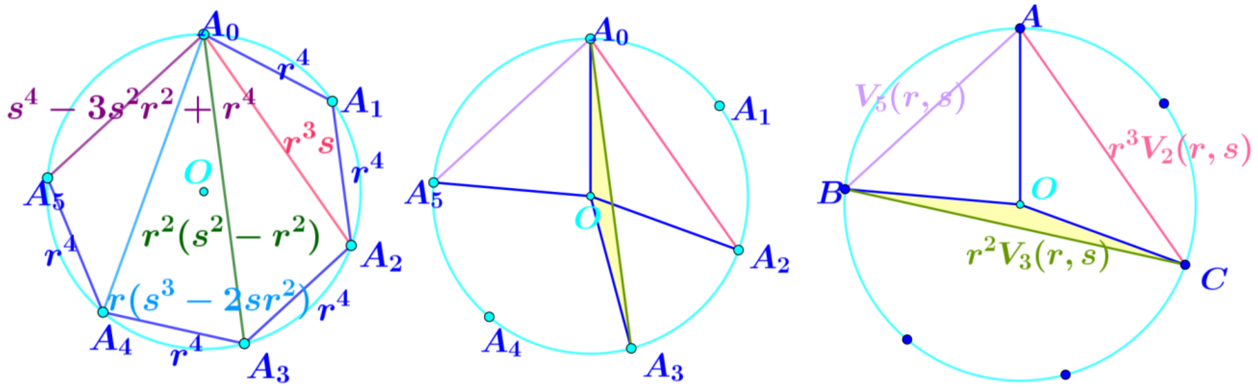


圖 10　圖解 *MN* 倍角三角形(本圖片由作者以 Geogebra 自行繪製)

我們在此圖解 $M=2$, $N=3$ 的 *MN* 倍角三角形，首先由 $M=1$ ， $N=1$ 的(1,1)倍角三角形出發，等腰三角形腰長為 r 底為 s，遞迴生成至(1,4)倍角三角形，c 邊 $\overline{A_0A_5}$ 為 $\dfrac{s^4-3s^2r^2+r^4}{r^3}$，(1,1)倍角三角形底邊為 s，(1,2)倍角三角形 c 邊為 $\dfrac{s^2-r^2}{r}$，將其伸縮至整數為：(1,1)倍角三角形出發，等腰三角形腰長為 r^4 底為 r^3s，遞迴生成至(1,4)倍角三角形，$\overline{A_0A_5}=V_5(s,r)=s^4-3s^2r^2+r^4$，(1,1)倍角三角形底邊為 $\overline{A_0A_2}=r^3\times V_2(s,r)=r^3s$，(1,2)倍角三角形邊為 $\overline{A_0A_3}=r^2\times V_3(s,r)=r^2(s^2-r^2)$，如圖 10 左圖。$\overline{A_0A_2}$ 所對圓心角為 $\angle A_0OA_2=4\theta$、$\overline{A_0A_3}$ 所對圓心角 $\angle A_0OA_3=6\theta$、$\overline{A_0A_5}$ 所對圓心角 $\angle A_0OA_5=2\pi-10\theta$，如圖 10 中圖。因為 $\angle A_0OA_2+\angle A_0OA_3+\angle A_0OA_5=2\pi$ ，所以將 ΔA_0OA_3 旋轉至 ΔA_2OA_5 即可疊合，則 $\Delta A_0A_2A_5$ 即為所要的 *MN* 倍角三角形，如圖 10 右圖。

(三)將上面論述一般化，首先由(1,1)倍角三角形 $\Delta A_0A_1A_2$ 開始，其腰長 r 底為 s，遞迴生成至 $(1,M-1)$ 倍角三角形 $\Delta A_0A_{M-1}A_M$ ，最長邊 $\overline{A_0A_M}$ 為 $\dfrac{V_M(s,r)}{r^{M-2}}$ ，遞迴生成至 $(1,N-1)$ 倍角三角形 $\Delta A_0A_{N-1}A_N$ ，最長邊 $\overline{A_0A_N}$ 為 $\dfrac{V_N(s,r)}{r^{N-2}}$ ，遞迴生成至 $(1,M+N-1)$ 倍角三角形 $\Delta A_0A_{M+N-1}A_{M+N}$ ，最長邊 $\overline{A_0A_{M+N}}$ 為 $\dfrac{V_{M+N}(s,r)}{r^{M+N-2}}$ ，乘上 r^{M+N-2} 伸縮至整數為：

(1,1)倍角三角形出發，等腰三角形腰長為 r^{M+N-1} 底為 $r^{M+N-2}s$ ，

遞迴生成至 $(1,M-1)$ 倍角三角形 $\Delta A_0A_{M-1}A_M$ ，最長邊 $\overline{A_0A_M}$ 為 $r^N\times V_M(s,r)$ ，

遞迴生成至 $(1,N-1)$ 倍角三角形 $\Delta A_0A_{N-1}A_N$ ，最長邊 $\overline{A_0A_N}$ 為 $r^M\times V_N(s,r)$ ，

遞迴生成至$(1, M+N-1)$倍角三角形$\Delta A_0 A_{M+N-1} A_{M+N}$，最長邊$\overline{A_0 A_{M+N}}$為$V_{M+N}(s,r)$。

$\overline{A_0 A_M}$所對圓心角為$\angle A_0 O A_M = 2M\theta$、$\overline{A_0 A_N}$所對圓心角為$\angle A_0 O A_N = 2N\theta$、$\overline{A_0 A_{M+N}}$所對圓心角為$\angle A_0 O A_{M+N} = 360° - 2(M+N)\theta$。

因為$\angle A_0 O A_M + \angle A_0 O A_N + \angle A_0 O A_{M+N} = 360°$，所以將$\Delta A_0 O A_N$旋轉至$\Delta A_M O A_{M+N}$即可疊合，則$\Delta A_0 A_M A_{M+N}$即為所要的 MN 倍角三角形。

(四)MN 倍角三角形的全起源三邊整數生成器證明：

從前面的證明可以看出所有的 MN 倍角三角形的三邊整數生成器可逆遞迴至(1,1)倍角三角形$\Delta A_0 A_1 A_2$，其腰長 r 底為 s，故亦可得此三邊整數生成器為全三邊整數生成器，但進一步證明其為起源三邊生成器時遇到困難，因為其對應的引理如下：

$\boxed{\text{待證引理}}$ 若要要求$(a,b,c)=1$其充要條件為$(r,s)=1$，即$(r,s)\neq 1 \Leftrightarrow (a,b,c)\neq 1$。

我們可以證出$(r,s)\neq 1 \Rightarrow (a,b,c)\neq 1$，但反向證明遇到困難，尚待克服。

[證明]

若$(r,s)\neq 1$，則存在質數 p，滿足 $p \mid r$ 且 $p \mid s \Rightarrow p^n \mid r^N \times V_M(s,r) = a$ 且

$p^n \mid r^M \times V_N(s,r) = b$ 且 $p^n \mid V_{M+N}(s,r) = c \Rightarrow p^n \mid a$ 且 $p^n \mid b$ 且 $p^n \mid c \Rightarrow (a,b,c)\neq 1$。

六、n 倍角整數 *Heronian* 三角形問題討論：

雖然尚未攻克將 MN 倍角三角形的全起源三邊整數生成器證明，但我們已經得到 n 倍角整數三角形的全起源三邊整數生成器，若結合畢氏數全起源三邊整數生成器，可以得到 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源三邊整數生成器。

在 2 倍角整數三角形中固定$\overline{AB}=c=6$建立坐標系，以$\overline{AB}$的中點 O 為原點，$\overrightarrow{OA}$為 x 軸方向，可求出其軌跡為$\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$，若三邊為有理數，則 C 點 x 坐標為有理數（定理 5(1)），但 y 坐標不一定為有理數。若ΔABC三邊為有理數且ΔABC三頂點坐標均為有理數點，則ΔABC面積亦為有理數，此種三角形稱為 *Heronian* 三角形（定理 5(2)），可得知。$\sin A, \cos A, \tan A \in \mathbb{Q}$，透過定理 10，$\angle A = \theta$，由$\Delta A_n B_n C_n$逆遞迴至$\Delta A_1 B_1 C_1$，其中$\angle A_1 = \theta$且

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta \in \mathbb{Q}$，即三邊恰為為畢氏數。

將前面的觀念推至 n 倍角整數三角形並結合蔡聰明的**數學拾貝**[1]一版第 209 頁提到定理 3：設 (x,y,z) 為畢氏三元數且 y 為偶數，則 (x,y,z) 為原始的畢氏三元數之充要條件為存在互質的自然數 p 與 q，一奇一偶且 $p>q$，使得 $x=p^2-q^2$，$y=2pq$，$z=p^2+q^2$ 得知取存在互質自然數 $p>q$，一奇一偶，可得出第一組 $\sin\theta=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$\cos\theta=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2pq}{p^2-q^2}$，取 $r=p^2+q^2$，$s=2(p^2-q^2)$，代入 n 倍角整數三角形生成器中即可得到第一組 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的三邊生成器。第二組 $\cos\theta=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$\sin\theta=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$\tan\theta=\dfrac{p^2-q^2}{2pq}$，取 $r=p^2+q^2$，$s=4pq$，代入 n 倍角整數三角形生成器中即可得到第二組 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的三邊生成器。

結合兩者皆是全起源整數生成器，可以得到以上兩組為 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源整數生成器。

定理 13　n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源整數生成器的三邊滿足 $a=r^n$，$b=r\times V_n(s,r)$，$c=V_{n+1}(s,r)$，其中 $r=p^2+q^2$，$s=2(p^2-q^2)$ 或是 $r=p^2+q^2$，$s=4pq$。

伍、討論

在詳盡討論出 n 倍角整數三角形的全起源三邊生成器後，回頭討論各特性：

一、n 倍角整數三角形三邊長及數論特性：

(一)2 倍角三角形：

2 倍角三角形三邊 $a=r^2$ ，$b=rs$ ，$c=s^2-r^2$ ，其中 r , s 限制為 $2r>s>r$ ，列出前 15 組來參考，如表 5。

表 5　2 倍角三角形三邊前 15 組

s	r	$a=r^2$	$b=rs$	$c=s^2-r^2$	(a,b,c)	$\cos A$	$\cos B$	A	B
3	2	4	6	5	1	0.75	0.125	0.722734	1.445468
4	3	9	12	7	1	0.666667	−0.11111	0.841069	1.682137
5	3	9	15	16	1	0.833333	0.388889	0.585686	1.171371
5	4	16	20	9	1	0.625	−0.21875	0.895665	1.79133
6	4	16	24	20	4	0.75	0.125	0.722734	1.445468
7	4	16	28	33	1	0.875	0.53125	0.505361	1.010721
6	5	25	30	11	1	0.6	−0.28	0.927295	1.85459
7	5	25	35	24	1	0.7	−0.02	0.795399	1.590798
8	5	25	40	39	1	0.8	0.28	0.643501	1.087002
9	5	25	45	56	1	0.9	0.62	0.451027	0.902054
7	6	36	42	13	1	0.583333	−0.31944	0.94797	1.895939
8	6	36	48	28	4	0.666667	−0.11111	0.841069	1.682137
9	6	36	54	45	9	0.75	0.125	0.722734	1.445468
10	6	36	60	64	4	0.833333	0.388889	0.585686	1.171371
11	6	36	66	85	1	0.916667	0.680556	0.411138	0.822276

由第一組(4,6,5)可得知三邊僅可能為 2,3,4,5,6 的倍數，由第二組(9,12,7)可排除 5 的倍數，由第三組(9,15,16)可排除 6 的倍數，由第七組(25,30,11)可排除 4 的倍數，所以三邊僅可能為 2,3 的倍數，透過討論 2 倍角三角形三邊整數生成器可得到以下性質：

引理 7　若 $(a,c)=d^2$ ，則 $(a,b,c)=d^2$ ，則 $(r,s)=d$ 。

引理 8　若 $(b,c)=d^2$ ，則 $(a,b,c)=d^2$ ，則 $(r,s)=d$ 。

引理 9　起源整數生成器的結果 b,c 必然一奇一偶。

引理 10　起源整數生成器中，若 a 為偶數，則 b 為偶數，c 為奇數。

若 a 為奇數 b 為偶數，則 c 為奇數。若 a 為奇數 b 為奇數，則 c 為偶數。

$\boxed{\text{引理 11}}$ 起源整數生成器的結果 b,c 中必有一個 3 的倍數。

$\boxed{\text{引理 12}}$ 起源整數生成器的結果 a 與 $a+c$ 必為完全平方數。

(二)3 倍角三角形：

3 倍角三角形三邊 $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$ ，$c=s(s^2-2r^2)$，其中 r , s 限制為 $2r>s>\sqrt{2}r$ ，

列出前 15 組來參考，如表 6。

表 6　3 倍角三角形三邊前 15 組

s	r	$a=r^3$	$b=r(s^2-r^2)$	$c=s(s^2-2r^2)$	(a,b,c)	$\cos A$	$\cos B$	A	B
3	2	8	10	3	1	0.75	−0.563	0.7227	2.1682
5	3	27	48	35	1	0.8333	−0.185	0.5857	1.7571
6	4	64	80	24	8	0.75	−0.563	0.7227	2.1682
7	4	64	132	119	1	0.875	0.0547	0.5054	1.5161
8	5	125	195	112	1	0.8	−0.352	0.6435	1.9305
9	5	125	280	279	1	0.9	0.216	0.451	1.3531
9	6	216	270	81	27	0.75	−0.563	0.7227	2.1682
10	6	216	384	280	8	0.8333	−0.185	0.5857	1.7571
11	6	216	510	539	1	0.9167	0.331	0.4111	1.2334
10	7	343	357	20	1	0.7143	−0.685	0.7752	2.3256
11	7	343	504	253	1	0.7857	−0.417	0.6669	2.0008
12	7	343	665	552	1	0.8571	−0.052	0.5411	1.6233
13	7	343	840	923	1	0.9286	0.4169	0.3803	1.1408
12	8	512	640	192	64	0.75	−0.563	0.7227	2.1682
13	8	512	840	533	1	0.8125	−0.292	0.6224	1.8671

由第一組(8,10,3)可得知三邊僅可能為 2,3,4,5,8,10 的倍數，由第四組(64,132,119)可排除,5,8,10 的倍數，所以三邊僅可能為 2,3,4 的倍數，透過討論 3 倍角三角形三邊整數生成器可得到以下性質：

$\boxed{\text{引理 13}}$ 若 $(a,c)=d^3$ ，則 $(a,b,c)=d^3$ ，則 $(r,s)=d$ 。

$\boxed{\text{引理 14}}$ 若 $(b,c)=d^3$ ，則 $(a,b,c)=d^3$ ，則 $(r,s)=d$ 。

$\boxed{\text{引理 15}}$ 起源整數生成器的結果 b,c 必然一奇一偶。

$\boxed{\text{引理 16}}$ 起源整數生成器中，若 a 為偶數，則 b 為偶數，c 為奇數。

若 a 為奇數 b 為偶數，則 c 為奇數。若 a 為奇數 b 為奇數，則 c 為偶數。

$\boxed{\text{引理 17}}$ 起源整數生成器的結果 b,c 中必有一個 3 的倍數。

$\boxed{\text{引理 18}}$ 起源整數生成器的結果 a 必為完全立方數。

(三) n 倍角整數三角形起源三邊數論性質討論：

首先在此討論在 a,b,c 互質下 a,b,c 奇偶性，若 r 為偶數則 b 必為偶數。若 r 為奇數且 s 為偶數，得知 $P_n(s,r)$ 、 $P_{n-1}(s,r)$ 必為一奇一偶，故 b,c 必為一奇一偶。但若 r 為奇數且 s 為奇數，在 n 除以 3 餘 1 時， a,b,c 全為奇數。例如在 4 倍角整數三角形中，取 $s=9$ ， $r=5$ ，得 $a=r^4=625$ ， $b=r(s^3-2sr^2)=1395$ ， $c=s^4-3s^2r^2+r^4=1091$ ，三邊 a,b,c 全為奇數。但是其餘 n 除以 3 餘 0 或 2 時， b,c 必為一奇一偶。

而在 a,b,c 互質下 a,b,c 為 3 的倍數性質，在 2 倍角與 3 倍角整數三角形中，b,c 中必有一個 3 的倍數，但在 4 倍角整數三角形中，並無該性質。n 倍角整數三角形的數論特性證明與進階討論將於後續研究分析。

陸、結論

整理以上內容得到本研究相關的結論：

$\boxed{\text{定理 1}}$ $V_n(s,r)$為整係數s,r的$n-1$次齊次多項式形如：$V_n(s,r)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i s^{n-1-i}r^i$，其中奇數項係數$a_1=a_3=a_5=\cdots=0$，偶數項係數$a_0,a_2,a_4,\cdots\in\mathbb{Z}$，其中$a_{4m}>0$，$a_{4m+2}<0$，$a_{4m+1}=a_{4m+3}=0$，$m=0,1,2,\cdots$。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $V_n(s,r)$遞迴關係$V_{n+1}(s,r)=sV_n(s,r)-r^2V_{n-1}(s,r),n\geq 2$，$V_1(s,r)=1$，$V_2(s,r)=s$。

若ΔABC為 2 倍角三角形，則三邊關係為$ac=b^2-a^2$，三邊整數生成器為$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$。生成器限制式為$r<s<2r$，若$2>\frac{s}{r}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，則$c>b>a$；若$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>\frac{s}{r}>\sqrt{2}$，則$b>c>a$；若$\sqrt{2}>\frac{s}{r}>1$，則$b>a>c$。

$\boxed{\text{性質 1}}$ $(a,b,c)=1$其充要條件為$(r,s)=1$。

$\boxed{\text{引理 1}}$ 若$(r,s)=d$，則$(a,b,c)=d^2$。

$\boxed{\text{引理 2}}$ 若(a,b,c)存在有非完全平方的質因數p，則非由整數生成器$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$所生成。其為整數生成器生成後乘上倍數p。

[推論] 整數生成器$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$無法生成所有三邊整數的 2 倍角三角形。

$\boxed{\text{定理 3}}$ 若 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>r$，則$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$為 2 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

$\boxed{\text{強化定理 3}}$ 若$r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>r$，則$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$為 2 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

$\boxed{\text{定理 4}}$ 若$t,r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>r$，則$a=tr^2$，$b=trs$，$c=t(s^2-r^2)$為 2 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

$\boxed{\text{定理 5}}$ (1)ΔABC為三邊(有理數)三角形（即$a,b,c\in\mathbb{Q}$），C對$\overleftrightarrow{AB}$的垂線交$\overleftrightarrow{AB}$於H，則$\overline{AH},\overline{BH}\in\mathbb{Q}$（即$\cos A,\cos B,\cos C\in\mathbb{Q}$）。

$\boxed{\text{定理 5}}$ (2) ΔABC 為 *Heronian* 三角形（即 $a,b,c\in\mathbb{Q}$ 且面積為有理數），C 對 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H，則 $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}\in\mathbb{Q}$（即 $\sin A,\cos A,\sin B,\cos B,\cdots\in\mathbb{Q}$）。

$\boxed{\text{定理 6}}$ 若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\dfrac{1}{2}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{3},\angle B\to\dfrac{2\pi}{3}$。

若 ΔABC 為 3 倍角三角形，則三邊關係為 $ac^2=(a+b)(b-a)^2$，三邊整數生成器為 $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$。生成器限制式為 $2r>s>\sqrt{2}\,r$，若 $1>\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{7}$，則 $c>b>a$；若 $\cos\dfrac{\pi}{7}>\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{5}$，則 $b>c>a$；若 $\cos\dfrac{\pi}{5}>\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{4}$ 則 $b>a>c$。

$\boxed{\text{性質 2}}$ $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$。

$\boxed{\text{引理 3}}$ 若 $(r,s)=d$，則 $(a,b,c)=d^3$。

$\boxed{\text{引理 4}}$ 若 (a,b,c) 存在有非完全立方的質因數 p，則非由整數生成器 $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 所生成。其為整數生成器生成後乘上倍數 p。

[推論] 整數生成器 $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 無法生成所有三邊整數的 3 倍角三角形。

$\boxed{\text{定理 7}}$ $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

$\boxed{\text{強化定理 7}}$ 若 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>\sqrt{2}\,r$，則 $a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

$\boxed{\text{定理 8}}$ $t,r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$，$2r>s>\sqrt{2}r$，則 $a=tr^3$，$b=tr(s^2-r^2)$，$c=ts(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

$\boxed{\text{定理 9}}$ 若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{4}$，$\angle B\to\dfrac{3\pi}{4}$。

若 ΔABC 為 n 倍角三角形，則三邊生成器為 $a=r^n$，$b=r\times P_{n-1}(r,s)$，$c=P_n(r,s)$，其中 $P_n(r,s)$ 為由柴比雪夫多項式轉出的變形多項式，在 $r,s\in\mathbb{N}$，$(r,s)=1$ 其為全起源多項式。生成器限制式為 $2r>s>2r\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，若 $1>\cos A=\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{2n+1}$，則 $c>b>a$；若

$\cos\dfrac{\pi}{2n+1} > \cos A = \dfrac{s}{2r} > \cos\dfrac{\pi}{n+2}$，則 $b > c > a$；若 $\cos\dfrac{\pi}{n+2} > \cos A = \dfrac{s}{2r} > \cos\dfrac{\pi}{n+1}$，則 $b > a > c$。

引理 5 若要要求 $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$，即 $(r,s)\neq 1 \Leftrightarrow (a,b,c)\neq 1$。

定理 10（加強版[3]定理 3）令 $\Delta A_nB_nC_n$ 為上述內接於同一圓的三角形序列，則其三邊長符合。

下列遞迴關係，對於所有 $n\geq 2$，$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}} \end{cases}$ 與 $\begin{cases} a_{n-1} = a_n \\ b_{n-1} = \dfrac{b_n^2 - a_n^2}{c_n} \\ c_{n-1} = b_n \end{cases}$，其中可取 $\begin{cases} a_1 = r \\ b_1 = r \\ c_1 = s \end{cases}$。

引理 6 若 $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, a_n, b_n, c_n$ 為正整數，則 $c_n \mid (b_n^2 - a_n^2)$。

定理 11 若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{n+1}$，$\angle B\to\dfrac{n\pi}{n+1}$。

以下為 MN 倍角整數三角形的問題討論：

預備定理 若 $(M,N)=1$，則 $(U_{M-1}(x),U_{N-1}(x))=1$，即 $(V_M(x),V_N(x))=1$，即

$(V_M(s,r),V_N(s,r))=1$。

定理 12 若 $(M,N)=1$，則 $(V_M(x),V_N(x))=1$，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=1$。

若 $(M,N)=d$，則 $(V_M(x),V_N(x))=V_d(x)$，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=V_d(s,r)$，

或是 $(V_M(x),V_N(x))=V_{(M,N)}(x)$，即 $(V_M(s,r),V_N(s,r))=V_{(M,N)}(s,r)$。

定理 13 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源整數生成器的三邊滿足 $a=r^n$，$b=r\times V_n(s,r)$，

$c=V_{n+1}(s,r)$，其中 $r=p^2+q^2$，$s=2(p^2-q^2)$ 或是 $r=p^2+q^2$，$s=4pq$。

以下為 2 倍角三角形三邊整數生成器的性質：

引理 7 若 $(a,c)=d^2$，則 $(a,b,c)=d^2$，則 $(r,s)=d$。

引理 8 若 $(b,c)=d^2$，則 $(a,b,c)=d^2$，則 $(r,s)=d$。

引理 9 起源整數生成器的結果 b,c 必然一奇一偶。

引理 10 起源整數生成器中，若 a 為偶數，則 b 為偶數，c 為奇數。

若 a 為奇數 b 為偶數，則 c 為奇數。若 a 為奇數 b 為奇數，則 c 為偶數。

引理 11 起源整數生成器的結果 b,c 中必有一個 3 的倍數。

引理 12 起源整數生成器的結果 a 與 $a+c$ 必為完全平方數。

以下為 3 倍角三角形三邊整數生成器的性質：

引理 13 若 $(a,c)=d^3$，則 $(a,b,c)=d^3$，則 $(r,s)=d$。

引理 14 若 $(b,c)=d^3$，則 $(a,b,c)=d^3$，則 $(r,s)=d$。

引理 15 起源整數生成器的結果 b,c 必然一奇一偶。

引理 16 起源整數生成器中，若 a 為偶數，則 b 為偶數，c 為奇數。

若 a 為奇數 b 為偶數，則 c 為奇數。若 a 為奇數 b 為奇數，則 c 為偶數。

引理 17 起源整數生成器的結果 b,c 中必有一個 3 的倍數。

引理 18 起源整數生成器的結果 a 必為完全立方數。

待證引理 若要要求 $(a,b,c)=1$ 其充要條件為 $(r,s)=1$，即 $(r,s)\neq 1 \Leftrightarrow (a,b,c)\neq 1$。

我們可以證出 $(r,s)\neq 1 \Rightarrow (a,b,c)\neq 1$，但反向證明遇到困難，尚待克服。

柒、參考文獻資料

[1] 蔡聰明。數學拾貝，三民出版社，一版，臺灣，P.202～P.209，2003 年出版。二版，臺灣，P.206～P.214，2020 年出版。

[2] 陳學儀(2011)，臺北市立第一女子高級中學。從 3, 5, 7 出發–擬畢氏三角形之研究。第三屆丘成桐中學數學獎金牌獎。

[3] 郭家愷(2013)，國立宜蘭高級中學。*n* 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討。第五屆丘成桐中學數學獎佳作獎。

[4] 藍宇潔(2023)。Construction of Brahmagupta n-gons by Chebyshev Polynomials。2023 年臺灣國際科學展覽會四等獎。

[5] 翁翠微、顏綺美、陳政宏（2014）。Chebyshev 多項式與線性二階遞迴序列之行列式表示法。數學傳播 38 卷 3 期。

[6] Souhila Boughaba、Nabiha、Ali Boussayoud（2021）。Construction of Generating Functions of the Products of Vieta Polynomials with Gaussian Numbers and Polynomials。Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 12（2021）No. 1, 649-668。

[7] 張○○、李○○、董○○（2025）。Vieta-Fibonacci 變形多項式的探討。第 24 屆旺宏科學獎。

[8] Weisstein, Eric W. "Heronian Triangle." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/HeronianTriangle.html

【評語】050420

本作品研究正整數邊長的三角形中滿足有兩個角的比是M:N的所有可能，其中M、N是給定的正整數。文獻[3]已經給出了M:N=1:n的所有解,其中n是正整數。本作品嘗試修改其手法,以求兩個角的比是M:N的所有整數邊長三角形,然而只能找到一系列解，卻未能證明這些是全部的解。接著增加條件，要求三角形的面積也是正整數，此時只能重新證明[3]中證出的 M:N=1:n情況下的所有解。整體而言，本作品大部分內容為利用或是重新證明[3]中的結果，作者有列出與前作的比較，但結果基本上可視為前作的變數變換，沒有太多新的結果，是比較可惜之處。

作品海報

MN倍角整數三角形

壹、簡介

一、研究動機

國中接觸畢氏定理時感到神奇，讀到蔡聰明的數學拾貝[1]，驚訝於畢氏數生成器能產生所有畢氏數。高中學餘弦定理時，萌生出探索 60° 與 120° 三角形的整數邊產生器的想法，發現陳學儀的從 3, 5, 7 出發–擬畢氏三角形之研究[2]已討論。後來受學測題啟發，探索 2 倍角三角形的整數邊產生器，發現郭家愷的 n 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討[3]亦有相關研究，我們認為可以繼續尋找不同的發展，產生 MN 倍角三角形的相關討論。

二、研究目的

由 2 倍角整數邊三角形生成器出發，討論其整數邊三邊的數論性質與相關性質，再延伸至 3 倍角整數邊三角形、4 倍角整數邊三角形乃至於 n 倍角整數邊三角形與 MN 倍角整數邊三角形相關特性。

三、文獻回顧

在蔡聰明[1]中提出定理 3:（起源畢氏三元數之三邊整數生成定理）設 (x,y,z) 為畢氏三元數且 y 為偶數，則 (x,y,z) 為原始的畢氏三元數之充要條件為存在互質的自然數 p 與 q，一奇一偶且 $p>q$，使得 $x=p^2-q^2, y=2pq, z=p^2+q^2$。郭家愷(2013)[3]的「**$n$ 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**」與我們的內容類似，整理異同如下表 1。

表 1：本作品與 **n 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討**[3]比較表

	作品名稱	**n 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討[3]**	我們作品的結果
2倍角三角形	a,b,c 三邊關係	$a^2+ac=b^2$（定理 1）	$ac=b^2-a^2$
	整數三邊生成器	$a=n^2$，$b=mn+n^2$，$c=m^2+2mn$（定理 2）	$r=n$，$s=n+m$
		$a=n^2$，$b=mn$，$c=m^2-n^2$	$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$
		$a=n^2$，$b=mn-n^2$，$c=m^2-2mn$	$r=n$，$s=m-n$
	生成器參數限制	$m<n$	$r<s<2r$
3倍角三角形	a,b,c 三邊關係	$ac^2=(a+b)(a-b)^2$	$ac^2=(a+b)(b-a)^2$
	整數三邊生成器	$a=n^3$，$b=mn(m+2n)$，$c=(m+n)(m^2+2mn-n^2)$	$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$
	關聯性	遞迴式	遞迴式與逆遞迴式
	其他	討論至四邊形	全起源、三邊與邊界關係、MN 倍角

四、名詞解釋

(一) 三角形的兩角比例為 $M:N$，稱為 MN 倍角三角形。ΔABC 中不失一般性規定 $\angle A:\angle B=M:N$，其中 $M<N$。

(二) 三角形的三邊長均為整數(有理數)，稱為整數(有理數)三角形。

(三) 有理數三角形的面積也是有理數，稱為 *Heronian* 三角形；整數三角形的面積也是整數，稱為整數 *Heronian* 三角形。

(四) 三邊可表為參數式而生成正整數三邊稱為三邊整數生成器。

1. 若能生出所有滿足該性質的三邊則稱為全三邊整數生成器　2. 若滿足三邊互質則稱為起源三邊整數生成器。

貳、研究方法或過程

參、研究結果

一、n 倍角整數三角形的三邊生成器討論

滿足 $\angle B=n\angle A$ 則稱 ΔABC 為 n 倍角三角形，求解如下：因 $\angle B=n\angle A$，大角對大邊，故知 $b>a$，代入正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin nA}=\frac{c}{\sin(\pi-(n+1)A)}$，考慮等號 $\frac{b}{a}=\frac{\sin nA}{\sin A}=U_{n-1}(x)$，其中 $x=\cos A$；考慮等號 $\frac{c}{a}=\frac{\sin(n+1)A}{\sin A}=U_n(x)$，令 $\cos A=x=\frac{s}{2r}$，故 $U_n(\frac{s}{2r})=\frac{V_{n+1}(s,r)}{r^n}$，得知 $\frac{b}{a}=U_{n-1}(\frac{s}{2r})=\frac{V_n(s,r)}{r^{n-1}}$，$\frac{c}{a}=U_n(\frac{s}{2r})=\frac{V_{n+1}(s,r)}{r^n}$，可得到 $a=r^n$，$b=r\times V_n(s,r)$，$c=V_{n+1}(s,r)$。整理 n 倍角三角形的三邊生成器如表：

表 2：柴比雪夫多項式與 V_n 多項式

n	$U_n(x)$	$V_{n+1}(s,r)$
0	1	1
1	$2x$	s
2	$4x^2-1$	s^2-r^2
3	$8x^3-4x$	s^3-2sr^2
4	$16x^4-12x^2+1$	$s^4-3s^2r^2+r^4$
5	$32x^5-32x^3+6x$	$s^5-4s^3r^2+3sr^4$

表 3：n 倍角三角形的三邊生成器，其中 n 從 1 到 6

n	n 倍角三角形	a	b	c
1	1 倍角三角形	r	r	s
2	2 倍角三角形	r^2	rs	s^2-r^2
3	3 倍角三角形	r^3	$r(s^2-r^2)$	s^3-2sr^2
4	4 倍角三角形	r^4	$r(s^3-2sr^2)$	$s^4-3s^2r^2+r^4$
5	5 倍角三角形	r^5	$r(s^4-3s^2r^2+r^4)$	$s^5-4s^3r^2+3sr^4$
6	6 倍角三角形	r^6	$r(s^5-4s^3r^2+3sr^4)$	$s^6-5s^4r^2+6s^2r^4-r^6$

二、n 倍角整數三角形與 n+1 倍角整數三角形的遞迴式討論

考慮內接於同一圓的三角形序列 $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2,\cdots,\Delta A_nB_nC_n,\cdots$，設 $\angle A_n,\angle B_n,\angle C_n$ 的對邊分別為 a_n,b_n,c_n，且 $\angle A_n=\theta,\angle B_n=n\theta$。

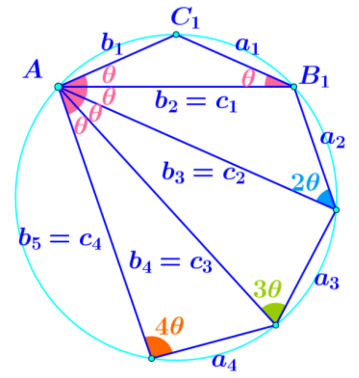


圖 1：n 倍角整數三角形與 n+1 倍角整數三角形的遞迴

$\boxed{\text{定理 10}}$ $\Delta A_nB_nC_n$ 為上述內接於同一圓的三角形序列，則其三邊長符合下列遞迴關係，對於所有 $n\geq 2$，

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1} \\ b_n=c_{n-1} \\ c_n=\dfrac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}} \end{cases} \text{與} \begin{cases} a_{n-1}=a_n \\ b_{n-1}=\dfrac{b_n^2-a_n^2}{c_n} \\ c_{n-1}=b_n \end{cases}\text{，其中可取} \begin{cases} a_1=r \\ b_1=r \\ c_1=s \end{cases}$$

三、n 倍角整數三角形全整數起源生成器討論

若 $\angle A_n,\angle B_n,\angle C_n$ 的對邊分別為 a_n,b_n,c_n，且 $\angle A_n=\theta,\angle B_n=n\theta$，即 $\Delta A_nB_nC_n$ 為 n 倍角三角形且 a_n,b_n,c_n 為整數，由定理 8 得知 $a_{n-1}=a_n$、$b_{n-1}=\dfrac{b_n^{\ 2}-a_n^{\ 2}}{c_n}$ 與 $c_{n-1}=b_n$ 均為有理數，則可遞迴至 a_1,b_1,c_1 亦為有理數，但 $\Delta A_1B_1C_1$ 為等腰三角形，兩底角 $\angle A_1=\angle B_1=\theta$，腰底比值 $=\dfrac{a}{c}$ 為有理數，令其為 $\dfrac{s}{r}$，其中 $r,s\in\mathbb{N},(r,s)=1$，可得知 $\cos\theta=\dfrac{s}{2r}$，此為柴比雪夫多項式中的 $\cos\theta=x=\dfrac{s}{2r}$ 的原因，則知每組 n 倍角三角形三邊 a_n,b_n,c_n 為互質的整數，必恰對應一組有理數 a_1,b_1,c_1 與腰底比 $\dfrac{s}{r}$，其中 $r,s\in\mathbb{N},(r,s)=1$，故知每組 a_n,b_n,c_n 與 r,s 一一對應，故知前段由第二型柴比雪夫多項式(表 3)所推出的生成器為全整數起源生成器。

四、n 倍角整數三角形生成器中 r,s 的限制與三邊大小關係討論

n 倍角三角形中由 $\cos\theta=\dfrac{s}{2r}<1$ 可得 $s<2r$，再由 $\angle C=\pi-(n+1)\theta>0$ 得 $\theta<\dfrac{\pi}{n+1}$，即 $\cos\theta=\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，合併成 $1>\cos\theta=\dfrac{s}{2r}>\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，即 $2r>s>2r\cos\dfrac{\pi}{n+1}$。

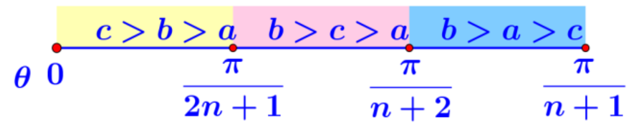


圖 2：n 倍角三邊大小關係討論

五、n 倍角整數三角形邊界定理討論

固定 c，考慮 $a=r^n\to\infty,s>r\to\infty$，則 $b>a\to\infty$，得到 $\angle C=\pi-(n+1)\theta\to 0$，$\angle A=\theta\to\dfrac{\pi}{n+1}$，$\angle B=n\theta\to\dfrac{n\pi}{n+1}$，得到 $\dfrac{b-a}{c}\to\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，圖形如圖 3。

$\boxed{\text{定理 11}}$ 固定 c，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{n+1}$，$\angle B\to\dfrac{n\pi}{n+1}$。

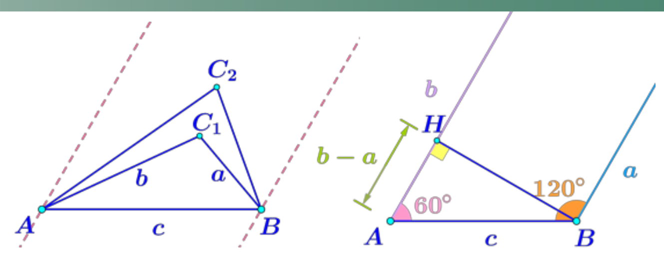


圖 3：n 倍角邊界關係討論

六、MN 倍角整數三角形生成器方式

MN 倍角的三邊整數生成器為：$a=r^N\times V_M(s,r)$，$b=r^M\times V_N(s,r)$，$c=V_{M+N}(s,r)$， 下圖為圖解 MN 倍角三角形：

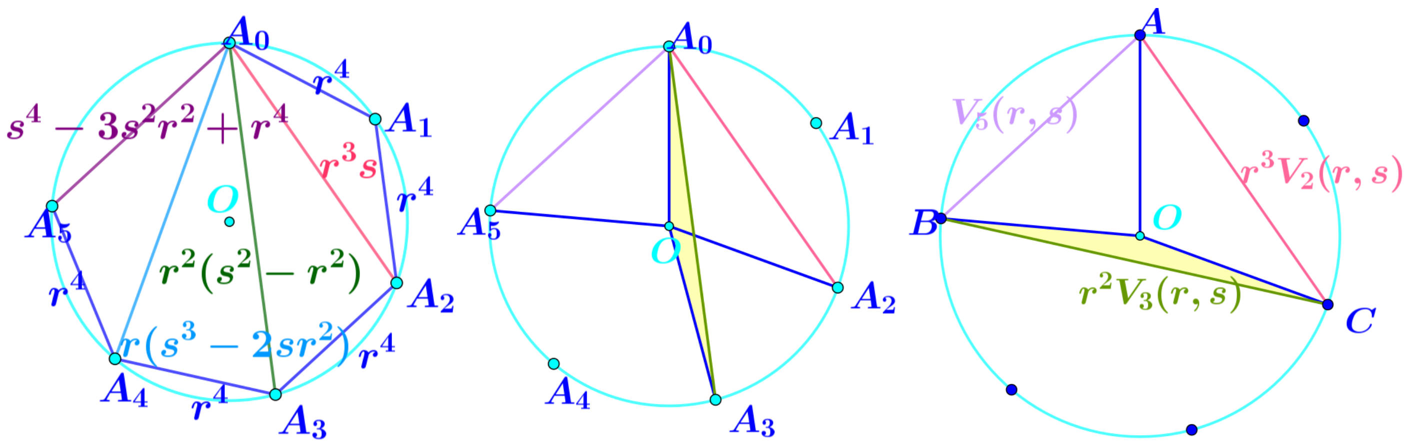


圖 4　圖解 MN 倍角三角形

七、MN 倍角整數三角形全整數起源生成器討論

$\boxed{\text{重要引理}}$ 若 $(M,N)=1$，且 $a=r^N\times V_M(s,r)$，$b=r^M\times V_N(s,r)$，$c=V_{M+N}(s,r)$，則 $(a,b,c)=1$ 的充要條件為 $(r,s)=1$。

[證明] 若 $(r,s)\neq 1$，則存在質數 p，滿足 $p|r$ 且 $p|s\Rightarrow p^n\left|r^N\times V_M(s,r)=a\right.$ 且 $p^n\left|r^M\times V_N(s,r)=b\right.$ 且 $p^n\left|V_{M+N}(s,r)=c\right.\Rightarrow(a,b,c)\neq 1$

若 $(a,b,c)\neq 1$，則存在質數 p，滿足 $p|a,p|b,p|c$，考慮 p 是否整除 r：

(1) 若 $p|r$，由 $p|c=V_{M+N}(s,r)$ 得 $p\left|s^{M+N-1}-C_1^{M+N-2}s^{M+N-3}r^2+C_2^{M+N-3}s^{M+N-5}r^4-C_3^{M+N-4}s^{M+N-7}r^6+\cdots\cdots\right.$，即 $p\left|s^{M+N-1}\right.$，得證 $(r,s)\neq 1$。

(2) 若 $(p,r)=1$，知 $p|V_M(s,r)$，同理 $p|V_N(s,r)$。若 $N=Mk+R$，$0\leq R<M$，$p|V_N(s,r)=V_{Mk+R}(s,r)=V_{Mk+1}(s,r)V_R(s,r)-V_{Mk}(s,r)V_{R-1}(s,r)$

由 $p|V_M(s,r)$ 且 $V_M(s,r)|V_{Mk}(s,r)$ 得到 $p|V_{Mk}(s,r)$ 故知 $p|V_{Mk+1}(s,r)V_R(s,r)$

(i)若 $p|V_{Mk+1}(s,r)$ 又知道 $p|V_{Mk}(s,r)$，由遞迴得到 $(r,s)\neq 1$ 或 $p|V_1(s,r)=1$，矛盾。

(ii)若 $p|V_R(s,r)$，則形成輾轉相除法，得知 $p\left|V_{(M,N)}(s,r)=V_1(s,r)=1\right.$，矛盾。

八、n 倍角整數 *Heronian* 三角形問題討論

定理 13　n 倍角整數 *Heronian* 三角形的全起源整數生成器的三邊滿足 $a=r^n$，$b=r\times V_n(s,r)$，$c=V_{n+1}(s,r)$，其中 $r=p^2+q^2$，$s=2(p^2-q^2)$ 或是 $r=p^2+q^2$，$s=4pq$。

[說明] (1) ΔABC 為有理數三角形（即 $a,b,c\in\mathbb{Q}$），C 對 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H，則 $\overline{AH},\overline{BH}\in\mathbb{Q}$（即 $\cos A,\cos B,\cos C\in\mathbb{Q}$）。

(2) ΔABC 為 *Heronian* 三角形，C 對 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H，則 $\overline{AH},\overline{BH},\overline{CH}\in\mathbb{Q}$（即 $\sin A,\cos A,\sin B,\cos B,\cdots\in\mathbb{Q}$）。

(3)將 n 倍角整數三角形結合蔡聰明的數學拾貝[1]一版第 209 頁提到定理 3 得知，存在互質自然數 $p>q$，一奇一偶，可得出以下兩組 n 倍角整數 *Heronian* 三角形的三邊生成器：

表 4：n 倍角整數 *Heronian* 三角形的三邊生成器

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	r	s
第一組	$\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$	$\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$	$\dfrac{2pq}{p^2-q^2}$	p^2+q^2	$2(p^2-q^2)$
第二組	$\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$	$\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$	$\dfrac{p^2-q^2}{2pq}$	p^2+q^2	$4pq$

肆、討論

以下為 2 倍角與 3 倍角整數三角形的數論特性：

表 5：2 倍角與 3 倍角整數三角形的數論特性

	2 倍角三角形三邊整數特性	3 倍角三角形三邊整數特性	
引理 7	若 $(a,c)=d^2$ 則 $(a,b,c)=d^2$ 則 $(r,s)=d$	若 $(a,c)=d^3$ 則 $(a,b,c)=d^3$ 則 $(r,s)=d$	引理 13
引理 8	若 $(b,c)=d^2$ 則 $(a,b,c)=d^2$ 則 $(r,s)=d$	若 $(b,c)=d^3$ 則 $(a,b,c)=d^3$ 則 $(r,s)=d$	引理 14
引理 9	基本整數生成器的結果 b,c 必為一奇一偶。		引理 15
引理 10	基本整數生成器中，若 a 為偶數，則 b 為偶數，c 亦為奇數； 若 a 為奇數、b 為偶數，則 c 為奇數；若 a 為奇數、b 為奇數，則 c 為偶數。		引理 16
引理 11	基本整數生成器的結果 b,c 中必有一數為 3 的倍數。		引理 17
引理 12	基本整數生成器的結果 $a+c$ 必為完全平方數。	基本整數生成器的結果 a 必為完全立方數。	引理 18

伍、結論

定理 1　$V_n(s,r)$ 為整係數 s,r 的 $n-1$ 次齊次多項式形如：$V_n(s,r)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i s^{n-1-i}r^i$，其中奇數項係數 $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$，偶數項係數 $a_0,a_2,a_4,\cdots\in\mathbb{Z}$，其中 $a_{4m}>0$，$a_{4m+2}<0$，$a_{4m+1}=a_{4m+3}=0$，$m=0,1,2,\cdots$。

定理 2　$V_n(s,r)$ 遞迴關係 $V_{n+1}(s,r)=sV_n(s,r)-r^2V_{n-1}(s,r),n\geq 2$，$V_1(s,r)=1$，$V_2(s,r)=s$。

設 $t,r,s\in\mathbb{N},(r,s)=1$ 且 $2r>s>r$，以下為 2 倍角三角形之結論：

定理 3　$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 為 2 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

強化定理 3　$a=r^2$，$b=rs$，$c=s^2-r^2$ 為 2 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

定理 4　$a=tr^2$，$b=trs$，$c=t(s^2-r^2)$ 為 2 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

定理 6　若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\dfrac{1}{2}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{3},\angle B\to\dfrac{2\pi}{3}$。

設 $t,r,s\in\mathbb{N},(r,s)=1$ 且 $2r>s>\sqrt{2}r$，以下為 3 倍角三角形之結論：

定理 7　$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**起源**三邊整數生成器。

強化定理 7　$a=r^3$，$b=r(s^2-r^2)$，$c=s(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**全起源**三邊整數生成器，且不重複生成。

定理 8　$a=tr^3$，$b=tr(s^2-r^2)$，$c=ts(s^2-2r^2)$ 為 3 倍角三角形的**全**三邊整數生成器，且不重複生成。

定理 9　若固定 c 的大小，當 $a\to\infty$，$\dfrac{b-a}{c}\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A\to\dfrac{\pi}{4}$，$\angle B\to\dfrac{3\pi}{4}$。

參考文獻

[1]蔡聰明。數學拾貝，三民出版社，二版，臺灣，P.206～P.214，2020 年出版。
[2]陳學儀(2011)，臺北市立第一女子高級中學。從 3, 5, 7 出發–擬畢氏三角形之研究。第三屆丘成桐中學數學獎金牌獎。
[3]郭家愷(2013)，國立宜蘭高級中學。n 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討。第五屆丘成桐中學數學獎佳作獎。
[4]藍宇潔(2023)。Construction of Brahmagupta n-gons by Chebyshev Polynomials。2023 年臺灣國際科學展覽會四等獎。
本研究所有圖片皆為作者經諮詢老師協助，作者使用 Geogebra 軟體自行繪製。