中華民國第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050417

多邊共舞，四方連心

學校名稱： 臺中市立臺中第一高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 吳宥學	李宜展

關鍵詞： 圓內接多邊形、代數與幾何轉換、面積比例轉換迭代法

得獎感言

在複雜之中尋找單純的真理

我研究的靈感，來自一道在數學競賽中遇到的幾何題：如果我們僅知道正多邊形外圍諸多三角形的面積，是否有可能反推出這個多邊形的邊長與總面積？初看之下，這似乎只是單純的幾何計算，但深入思考後，我發現它背後藏有豐富且複雜的數學結構。

我開始思索，是否可以結合幾何與代數，從更高的視角審視這個問題。後來，我建立了一套「幾何—代數雙向轉換模型」，從具象圖形建構出代數數列，再轉化為高次方程式。透過這個模型，我觀察到一個現象：若方程式存在最大的正實根，便能對應一組唯一的多邊形結構；反之，特定形狀的多邊形也對應該高次方程式之根。

這段研究歷時一年半。從最初的面積推導、比例轉換、數列遞迴、高次方程式的建構與驗證，到後來發展出含代數對稱與排列組合概念的理論體系，我甚至自創了一套符號系統，以簡化推導過程。這段歷程不只是數學技巧的淬鍊，更是對思維與耐力的挑戰。

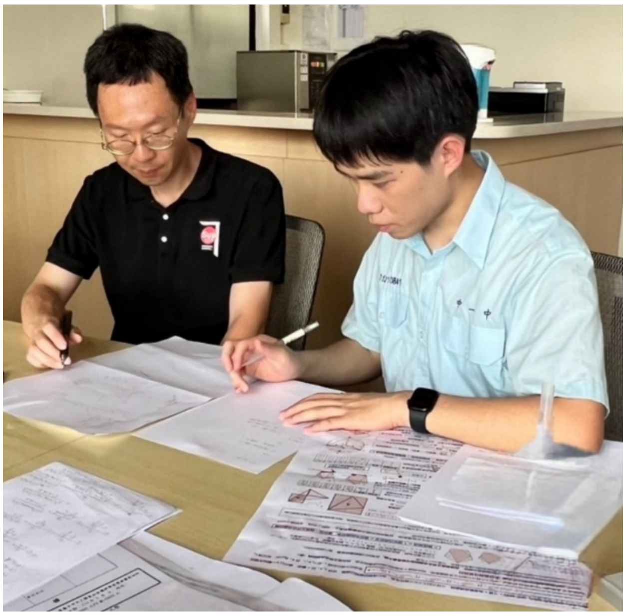
研究過程中，我運用各種工具與策略：面積組合法、數學歸納法、遞迴轉換、高次方程求解、三角函數與幾何變換等，並搭配 GeoGebra 軟體將抽象理論視覺化，驗證其可行性。這些實作讓我深刻體會：「幾何與代數的雙向轉換」常是破解複雜問題的關鍵策略。

在這段歷程中，我衷心感謝我的科展指導老師李宜展老師。在這一年半的專題研究中，他始終以支持與陪伴相隨；每當我遭遇挫折，他總以鼓勵化解我的猶疑，並細心協助我檢驗研究論述的邏輯與嚴謹。正因有他穩固的支持與對我能力的信任，我才能在一次次推翻與重建的循環中，始終保持向前的勇氣與動力。

最讓我難忘的一刻，是我毅然放棄高中畢業旅行，選擇前往清華大學向卓士堯教授請益。當時，這份專題已在中區科展獲得第一名，並取得全國賽資格。同儕歡慶段考結束、準備出遊之際，我獨自踏上求解之路。其實，我與卓教授素未謀面，只是從師長口中得知，幾年前有位學長也曾向他請益。於是我抱著一試的心情寫信給教授，沒想到他爽快地答應了，令我十分感動。

雖然我們僅進行了四次的討論，卓教授耐心陪伴及啟發我思考，讓我在邏輯與直覺之間摸索出脈絡，在幾近卡關之際重新找回信心。正是在那幾次的深入對話後，我進一步釐清了高次未定係數方程式中實根與幾何結構之間的對應關係，並將抽象構想具體化。

回顧這段歷程，我最大的收穫不僅是數學理論上的突破，更是心境的昇華：當問題變得困難時，我是否仍願意堅持思考；當方向看似無解時，我是否能以創意重新出發。這份專題帶給我最深的學習，不在於解題技巧，而是「面對未知時的勇氣」與「不懼困難的堅定」。



前往清華大學向卓士堯教授請益

與科展指導教師李宜展老師合影

於全國科展時與自己的展版合影

多邊共舞，四方連心

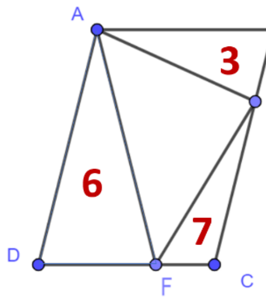
摘要

本研究探討在正 n 邊形及圓內接多邊形構形中，若已知外圍三角形面積，是否可反推原構形的邊長與面積。研究建立一套幾何與代數互相轉換的流程，透過面積比例推導遞迴數列，進而構建高次方程，並提出新符號 T_P^Q 及 ${U_n}_q^p$ 表示不相鄰乘積和，以簡化代數結構。進一步運用數學歸納法與極值邏輯，成功證明：當高次方程式具有正實根時，其最大正實根必定對應唯一的多邊形限定構形；反之，若多邊形限定構形存在，也可唯一對應於高次方程式之最大正實根。此研究不僅提供幾何反推的系統化解法，也為代數方程的幾何詮釋建立明確模型，具備理論價值與推廣潛力。

壹、 前言

一、 研究動機

2021 年 APMO 初試中有一道有趣的題目：給定一個平行四邊形（如圖 1），已知外圍三角形 $\triangle ABE$、$\triangle ADF$、$\triangle CEF$ 的面積分別為 3、6、7，那麼中間 $\triangle AFE$ 的面積為多少？



(圖1，由作者親自繪製)

當時看到老師的解法是用代數設邊長，再解聯立方程式，但是我覺得稍嫌繁瑣，遂想了「面積組合法」提出另解。後因老師請我們發想專題研究的主題，於是我由此題出發，嘗試將其推廣至 n 邊形；然而「面積組合法」雖然簡潔，但只適用於正四邊形及平行四邊形，於是我又再想了第三個方法，利用「面積和線段比例不斷堆疊」的概念破題，此法具備一般性，並能推廣至正 n 邊形以及圓內接 n 邊形。

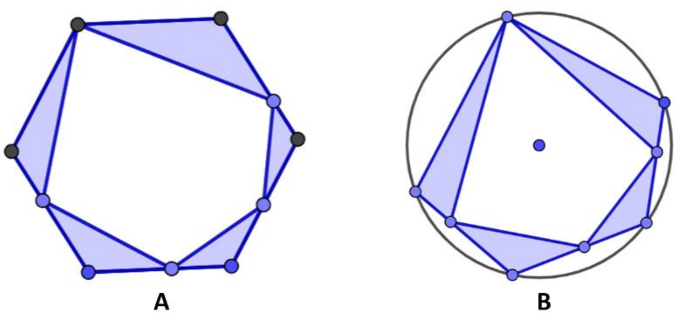
二、 研究目的

本研究探討：

(一) 有一未知面積之正 n 邊形，在內嵌 $n-1$邊形的情況中，如果外圍諸多三角形面積皆已知，則此正 n 邊形的總面積 S_n是多少？
（圖 2A 為當 $n=6$ 的示意圖）

(二) 有一未知面積之圓內接 n 邊形，在內嵌$n-1$邊形的情況中，如果外圍諸多三角形面積皆已知，則此圓內接 n 邊形的總面積 S_n 是多少。
（圖 2B 為當 $n=5$ 的示意圖）

(註)：原本之研究動機欲求內嵌 $n-1$ 邊形之面積，然因外圍諸多三角形面積皆已知，因此命題等價於欲求 n 邊形的總面積 S_n。



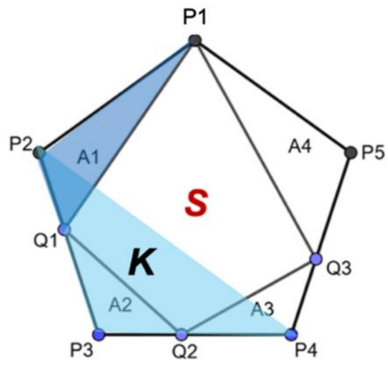
(圖2，由作者親自繪製)

貳、 研究設備及器材

紙、筆、GeoGebra 電腦程式

參、 研究過程或方法

一、名詞介紹：



(圖3，由作者親自繪製)

(一) S_n：正 n 邊形的面積

(二) S：內嵌 $n-1$ 邊形的面積

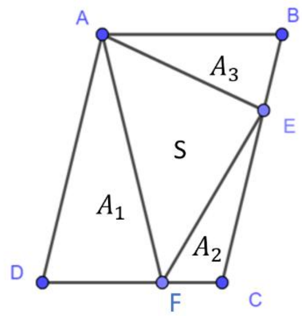
(三) $\triangle XYZ$：三角形 XYZ 的面積

(四) 指定點：正 n 邊形和 $n-1$ 邊形的共用頂點（圖 3 之 P_1）

(五) K_n：$\frac{\triangle P_1P_2P_3}{S_n}$（即正 n 邊形相鄰兩邊所圍成之三角形面積與正 n 邊形總面積 S_n 之比值）（如圖 3）

二、初始題目解法探究：

(一) 原解：代數聯立方程法



(圖4，由作者親自繪製)

令外圍三角形面積：

$\triangle ADF = A_1$，$\triangle CFE = A_2$，$\triangle ABE = A_3$，$\triangle AFE = S$（如圖 4）

我們設 $\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = x$，$\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = y$：

專注於 $\triangle ADF$與$\triangle CFE$，如果以 $\overline{DF}$、$\overline{FC}$ 當作底，

則 A、E 到 $\overline{CD}$ 的距離就是高，而這兩個高之比等於 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$，

因此：

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\triangle ADF}{\triangle CFE} = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = x \times \frac{y+1}{y} \Rightarrow x = \frac{A_1 y}{A_2(y+1)} \ldots\ldots (1)$$

接著我們看 $\triangle CFE$和$\triangle ABE$，同理，得到：

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\triangle CFE}{\triangle ABE} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = y \times \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_3}(x+1) \ldots\ldots (2)$$

(1) 代入 (2)，推得：

$$y = \frac{A_2}{A_3}(x+1) = \frac{A_2}{A_3}\left(\frac{A_1 y}{A_2(y+1)} + 1\right)$$

$$\Rightarrow A_3 y(y+1) = A_2(y+1) + A_1 y$$

$$\Rightarrow A_3 y^2 + (A_3 - A_1 - A_2)y - A_2 = 0$$

$\Rightarrow y=\frac{A_1+A_2-A_3\pm\sqrt{(A_1+A_2-A_3)^2+4A_2A_3}}{2A_3}$ (負不合)

又 $\triangle ABE\times\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}=A_3\times(y+1)=A_3\times\frac{A_1+A_2+A_3+\sqrt{(A_1+A_2-A_3)^2+4A_2A_3}}{2A_3}=\frac{A_1+A_2+A_3+S}{2}$

經化簡整理可得 $S=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3}$

(二) 另解 1：面積組合法

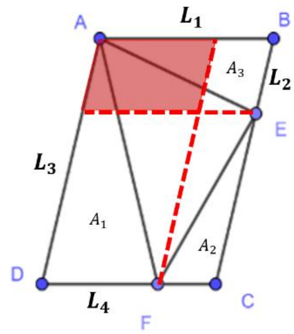
令 $\overline{AB}=L_1$ ，$\overline{BE}=L_2$， $\overline{AD}=L_3$， $\overline{DF}=L_4$，$\sin\angle ABC=r$ （如圖 5）
首先，整個平行四邊形面積應為 L_1L_3r，如果將每一個三角形翻轉成相對應之平行四邊形再扣掉重複的面積 L_2L_4r 即得到總面積，我們把它寫成算式：

$$2(A_1+A_2+A_3)-L_2L_4r=A_1+A_2+A_3+S$$

$\Rightarrow L_2L_4r=A_1+A_2+A_3-S$ ……(1)

接下來把已知條件列出

$$\begin{cases} L_1L_3r=A_1+A_2+A_3+S & \cdots\cdots(2)\\ L_1L_2r=2\triangle ABE=2A_3 & \cdots\cdots(3)\\ L_3L_4r=2\triangle ADF=2A_1 & \cdots\cdots(4)\end{cases}$$



(圖5 ，由作者親自繪製)

易知 $(3)\times(4)=(1)\times(2)$
因此：$4A_1A_3=(A_1+A_2+A_3-S)(A_1+A_2+A_3+S)$
$\Rightarrow 4A_1A_3=(A_1+A_2+A_3)^2-S^2$
$\Rightarrow S^2=(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3$

$\Rightarrow S=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3}$

(三) 另解 2：面積轉換比例線段法

本解法的精髓在於利用梯形和三角形的面積比例建構一條 S 的方程式，設 $\overline{AB}$ 到 $\overline{CD}$ 的距離為h。梯形 $ABCF$ 面積為 $\frac{h(\overline{AB}+\overline{FC})}{2}$，其值為 A_2+A_3+S（如圖 6）。接著 $\triangle ADF$ 的面積為 $h\times\frac{\overline{DF}}{2}$，其值為 A_1，我們知道 $\triangle ADF$ 和梯形 $ABCF$ 面積比等於
$A_1:(A_2+A_3+S)$ ，進而推得 $\overline{DF}:\overline{FC}$ 為 $2A_1:(A_2+A_3+S-A_1)$，
故 $\overline{CF}:\overline{CD}$ 為 $(A_2+A_3+S-A_1):(A_1+A_2+A_3+S)$，利用此法亦推得 $\overline{BE}:\overline{EC}$ 為 $2A_3:(A_1+A_2+S-A_3)$，$\overline{CE}:\overline{CB}=(A_1+A_2+S-A_3):(A_1+A_2+A_3+S)$

最後再由 △ CFE $\times\frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}=\frac{A_1+A_2+A_3+S}{2}$

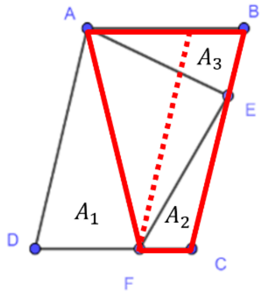
$\Rightarrow A_2\times\frac{A_1+A_2+A_3+S}{A_2+A_3+S-A_1}\times\frac{A_1+A_2+A_3+S}{A_1+A_2+S-A_3}=\frac{A_1+A_2+A_3+S}{2}$

$\Rightarrow 2A_2(A_1+A_2+A_3+S)=(A_2+A_3+S-A_1)(A_1+A_2+S-A_3)$

$\Rightarrow 2A_2S+2A_2(A_1+A_2+A_3)$

$=S^2+2A_2S+(A_2+A_3-A_1)(A_1+A_2-A_3)$

$\Rightarrow S^2=2A_2(A_1+A_2+A_3)-(A_2+A_3-A_1)(A_1+A_2-A_3)$



(圖6 ，由作者親自繪製)

觀察到 $A_1+A_2+A_3$ 重複出現 ，令 $(A_1+A_2+A_3)=Q$

$S^2=2A_2Q-(Q-2A_1)(Q-2A_3)$

$=2A_2Q-(Q^2-2A_1Q-2A_3Q+4A_1A_3)=-Q^2+2Q^2-4A_1A_3$

$\Rightarrow S=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3}$

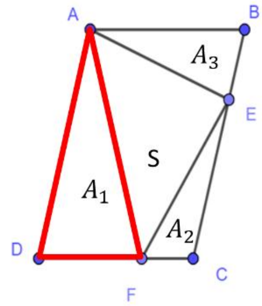
(四) 另解 3：從三角形面積迭代轉換為總面積法

⇒ 從另解 2 得到之啟發（如圖 7）

$2A_1\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DF}}=A_1+A_2+A_3+S$

$\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}=\frac{2A_1}{(A_1+A_2+A_3+S)}\Rightarrow\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}=1-\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$

$=1-\frac{2A_1}{(A_1+A_2+A_3+S)}=\frac{-A_1+A_2+A_3+S}{A_1+A_2+A_3+S}$



(圖7 ，由作者親自繪製)

$2A_2\times\frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}=(A_1+A_2+A_3+S)$

$\Rightarrow\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}\times A_2\times\frac{2}{A_1+A_2+A_3+S}=\frac{A_1+A_2+A_3+S}{(-A_1+A_2+A_3+S)}\times A_2\times\frac{2}{A_1+A_2+A_3+S}=\frac{2A_2}{-A_1+A_2+A_3+S}$

$\Rightarrow\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=1-\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{-A_1-A_2+A_3+S}{(-A_1+A_2+A_3+S)}$

$2A_3\times\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}=A_1+A_2+A_3+S$

$2A_3\times\frac{-A_1+A_2+A_3+S}{-A_1-A_2+A_3+S}=A_1+A_2+A_3+S$

我們同樣令 $A_1+A_2+A_3=Q$

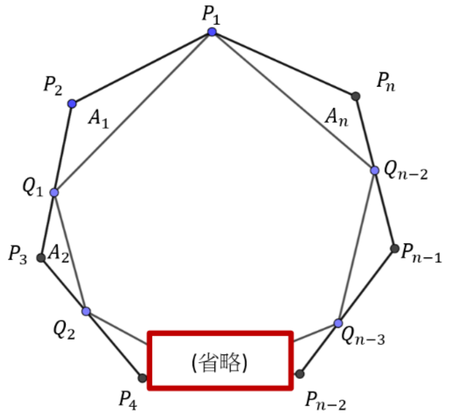
則 $2A_3(S+Q-2A_1)=(S-Q+2A_3)(Q+S)$

$S^2-Q^2=-4A_1A_3$

$S=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3}$

三、一般化的導向

既然平行四邊形及正方形解得出來，我思考五邊形、六邊形，甚至 n 邊形是否亦能解得出來，然而想要一般化就必須做些限制，考量到沒有平行奇數邊形的存在，我將此題延伸為正 n 邊形中內嵌 $n-1$ 邊形，若知道外圍諸多三角形的面積，則嘗試推導正 n 邊形的總面積S_n。接著給出更精細的定義及條件：



(圖8 ，由作者親自繪製)

如圖 8：一個正 n 邊形內嵌$n-1$邊形，指定點為 P_1，逆時針方向的頂點命名為 $P_{1,}\,P_2,\ P_{3,}\,P_4,\cdots\ P_n$，而$n-1$邊形的頂點從指定點開始逆時針方向依序為 $Q_1,\ Q_2,Q_3,$ $Q_4,\cdots Q_{(n-2)}$。若外圍的三角形面積由指定點 P_1 開始，逆時針依序為 $A_1,\ A_2,\ A_3,$ $A_4,\cdots A_{(n-1)}$，則正 n 邊形的總面積 S_n 為多少？

解決本題前，我們需要求得一個**關鍵數值 K_n**，K_n 是正 n 邊形中相鄰兩邊所形成的三角形之面積與 S_n 的比值，我們先簡化題目，由於四邊形太單純，拿較複雜的五邊形實驗（如圖 9）：

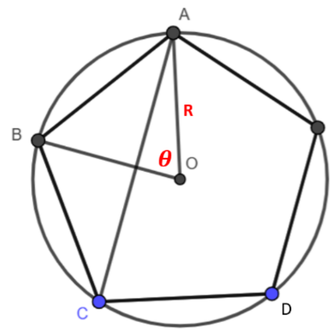
$\angle AOB=\theta$ ，$\overline{AO}=R\ \Rightarrow \angle ABC=180-\theta$ 且 $\triangle AOB=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

$$\because\ \overline{AB}=\overline{BC}=2R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}(2R\sin\frac{\theta}{2})^2\sin(180-\theta)$$

$$K_5=\frac{\triangle ABC}{5\triangle AOB}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(2R\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sin(180-\theta)}{5\times\frac{1}{2}R^2\sin\theta}=\frac{4}{5}(\sin\frac{\theta}{2})^2$$



(圖9 ，由作者親自繪製)

而其中所有會變的符號就只有 n ，也就是邊數，因此 **K_n 的公式為：**

$$K_n=\frac{4}{n}(\sin\frac{\pi}{n})^2$$

且由前述定義 S_nK_n 為正 n 邊形由相鄰兩邊圍成之三角形面積，由於給定正 n 邊形之邊數 n 之後，K_n 即可求出，故**原命題我們欲求 S_n 等價於求出 S_nK_n 的值（根）**

解決了 K_n 的問題，現在開始推導公式：
雖然四邊形十分容易，但為了看出連貫性，依然推導一次（如圖 10）：

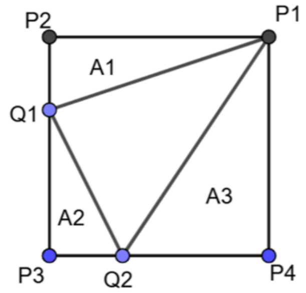
$$S_4K_4 \times \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_3P_2}} = A_1 \Rightarrow \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{A_1}{S_4K_4} \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{S_4K_4-A_1}{S_4K_4}$$

$$S_4K_4 \times \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_3P_2}} \times \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_2 \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \frac{A_2}{S_4K_4} \times \frac{S_4K_4}{S_4K_4-A_1} = \frac{A_2}{S_4K_4-A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \frac{S_4K_4-A_1-A_2}{S_4K_4-A_1}$$

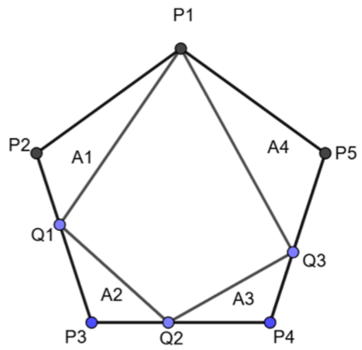
$$S_4K_4 \times \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_3 \Rightarrow S_4K_4 \times \frac{S_4K_4-A_1-A_2}{S_4K_4-A_1} = A_3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{(S_4K_4)^2 - (A_1+A_2+A_3)\, S_4K_4 + A_1A_3 = 0}$$



(圖10 ，由作者親自繪製)

我們不把根寫出來，因為在邊長數目增加的情況下，方程式 (S_nK_n) 的次數也會增加，而**五次方以上方程式的根並無公式解**，故先以方程式表示。
接下來是正五邊形的推導（如圖 11）：推導過程：仿照四邊形的模式



(圖11 ，由作者親自繪製)

$$S_5K_5 \times \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = A_1 \Rightarrow \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{A_1}{S_5K_5} \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{S_5K_5-A_1}{S_5K_5}$$

$$S_5K_5 \times \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} \times \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_2 \Rightarrow \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \frac{S_5K_5-A_1-A_2}{S_5K_5-A_1}$$

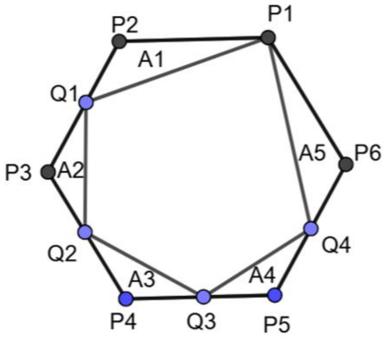
$$S_5K_5 \times \left(\frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}}\right) \times \left(\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right) = A_3 \Rightarrow S_5K_5 \times \left(\frac{S_5K_5-A_1-A_2}{S_5K_5-A_1}\right) \times \left(\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right) = A_3$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}} = \frac{S_5K_5(S_5K_5-A_1-A_2)-(S_5K_5-A_1)(A_3)}{S_5K_5(S_5K_5-A_1-A_2)}$$

$$S_5K_5 \times \left(\frac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right) = S_5K_5 \times \left(\frac{S_5K_5(S_5K_5-A_1-A_2)-(S_5K_5-A_1)(A_3)}{S_5K_5(S_5K_5-A_1-A_2)}\right) = A_4$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{(S_5K_5)^2 - (A_1+A_2+A_3+A_4)\, S_5K_5 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4 = 0}$$

不難發現，其實各個邊的邊長比例形式（$\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}}$、$\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}}$、$\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}$ ⋯）中，後項與前項似乎存在特定之關係，我們觀察六邊形的情況以獲取更多資訊推論（如圖 12）。



(圖12 ，由作者親自繪製)

$$S_6K_6 \times \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = A_1 \Rightarrow \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{A_1}{S_6K_6} \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{S_6K_6-A_1}{S_6K_6}$$

$$S_6K_6 \times \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} \times \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \frac{S_6K_6-A_1-A_2}{S_6K_6-A_1}$$

$$S_6K_6 \times \left(\frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}}\right)\left(\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right) = A_3$$

$$\Rightarrow S_6K_6 \times \left(\frac{S_6K_6-A_1-A_2}{S_6K_6-A_1}\right)\left(\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right) = A_3 \Rightarrow \frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}} = \frac{(S_6K_6-A_1)(A_3)}{S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)}$$

$$\frac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}} = \frac{S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)-(S_6K_6-A_1)(A_3)}{S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)}$$

$$S_6K_6 \times \left(\frac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}}\right)\left(\frac{\overline{P_5Q_4}}{\overline{P_5P_6}}\right) = S_6K_6 \times \left(\frac{S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)-(S_6K_6-A_1)(A_3)}{S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)}\right)\left(\frac{\overline{P_5Q_4}}{\overline{P_5P_6}}\right) = A_4$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_5Q_4}}{\overline{P_5P_6}} = \frac{S_6K_6(S_6K_6 - A_1-A_2)(A_4)}{S_6K_6[S_6K_6(S_6K_6 - A_1-A_2) - (S_6K_6 - A_1)(A_3)]}$$

$$\left(\frac{\overline{P_6Q_4}}{\overline{P_5P_6}}\right) = \frac{S_6K_6[S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)-(S_6K_6-A_1)(A_3)]-S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)A_4}{S_6K_6[S_6K_6(S_6K_6-A_1-A_2)-(S_6K_6-A_1)(A_3)]}$$

$S_6K_6 \times \left(\frac{\overline{P_6Q_4}}{\overline{P_5P_6}}\right) = A_5$，令 $S_6K_6 = x$，

則其三次方程式如下：

$$\boldsymbol{(x)^3 - (A_1 + A_2 + A_3+A_4 + A_5)\,(x)^2 + (A_1A_3 + A_1A_4 + A_1A_5+A_2A_4+A_2A_5+A_3A_5)\,(x) - A_1A_3A_5} = 0$$

經由觀察，剛剛提到的**「後項與前項之關係」可以用數列來表示：**
建立一個新數列 r，其由各個邊長的線段比例所構成：

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	⋯	r_{n-2}
$\frac{A_1}{S_nK_n} = \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}}$	$\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}}$	$\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}$	$\frac{\overline{P_5Q_4}}{\overline{P_5P_6}}$	$\frac{\overline{P_6Q_5}}{\overline{P_6P_7}}$	⋯	$\frac{\overline{P_{n-1}Q_{n-2}}}{\overline{P_{n-1}P_n}} = 1 - \frac{A_{n-1}}{S_nK_n}$

也就是說，只要知道此數列的最後一項，

就可以**藉由 $\boldsymbol{r_{n-2} = \frac{\overline{P_{n-1}Q_{n-2}}}{\overline{P_{n-1}P_n}} = 1 - \frac{A_{n-1}}{S_nK_n}}$ 這條關係式得出方程式**了。

而**此數列存在遞迴式**如下：

$$\begin{cases} r_1 = \frac{A_1}{S_n K_n} \\ r_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{S_n K_n (1-r_m)} \end{cases}$$

由於遞迴式存在倒數，我們**分奇項偶項**觀察。

(一) 奇數項的情形：

$$r_1 = \frac{A_1}{S_n K_n} ,$$

$$r_3 = \frac{S_n K_n A_3 - A_1 A_3}{(S_n K_n)^2 - (A_1 + A_2) S_n K_n} ,$$

$$r_5 = \frac{(S_n K_n)^2 A_5 - (S_n K_n)(A_1 A_5 + A_2 A_5 + A_3 A_5) + A_1 A_3 A_5}{(S_n K_n)^3 - (S_n K_n)^2 (A_1 + \cdots + A_4) + (S_n K_n)(A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_2 A_4)}$$

$$r_7 = \frac{(S_n K_n)^3 A_7 - (S_n K_n)^2 (A_1 A_7 + A_2 A_7 + A_3 A_7 + A_4 A_7 + A_5 A_7) + S_n K_n (A_1 A_3 A_7 + A_1 A_4 A_7 + A_1 A_5 A_7 + A_2 A_4 A_7 + A_2 A_5 A_7 + A_3 A_5 A_7) - A_1 A_3 A_5 A_7}{(S_n K_n)^4 - (S_n K_n)^3 (A_1 + \cdots + A_6) + (S_n K_n)^2 (A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_1 A_5 + A_1 A_6 + A_2 A_4 + A_2 A_5 + A_2 A_6 + A_3 A_5 + A_3 A_6 + A_4 A_6) - S_n K_n (A_1 A_3 A_5 + A_1 A_3 A_6 + A_1 A_4 A_6 + A_2 A_4 A_6)}$$

發現到

$$(A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_2 A_4)$$
$$(A_1 A_5 + A_2 A_5 + A_3 A_5)$$
$$(A_1 A_3 A_5 + A_1 A_3 A_6 + A_1 A_4 A_6 + A_2 A_4 A_6)$$
$$(A_1 A_3 A_7 + A_1 A_4 A_7 + A_1 A_5 A_7 + A_2 A_4 A_7 + A_2 A_5 A_7 + A_3 A_5 A_7)$$

等不好處理，因此我們**引進一個新符號 $T_P^Q, P \leq \frac{Q+1}{2}$**，

而其意義為 $A_1, A_2 \ldots A_Q$ 中取 P 個互不相鄰的項相乘，其所有組合之和，舉個例子：

$$T_2^4 = A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_2 A_4 ,$$

$$T_3^6 = A_1 A_3 A_5 + A_1 A_3 A_6 + A_1 A_4 A_6 + A_2 A_4 A_6$$

$$T_4^8 = A_1 A_3 A_5 A_7 + A_1 A_3 A_5 A_8 + A_1 A_3 A_6 A_8 + A_1 A_4 A_6 A_8 + A_2 A_4 A_6 A_8$$

有了這個符號，可將上述項簡化和遞推：

$$r_1 = \frac{A_1}{S_n K_n} ,$$

$$r_3 = \frac{S_n K_n A_3 - T_2^3}{(S_n K_n)^2 - (T_1^2) S_n K_n} ,$$

$$r_5 = \frac{(S_n K_n)^2 A_5 - (S_n K_n)(T_2^5 - T_2^4) + T_3^5}{(S_n K_n)^3 - (S_n K_n)^2 (T_1^4) + (S_n K_n)(T_2^4)}$$

$$r_7 = \frac{(S_n K_n)^3 A_7 - (S_n K_n)^2 (T_2^7 - T_2^6) + S_n K_n (T_3^7 - T_3^6) - T_4^7}{(S_n K_n)^4 - (S_n K_n)^3 (T_1^6) + (S_n K_n)^2 (T_2^6) - S_n K_n (T_3^6)}$$

經由觀察和歸納，我們可以猜出 r_m 的表示式可能如下：$m < n, m \in N$，

此時 m 為奇數

$$r_m=\frac{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m-T_2^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right)\pm T_{\frac{m+1}{2}}^{m}}{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^2\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right)\pm(S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}}$$

我們使用數學歸納法證明，因此把 r_{m+2} 的可能形式寫出來

$$r_{m+2}=\frac{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}A_{m+2}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-2}(T_2^{m+2}-T_2^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m+1}{2}}^{m+2}-T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}\right)\mp T_{\frac{m+3}{2}}^{m+2}}{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}(T_1^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^2\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m+1}\right)\mp(S_nK_n)T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}}$$

利用遞迴式把奇數項的關係寫出來

$$r_{m+2}=\frac{A_{m+2}-A_{m+2}r_m}{S_nK_n-S_nK_nr_m-A_2}$$

我們只需將 r_{m+2} 的預測值帶入此式子檢驗是否成立就能證明了。

直接展開如下：

$$\frac{A_{m+2}-A_{m+2}\dfrac{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m-T_2^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right)\pm T_{\frac{m+1}{2}}^{m}}{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right)\pm(S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}}}{S_nK_n-S_nK_n\dfrac{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m-T_2^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right)\pm T_{\frac{m+1}{2}}^{m}}{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right)\pm(S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}}-A_{m+1}}$$

把分母乘開得：

$$\frac{(A_{m+2})\left[(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right)\pm(S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}-((S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m-T_2^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right)\pm T_{\frac{m+1}{2}}^{m})\right]}{(S_nK_n-A_{m+1})\left[(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right)\pm(S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right]-(S_nK_n)\left[(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m-T_2^{m-1})+\cdots\mp(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right)\pm T_{\frac{m+1}{2}}^{m}\right]}$$

$$=r_{m+2}=\frac{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}A_{m+2}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-2}(T_2^{m+2}-T_2^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m+1}{2}}^{m+2}-T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}\right)\mp T_{\frac{m+3}{2}}^{m+2}}{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}(T_1^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m+1}\right)\mp(S_nK_n)T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}}$$

和預測的值一樣，因此奇數項公式證完了。

$$r_{m+2}=\frac{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}A_{m+2}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-2}(T_2^{m+2}-T_2^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m+1}{2}}^{m+2}-T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}\right)\mp T_{\frac{m+3}{2}}^{m+2}}{(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+3}{2}-1}(T_1^{m+1})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m+1}\right)\mp(S_nK_n)T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}}$$

代入遞迴式：$r_{m+1}=\frac{A_{m+1}}{S_nK_n(1-r_m)}$，同理我們求得

(二) 偶數項的情形：

$$r_{m+1}=\frac{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_{m+1}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^{m+1}-T_2^{m})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m+1}-T_{\frac{m-1}{2}}^{m}\right)\mp(T_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}-T_{\frac{m+1}{2}}^{m})}{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^{m}\right)\mp T_{\frac{m+1}{2}}^{m}}$$

代入最初公式，$r_{n-2}=\frac{\overline{P_{n-2}Q_{n-2}}}{\overline{P_{n-1}P_n}}=1-\frac{A_{n-1}}{S_nK_n}\Rightarrow 1-r_{n-2}=\frac{A_{n-1}}{S_nK_n}$，m 代入$n-3$，

$$\frac{\left[(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-1}(T_1^{n-3})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{n-4}{2}}^{n-3}\right)\mp T_{\frac{n-2}{2}}^{n-3}\right]-\left[(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-1}A_{n-2}-(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-2}(T_2^{n-2}-T_2^{n-3})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{n-4}{2}}^{n-2}-T_{\frac{n-4}{2}}^{n-3}\right)\mp\left(T_{\frac{n-2}{2}}^{n-2}-T_{\frac{n-2}{2}}^{n-3}\right)\right]}{(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-1}(T_1^{n-3})+\cdots\pm(S_nK_n)^1\left(T_{\frac{n-4}{2}}^{n-3}\right)\mp T_{\frac{n-2}{2}}^{n-3}}=\frac{A_{n-1}}{S_nK_n}$$

$$\Rightarrow(S_nK_n)^{\frac{n}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{n}{2}-1}(T_1^{n-2})+(S_nK_n)^{\frac{n}{2}-2}(T_2^{n-2})-\cdots\mp S_nK_n\left(T_{\frac{n-2}{2}}^{n-3}\right)=A_{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}}-(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-1}(T_1^{n-1}-T_1^{n-2})+(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}-2}(T_2^{n-1}-T_2^{n-2})-\cdots\mp A_{n-1}\left(T_{\frac{n-2}{2}}^{n-3}\right)$$

移項之後我們就得到方程式的形態如下：

當 n 為奇數的情況：

$$(S_nK_n)^{\frac{n-1}{2}}-T_1^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-3}{2}}+T_2^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-5}{2}}-T_3^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-7}{2}}\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}T_{\frac{n-1}{2}}^{n}=0$$

當 n 為偶數的情況：

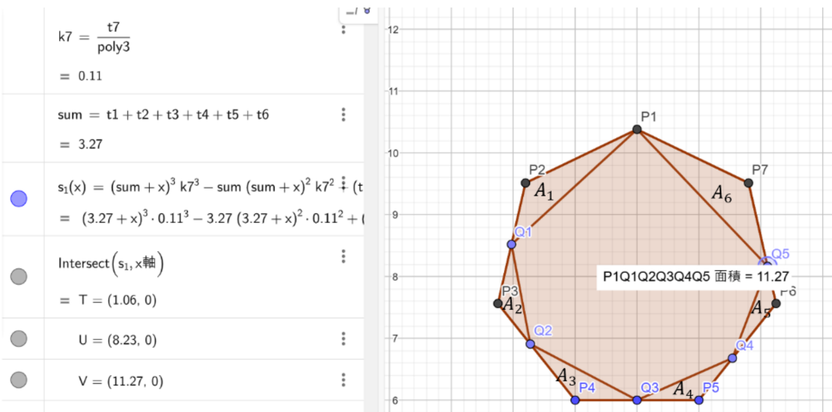
$$(S_nK_n)^{\frac{n}{2}}-T_1^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-2}{2}}+T_2^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-4}{2}}-T_3^{n-1}(S_nK_n)^{\frac{n-6}{2}}\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}T_{\frac{n}{2}}^{n-1}=0$$

※我們可以使用高斯符號將其歸納為以下公式，並將 S_nK_n 以 x 表示：

$$(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]}-T_1^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+T_2^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}-T_3^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\ldots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}T_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}=0$$

由於上面的高次方程式結構相當複雜，為了再度驗證上面這個方程式的正確性，我們以 GeoGebra 程式進行繪圖，證明其在正七邊形（如圖 13）與正八邊形（如圖 14）的例子下亦可以成立。

正七邊形：

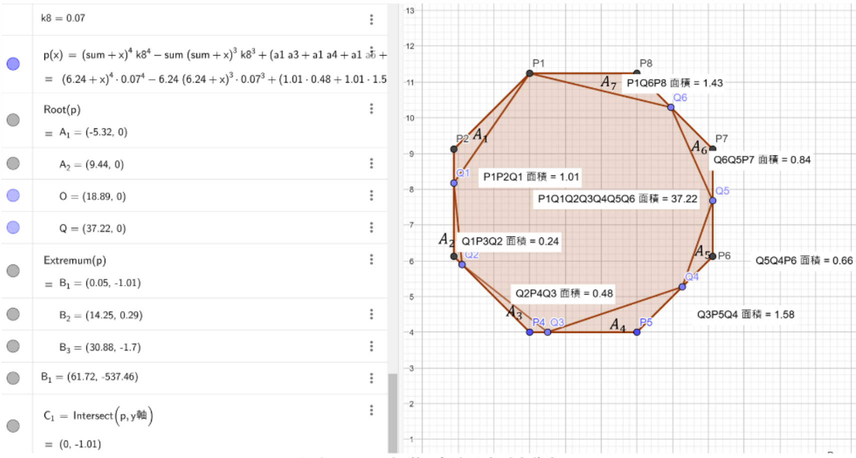


(圖13，由作者親自繪製)

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0.8	0.32	0.45	0.34	0.27
A_6	S	S 的第一根	S 的第二根	S 的第三根
1.08	11.27	1.06	8.23	11.27

如圖 13 及上表，在正七邊形的方程式為（S_7K_7）的 3 次方程式（S_7 = $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+S$），以 GeoGebra 程式運算出來的根（$S$）有三個值，其中**最大的正實根（S 的第三根）**，為滿足給定已知面積 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 的正七邊形（內嵌六邊形構形）的面積 S。

正八邊形：



(圖14 ，由作者親自繪製)

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1.01	0.24	0.48	1.58	0.66	0.84
A_7	S	S 的第一根	S 的第二根	S 的第三根	S 的第四根
1.43	37.22	-5.32	9.44	18.79	37.22

如圖 14 及上表，在正八邊形的方程式為（S_8K_8）的 4 次方程式（$\boldsymbol{S_8}$ = A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+ S），以 GeoGebra 程式運算出來的根（S）有四個值，其中**最大的正實根（S 的第四根）**，為滿足給定已知面積 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7 的正八邊形（內嵌七邊形構形）的面積 S。

然而知道方程式後，我們只知道它是其中的根，但不知道它是哪個根，因此透過這個結論無法知道 $\boldsymbol{x}$ 是多少，我們會在『討論（Discussion）段落』來探討它是哪個根。

四、嘗試探討更一般化的圓內接 n 邊形

命題：一圓內接 n 邊形，若各點、面積接續前部分正多邊形的命名法則，自指定點逆時針的「邊長比」依序為 $\boldsymbol{L_1 : L_2 : L_3 : L_4 \ldots : L_n}$，此圓內接 n 邊形的總面積 $\boldsymbol{S_n}$ 為多少？

我們會運用餘弦定理、正弦定理來破題

(一) 先探討較單純的圓內接四邊形情況：

若四邊形外圍三角形的面積分別為 A_1、A_2、A_3（如圖 15），

且各邊長分別為 L_1t、L_2t、L_3t、L_4t ，則 $\triangle P_1Q_1Q_2$ 的面積 S 為多少？

〔註〕A_1、A_2、A_3 為已知；L_1、L_2、L_3、L_4 為已知，然而「t 為未知」。待求滿足結構條件的四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 以及 $\triangle P_1Q_1Q_2$ 之面積。

解：雖然在非正多邊形的情況下 K_n 不是定值，但我們還是能使用 K_n 的概念進行解題。

令包含 A_i 的三角形與總面積 S_4 的比值為 K_i ，其中i為介於1至$n-1$的正整數，透過三角函數基本定理 $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$ ，

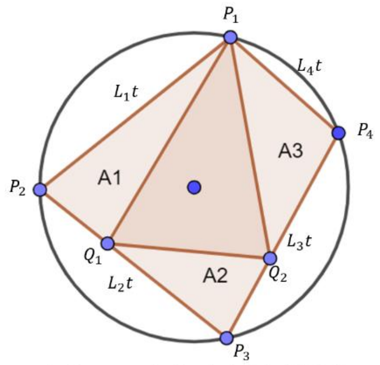
$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} L_1L_2t^2 \sin\theta$ 即能推斷兩相對三角形之面積比為邊長乘積比，即

$\triangle P_1P_2P_3 : \triangle P_1P_4P_3 = L_1L_2 : L_3L_4$；$\triangle P_2P_1P_4 : \triangle P_2P_3P_4 = L_1L_4 : L_2L_3$，

因此 K_i 就求出來了：

$$K_1 = \frac{L_1L_2}{L_1L_2+L_3L_4} \text{、} K_2 = \frac{L_2L_3}{L_2L_3+L_1L_4} \text{、} K_3 = \frac{L_3L_4}{L_1L_2+L_3L_4}$$

再根據我們之前的作法：



(圖15 ，由作者親自繪製)

$$S_4K_1 \times \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = A_1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{A_1}{S_4K_1} \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{S_4K_1-A_1}{S_4K_1}$$

$$S_4K_2 \times \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} \times \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \frac{A_2}{S_4K_2} \times \frac{S_4K_1}{S_4K_1-A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = 1 - \frac{A_2K_1}{K_2(S_4K_1-A_1)} = \frac{(S_4K_1-A_1)K_2-A_2K_1}{(S_4K_1-A_1)K_2}$$

$$S_4K_3 \times \frac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_3 \Rightarrow \frac{K_2(S_4K_1-A_1)-A_2K_1}{K_2(S_4K_1-A_1)} = \frac{A_3}{S_4K_3}$$

$$\Rightarrow S_4K_3K_2(S_4K_1-A_1) - S_4K_3A_2K_1 = A_3K_2(S_4K_1-A_1)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K_1K_2K_3(S_4)^2 - (K_2K_3A_1 + K_1K_3A_2 + K_1K_2A_3)\ S_4 + K_2A_1A_3 = 0}$$

我們可以發現，此方程式的形態與前述正四邊形的方程式形態十分類似（參第 7 頁），只不過在正四邊形的特例中，$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \frac{1}{2}$，並且我們使用相同的解題程序（使用 K_i 的概念，並以面積比例迭代法轉換成方程式以求其根）得到了這樣一條式子。

在圓內接四邊形的情況，若四個邊長均為「已知」，則因為存在「婆羅摩笈多公式」，故我們可以輕易解得圓內接四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 之面積，再由其減去 $(A_1+A_2+A_3)$ 即可求出中間 S 的面積，故本命題變為過度簡單而沒有解決意義，因此我們假設在圓內接四邊形的情況，僅已知「四個邊長的相對比例為 $L_1 : L_2 : L_3 : L_4$」，而不知其明確之數值，也就是允許此四邊形可以在邊長比例固定的情況放大和縮小，於此條件下來探討初始問題。

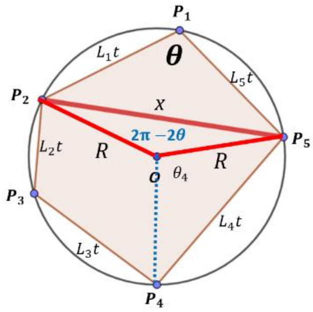
我們假設四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 的邊長分別為 L_1t、L_2t、L_3t、L_4t（如圖 15），其中 L_1、L_2、L_3、L_4 為已知，但是 t 未知，而外圍三角形面積仍為 A_1、A_2、A_3，求 $\triangle P_1Q_1Q_2$ 的面積 S。

由於 $K_1=\frac{L_1L_2}{L_1L_2+L_3L_4}$ 、$K_2=\frac{L_2L_3}{L_2L_3+L_1L_4}$ 、$K_3=\frac{L_3L_4}{L_1L_2+L_3L_4}$ ，故 K_1 、K_2、K_3 均為已知，且 A_1 、A_2 、A_3 亦為已知，因此我們仿照正四邊形的解法，**可以解得 S_4**：

$$K_1K_2K_3(S_4)^2-(K_2K_3A_1+K_1K_3A_2+K_1K_2A_3)\ S_4+K_2A_1A_3=0$$

然而知道方程式後，我們只知道它是其中的根，但不知道它是哪個根，因此透過這個結論無法知道 S_4 是多少，我們會在『討論（Discussion）段落』來探討它是哪個根。

(二) 在圓內接五邊形的情況：



(圖16 ，由作者親自繪製)

在圓內接五邊形的情況，由於目前沒有已知由邊長推得五邊形面積的公式解，考量到我本身的能力，在現階段恐怕也沒辦法解決這個當代數學的未解之謎，因此我**打算先探討「已知」此五邊形「指定點的頂角 θ」以及「五邊的邊長比(亦即已知 $L_1:L_2:L_3:L_4:L_5$)」這個單純化的情況**；**這對應前面「圓內接正多邊形」的情況，也就是「已知多邊形邊長的比例條件（對應於在正多邊形的各邊長比例皆為 1)」加上「已知其中一個多邊形的頂角角度 [對應於在正多邊形的頂角皆為（$\pi-\frac{2\pi}{n}$）」**，我們來**探討中間所內嵌的四邊形面積 S，以及此圓內接五邊形的總面積 S_5**。

[註：$S_5=S+A_1+A_2+A_3+A_4$]

在圓內接五邊形的 S_5 以及 $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$ 解法如下：

令五邊長分別為 L_1t 、L_2t 、L_3t 、L_4t 、L_5t（如圖 16）

我們假設半徑為 R，$\overline{P_2P_5}=x$：

看 $\Delta P_2P_1P_5$，據餘弦定理可以得到 x 之關係式：

$$x^2=(L_1t)^2+(L_5t)^2-2(L_1t)(L_5t)\cos\theta=t^2({L_1}^2+{L_5}^2-2L_1L_5\cos\theta)$$

再利用正弦定理即得：

$$4R^2=\frac{x^2}{(\sin\theta)^2}\Rightarrow R^2=\frac{(L_1t)^2+(L_5t)^2-2(L_1t)(L_5t)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}$$

$$\Rightarrow R=\frac{t}{2\sin\theta}\times\sqrt{{L_1}^2+{L_5}^2-2L_1L_5\cos\theta}$$

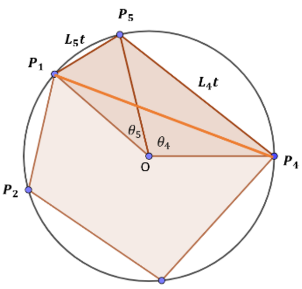
如圖 17，設 $\angle P_4OP_5=\theta_4$ 、$\angle P_5OP_1=\theta_5$，因為已經求出 R，因此我們可以透過餘弦定理知道 $\cos\theta_4$ 與 $\cos\theta_5$ 的值：

$$\cos\theta_4=\frac{2R^2-(L_4t)^2}{2R^2}，\cos\theta_5=\frac{2R^2-(L_5t)^2}{2R^2}$$

我們欲求 K_4，必須知道 $\triangle P_1P_4P_5$ 的面積和整個圓內接五邊形的面積 S_5。

1. $\triangle P_1P_4P_5$的面積：

關鍵在於求出 $\angle P_1P_5P_4$的 sin 值，又 $\cos\theta_4$、$\cos\theta_5$ 均已求得，可以藉由和角公式和倍角公式求出：



(圖17 ，由作者親自繪製)

$$\angle P_1P_3P_4 = \pi - \angle P_1P_5P_4 = \frac{1}{2}(\theta_4+\theta_5)$$

$$\Rightarrow \angle P_1P_5P_4 = \pi - \frac{1}{2}(\theta_4+\theta_5)$$

$$\sin\angle P_1P_5P_4 = \sin(\pi - \frac{1}{2}(\theta_4+\theta_5)) = \sin\frac{1}{2}(\theta_4+\theta_5)$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\theta_4\cos\theta_5+\sin\theta_4\sin\theta_5}{2}}$$

因此 $\triangle P_1P_4P_5 = \frac{1}{2}t^2L_4L_5\sin\angle P_1P_5P_4 = \frac{1}{2}t^2L_4L_5\sqrt{\frac{1-\cos\theta_4\cos\theta_5+\sin\theta_4\sin\theta_5}{2}}$

我們將其歸納（如圖 17）：

當 a 為 1, 2, 3 時：

$$\triangle P_aP_{a+1}P_{a+2} = \frac{1}{2}t^2L_aL_{a+1} \times \sqrt{\frac{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1}+\sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}{2}}$$

並且：

$$\triangle P_4P_5P_1 = \frac{1}{2}t^2L_4L_5 \times \sqrt{\frac{1-\cos\theta_4\cos\theta_5+\sin\theta_4\sin\theta_5}{2}}$$

2. 圓內接五邊形總面積 S_5：

由前面已知：

$$R^2 = t^2 \times \left[\frac{(L_1)^2+(L_5)^2-2(L_1)(L_5)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}\right]$$

又 L_1、L_5、θ 皆為已知，故令

$$故令\ z = \left[\frac{(L_1)^2+(L_5)^2-2(L_1)(L_5)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}\right]$$

可知 z 亦為已知之數（可藉由上式求得），且 $R^2 = t^2 \times z$

總面積 S_5 可以藉由各個以圓心為頂點的三角形面積之和（即 $J_1+J_2+J_3+J_4+J_5$）而得到（如圖 18）。

而每一個以圓心為頂點的三角形面積 $\boldsymbol{J_i}$（i 為 1、2、3、4、5）如下：

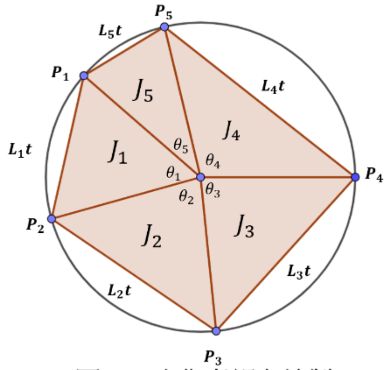
$$\boldsymbol{J_i = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta_i = \frac{1}{2}(t^2 z)\sin\theta_i = \frac{z}{2}(t^2)\sin\theta_i}$$

$$\boldsymbol{= \frac{z}{2}(t^2)\sqrt{1-(\cos\theta_i)^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{z}{2}(t^2)\sqrt{\frac{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}{4z^2}}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}\times t^2 \times \sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}$$

故 $\boldsymbol{S_5 = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{4}\times t^2\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}$



(圖18，由作者親自繪製)

又 $\boldsymbol{\cos\theta_i = 1-\frac{(L_i t)^2}{2R^2} = 1-\frac{(L_i t)^2}{2t^2 z} = 1-\frac{{L_i}^2}{2z}}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \sin\theta_i = \sqrt{1-(\cos\theta_i)^2} = \sqrt{\frac{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}{4z^2}}}$$

故知所有的 $\boldsymbol{\sin\theta_i}$ 、$\boldsymbol{\cos\theta_i}$ 皆為已知之數

3. 圓內接五邊形 $\boldsymbol{K_a}$ 之公式：我們剛好可以消掉上下兩式的 $\boldsymbol{t^2}$

當 $\boldsymbol{a}$ 為 1, 2, 3 時：

$$K_a = \frac{\triangle P_a P_{a+1} P_{a+2}}{S_5} = \frac{\boldsymbol{L_a L_{a+1}\times\sqrt{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1}+\sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}}}{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}}$$

並且：

$$K_4 = \frac{\triangle P_4 P_5 P_1}{S_5} = \frac{\boldsymbol{L_4 L_5\times\sqrt{1-\cos\theta_4\cos\theta_5+\sin\theta_4\sin\theta_5}}}{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}}$$

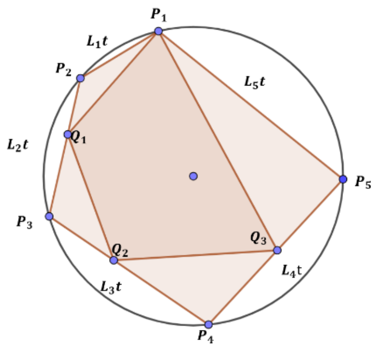
故知 $\boldsymbol{K_1}$ 、$\boldsymbol{K_2}$ 、$\boldsymbol{K_3}$ 、$\boldsymbol{K_4}$ 皆可求得（為已知數）

有了 K_a 之公式之後，即可算出圓內接五邊形之總面積 S_5，仿照之前正五邊形的方法（如圖 19）：

$$S_5 K_1 \times \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = A_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{A_1}{S_5K_1} \Rightarrow \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{S_5K_1 - A_1}{S_5K_1}$$

$$S_5 K_2 \times \frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_2P_3}} \times \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = A_2$$



(圖19 ，由作者親自繪製)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}} = \dfrac{(S_5K_1-A_1)K_2-A_2K_1}{(S_5K_1-A_1)K_2}$

$S_5K_3 \times (\dfrac{\overline{P_4Q_2}}{\overline{P_3P_4}})(\dfrac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}) = A_3 \Rightarrow S_5K_3 \times (\dfrac{(S_5K_1-A_1)K_2-A_2K_1}{(S_5K_1-A_1)K_2})(\dfrac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}) = A_3$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}} = \dfrac{S_5K_3(S_5K_1K_2-A_1K_2-A_2K_1)-A_3K_2(S_5K_1-A_1)}{S_5K_3(S_5K_1K_2-A_1K_2-A_2K_1)}$

$S_5K_4 \times (\dfrac{\overline{P_5Q_3}}{\overline{P_4P_5}}) = S_5K_4 \times \dfrac{S_5K_3(S_5K_1K_2-A_1K_2-A_2K_1)-A_3K_2(S_5K_1-A_1)}{S_5K_3(S_5K_1K_2-A_1K_2-A_2K_1)} = A_4$

$K_1K_2K_3K_4(S_5)^2 - (K_2K_3K_4A_1 + K_1K_3K_4A_2 + K_1K_2K_4A_3 + K_1K_2K_3A_4)\ S_5 + (K_2K_4A_1A_3 + K_2K_3A_1A_4 + K_1K_3A_2A_4) = 0$

我們發現，此方程式的形態與前述正五邊形的方程式形態十分類似（參第 7 頁），

註：正五邊形的方程式如下：

$$(S_5K_5)^2 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\ S_5K_5 + (A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4) = 0$$

只不過在正五邊形的特例中，$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = \frac{4}{5}(\sin 36^o)^2$，並且我們使用相同的解題程序（使用$K_a$的觀念，並以面積比例迭代法轉換成方程式以求其根），而這個解題程序套用在更多邊數的圓內接多邊形亦可適用。

摘要如下：

(1) 求 n 邊形的外接圓半徑 R，其一般式為：

$$\boldsymbol{R^2 = \frac{(L_1t)^2 + (L_nt)^2 - 2(L_1t)(L_nt)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}}$$

〔註：θ 為「指定點的頂角」，L_1、L_2、...、L_n 為已知，t 為未知〕

令 $\boldsymbol{z = \frac{(L_1)^2+(L_n)^2-2(L_1)(L_n)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}}$，則 z 可求出，且 $\boldsymbol{R^2 = zt^2}$

(2) 求各個由 n 邊形相鄰兩邊所圍成的三角形面積，其一般式為：

當 $\boldsymbol{1 \le a \le (n-2)}$ 時：

$$\boldsymbol{\triangle P_aP_{a+1}P_{a+2} = \frac{1}{2}t^2L_aL_{a+1} \times \sqrt{\frac{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1}+\sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}{2}}}$$

並且

$$\boldsymbol{\triangle P_{n-1}P_nP_1 = \frac{1}{2}t^2L_{n-1}L_n \times \sqrt{\frac{1-\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n+\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n}{2}}}$$

(3) 求圓內接 n 邊形的總面積 $\boldsymbol{S_n}$，使用的方法為「加總各個以圓心為頂點的三角形面積」其一般式為：

（即$\boldsymbol{J_1 + J_2 + J_3 + \cdots \ldots + J_n}$）

$$J_i=\frac{t^2}{4}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}$$ ，故 $$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{t^2}{4}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}$$

(4) 求出所有的 $\cos\theta_i$ 、$\sin\theta_i$，其一般式為：

$$\cos\theta_i=1-\frac{{L_i}^2}{2z}$$

$$\sin\theta_i=\sqrt{\frac{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}{4z^2}}$$

(5) 求出所有的 K_a，其一般式為：

當 $a=1,2,3,\ldots,n-2$ 時：

$$K_a=\frac{\triangle P_aP_{a+1}P_{a+2}}{S_n}=\frac{L_aL_{a+1}\times\sqrt{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1}+\sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}$$

並且

$$K_{n-1}=\frac{\triangle P_{n-1}P_nP_1}{S_n}=\frac{L_{n-1}L_n\times\sqrt{1-\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n+\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{{L_i}^2(4z-{L_i}^2)}}$$

(6) 以「面積比例迭代法轉換成方程式」以求其根：

若此高次方程式存在實數根，則可找到「唯一一個」符合我們設定之圓內接 n 邊形，且內嵌 n-1 邊形，以符合外圍諸多三角形面積為給定之面積（A_1 、A_2 、A_3 、...A_{n-1}）。若此高次方程式存在多個實數根；則「最大的實數根」為符合條件設定之圓內接 n 邊形；而其餘存在的實根，皆為「變形 n 邊形」的情況。

(三) 圓內接 n 邊形公式的推導

我使用與先前類似的R_n概念，進行推導運算。而其有著遞迴規律如下：

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{A_1}{S_nK_1} \\ R_{m+1}=\dfrac{A_{m+1}}{S_nK_{m+1}(1-R_m)} \end{cases}$$

一樣列出幾項以便觀察及歸納

$$R_1=\frac{A_1}{S_nK_1},$$

$$R_3=\frac{S_nK_1K_2A_3-A_1K_2A_3}{K_1K_2K_3{S_n}^2-(A_1K_2K_3+A_2K_1K_3)S_n},$$

$$R_5=\frac{K_1K_2K_3K_4(S_n)^2A_5-(S_n)(K_2K_3K_4A_1A_5+K_1K_3K_4A_2A_5+K_1K_2K_4A_3A_5)+K_2K_4A_1A_3A_5}{K_1K_2K_3K_4K_5(S_n)^3-(S_n)^2(K_2K_3K_4K_5A_1+\cdots+K_1K_2K_3K_5A_4)+(S_n)(K_2K_4K_5A_1A_3+K_2K_3K_5A_1A_4+K_1K_3K_5A_2A_4)}$$

相同的，我依然發現許多**不好運算的項**，故仿前述創建一個新符號 $\boldsymbol{U_{n_q}^{\ p}}$，其所代表的意義為，自 $\frac{A_1}{K_1}$ 到 $\frac{A_P}{K_P}$ 中任取 q 個互不相鄰的項相乘後，再乘上 $\prod_{i=1}^{n}K_i$，最後取其所有組合之和，例如：

$$U_{6_3}^{\ 5}=K_2K_4K_6A_1A_3A_5$$
$$U_{3_1}^{\ 2}=A_1K_2K_3+K_1A_2K_3$$
$$U_{5_2}^{\ 4}=K_2K_4K_5A_1A_3+K_2K_3K_5A_1A_4+K_1K_3K_5A_2A_4$$

將其簡化為以下：

$$R_1=\frac{A_1}{S_nK_1}\ ,$$

$$R_3=\frac{S_nK_1K_2A_3-U_{3_2}^{\ 3}}{K_1K_2K_3(S_n)^2-(U_{3_1}^{\ 2})S_nK_n}\ ,$$

$$R_5=\frac{K_1K_2K_3K_4(S_n)^2A_5-(S_n)\left(U_{5_2}^{\ 5}-U_{5_2}^{\ 4}\right)+U_{5_3}^{\ 5}}{K_1K_2K_3K_4K_5(S_n)^3-(S_n)^2\left(U_{5_1}^{\ 4}\right)+(S_n)\left(U_{5_2}^{\ 4}\right)}$$

經由觀察和歸納，我們可以猜出 $\boldsymbol{R_m}$ 的表示式可能如下：

$\boldsymbol{m<n,m\in N}$，此時 $\boldsymbol{m}$ 為奇數

$$\boldsymbol{R_m}=\frac{(U_{m_1}^{\ m}-U_{m_1}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}-(U_{m_2}^{\ m}-U_{m_2}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-3}+\cdots\mp\left(U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m}-U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}\right)(S_n)^1\pm U_{m_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m}}{U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m-1}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\mp U_{m_{\frac{m-3}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^2\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^1}$$

類似的，我們可以猜測出 $\boldsymbol{R_{m+2}}$的型態，進而使用數學歸納法證明

$$\boldsymbol{R_{m+2}}=\frac{(U_{m+2_1}^{\ m+2}-U_{m+2_1}^{\ m+1})(S_n)^{\frac{m+3}{2}-1}-(U_{m+2_2}^{\ m+2}-U_{m+2_2}^{\ m+1})(S_n)^{\frac{m+3}{2}-3}+\cdots\mp\left(U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+2}-U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+1}\right)(S_n)^1\pm U_{m+2_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m+2}}{U_{m+2_0}^{\ m+2}(S_n)^{\frac{m+3}{2}}-U_{m+2_1}^{\ m+1}(S_n)^{\frac{m+3}{2}-1}+\cdots\mp U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+1}(S_n)^2\pm U_{m+2_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m+1}(S_n)^1}$$

並且有著以下關係式：

$$\boldsymbol{R_{m+2}=\frac{K_{m+1}A_{m+2}(1-R_m)}{S_nK_{m+2}K_{m+1}(1-R_m)-K_{m+2}A_{m+1}}}$$

直接帶入檢驗：

$$\boldsymbol{R_{m+2}}=\frac{\boldsymbol{K_{m+1}A_{m+2}}\left(\boldsymbol{1}-\frac{(U_{m_1}^{\ m}-U_{m_1}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}-(U_{m_2}^{\ m}-U_{m_2}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-3}+\cdots\mp\left(U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m}-U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}\right)(S_n)^1\pm U_{m_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m}}{U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m-1}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\mp U_{m_{\frac{m-3}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^2\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^1}\right)}{\boldsymbol{S_nK_{m+2}K_{m+1}}\left(\boldsymbol{1}-\frac{(U_{m_1}^{\ m}-U_{m_1}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}-(U_{m_2}^{\ m}-U_{m_2}^{\ m-1})(S_n)^{\frac{m+1}{2}-3}+\cdots\mp\left(U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m}-U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}\right)(S_n)^1\pm U_{m_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m}}{U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m-1}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\mp U_{m_{\frac{m-3}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^2\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^1}\right)-\boldsymbol{K_{m+2}A_{m+1}}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{K_{m+1}A_{m+2}}\left(U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m}(S_n)^1\mp U_{m_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m}\right)}{\boldsymbol{S_nK_{m+2}K_{m+1}}\left(U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m}(S_n)^1\mp U_{m_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m}\right)-\boldsymbol{K_{m+2}A_{m+1}}\left(U_{m_0}^{\ m}(S_n)^{\frac{m+1}{2}}-U_{m_1}^{\ m-1}(S_n)^{\frac{m+1}{2}-1}+\cdots\mp U_{m_{\frac{m-3}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^2\pm U_{m_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m-1}(S_n)^1\right)}$$

$$=\frac{\left(U_{m+2_1}^{\ m+2}-U_{m+2_1}^{\ m+1}\right)(S_n)^{\frac{m+3}{2}-1}-\left(U_{m+2_2}^{\ m+2}-U_{m+2_2}^{\ m+1}\right)(S_n)^{\frac{m+3}{2}-3}+\cdots\mp\left(U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+2}-U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+1}\right)(S_n)^1\pm U_{m+2_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m+2}}{U_{m+2_0}^{\ m+2}(S_n)^{\frac{m+3}{2}}-U_{m+2_1}^{\ m+1}(S_n)^{\frac{m+3}{2}-1}+\cdots\mp U_{m+2_{\frac{m-1}{2}}}^{\ m+1}(S_n)^2\pm U_{m+2_{\frac{m+1}{2}}}^{\ m+1}(S_n)^1}$$

最後將前述證得的 R_m，令 m=n −2，代入關係式：$S_nK_n \times R_{n-2} = S_nK_n - A_{n-1}$，得出方程式

$$U_{n_0}{}^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]} - U_{n_1}{}^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + U_{n_2}{}^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} - U_{n_3}{}^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \dots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} U_{n_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{}^{n-1} = 0$$

研究成果總結

一、正n邊形內嵌$n-1$邊形的構形

(一) $K_n = \frac{4}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2$

(二) 若已知外圍所有三角形之面積分別為A_1、A_2、A_3、 ⋯ A_{n-1} ，則欲求符合命題構形之正 n 邊形總面積S_n，可先由以下公式求出 x（= S_nK_n）：

$$(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]} - T_1^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + T_2^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} - T_3^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \dots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} T_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} = 0$$

若此方程式具有實根並存在「原始構形」(即所有三角形皆位於正多邊形中的初始設定)，則最大的正實根，為符合命題構形之正 n 邊形總面積 S_n 乘以 K_n

(三) 將 x 除以 K_n，再減去 $\sum_{p=1}^{n-1} A_p$，即得中間內嵌$n-1$邊形之面積 S

二、圓內接n邊形的情況（亦為內嵌$n-1$邊形的構形）：

(一) 若已知此 n 邊形之邊長比為 $L_1:L_2:L_3:\dots:L_n$，且指定點的頂角（即$\angle P_2P_1P_n$）為 θ，則 K_a 的一般式為：

當 $a = 1,2,3,\dots,n-2$ 時：

$$K_a = \frac{\triangle P_aP_{a+1}P_{a+2}}{S_n} = \frac{L_aL_{a+1} \times \sqrt{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1} + \sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{L_i{}^2(4z - L_i{}^2)}}$$

並且：

$$K_{n-1} = \frac{\triangle P_{n-1}P_nP_1}{S_n} = \frac{L_{n-1}L_n \times \sqrt{1-\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n + \sin\theta_{n-1}\sin\theta_n}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{L_i{}^2(4z - L_i{}^2)}}$$

其中，$z = \frac{(L_1)^2+(L_n)^2-2(L_1)(L_n)\cos\theta}{4(\sin\theta)^2}$

$$\cos\theta_i = 1 - \frac{L_i{}^2}{2z}$$

$$\sin\theta_i = \sqrt{\frac{L_i{}^2(4z - L_i{}^2)}{4z^2}}$$

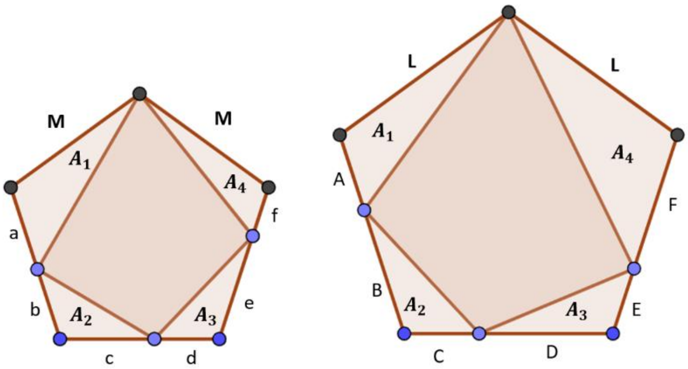
(二) 以「面積比例迭代法轉換成方程式」以求其根，若此方程式具有實數根，並且存在「原始構形」，則最大之實數根為符合命題構形之圓內接 n 邊形面積 S_n。

若已知外圍所有三角形之面積分別為 A_1、A_2、A_3 ⋯ A_{n-1}，則欲求符合命題構形之圓內接 n 邊形總面積 S_n，可由以下公式求出：

$$U_{n_0}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]} - U_{n_1}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + U_{n_2}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} - U_{n_3}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \ldots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} U_{n_{\left[\frac{n}{2}\right]}}^{\,n-1} = 0$$

肆、 討論

一、 根的意義與性質探討：



(圖20 ，由作者親自繪製)

首先，**根據我們在正 n 邊形的前三個電腦繪圖**，**簡單的猜測它大概是最大根**，那要證明這個，我打算考慮各個根所代表的意義，看看是否能夠用**幾何方式證出來**。

我們從前述的研究已推導出以(S_nK_n)為變數的高次方程式，這意味著(S_nK_n)存在多組解，也就是這個正 n 邊形存在著多種邊長的可能性，然而這些根的意義到底為何？

我們知道**二次以上的方程式，不一定存在著實數根**，但是在我們限定的條件規則之下(也就是 Q 點必須座落在相鄰兩 P 點之間的線段內，以圍出一個內接正 $n-1$邊形的構形)，如果此構形對應多個正實數根，則可藉由以下的推導，得出矛盾的結論，茲說明如下 ：

以正五邊形為例，假設有兩個不同邊長的正五邊形均符合我們命題中設定的構形，一大一小，大的邊長為 L，小的邊長為 M(如圖 20；L>M)，因為 A_1, A_2, A_3, A_4 的大小固定，我們可以推論出；

$A<a,\ B>b,\ C<c,\ D>d,\ E<e,\ F>f \Rightarrow L<M$，矛盾！

※ **故我們可得到以下的推論：在維持如上述限定條件之構形下，只能存在一個正實數根**。

※ 至於在其餘正 n 邊形的論證方式亦同上述。

然而某些情況之下，方程式的確可以存在著兩個正實數根，那這又該如何解釋呢？我們的假說是：可藉由改變原限定條件之構形（也就是允許 Q 點座落在相鄰兩 P 點的線段外），而產生另一個「較小」的正實數根。以下我們將以四邊形與五邊形為例進行探討，用兩種不同的方式進行闡述：

- 實例一以正四邊形為例：**改變構形之後，中間△ $P_1Q_1Q_2$的面積 S 變負數；**
- 實例二以正五邊形為例：以 S_5K_5 與 A_1 及 A_4 的大小關係來說明，**若 A_1 大於 S_5K_5，則 A_4 必定小於 S_5K_5，且此情況可畫出變形之構形。**

並以實際的例子（以 GeoGebra 程式繪圖：**實例一為正四邊形的例子、實例二則為正五邊形的例子）來支持我們的假說**——也就是若這個高次方程式存在著多個正實根，並且『初始限定構形(亦即n邊形內接 $n-1$ 邊形)』存在，則前述之『高次方程式』之**最大正實根，為滿足此『初始限定構形』的唯一解**。

茲詳細說明如下：

(一) 實例一：

參照我的四邊形公式（第 7 頁），$(S_4K_4)^2 - (A_1+A_2+A_3)\ S_4K_4 + A_1A_3 = 0$，我們把 S_4 用 $(S+A_1+A_2+A_3)$ 代入，K_4 用 $\frac{4}{4}(\sin\frac{\pi}{4})^2$ 代入，可得出 $S^2 = (A_1+A_2+A_3)^2 - 4A_1A_3$，發現到 S 有兩組解，一正一負，顯然我們取正根！**但是 S 的負數解 $(-\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3})$ 又是如何產生的呢？**

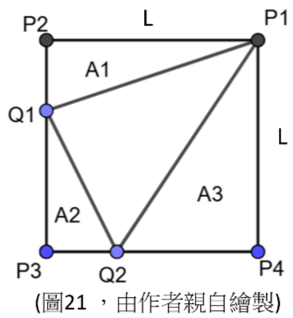
首先公式變數為 S_nK_n，我們把 K_n 除掉變為 S_n，再使用 S_n 減去外圍各三角形的面積總和，得到中間 n-1 邊形的面積 S，假設 S_n 比各三角形面積的總和還小的話即能得到負數，但是這種情況能產生嗎？想到這裡我們返璞歸真，使用最基本的代數解法求邊長：

令邊長為 L（如圖 21），推得 $\overline{P_2Q_1} = \frac{2A_1}{L}$，

又 $\overline{P_2P_3} - \overline{P_2Q_1} = \overline{P_3Q_1}$

$\Rightarrow \overline{P_3Q_1} = \frac{L^2-2A_1}{L}$，進一步推得 $\overline{P_3Q_2} = \frac{2A_2L}{L^2-2A_1}$，又知道 $\overline{P_3P_4} - \overline{P_3Q_2} = \overline{P_4Q_2}$，因此推得

$\overline{P_4Q_2} = \frac{L^3-2A_1L-2A_2L}{L^2-2A_1}$，



(圖21 ，由作者親自繪製)

根據三角形公式得到$\overline{P_1P_4} = L = \frac{2A_3}{\overline{P_4Q_2}} = \frac{(L^2-2A_1)2A_3}{L^3-2A_1L-2A_2L}$，交叉相乘後我們得到 L 的四次方程式 $L^4 - 2(A_1+A_2+A_3)L^2 + 4A_1A_3 = 0$，推得以下：

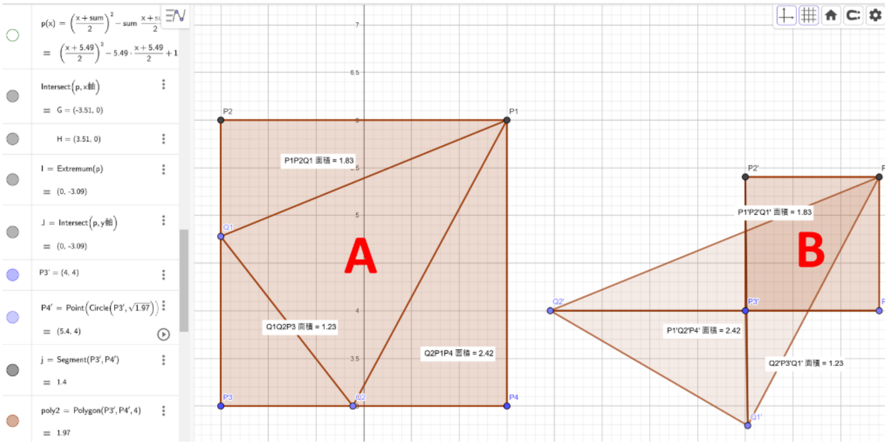
$$\boldsymbol{L^2 = \frac{2(A_1+A_2+A_3)\pm\sqrt{4(A_1+A_2+A_3)^2-16A_1A_3}}{2}}\ ,$$

若 L^2 的值為實數，則易知上述兩值：

$\frac{2(A_1+A_2+A_3)+\sqrt{4(A_1+A_2+A_3)^2-16A_1A_3}}{2}$ 與 $\frac{2(A_1+A_2+A_3)-\sqrt{4(A_1+A_2+A_3)^2-16A_1A_3}}{2}$ 皆為正實數，令上述中較大的值為 A，較小的值為 A'，則 A 和 A' 分別代表大正方形與小正方形之面積，我們以較小的 A' 減去 $(A_1+A_2+A_3)$（也就是外圍三角形的面積和）可得到內嵌三角形的面積 $S=-\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_3}$

因此我們藉由上述的推導，得知了 S 的負數解之幾何意義。

而關於 A 與 A' 兩個正實數所代表的正方形構形，我們以 GeoGebra 程式繪圖驗證如下（如圖 22）：



(圖22 ，由作者親自繪製)

	邊長 L	S	A_1	A_2	A_3
正四邊形 A	3	3.51	1.83	1.23	2.42
正四邊形 B	1.40	-3.51	1.83	1.23	2.42

由上圖及表，我們可以得知：

（1） 以幾何意義探討，在維持「內嵌$n-1$邊形的構形」下，只能存在一個正實數根。

（2） 然而以代數方程探討之，以正四邊形為例，可以存在兩個正實數根，其中多出來的那一個根，為「改變內嵌$n-1$邊形的構形」，縮小而產生的「較小正四邊形」，然而此「變形結構」並非我們原先想探討的「內嵌正 n-1 邊形」結構。

(二) 實例二：

我們再以正五邊形為例，探討「方程式根的意義」，由於正五邊形的面積無法像前面正四邊形以「L^2」來簡單進行表述，所以我們使用了另一種方式論述。我們設邊長為 L ，再設外接圓半徑為 R，相鄰兩邊圍出的三角形面積為 G

（亦即之前所設的S_5K_5），（如圖 23）易知 $\frac{L}{\sin 36°}=2R$，推得

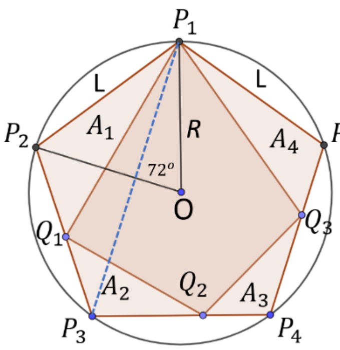
$$S_5=5\times\triangle OP_1P_2=\frac{1}{2}\times R^2\times\sin 72°\times 5=\frac{5}{4}\times\frac{\cos 36°}{\sin 36°}\times L^2，$$

我們還有以下關係式:

$$A_1 : G = \overline{P_2Q_1} : L \qquad \cdots (1)$$
$$A_2 : G = \overline{P_3Q_1} \times \overline{P_3Q_2} : L^2 \qquad \cdots (2)$$
$$A_3 : G = \overline{P_4Q_2} \times \overline{P_4Q_3} : L^2 \qquad \cdots (3)$$
$$A_4 : G = \overline{P_5Q_3} : L \qquad \cdots (4)$$

$\overline{P_2Q_1} = \frac{L}{G}A_1 \Rightarrow \overline{P_3Q_1} = L - \overline{P_2Q_1} = L\left(1-\frac{A_1}{G}\right)$ 同理 $\overline{P_4Q_3} = L\left(1-\frac{A_4}{G}\right)$

又 $\begin{cases} \overline{P_3Q_2} = \frac{L^2}{G} \times A_2 \times \frac{1}{\overline{P_3Q_1}} \\ \overline{P_4Q_2} = \frac{L^2}{G} \times A_3 \times \frac{1}{\overline{P_4Q_3}} \end{cases}$



(圖23 ，由作者親自繪製)

$\therefore\ L = \overline{P_3Q_2} + \overline{P_4Q_2}$

$$= \frac{L^2}{G}\left(\frac{A_2}{L\left(1-\frac{A_1}{G}\right)} + \frac{A_3}{L\left(1-\frac{A_4}{G}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{1 = \frac{A_2}{G-A_1} + \frac{A_3}{G-A_4}} \qquad \cdots (5)$$

我們希望能解出 G，再由 G 推導出 L（$G = \frac{1}{2} \times L^2 \times \sin 72°$**）**

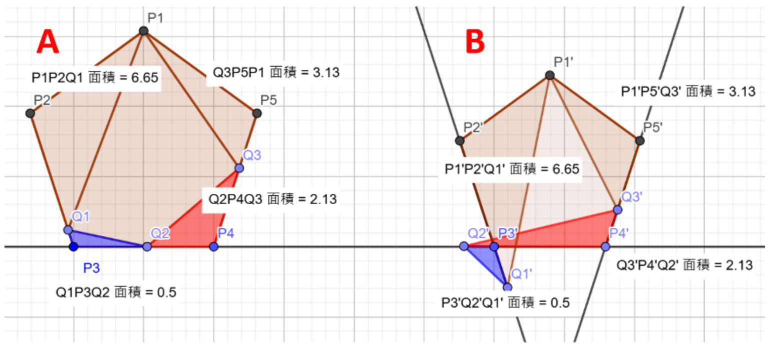
由 (5) $\Rightarrow$ $G^2 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)G + (A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4) = 0$

$$G = \frac{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \pm \sqrt{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)^2 - 4(A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4)}}{2}$$

$$G = L^2 \times \sin 36° \times \cos 36°$$

易知，以如上 G 的解之形態，可能可以出現 2 個正實根的情形，故 L 亦可能有兩個正實根值，也就是說可能出現 2 種正 5 邊形的邊長，我們觀察到在第 (5) 式中 $\mathbf{1 = \frac{A_2}{G-A_1} + \frac{A_3}{G-A_4}}$，

如果我們允許存在如上述四邊形例子中可改變構形的情況，也就是 $A_1 > G$ 的情況，由第 (5) 式可知道 A_4 便必須小於 G，我們以 GeoGebra 程式驗證如下（如圖 24）



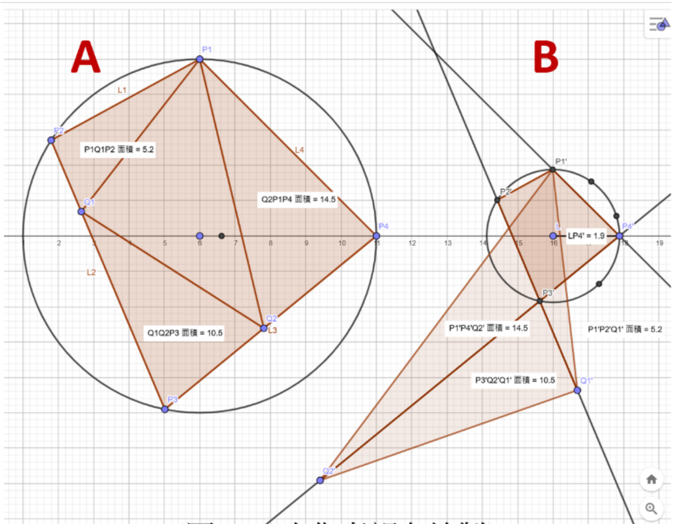
(圖24 ，由作者親自繪製)

	邊長 L	S	A_1	A_2	A_3	A_4
正五邊形 A	4	15.12	6.65	0.50	2.13	3.13
正五邊形 B	3.18	4.96	6.65	0.50	2.13	3.13

由上圖及表可知：以正五邊形為例，可以存在兩個正實數根，其中多出來的那個根**為「改變內嵌 n-1 邊形的構形」，縮小而產生的「較小正五邊形」**，此一結論與前述四邊形相同，然而此「變形結構」並非我們原先想探討的「內嵌正$n-1$邊形」結構。

二、　在一般化的圓內接 n 邊形情況：

我們仿照正四邊形的解法，**可以解得 S_4 可以出現兩個正實數根，也就是一大一小的圓內接相似四邊形，其中小的四邊形為「變形結構」**，以 GeoGebra 繪出圖示如下（如圖 25）：



(圖25，由作者親自繪製)

	半徑 R	S_4	A_1	A_2	A_3
圓內接四邊形 A	5	46.9	5.2	10.5	14.5
圓內接四邊形 B	1.9	6.6	5.2	10.5	14.5

故知在一般化的圓內接 n 邊形情況，其根的意義與性質，與在正 n 邊形的情況相同——也就是若這個高次方程式存在著多個正實根，**則最大的正實根，為滿足我們限定條件之構形的唯一解**。

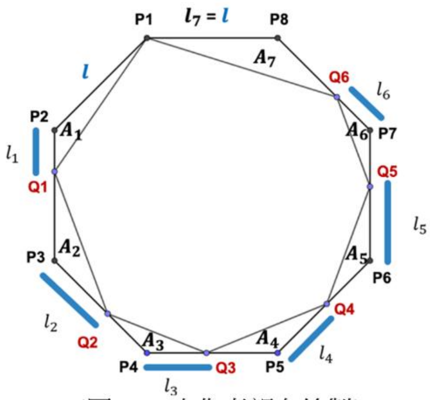
※ **總結以上的討論：**不管在「正 n 邊形」或是「一般化的圓內接 n 邊形」的情況，若我們的『初始限定構形（亦即 n 邊形內嵌正 n-1 邊形之構形）』存在，則前述之高次方程式的最大正實根，為滿足此『初始限定構形』之唯一解。**也就是說：「限定構形存在」是「高次方程式之最大正實根為滿足此限定構形的唯一解」的「充分條件」**。

三、　對於方程式正實根存在性及「限定構形存在」與「高次方程式之最大正實根為滿足此限定構形的唯一解」的關係之探討

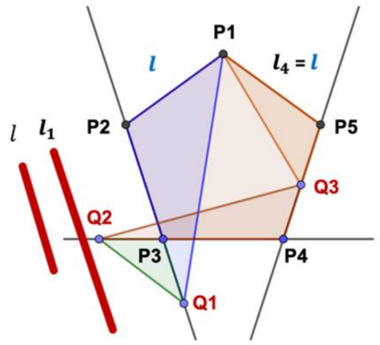
由上述結論我們已經知道「限定構形存在」是「高次方程式之最大正實根為滿足此限定構形的唯一解」的「充分條件」。我不禁想要**探討「若高次方程式有最大正實根，則必存在對應的限定構形，而該最大正實根是此構形的唯一解」是否成立？**

（註：以下過程令 θ為正多邊形內角， $\frac{1}{2}\sin\theta = m$ ，設立 $ma_i = A_i$ 以便計算）

破解此問題必須得先了解如何區分「限定構形」以及「變形構型」，觀察圖形，發現若使用如圖 26 的方式命名每個已知三角形的邊長，並令正多邊形邊長為 l，**於限定構型下， l_i 都小於 l ；若是變形構形，部分 l_i 會大於 l（如圖 27）**。故透過這個性質可區分限定構形及變形構型。



(圖26 ，由作者親自繪製)



(圖27 ，由作者親自繪製)

首先， l_i 可利用三角形面積公式求出，得到以下關係式。

$$l \times l_1 = a_1、(l - l_1)l_2 = a_2、(l - l_2)l_3 = a_3$$

進而推廣到其遞迴式：

$$(l - l_{n-1})l_n = a_n$$

我們希望證明 l 於限定構形的前提下大於 l_i ，不妨直接用$l - l_i$的正負號判別，我們可列出下式：

$$\boldsymbol{l - l_1 = \frac{l^2 - a_1}{l}}$$

$$\boldsymbol{l - l_2 = l - \frac{a_2}{l - \frac{a_1}{l}} = \frac{l^3 - (a_1 + a_2)l}{l^2 - a_1}}$$

$$\boldsymbol{l - l_3 = l - \frac{a_3}{l - \frac{a_2}{l - \frac{a_1}{l}}} = \frac{l^4 - (a_1 + a_2 + a_3)l^2 + a_1 a_3}{l^3 - (a_1 + a_2)l}}$$

若定義 t_P^Q 代表 $a_1, a_2 \dots a_Q$ 中取 P 個互不相鄰的項相乘，其所有組合之和

再定義 $g_n(x) = x - \frac{a_n}{x - \frac{a_{n-1}}{x - \frac{\cdots}{x - \frac{a_1}{x}}}} = x - \frac{a_n}{g_{n-1}(x)}$

及 $f_n(x) = (x)^n - t_1^{n-1}(x)^{n-2} + t_2^{n-1}(x)^{n-4} \dots \pm t_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n-1}$，則有利化簡型態，因此：

$$g_1(x) = \frac{x^2 - a_1}{x} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

$$g_2(x) = x - \frac{a2}{x - \frac{a_1}{x}} = \frac{x^3 - (a_1 + a_2)x}{x^2 - a_1} = \frac{f_3(x)}{f_2(x)}$$

$$g_3(x) = x - \frac{a_3}{x - \frac{a_2}{x - \frac{a1}{x}}} = \frac{x^4 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + a_1 a_3}{x^3 - (a_1 + a_2)x} = \frac{f_4(x)}{f_3(x)}$$

並且 l 為 $f_n(x) = 0$ 之根。

我提出遞推形式的猜測： $g_i(x) = \frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)}$ ，並使用數學歸納法證明。

觀察前幾項都成立，假設 $g_{n-1}(x) = \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}$ 成立，目標欲證 $g_n(x) = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

將 $g_{n-1}(x) = \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}$ 代入：若 $g_n(x) = x - \frac{a_n}{g_{n-1}(x)} = x - \frac{a_n}{\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}} = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ ，

則將兩式交叉相乘後得到 $g_n(x) = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \Leftrightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x) - a_n f_{n-1}(x)$

易知 $t_q^{p+1} - t_q^p = a_{p+1} t_{q-1}^{p-1}$，因此若直接將其係數展開比對，可以直接證得其正確性，如下所示：

$$f_{n+1}(x) = (x)^{n+1} - t_1^n(x)^{n-1} + t_2^n(x)^{n-3} \dots$$
$$x f_n(x) = (x)^{n+1} - t_1^{n-1}(x)^{n-1} + t_2^{n-1}(x)^{n-3} \dots$$
$$a_n f_{n-1}(x) = a_n(x)^{n-1} - a_n t_1^{n-2}(x)^{n-3} + a_n t_2^{n-2}(x)^{n-5} \dots$$
$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x) - a_n f_{n-1}(x) \Leftrightarrow g_n(x) = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$$

我希望能夠證出來 $l > l_i\ (0 < i < n-1, i \in N)$（其為限定構形之性質），等價證 $g_i(x) = \frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)} > 0$，從分析函數性質開始起手，因為 l 為 $f_n(x) = 0$ 的最大根，由於 $f_n(x)$ 函數領導係數為 1，因此當 $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$，我們能藉由觀察 $f_i(x) = 0$ 最大根的關係來破題。若 $f_i(x) = 0$ 有實根，令 x_i 為 $f_i(x) = 0$ 的最大根

$$f_1(x) = x \Rightarrow x_1 = 0$$
$$f_2(x) = x^2 - a_1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{a_1}$$
$$f_3(x) = x^3 - (a_1 + a_2)x \Rightarrow x_3 = \sqrt{a_1 + a_2}$$

易知 $0 = x_1 < x_2 < x_3$，猜測 x_i 應該遞增，若能證出 $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < l$ 可利用此結果搭配 $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$ 以及中間值定理

知道 $f_i(l) > 0 \Rightarrow g_i(l) > 0$ 來完成欲證之題目。

證明 $f_i(x) = 0$ 有實根，且 $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < l$

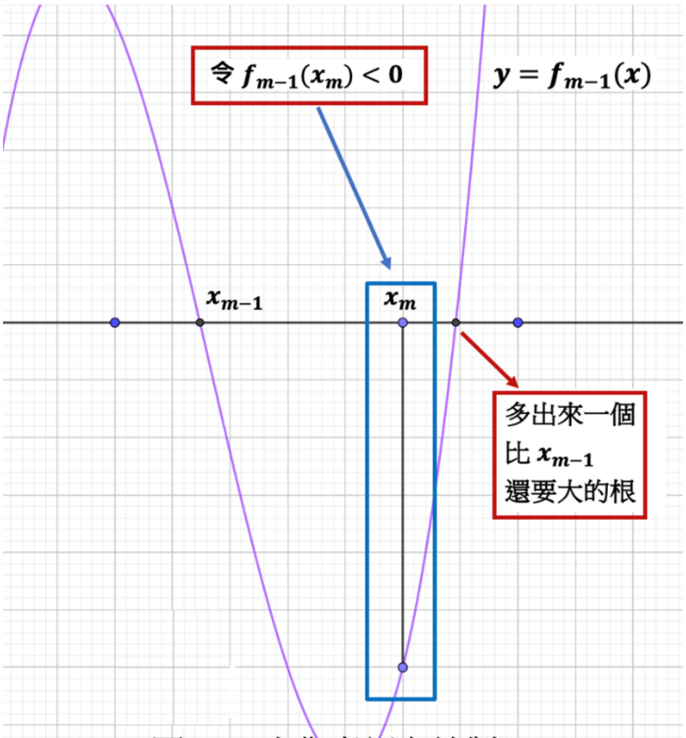
$$f_1(x) = x \Rightarrow x_1 = 0 \text{，} f_2(x) = x^2 - a_1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{a_1}$$

易知 $x_1 < x_2 \cdots$，假設 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m$，欲證 $f_{m+1}(x)$有實根且 $x_m < x_{m+1}$

根據遞迴式 $f_{m+1}(x_m) = x_m f_m(x_m) - a_m f_{m-1}(x_m)$

已知 $x_m f_m(x_m) = 0$，假設 $f_{m-1}(x_m) = 0$，推得 x_m和 x_{m-1} 同為 $f_{m-1}(x) = 0$ 的根，並且 $x_m > x_{m-1}$，這和 x_{m-1}為 $f_{m-1}(x) = 0$ 之最大根矛盾，因此 $f_{m-1}(x_m) \neq 0$

假設 $f_{m-1}(x_m) < 0$，根據中間值定理 $f_{m-1}(x) = 0$ 將出現比 x_m 還大的根，而 $x_m > x_{m-1}$，因此矛盾（如圖 28）。



(圖28，由作者親自繪製)

故知 $f_{m-1}(x_m) > 0$，推得 $f_{m+1}(x_m) < 0$，也就是 $f_{m+1}(x) = 0$ 存在比 x_m大的根，因此 $x_m < x_{m+1}$，進而 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < l$，因此 $f_i(l) > 0 \Rightarrow g_i(x) = \frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)} > 0$

但是若要證明它是具有幾何意義的，我們還須證 $l_i > 0$

因為 $g_i(l) = l - l_i$，若能證出 $g_i(l) < l$ 則可以解決問題：

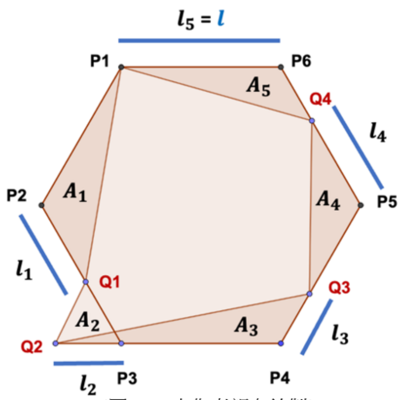
依據關係式 $g_i(l) = \frac{f_{i+1}(l)}{f_i(l)}$

又 $f_{i+1}(l) = l f_i(l) - a_i f_{i-1}(l)$，因此 $f_{i+1}(l) - l f_i(l) = -a_i f_{i-1}(l)$，

仿照前面的方法可知，$f_{i-1}(l) > 0 \Rightarrow f_{i+1}(l) < l f_i(l) \Rightarrow \frac{g_i(l)}{l} = \frac{f_{i+1}(l)}{l f_i(l)} < 1 \Rightarrow g_i(l) < l$

四、 最後一塊拚圖！

上面我們僅確保了 $\boldsymbol{l_i}$ 小於邊長 $\boldsymbol{l}$，雖然大部分情況成立，可是當出現下右圖情況時便會失真——顯然 $\boldsymbol{l_i}$ 皆小於等於邊長 $\boldsymbol{l}$，但是這是一個變形構形（如圖 29）。

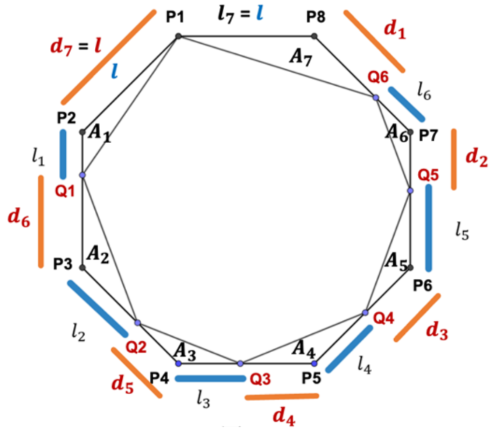


(圖29，由作者親自繪製)

因此我們必須得同時確保當邊長為方程式的最大根時外圍三角形的另一邊也會小於 $\boldsymbol{l}$，題目等價於證明下圖情形時 $\boldsymbol{d_i < l}$（如圖 30）。

由於圖形的結構對稱性，我們僅需重新定義一些符號以及函數意義即可證明其正確性

1. $g_m(x) = x - \cfrac{a_{n+1-m}}{x - \cfrac{a_{n+1-m+1}}{x - \cfrac{\cdots}{x - \cfrac{a_{n+1-1}}{x}}}} = x - \dfrac{a_{n+1-m}}{g_{m-1}(x)}$
2. t_P^Q 代表 $a_n, a_{n-1} \dots a_{n+1-Q}$ 中取 P 個互不相鄰的項相乘，其所有組合之和
   (如：$t_2^3 = a_n a_{n-2}$、$t_3^5 = a_n a_{n-2} a_{n-4}$)
3. $f_n(x) = (x)^n - t_1^{n-1}(x)^{n-2} + t_2^{n-1}(x)^{n-4} \dots$
4. $t_q^{p+1} - t_q^p = a_{n-p}\, t_{q-1}^{p-1}$
5. $f_{m+1}(x_m) = x_m f_m(x_m) - a_{n+1-m} f_{m-1}(x_m)$



(圖30，由作者親自繪製)

由於以上運算結果皆與證 $\boldsymbol{l_i < l}$ 時相同，故 $\boldsymbol{d_i < l}$ 也會成立。因此，我們證出 $\boldsymbol{f_i(x) = 0}$ 有實根且 $\boldsymbol{0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < l}$，並且給定任意 $\boldsymbol{A_1 \dots A_n}$，限定構形「必然存在」且唯一，且此構形的邊長為 $\boldsymbol{f_n(x) = 0}$ 的最大正實根。

五、 總結論：

「高次方程式具有最大正實根」時，必定存在一個對應的限定構形，使該最大正實根為其唯一解；同時，「限定構形存在」亦可作為該唯一對應關係的充分條件。

伍、 結論與研究反思

本研究源自一道 APMO 初選題，最初解法涉及較為複雜的「代數聯立方程」，後來我嘗試運用更為簡潔的「面積組合法」尋找替代解法，並進一步探索一般化的「正 n 邊形內嵌 n−1 邊形結構」。在解決正 n 邊形面積問題的過程中，我運用了「面積比例轉換迭代」的方法，並引入關鍵概念「K_n」，創建了「線段比例數列」，該數列具有「遞迴性質（$r_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{S_n K_n (1 - r_m)}$）」。從首項（$\frac{A_1}{S_n K_n}$）出發，經過不斷迭代，直至其末項等於 $1 - \frac{A_{n-1}}{S_n K_n}$，

最終推導出 S_nK_n 的方程式，成功將「幾何結構問題」轉換為「高次方程式求解問題」。

在研究過程中，為了找出將正 n 邊形面積轉換為高次方程式的「一般式」，我觀察到 S_nK_n 的高次方程式中，各次數項的係數呈現「循環對稱性」並蘊含「排列組合概念」。因此，我創建 T_P^Q 表示法，成功簡化了繁雜的迭代式，並發現 T_P^Q 具有可運算的特質，並且成功的結合數學歸納法證明方程式的通用式。然而，在求解高次方程式的過程中，由於其可能存在多個實數根，我一度遇到瓶頸。為了解決此問題，我利用 GeoGebra 繪圖軟體將高次方程式的根「具象化」，並回歸該方程式「根的幾何結構意義」，最終證明了「正 n 邊形內嵌 n−1 邊形結構」的實數根具有「唯一性」。此外，我進一步探索該方程式可能產生「其他實數根」的幾何結構，亦即透過「縮小正 n 邊形」來形成「變形結構」。最後，我再次利用 GeoGebra 繪圖軟體將該「變形結構」具象化。

進一步地，我將本研究推廣至更一般化的圓內接「非正 n 邊形結構」。由於變數繁多，我將研究命題限縮於「已知圓內接 n 邊形各邊長比」以及「已知指定點的頂角」，並利用餘弦定理與正弦定理求解圓內接 n 邊形的 K_a 一般式。後續則可運用前述正 n 邊形的「面積比例轉換迭代」策略進行解題、同時仿前述創建 $\boldsymbol{U_{n_q}^{p}}$ 表示法，來將複雜的圓內接多邊形公式轉化為漂亮的代數型態，以便使用數學歸納法來進行證明。最後，我論證了：「限定構形存在」與「高次方程式存在最大正實根」互為「充要條件」。

在研究過程中，我深刻體會到，若欲解決複雜的代數式問題，應嘗試以明確的圖形與實際數值將其具象化；反之，當面對抽象的幾何問題時，則可藉由具體的代數式將其轉化為簡潔的方程式求解。例如，在本研究中，針對繁瑣的高次方程式，我透過幾何意義探討其根的性質；而在解析複雜的多邊形邊長關係時，則運用方程式求解。因此，我認為困難的數學問題可以透過「代數與幾何的相互轉換」來找到突破點。此外，當研究陷入瓶頸時，應暫停思考，並藉由實驗進行驗證。例如，在本研究中，我利用 GeoGebra 繪圖軟體將高次方程式具象化，進而探討其根的意義與面積關係。

在本研究中，我充分運用了目前所掌握的數學解題工具，並靈活轉換應用，包括：遞迴數列迭代轉換為高次方程式、排列組合與數學歸納法、高次方程式求解與根的性質探討，以及 GeoGebra 繪圖軟體的實驗與假設驗證。這對我而言是一段極為寶貴的研究經驗，因為我成功整合並運用了所有已知知識，逐步拆解這個未知的難題，深刻體會到「渾身解『數』」的樂趣！

未來的研究可以從以下兩個方面深入展開：首先，從正 n 邊形出發，依據裁切每個頂點處一個三角形（該三角形的一邊與頂角所對之邊平行）的操作，構造出一個具有對邊平行與中心對稱性的 2n 邊形。接著，可以推導這類半正規多邊形的面積公式及其內部遞迴關係，進一步探討如何在原有正多邊形面積比例轉換方法的基礎上，利用裁切比例參數進行調整，使公式能適用於這一更為複雜的結構。其次，可針對此新構造多邊形的幾何特性展開研究，分析對邊平行性與中心對稱性如何影響邊長比例、內角分布及面積分割，並探討其是否存在與正多邊形相似的內在規律，以助於深化我們對半正規多邊形幾何性質的理解。

陸、 參考文獻資料

高中數學課本第一冊數學歸納法、第二冊排列組合、第三冊和角公式倍角公式

【評語】050417

本作品探討在正 n 邊形及圓內接多邊形構形中,若已知外圍三角形面積,反推原內部構形的邊長與面積。方法主要是透過面積比例推導遞迴關係,進而構建高次方程式,藉由方程式的推導進而得到幾何的推論。整體而言有紮實的數學結果，且結構清晰，有動機且探索過程完整清楚, 是相當好的作品。

作品海報

多邊共舞，四方連心

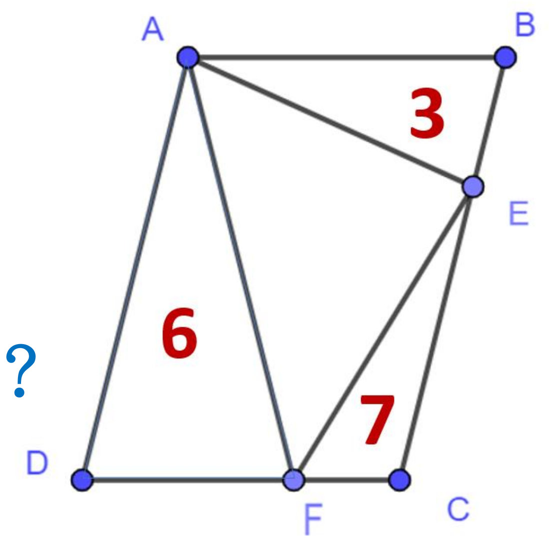
壹、摘要

本研究探討在正n邊形及圓內接多邊形構形中，若已知外圍三角形面積，是否可反推原構形的邊長與面積。研究建立一套幾何與代數互相轉換的流程，透過面積比例推導遞迴數列，進而構建高次方程，並提出新符號 T_P^Q 及 $U_{n_q}^p$ 表示不相鄰乘積和，以簡化代數結構。進一步運用數學歸納法與極值邏輯，成功證明：當高次方程式具有正實根時，其最大正實根必定對應唯一的多邊形限定構形；反之，若多邊形限定構形存在，也可唯一對應於高次方程式之最大正實根。此研究不僅提供幾何反推的系統化解法，也為代數方程的幾何詮釋建立明確模型，具備理論價值與推廣潛力。

貳、研究動機

2021 年 APMO 初試中有一道題目：給定一個平行四邊形，已知外圍三角形 △ABE、△ADF、△CEF 的面積分別為 3、6、7，那麼中間 △AFE 的面積為多少？

我思考：是否能用幾何直觀的方式來解構這個問題？有沒有辦法將這個問題一般化？

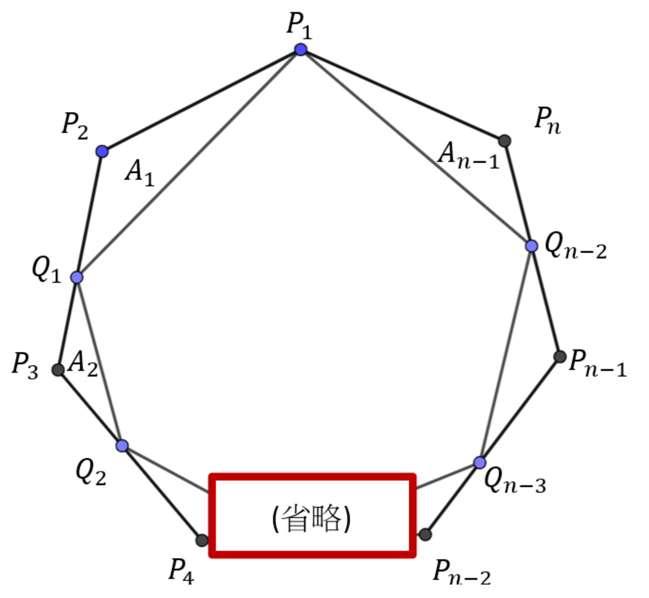


圖片來源：作者親自繪製

參、研究目的

一、有一未知面積之正 n 邊形，在內嵌 n-1 邊形的情況中，如果外圍諸多三角形面積皆已知，則此正 n 邊形的總面積 S_n 是多少？

二、有一未知面積之圓內接 n 邊形，在內嵌 n-1 邊形的情況中，如果外圍諸多三角形面積皆已知，則此圓內接 n 邊形的總面積 S_n 是多少？



圖片來源：作者親自繪製

肆、研究設備與器材

紙、筆、GeoGebra 電腦程式

伍、研究過程、方法、結果與討論

一、引進 K_n 的概念

設 K 為正 n 邊形由**相鄰兩邊圍成之三角形面積**

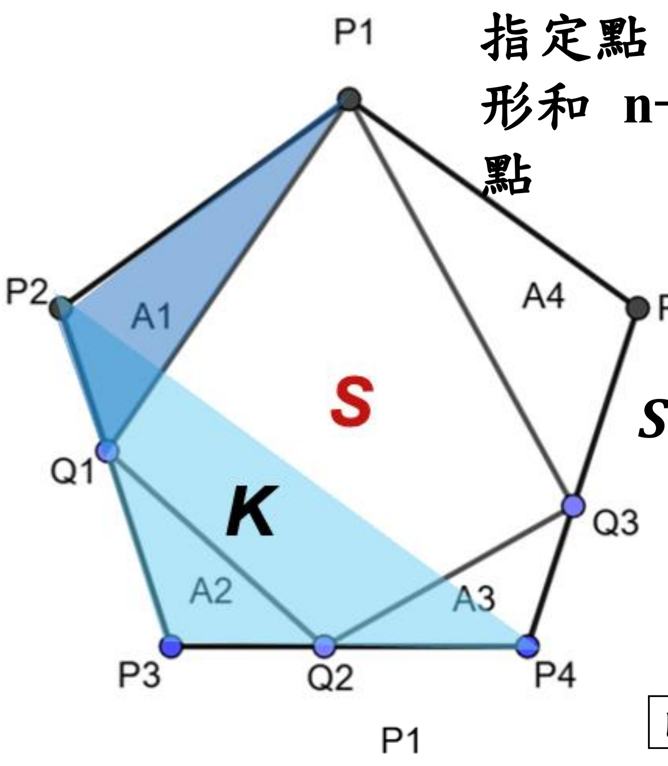
S_n 為正 n 邊形的**總面積**

$$K_n = \frac{K}{S_n} \qquad \boxed{\text{即 } S_nK_n = K}$$

由於給定正 n 邊形之邊數 n 之後，**K_n 可由右方公式求得：**

$$\boxed{K_n = \frac{4}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

故**原命題我們欲求 S_n 等價於求出 S_nK_n 的值（根）**



指定點（P1）：正 n 邊形和 n−1 邊形的共用頂點

S：內嵌 n-1 邊形的面積

S_n：正 n 邊形的面積

圖片來源：作者親自繪製

二、正 n 邊形面積問題的推導

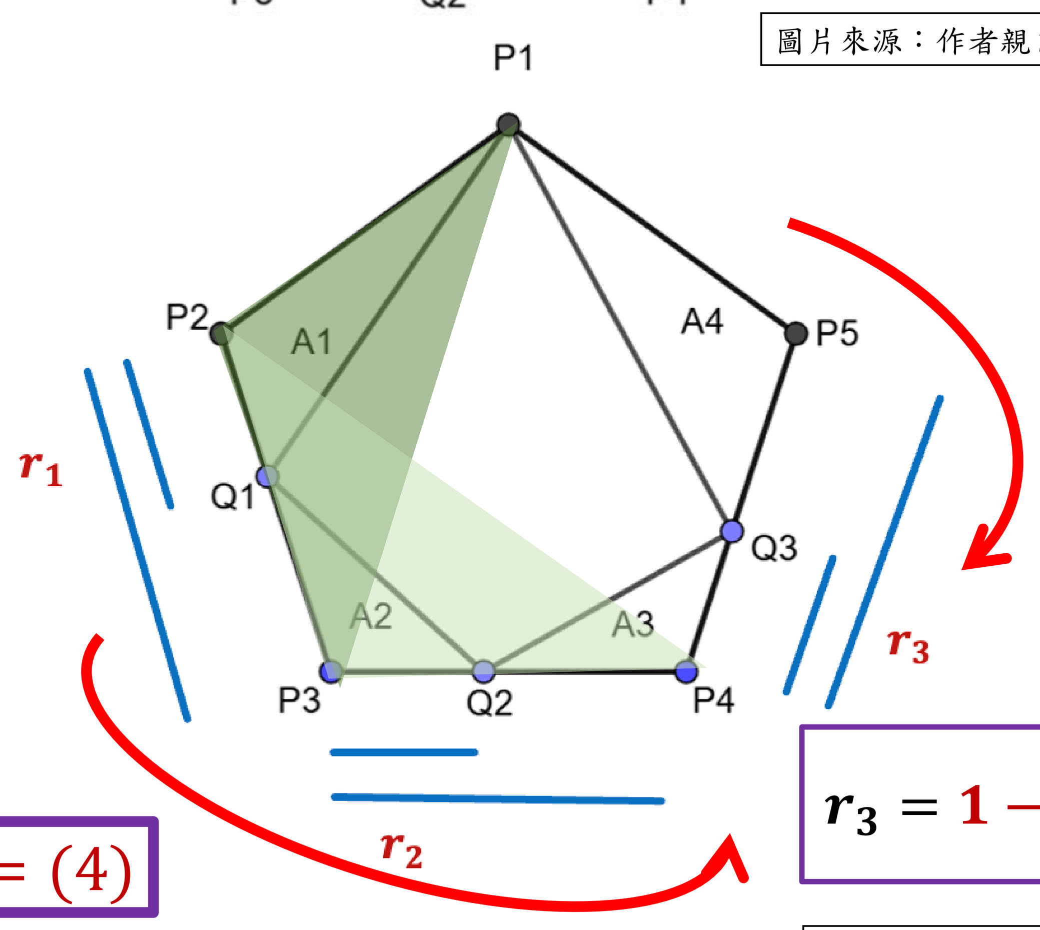
以正五邊形為例進行推導：

$$\frac{A_1}{S_5K_5} = r_1 \quad -(1)$$

$$\frac{A_2}{S_5K_5} = (1-r_1)\,r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{A_2}{S_5K_5(1-r_1)} \quad -(2)$$

$$\frac{A_3}{S_5K_5} = (1-r_2)\,r_3 \Rightarrow \boxed{r_3 = \frac{A_3}{S_5K_5(1-r_2)}} \quad -(3)$$

由 (1) 代入 (2)，(2) 再代入 (3)　　$\boxed{\text{最後由 (3) = (4)}}$



$$\boxed{r_3 = 1 - \frac{A_4}{S_5K_5}} \quad -(4)$$

圖片來源：作者親自繪製

$$\boxed{\text{可得 } (S_5K_5)^2 - (A_1+A_2+A_3+A_4)(S_5K_5) + (A_1A_3+A_1A_4+A_2A_4) = 0}$$

➡ 解得方程式的根 S_5K_5 之後 ➡ 由於 K_5 為已知（即 $K_5 = \frac{4}{5}(\sin\frac{\pi}{5})^2$）➡ 故可進一步求得 S_5

當推廣到正 n 邊形時，仿照上述方法一樣可**建立新數列 r，其由各個邊長的線段比例所構成：**

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	⋯	r_{n-2}
$\frac{A_1}{S_nK_n} = \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_2P_3}}$	$\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3P_4}}$	$\frac{\overline{P_4Q_3}}{\overline{P_4P_5}}$	$\frac{\overline{P_5Q_4}}{\overline{P_5P_6}}$	$\frac{\overline{P_6Q_5}}{\overline{P_6P_7}}$	⋯	$\frac{\overline{P_{n-1}Q_{n-2}}}{\overline{P_{n-1}P_n}} = 1 - \frac{A_{n-1}}{S_nK_n}$

由 r_1 依下列遞迴式，逐步迭代至末項 r_{n-2}，再藉由 $r_{n-2} = \frac{\overline{P_{n-1}Q_{n-2}}}{\overline{P_{n-1}P_n}} = 1 - \frac{A_{n-1}}{S_nK_n}$ 這條關係式得出方程式

此數列存在遞迴式：

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{A_1}{S_nK_n} \\ (1-r_m)r_{m+1} = \dfrac{A_{m+1}}{S_nK_n} \end{cases}$$

$(m \le n-2)$

由此遞迴式存在倒數，故奇偶的形態不同，我們**先觀察奇數項**

$$r_3 = \frac{S_nK_nA_3 - A_1A_3}{(S_nK_n)^2 - (A_1+A_2)S_nK_n}$$

$$r_5 = \frac{(S_nK_n)^2A_5 - (S_nK_n)(A_1A_5 + A_2A_5 + A_3A_5) + A_1A_3A_5}{(S_nK_n)^3 - (S_nK_n)^2(A_1+\cdots+A_4) + (S_nK_n)(A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4)}$$

不易觀察

我創建新符號 T_P^Q，而其意義為 $A_1 \ldots A_Q$ 中，取 P 個互不相鄰的項相乘，其所有組合之和

$$r_3 = \frac{S_nK_nA_3 - T_2^3}{(S_nK_n)^2 - (T_1^2)S_nK_n},$$

$$r_5 = \frac{(S_nK_n)^2A_5 - (S_nK_n)(T_2^5 - T_2^4) + T_3^5}{(S_nK_n)^3 - (S_nK_n)^2(T_1^4) + (S_nK_n)(T_2^4)}$$

容易觀察

我推測 r_m 的型態如右：

接著便可以使用**數學歸納法**，配合**遞迴關係式**，進行證明

$$r_m = \frac{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}A_m - (S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-2}(T_2^m - T_2^{m-1}) + \cdots \mp (S_nK_n)^1\left(T_{\frac{m-1}{2}}^m - T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}\right) \pm T_{\frac{m+1}{2}}^m}{(S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}} - (S_nK_n)^{\frac{m+1}{2}-1}(T_1^{m-1}) + \cdots \mp (S_nK_n)^2\left(T_{\frac{m-3}{2}}^{m-1}\right) \pm (S_nK_n)T_{\frac{m-1}{2}}^{m-1}}$$

最後將前述證得的 r_m，令 $m = n-2$，代入關係式：$1 - r_{n-2} = \frac{A_{n-1}}{S_nk_n}$，得出方程式。

由於**當 n 為奇數與偶數時**，方程式的次方形式略有差異，故**以高斯記號加以統整**，並將 S_nK_n **以 x 表示**，導出以下**一般化方程式**：

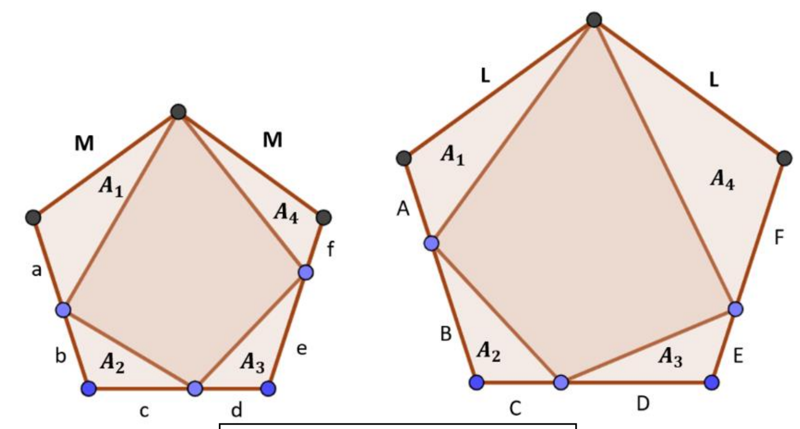
$$(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]}-T_1^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+T_2^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}-T_3^{n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\dots\pm T_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}=0$$

求得此方程式的根 x（即 S_nK_n），因 K_n 為已知，即可得 S_n

然而高次方程式可能存在多個實數根，因此我接下來將探討根的意義與性質，**找出真正符合命題的根（解）**

根的意義與性質探討

根據電腦繪圖的觀察，**我猜測真正符合命題的根可能是最大根。**我嘗試以**根的幾何意義**，進行論證與探討。
經由觀察面積和邊長的關係，可推出以下性質：



圖片來源：作者親自繪製

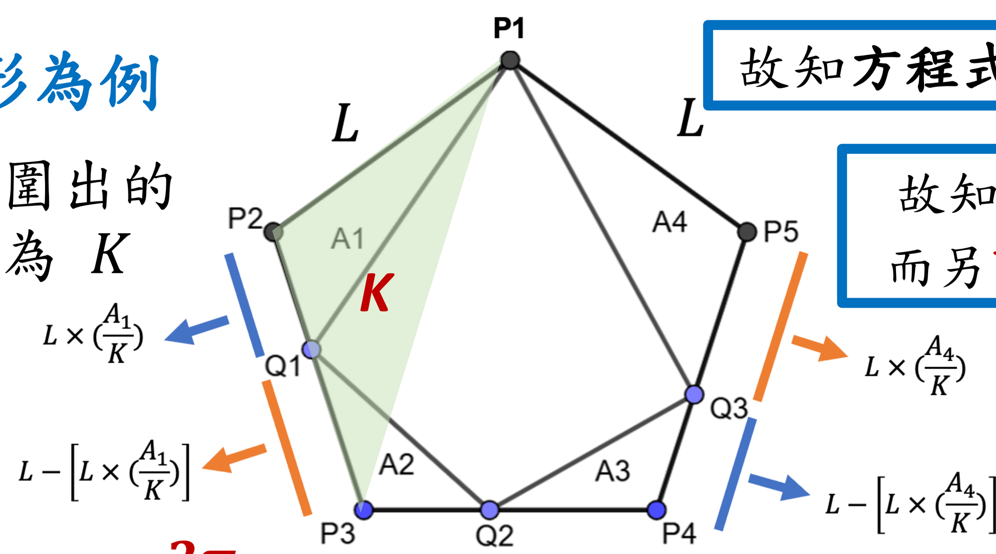
以正五邊形為例，假設有兩個不同邊長的正五邊形均符合我命題中設定的構形，一大一小，大的邊長為 L，小的邊長為 M，**因為 A_1, A_2, A_3, A_4 的大小固定**，於是可以推導出：
$A<a,\ B>b,\ C<c,\ D>d,\ E<e,\ F>f \Rightarrow L<M$，矛盾！

※ 故在維持 n-1 邊形內嵌於正 n 邊形中的構形中，僅存在一個真正符合命題的根

然而在一些情況中，方程式的確可以存在多個實數根；我猜測能夠藉由**改變構形**產生一個較小的根，來對應不同的中心 n-1 邊形面積值，我利用以下實例說明：

以正五邊形為例

設相鄰兩邊圍出的三角形面積為 K



$$K=\frac{1}{2}\times L^2\times\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

圖片來源：作者親自繪製

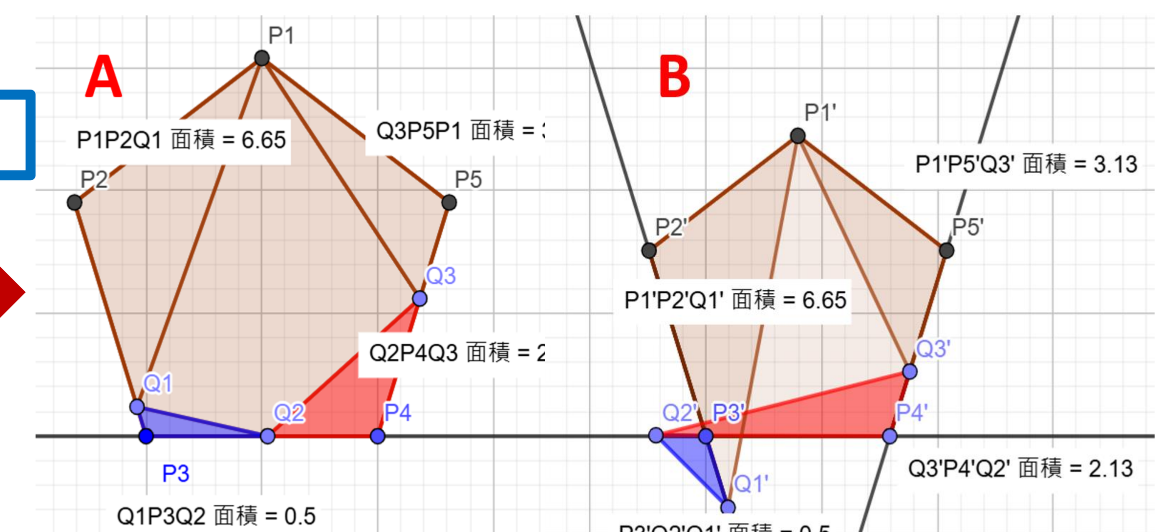
$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{5}}\times\left(\frac{2A_2}{L\left(1-\frac{A_1}{K}\right)}+\frac{2A_3}{L\left(1-\frac{A_4}{K}\right)}\right)=L$$

化簡得 $1=\frac{A_2}{K-A_1}+\frac{A_3}{K-A_4}$

先從二次方程式解出 K 之後
再由 K 與 L 之關係式解得 L

故知其中一解為 $K>A_1$ 且 $K>A_4$
而另**可存在 $A_1>K$ 而 $A_4<K$ 的解**

故知**方程式其他的根**乃**藉由改變構形縮小**而產生

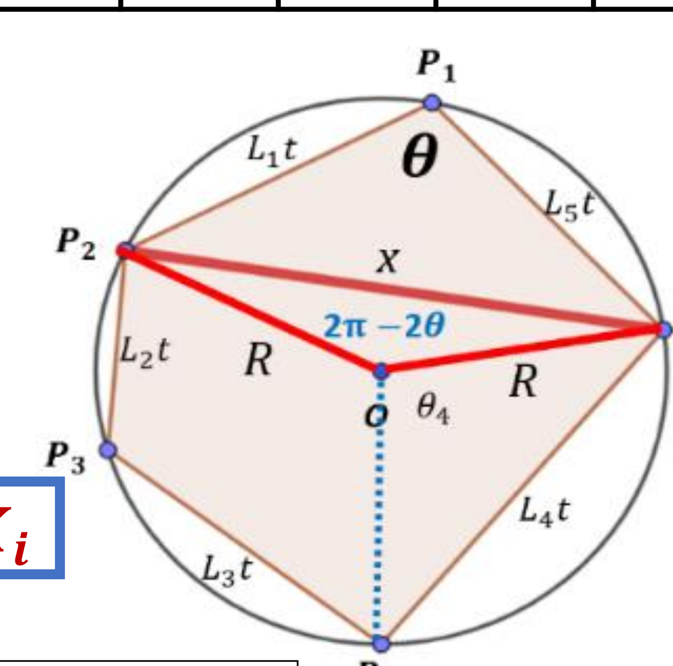


圖片來源：作者親自繪製

正五邊形	邊長 L	S	A_1	A_2	A_3	A_4
A	4	15.12	6.65	0.50	2.13	3.13
B	3.18	4.96	6.65	0.50	2.13	3.13

三、圓內接 n 邊形面積問題的推導

命題：一圓內接 n 邊形，各點、面積接續前述正多邊形的命名法則，若給定逆時針方向之「邊長比」依序為 $L_1:L_2:L_3:\dots:L_n$（則指定點的頂角 θ 亦可唯一確定），且外圍各個三角形面積亦為已知，求此圓內接 n 邊形的總面積 S_n 為多少？



圖片來源：作者親自繪製

由於圓內接四邊形過於單純，可視為特例，故我從圓內接五邊形開始探討，以便歸納：

※解題策略：先求得由相鄰邊圍成三角形之面積 → 再求得總面積 → 將兩數值相除即得 K_i

故最後可推得 K_a 的一般化表示式為：
當 $a=1,2,3,\dots,n-2$ 時：

$$K_a=\frac{\triangle P_aP_{a+1}P_{a+2}}{S_n}=\frac{L_aL_{a+1}\times\sqrt{1-\cos\theta_a\cos\theta_{a+1}+\sin\theta_a\sin\theta_{a+1}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{L_i^2(4z-L_i^2)}}$$

並且

$$K_{n-1}=\frac{\triangle P_{n-1}P_nP_1}{S_n}=\frac{L_{n-1}L_n\times\sqrt{1-\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n+\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{L_i^2(4z-L_i^2)}}$$

有了 K_a 後，仿照正多邊形的方法，我亦歸納出下列以 S_n 為變數 x 的方程式，為了簡化式子以及證明其正確性，我創建新符號 $U_{n_q}^{\,p}$：自 $\frac{A_1}{K_1}$ 到 $\frac{A_P}{K_P}$ 中任取 q 個**互不相鄰的項相乘**後，再乘上 $\prod_{i=1}^{n}K_i$，最後**取其所有組合之和**，得到方程式：

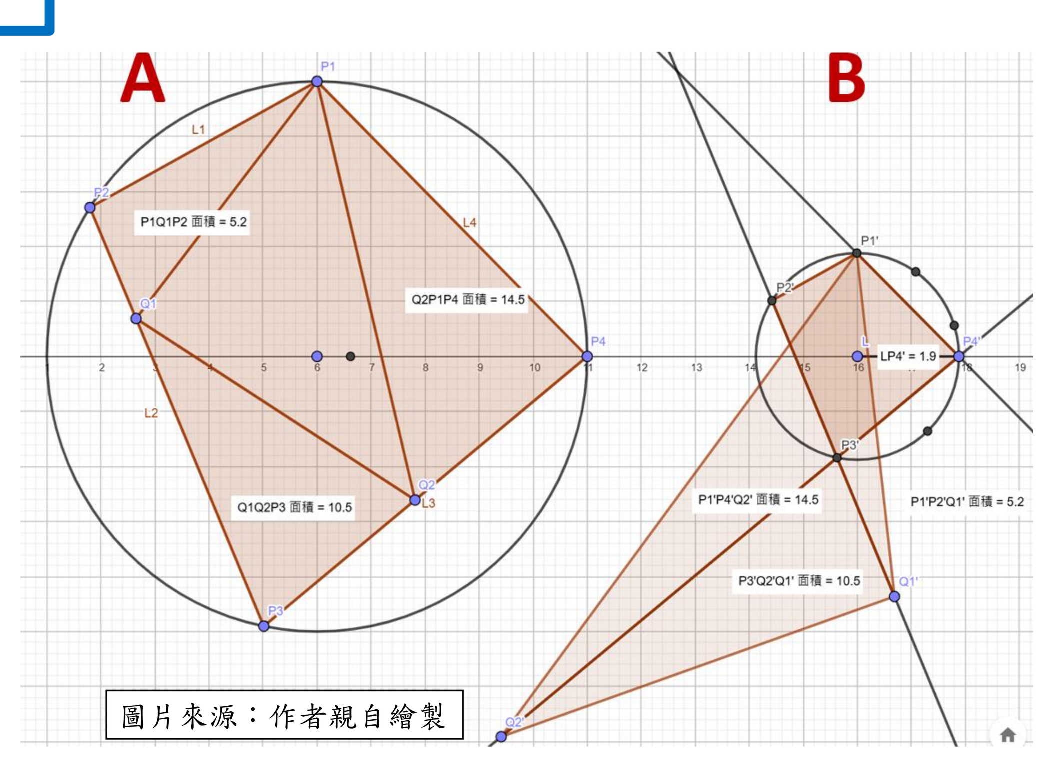
$$U_{n_0}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]}-U_{n_1}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+U_{n_2}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}-U_{n_3}^{\,n-1}(x)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\dots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}U_{n_{\left[\frac{n}{2}\right]}}^{\,n-1}=0$$

仿之前的技巧以數學歸納法證明

同樣的，此方程式之最大正實根對應於：符合 n-1 邊形內嵌於正 n 邊形之構形

同前面在正 n 邊形的論述，可以靠著改變構形來產生較小的根，右圖為以圓內接四邊形為例產生之「變形結構」圖示：

圓內接四邊形	半徑 R	S_4	A_1	A_2	A_3
A	5	46.9	5.2	10.5	14.5
B	1.9	6.6	5.2	10.5	14.5



圖片來源：作者親自繪製

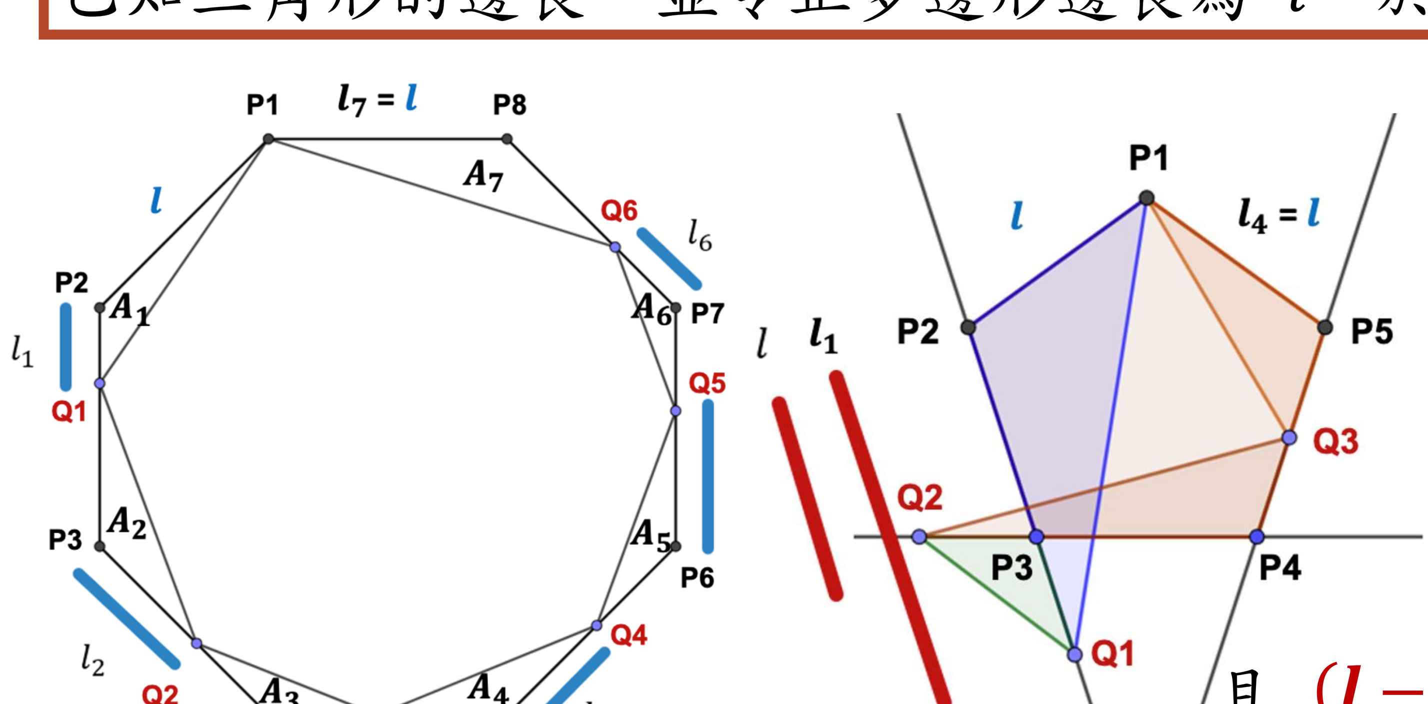
總結以上的討論：

不管在「正 n 邊形」或是「一般化的圓內接 n 邊形」的情況，若命題的『初始限定構形（亦即 n 邊形內嵌 n-1 邊形之構形）』存在，則前述之高次方程式的最大正實根，為滿足此『初始限定構形』之唯一解。

也就是說「限定構形存在」是「方程式最大正實根為滿足此限定構形的唯一解」的「充分條件」

探討「若方程式有最大正實根，則必存在對應的限定構形，而該最大正實根是此構形的唯一解」是否成立？

破解此問題必須得先了解如何區分「限定構形」以及「變形構形」，觀察圖形，發現若使用如**左圖**的方式命名每個已知三角形的邊長，並令正多邊形邊長為 l，於限定構形下 l_i 都小於 l；若是變形構形，部分 l_i 會大於 l



圖片來源：作者親自繪製

令 θ 為正多邊形內角，$\frac{1}{2}\sin\theta=m$，設立 $ma_i=A_i$ 以便計算

易知 l_i 具有關係式：第一頁中的 $S_nK_n=m\,l^2$（亦即 $\frac{A_i}{m}=a_i$）

$l\times l_1=a_1$
$(l-l_1)\,l_2=a_2$
$(l-l_2)\,l_3=a_3$
且 $(l-l_{n-2})\,l_{n-1}=a_{n-1}$

欲證明限定構形存在，必須證得以下兩件事情

（一）$l_{n-1}=l$ 以確保構形封閉

（二）$l>l_i\ (i<n-1, i\in N)$ 以確保圖形不外張

(一) $l_{n-1}=l$ 之導證：

條件：設 $h_i(x)=(x)^{\left[\frac{i}{2}\right]}-T_1^{i-1}(x)^{\left[\frac{i}{2}\right]-1}+T_2^{i-1}(x)^{\left[\frac{i}{2}\right]-2}-T_3^{i-1}(x)^{\left[\frac{i}{2}\right]-3}\dots\pm T_{\left[\frac{i}{2}\right]}^{i-1}=0$

$T_P^Q=m^Pt_P^Q$

觀察下列繁分式化簡後之型態，我們發現若定義 $f_i(x)=(x)^i-t_1^{i-1}(x)^{i-2}+t_2^{i-1}(x)^{i-4}\dots\pm t_{\left[\frac{i}{2}\right]}^{i-1}x^{\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]}$

則可進一步將 $l-l_i$ 以更簡潔的函數迭代表示如下，且呼應前面正 n 邊形的迭代條件及方程式型態

$$l-l_1=l-\frac{a_1}{l}=\frac{l^2-a_1}{l}$$

$$l-l_2=l-\frac{a_2}{l-\frac{a_1}{l}}=\frac{l^3-(a_1+a_2)l}{l^2-a_1}$$

$$l-l_3=l-\frac{a_3}{l-\frac{a_2}{l-\frac{a_1}{l}}}=\frac{l^4-(a_1+a_2+a_3)l^2+a_1a_3}{l^3-(a_1+a_2)l}$$

$$\boxed{\frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)}=x-\frac{a_i}{\frac{f_i(x)}{f_{i-1}(x)}}}\quad (i\le n-1)$$

$$l-l_1=\frac{f_2(l)}{f_1(l)}\qquad l-l_2=\frac{f_3(l)}{f_2(l)}\qquad l-l_3=\frac{f_4(l)}{f_3(l)}$$

我以數學歸納法證出 $l-l_i=\frac{f_{i+1}(l)}{f_i(l)}$

$h_5(x)=x^2-T_1^4x+T_2^4$
$f_5(x)=x^5-t_1^4x^3+t_2^4x$

$h_6(x)=x^3-T_1^5x^2+T_2^5x-T_3^5$
$f_6(x)=x^6-t_1^5x^4+t_2^5x^2-t_3^5$

並可知每一個 $h_i(x)=0$ 的根 P 可拆成兩個平方根 $\pm\sqrt{\frac{P}{m}}$，作為 $f_i(x)=0$ 的根

因此若 $h_n(x)=0$ 存在正實根 S_nK_n，則必可找到相對應的正實根 $\sqrt{\frac{S_nK_n}{m}}$，使得 $f_n\left(\sqrt{\frac{S_nK_n}{m}}\right)=0$

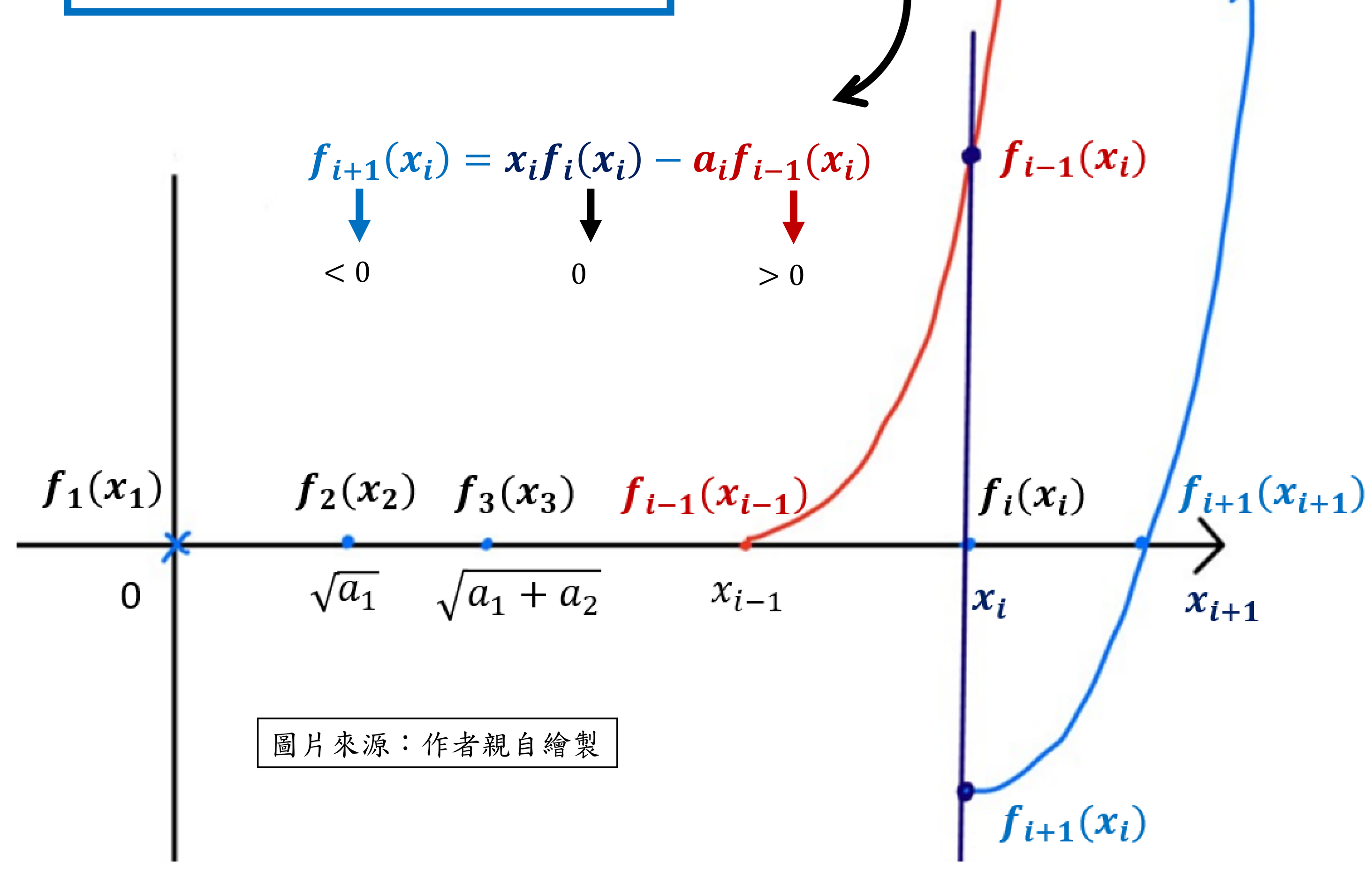
令 $\sqrt{\frac{S_nK_n}{m}}=l$，則 $f_n(l)=0\Rightarrow l-l_{n-1}=\frac{f_n(l)}{f_{n-1}(l)}=0\Rightarrow l_{n-1}=l$

(二) $l>l_i$ 的證明：由於已知 $l-l_i=\frac{f_{i+1}(l)}{f_i(l)}$，故希望證出 $f_z(l)>0$ ($z\in N$, 對所有 $z\le n-1$ 皆成立)

由於 $f_i(x)$ 函數領導係數為 1，因此當 $x\to+\infty$，$f_i(x)\to+\infty$

因 S_nK_n（亦即 m l^2）為 $h_n(x)=0$ 之最大根，故 l 為 $f_n(x)=0$ 之最大根（即 $l=x_n$）

$$\boxed{\frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)}=x-\frac{a_i}{\frac{f_i(x)}{f_{i-1}(x)}}}$$



圖片來源：作者親自繪製

若 $f_i(x)=0$ 有實根，令 x_i 為 $f_i(x)=0$ 的最大根，我們觀察左圖圖形

若 $x_i>x_{i-1}$，則可知 $f_{i-1}(x_i)$ 恆大於零。同理，若能證出 $l>x_i$ 則可知 $f_i(l)$ 恆大於零，我們先觀察 $f_i(x)=0$ 最大根的關係來破題。

$$f_1(x)=0\Longrightarrow x_1=0$$
$$f_2(x)=0\Longrightarrow x_2=\sqrt{a_1}$$
$$f_3(x)=0\Longrightarrow x_3=\sqrt{a_1+a_2}$$

易知 $0=x_1<x_2<x_3$，猜測 x_i 應該遞增，而 x_i 若遞增，恰可推得 $x_i<x_n$（即 l）

欲證：$f_i(x)=0$ 有正實根，且 $0=x_1<x_2<x_3<\cdots<x_i$

$\Longrightarrow$ 由數學歸納法，已知 $0=x_1<x_2<x_3$，假設 $k=i-1$、$k=i$ 時均成立，因此 $f_{i-1}(x_i)>0$ 且 $f_i(x_i)=0$，

由於 $f_{i+1}(x_i)=x_if_i(x_i)-a_if_{i-1}(x_i)$，故知 $f_{i+1}(x_i)<0$

由中間值定理得知 $f_{i+1}(x)=0$ 存在正實根，並且 $x_i<x_{i+1}$

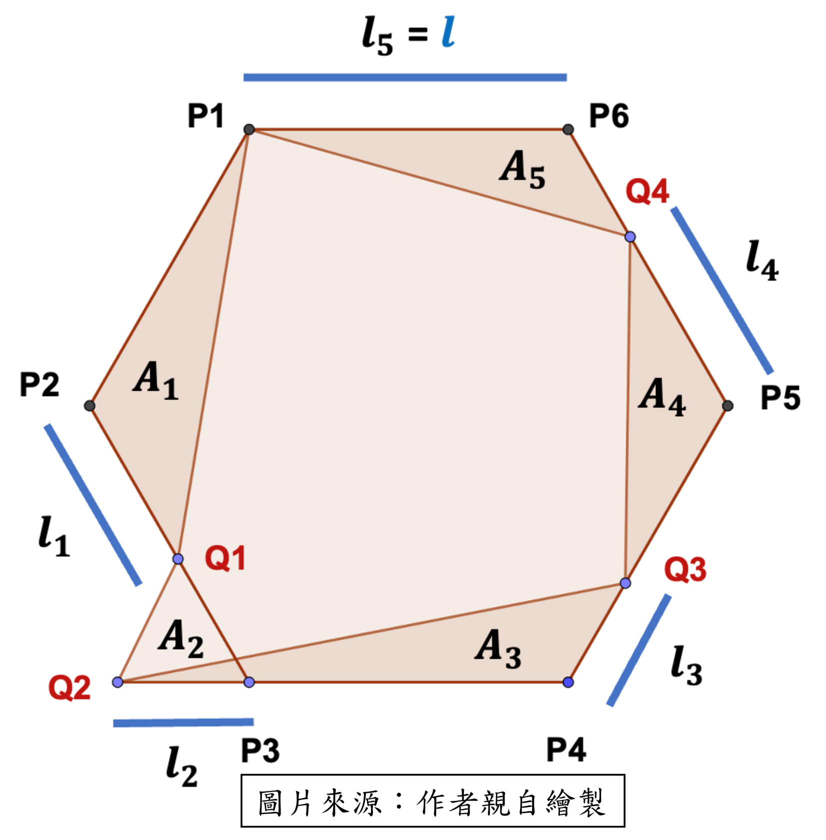
因此證得 $k=i+1$ 時亦成立。

但是若證明其具有幾何意義，還須證 $l_i>0$。 若能證出 $l-l_i<l$ 則可以解決問題

因為 $f_{i+1}(l)=lf_i(l)-a_if_{i-1}(l)$，由前述可知 $f_{i-1}(l)>0$，$f_i(l)>0$，$f_{i+1}(l)>0$

$\Rightarrow l-l_i=\frac{f_{i+1}(l)}{f_i(l)}=\frac{lf_i(l)-a_if_{i-1}(l)}{f_i(l)}=l-a_i\times\frac{f_{i-1}(l)}{f_i(l)}<l$，得證！

上面我們僅確保了 l_i 小於邊長 l，雖然大部分情況成立，可是當出現右圖情況時便會失真 — 顯然 l_i 皆小於等於邊長 l，但是這是一個變形構形！



圖片來源：作者親自繪製

因此我們必須得同時確保當邊長為方程式的最大根時外圍三角形的另一邊也會小於 l，題目等價於證明下圖情形時 $d_i<l$。

由於圖形結構對稱性，此敘述也會成立，我們作如下的假設

1. $l-d_i=x-\cfrac{a_{n+1-i}}{x-\cfrac{a_{n+1-i+1}}{x-\cfrac{\cdots}{x-\cfrac{a_{n+1-1}}{x}}}}=x-\frac{a_{n+1-i}}{l-d_{i-1}}$

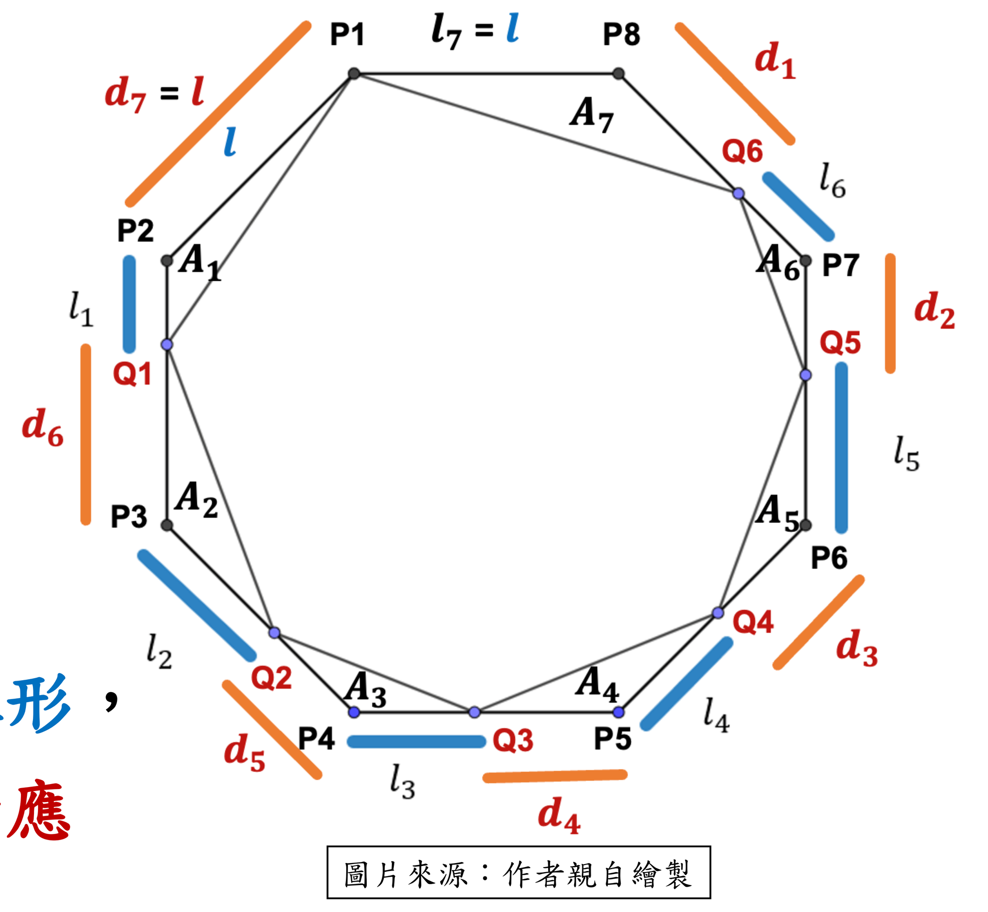
2. t_P^Q 代表 $a_n,a_{n-1}\dots a_{n+1-Q}$ 中取 P 個互不相鄰的項相乘，其所有組合之和（如：$t_2^3=a_na_{n-2}$、$t_2^5=a_na_{n-2}a_{n-4}$）

3. $f_n(x)=(x)^n-t_1^{n-1}(x)^{n-2}+t_2^{n-1}(x)^{n-4}\dots$

4. $t_q^{p+1}-t_q^p=a_{n-p}\,t_{q-1}^{p-1}$

5. $f_{i+1}(x_i)=x_if_i(x_i)-a_{n+1-i}f_{i-1}(x_i)$

有了這些假設後，仿照之前的方法，也能得到相同的結果。



圖片來源：作者親自繪製

總結：「高次方程式具有最大正實根」時，必定存在一個對應的限定構形，使該最大正實根為其唯一解；同時「限定構形存在」亦可作為該唯一對應關係的充分條件。

陸、結語

在本研究中，我深刻體會到：「複雜的代數問題可透過幾何圖像具象化求解，而抽象的幾何結構亦可藉由代數方程式條理化地分析。」這種「代數與幾何的雙向轉換」思維，成為我突破瓶頸的關鍵策略。無論是以面積比例遞迴建構高次方程，還是以 GeoGebra 輔助觀察根的幾何意義，我皆透過圖形與代數交錯應用的方式，重新詮釋多邊形結構背後的數學本質，也展現出數學在邏輯推演與圖像思考之間的和諧與優雅。

柒、參考資料

高中數學課本：數學歸納法、排列組合、正弦定理、餘弦定理、和角公式與倍角公式、中間值定理