中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050416

分角曲線之探討

學校名稱： 國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳品叡	王世豪
高二 呂家樂	蕭煜修

關鍵詞： 分角曲線、複數、高次曲線

分角曲線之探討

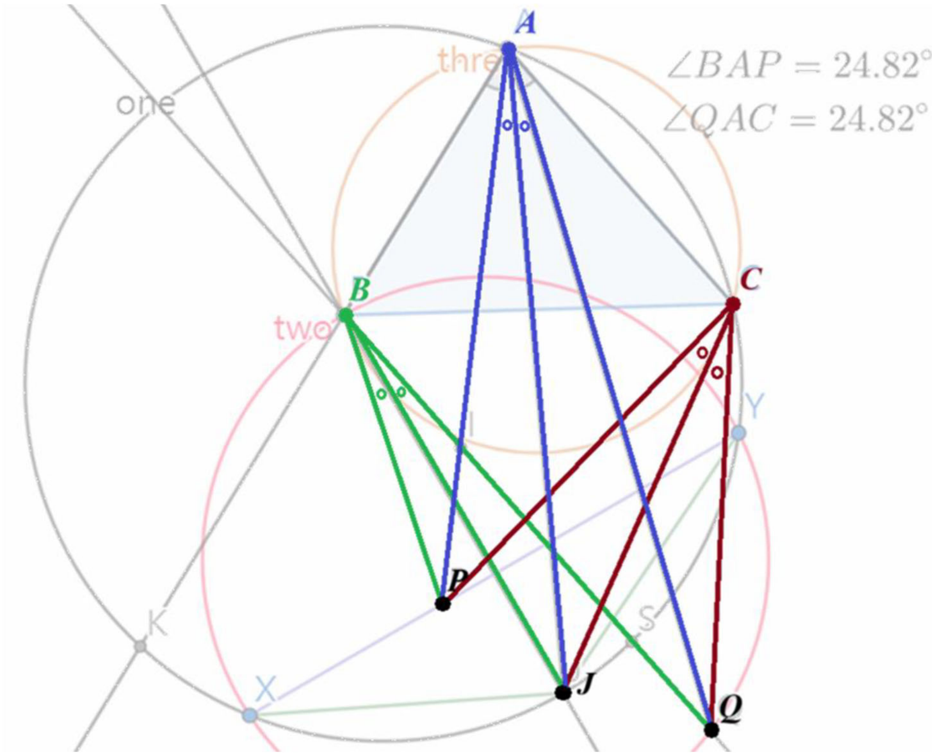
摘要

本研究探討給定平面任意三點 A,B,O，滿足 $\angle OPB \equiv \angle APO$ 的點 P 軌跡為何？有什麼性質？我們主要運用複數解析求出曲線方程式，再運用其對觀察到的曲線性質進行證明，我們亦在作品中給出一些幾何解釋。之後我們更進一步更改兩角度之間的關係(如成倍數關係、差為定值等)，得到了豐碩的成果。最終還發現此軌跡與其他曲線間的關聯，並說明了背後的幾何本質。

壹、 前言

一、 研究動機

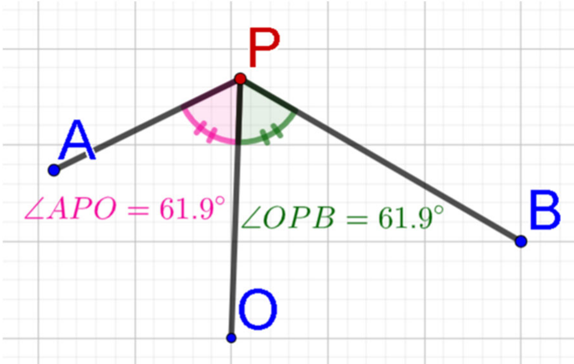
某次解 2022 年 TMO 的第五題，依題目指示作圖後，我們注意到對於圖中的 A,B,C 三點，分別將其連向 P,J,Q (即圖一中的籃、綠、紅線)，分別形成的兩個角角度相等(即圖一中綠色的兩個角相等、藍色的兩個角相等、紅色的兩個角相等)。我們不禁好奇所有像 A,B,C 這樣，與 P,J,Q 連線後成等角的點，形成的軌跡是什麼。



圖一、TMO 2022 P5 的作圖與處理

二、 研究問題的陳述與轉化

給定平面上任意三點 A,O,B，我們希望找出所有符合 $\angle APO=\angle OPB$ 的 P 點(如圖二)。這相當於「找到 P 點，使得 O 點在 $\angle APB$ 的內角平分線上(本篇所提到的角平分線並非狹義的角平分射線，而是包含其延長線，一條完整的直線)」。



圖二、符合條件的 P 點

基於對稱性，之後我們也將討論「使得 O 點在 $\angle APB$ 的外角平分線上」的 P 點軌跡，並發現一併考慮兩者時，P 點的軌跡將是一個連續的曲線。

為了進一步的討論，我們先明確角度的定義：$\angle ABC$ 表示從射線 $\overrightarrow{BA}$ 逆時針轉向 $\overrightarrow{BC}$ 的有向角，量值屬於 $[0,2\pi)$。在之後我們會證明 O 點在 $\angle APB$ 的內角或外角平分線上的充要條件分別為 $\angle OPB=\angle APO$ 和 $\angle OPB=\angle APO\pm\pi$，兩者可合記為 $\angle OPB\equiv\angle APO\left(\operatorname{mod}\pi\right)$，我們進一步省略後面 mod 部分，成為 $\angle OPB\equiv\angle APO$。

三、 研究目的

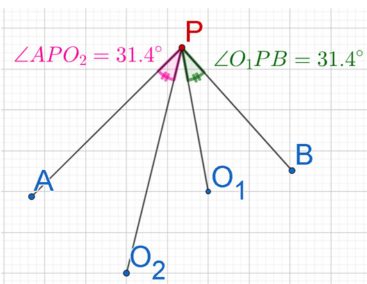
(一) 原始問題：給定平面上三點 A,O,B，研究滿足條件 $\angle OPB\equiv\angle APO$ 的 P 點軌跡(我們稱為「分角曲線」)及其性質。

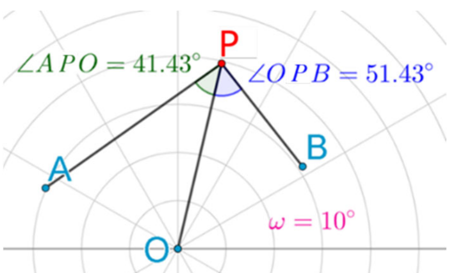
(二) 推廣一：給定平面上三點 A,O_1,O_2,B，研究滿足條件 $\angle O_1PB\equiv\angle APO_2$ 的 P 點軌跡(我們稱為「分離分角曲線」)及其性質。(也就是將 O 點拆成兩個點 O_1,O_2)

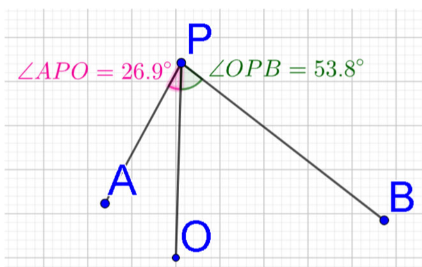
(三) 推廣二：給定平面上三點 A,O,B，以及固定角度 ω，研究滿足條件 $\angle OPB\equiv\angle APO+\omega$ 的 P 點軌跡(我們稱為「偏移分角曲線」)及其性質。(也就是讓兩角度差為定值，$\omega=0$ 時即為分角曲線)

(四) 推廣三：給定平面上三點 A,O,B，以及固定整數 n，研究滿足條件 $\angle OPB\equiv n\angle APO$ 的 P 點軌跡(我們稱為「n 倍分角曲線」)及其性質。(也就是讓兩個角度成倍數關係)

(五) 研究上述曲線和其他曲線之間的關係







圖三、原始題目的推廣 (左)分離 (中)偏移 (右) n 倍(此處 $n=2$)

四、 文獻探討

(一) 斜環索線(參考資料[2]~[8])

〔Definition 1-1〕斜環索線(Oblique Strophoid)

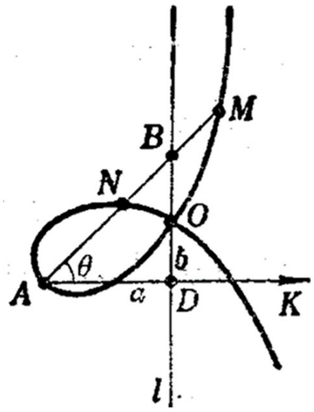
(整理自參考資料[2],[12])

給定固定直線l(方便起見，稱其為基準線)、

l上定點O(節點)l外定點A(焦點)，設B為l上動點，

以B為圓心，半徑$\overline{OB}$做圓，交$\overleftrightarrow{AB}$於M,N兩點，

則M,N的軌跡稱為「斜環索線」。(圖四)



圖四、斜環索線
(圖自參考資料[8], p.131)

簡單應用解析幾何的方法，容易得出另一個等價的定義：

〔Definition 1-2〕斜環索線(Oblique Strophoid)(整理自參考資料[2],[6],[8])

斜環索線為由以下方程式所決定的曲線(此處a,b並非圖一中的a,b)：

1. 直角坐標：$\left(x^2+y^2\right)\left(ax+by\right)=xy$

2. 直角坐標的參數方程：$(x,y)=\left(\dfrac{k}{(k^2+1)(a+bk)},\dfrac{k^2}{(k^2+1)(ak+b)}\right)$

3. 極坐標：$r=\dfrac{\sin(2\theta)}{2\left(a\cos\theta+b\sin\theta\right)}$

節點為$O(0,0)$、焦點為$A\left(\dfrac{b}{2(a^2+b^2)},\dfrac{a}{2(a^2+b^2)}\right)$、基準線$l:ax+by=0$。

〔Property 1-1〕自交(參考資料[6])

斜環索線於節點自交，且此點的兩切線相互垂直。

〔Property 1-2〕反演(參考資料[3],[4],[6])

斜環索線對於焦點反演仍為斜環索線，對節點反演則為等軸雙曲線。

〔Property 1-3〕漸近線

一般情形下斜環索線有一與l平行的漸近線$ax+by=c$

參考資料並無給出詳細證明，性質 1-1 將會在內文說明，性質 1-2 套用反演的坐標變換化簡即可得，性質 1-3 從略。

(二) 等角差線與 n 倍等角差線(參考資料[9]~[13])

〔Definition 2〕n 倍等角差線 (擷取自參考資料[12])

B 在直角坐標中的原點 $(0,0)$，C 在直角坐標中的原點 $(l,0)$，分別做過 B 和 C 的兩條直線 L_1 和 L_2，並設直線交點 A。初始狀態 Ω 為 $L_1 : y = \tan\alpha x$ 以及 $L_2 : y = 0$。L_2 以順時針轉動，L_1 逆時針方向以 L_2 旋轉速度的 n 倍轉動，直到下一個初始狀態 Ω'，則兩直線交點 A 點的移動軌跡為 n 倍等角差線 $\Gamma^l_{\alpha,n}$，如果 $l=1$ 可以簡寫成 $\Gamma_{\alpha,n}$，當 $n=1$ 時可記作 Γ^l_α，即等角差線。

貳、 研究設備及器材

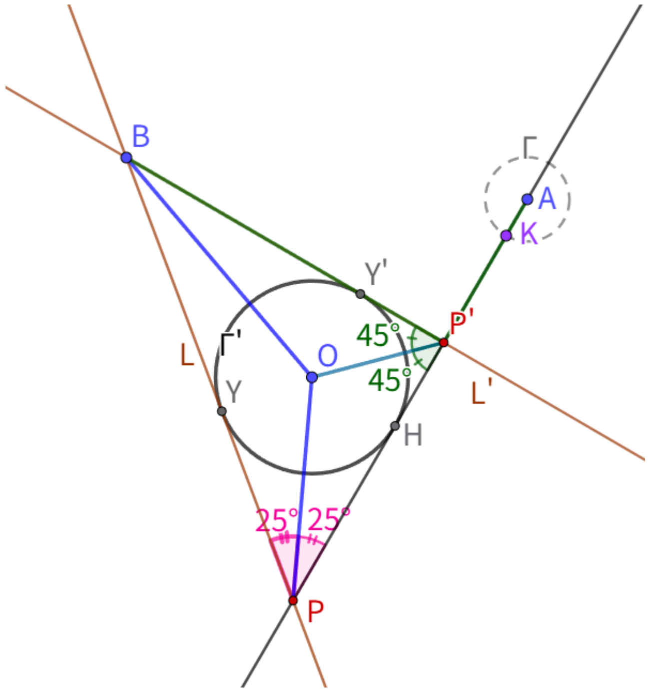
電腦、Geogebra(數學軟體)、Maxima(數學軟體)、紙、筆、ChatGPT、Grok 3

參、 研究過程或方法

一、 使用 Geogebra 進行初步觀察

我們先用 Geogebra 以幾何方式畫出滿足 $\angle OPB \equiv \angle APO$ 的 P 點軌跡。前面提到這相當於「O 點在 $\angle APB$ 的角平分線上」，這讓我們想到圓的切線性質，因而發想了以下的作圖方法。

在畫布上點出 A,O,B，以 A 為圓心，任意半徑作一圓 Γ。Γ 上取一動點 K，連接 $\overleftrightarrow{AK}$，以，O 為圓心，作與 $\overleftrightarrow{AK}$ 相切的圓 Γ'，設切點為 H，過 B 作 Γ' 的兩條切線 L、L'，設切點為 Y,Y'，連 $\overline{OY}$、$\overline{OY'}$。作 $\overleftrightarrow{AK}$ 與 L、L' 之交點 P、P'，如右圖五。由圓的切線性質可知圖中的 P,P' 分別在 $\angle APB$ 的內角與外角平分線上，因此 P,P' 即為兩個符合條件的點。此時，使用 Geogebra 的軌跡功能，做出 K 於 Γ 上移動一周下 P 與 P' 的軌跡，即為所求。(如下一頁的圖六)



圖五、用Geogebra進行初步觀察

二、 角平分線的性質

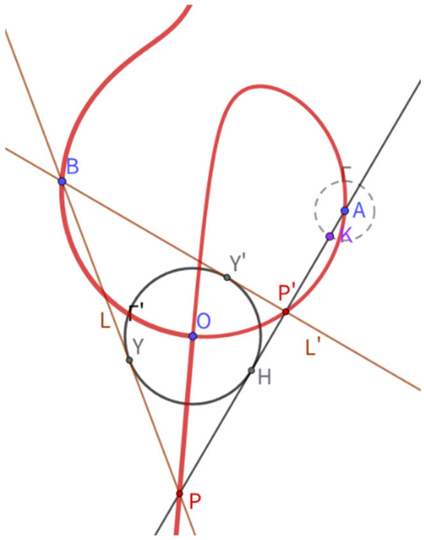
我們先前提到角平分線有以下性質

〔Property 2〕角平分線的角度性質

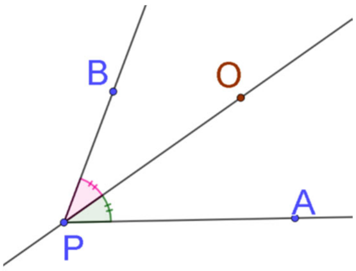
一點O在$\angle APB$的內角平分線上$\Leftrightarrow$ $\angle OPB=\angle APO$

一點O在$\angle APB$的外角平分線上$\Leftrightarrow$ $\angle OPB=\angle APO\pm\pi$

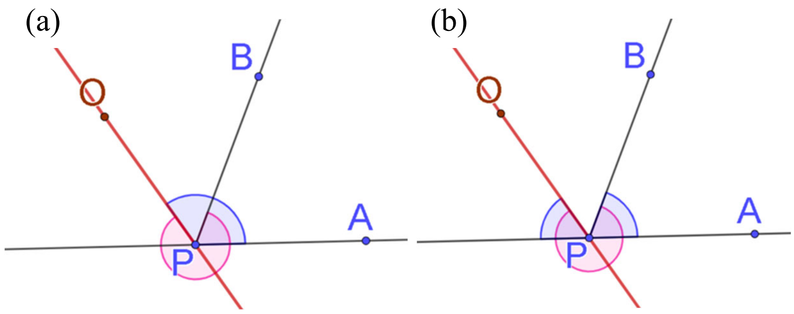
關於內角平分線的敘述顯然成立(圖七)。外角平分線部分，如圖八(a)，粉紅色者為$\angle OPB$(有向角：$\overrightarrow{PO}$逆時針轉向$\overrightarrow{PB}$掃過的角度)、藍色者為$\angle APO$。由於紅色線為外角平分線，我們可將$\angle APO$中的$\angle BPO$部分換掉，如圖八(b)，便能看出$\angle OPB=\angle APO+\pi$。由於以下只是其中一種情形，在某些情況下，將會有$\angle OPB=\angle APO-\pi$。



圖六、紅色曲線即為軌跡(分角曲線)



圖七、內角平分線



圖八、外角平分線

若以無向角(角度無方向性，量值一律取$0^\circ\sim180^\circ$者)的觀點，以上性質似乎能寫成更直覺的形式：

一點O在$\angle APB$的內角平分線上$\Leftrightarrow$(無向角)$\angle OPB=\angle APO$

一點O在$\angle APB$的外角平分線上$\Leftrightarrow$(無向角)$\angle OPB+\angle APO=\pi$

但若考慮無向角，在某些極端條件將出現問題，且在往後的延伸研究也較不方便，我們將在「伍、討論」中詳細討論之。

三、 分角曲線

(一) 記號、定義

為了往後的討論，我們先約定以下記號和定義。

〔Definition 3〕有向角的等價類

定義$\theta+2n\pi=\theta$，其中$\theta\in[0,2\pi)$、$n\in\mathbb{Z}$。如：$3\pi-7\pi=-4\pi=0$

上方的定義在四則運算中顯然是 Well Defined 的，將$\theta=\theta+2n\pi$理解為$\theta\equiv\theta+2n\pi\pmod{2\pi}$即可。

〔Definition 4〕有向面積

$[ABC]$指$\triangle ABC$之有向面積，若A,B,C為逆時針排列則取正值，反之取負值。

〔Property 3〕(Well known) $[ABC]=\dfrac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{BC}\sin\angle ABC$

〔Definition 5〕(有向)弧

給定圓O上兩點A,B，$\overparen{AB}$代表自A沿著圓逆時針走到B所描出的曲線，其度數等於此弧對到的圓心角(有向角)$\angle AOB$。

〔Definition 6〕分角點與分角曲線

給定二維平面上三點A,O,B，若有一點P滿足以下二者其中之一：

1. 內角情形：O在$\angle APB$的內分角線上($\angle OPB=\angle APO$)
2. 外角情形：O在$\angle APB$的外分角線上($\angle OPB=\angle APO\pm\pi$)

(兩者合記為$\angle OPB\equiv\angle APO$)

則稱P為一個O對A,B的<u>分角點</u>。所有O對A,B的<u>分角點</u>形成O對A,B的<u>分角曲線</u>，記做$\Phi(A,B,O)$，且稱O為<u>分角曲線的節點</u>。

(二) 引理

在進入討論之前，我們需要證明以下兩個引理。

〔Lemma 1〕角度的和分

平面上有Y和$X_1,X_2,\ldots,X_{n+1}$共$n+2$ ($n\in\mathbb{N}$)個點，則

$$\angle X_1YX_{n+1}=\angle X_1YX_2+\angle X_2YX_3+\angle X_3YX_4+\ldots+\angle X_nYX_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\angle X_kYX_{k+1}$$

特殊化，有$\angle XYX'+\angle X'YX=0$，或$\angle XYX'=-\angle X'YX$。

〔Lemma 2〕圓周角性質

給定一圓Γ與其上兩相異點A,C，則對於圓上任異於A,C之點B，$\overparen{AC}\equiv 2\angle ABC$；反之，給定兩相異點$A,C$，所有滿足$\angle ABC\equiv\theta\in(0,\pi)$之$B$點軌跡為使得$\overparen{AC}\equiv 2\theta$之圓。

Lemma 1 為有向角的基本性質，可由廣義角之定義(旋轉)簡單推論而得。Lemma 2 為狹義圓周角性質的推廣，可理解為圓周角性質的有向角的版本。此引理的前半部分

可分情形討論，用外角定理證明(就如證明狹義的圓周角性質時所做的一樣)，後半部分可用同一法證得，在此不詳述。

(三) 特殊情形討論

在進入一般性的討論前，我們先觀察幾個易於理解的特例。

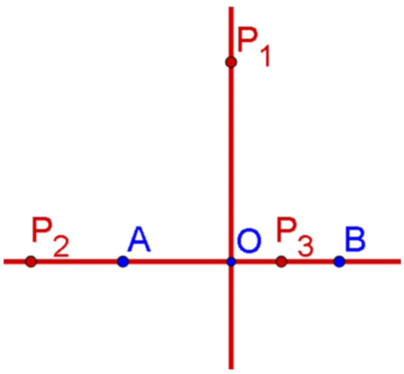
1. A,O,B 三點共線(A,B 不共點)

(1) $\overline{OA}=\overline{OB}$ ：

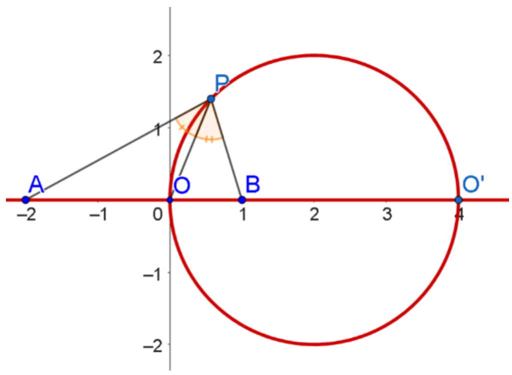
易知軌跡為「 $\overleftrightarrow{AB}$ (角度皆為 $0 \vee \pi$)與 $\overline{AB}$ 中垂線(中垂線性質)」(圖九)。

(2) $\overline{OA}\neq\overline{OB}$ ：

和前者同理， $\overleftrightarrow{AB}$ 為曲線的一部分。除此之外，若 $P\notin\overleftrightarrow{AB}$ ，由內、外分比性質知滿足條件之 P 點的充要條件為 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=k$ 為定值($k\neq1$)，這些 P 的軌跡為一阿波羅圓(以 $\overline{OO'}$ 為直徑，其中 O,O' 分別為滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=k:1$ 的 A,B 的內、外分點)。綜合兩者，此情形下的軌跡為「 $\overleftrightarrow{AB}$ 與以 $\overline{OO'}$ 為直徑的阿波羅圓」(圖十)。



圖九、 A,O,B 三點共線且 $\overline{OA}=\overline{OB}$

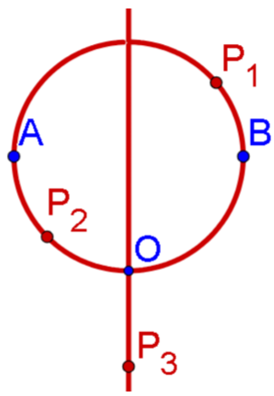


圖十、 A,O,B 三點共線且 $\overline{OA}\neq\overline{OB}$

2. O 於 $\overline{AB}$ 中垂線上，且 $O\notin\overleftrightarrow{AB}$ ：

$\overline{AB}$ 中垂線上任一點必滿足條件(中垂線性質)，又由圓周角性質知 $\triangle AOB$ 外接圓上任一點皆滿足條件，因而軌跡為「 $\triangle AOB$ 外接圓與 $\overline{AB}$ 中垂線」。

事實上，前述的「1.(1) A,O,B 三點共線、 $\overline{OA}=\overline{OB}$ (O 於 A,B 中垂線上，但 $O\in\overleftrightarrow{AB}$)(圖九情形)」亦可被歸至此類，可看作是 $\triangle AOB$ 外接圓半徑變成無窮大，因而成為 $\overleftrightarrow{AB}$ 。

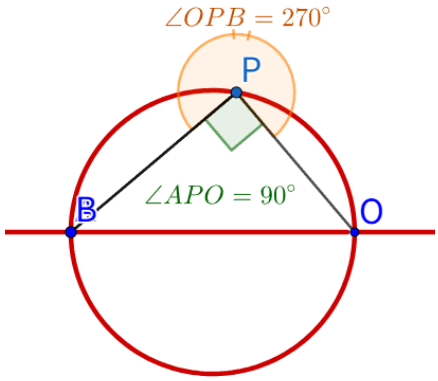


圖十一、 O 於 $\overline{AB}$ 中垂線上

3. A,B 共點：

由定義，$\angle OPB \equiv \angle APO \overset{A=B}{\equiv} \angle BPO \Rightarrow 2\angle OPB \equiv 0 \Rightarrow \angle OPB \equiv 0\left(\operatorname{mod}\dfrac{\pi}{2}\right)$。

一如既往，$\overleftrightarrow{BO}(=\overleftrightarrow{AO})$ 上的點皆符合條件。此外還有以 $\overline{BO}$ 為直徑的圓(因 $\angle OPB \equiv 0\left(\operatorname{mod}\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow \angle OPB = 0 \vee \dfrac{3}{2}\pi \Rightarrow \angle OPB$ 所對到的弧為半圓)。因此此情形下整體的軌跡為「$\overleftrightarrow{BO}(=\overleftrightarrow{AO})$ 和以 $\overline{BO}$ 為直徑的圓」(圖十二)。



圖十二、 A,B 共點

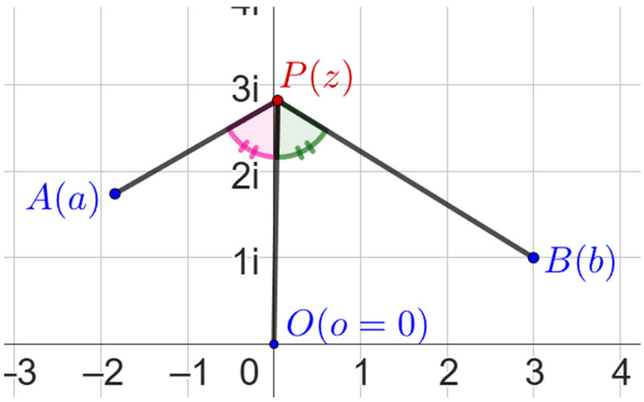
另外，此情形也可看成是在前一種情形(圖十一)中，取 $A \to B$ 的極限的結果。

(四) 一般情形之通解

1. 軌跡方程式

對於一般性情形，我們使用解析幾何方式求解軌跡。

給定平面上三點 A,O,B，以 O 為原點建立複數坐標系，設 $A(a),B(b),O(o=0)$。令 $P(z)$ 為一個 O 對 A,B 的分角點，則在內角情形($\angle OPB = \angle APO$)時有 $\arg\dfrac{b-z}{o-z} = \arg\dfrac{o-z}{a-z}$ (左式表示 $\overrightarrow{PB}$ 與 $\overrightarrow{PO}$ 的夾角，即 $\angle OPB$，同理右式為 $\angle APO$)，因此 $\dfrac{\frac{o-z}{a-z}}{\frac{b-z}{o-z}} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} \in \mathbb{R}^+$；



圖十三、複數解析

類似的，在外角情形下有 $\dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} \in \mathbb{R}^-$。注意到 $\dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} = 0$ 僅當 $z=o$，即 O 與 P 重合，綜合以上我們有 $\dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} \in \mathbb{R}, z \ne o,a,b$，即

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)}\right\} = 0, z \ne o,a,b \qquad \text{<1>}$$

此即軌跡方程式。

接著我們進一步將其轉換為極坐標方程式與直角坐標方程式，以利進一步研究。一複數為實數的充要條件為此數與其共軛複數相等，因此

$\dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)} = \overline{\dfrac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)}} = \dfrac{(\overline{o}-\overline{z})^2}{(\overline{a}-\overline{z})(\overline{b}-\overline{z})}$，以 $o=0$ 代入並交叉相乘得到 $z^2\left(\overline{a}\overline{b}-(\overline{a}+\overline{b})\overline{z}+\overline{z}^2\right)=\overline{z}^2\left(ab-(a+b)z+z^2\right)$。假設 $z=re^{i\theta}$ (即令 $P[r,\theta]$)，進一步乘開化簡有 $\overline{a}\overline{b}z^2-(\overline{a}+\overline{b})\overline{z}z^2=ab\overline{z}^2-(a+b)z\overline{z}^2$，值得注意的是 $(z\overline{z})^2$ 被消掉了，因為 $r^2=z\overline{z}$，這將導致極坐標中 r 的最高次項 r^4 項消失。接著，我們將 $z=re^{i\theta}$ 代入可得 $\overline{a}\overline{b}r^2e^{2i\theta}-(\overline{a}+\overline{b})r^3e^{i\theta}=abr^2e^{-2i\theta}-(a+b)r^3e^{-i\theta}$，將兩邊的 r^2 消去($\because P\neq O \therefore r\neq 0$)得到 $\overline{a}\overline{b}e^{2i\theta}-(\overline{a}+\overline{b})re^{i\theta}=abe^{-2i\theta}-(a+b)re^{-i\theta}$。注意到等號兩端為共軛複數，因而 $2\,\mathrm{Im}\left(abe^{-2i\theta}\right)=2\,\mathrm{Im}\left((a+b)re^{i\theta}\right)$ (共軛複數相減得兩倍虛部)，進而有

$$r=\frac{\mathrm{Im}(abe^{-2i\theta})}{\mathrm{Im}\left((a+b)e^{-i\theta}\right)} \qquad \text{<2>}$$

假設 $a=r_1e^{i\alpha}, b=r_2e^{i\beta}$ (即令 $A[r_1,\alpha],B[r_2,\beta]$)，代入化簡最終可以得到

$$r=\frac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)} \qquad \text{<3>}$$

欲求直角座標，可假設 $a=a_x+a_yi, b=b_x+b_yi, z=x+yi$

(即令 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),P(x,y)$)代入<1>式展開即可(我們使用數學軟體 Maxima 幫我們完成繁雜的運算)，最終結果為：

$$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0 \qquad \text{<4-1>}$$

或

$$(x^2+y^2)(ax+by)+c(x^2-y^2)+dxy=0 \qquad \text{<4-2>}$$

其中

$$\begin{cases} a=-(a_y+b_y) \\ b=a_x+b_x \\ c=a_xb_y+a_yb_x \\ d=-2(a_xb_x-a_yb_y) \end{cases} \qquad \text{<5>}$$

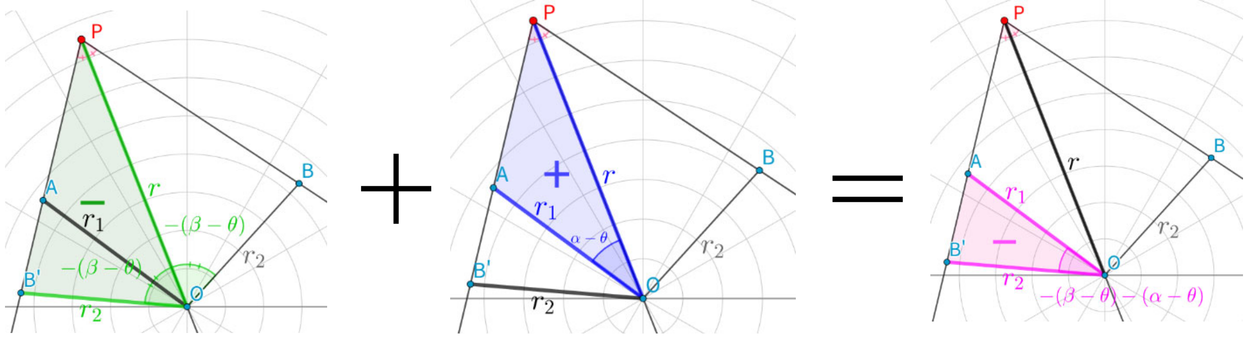
我們還有一個先決條件是 $P\neq A,B,O$，所以理論上應該將上述方程式中此三點去除才是 $\Phi(A,B,O)$ (O 對 A,B 的分角曲線)。但由於此三處為可去不連續點(由<4>式是連續曲線可知不連續點的種類為「可去」)，為了方便接下來的討論，我們將此三點加回分角曲線中一併考慮。(幾何上的意義為：在 A,B,O 附近亦可為分角點)

2. 軌跡方程的幾何意義：面積和

將<3>式分母移項得到

$$rr_2\sin(\beta-\theta)+rr_1\sin(\alpha-\theta)=r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta)) \qquad <6>$$

此式揭示了軌跡方程的另一種幾何意義：以$\overleftrightarrow{OP}$為對稱軸，作B之對稱點B'，則有$[B'OP]+[POA]=[B'OA]$，如下方圖十四，圖中＋/－號表示有向面積的正負號。



圖十四、有向面積相加

(五) 分角曲線之性質

1. 圖形特徵

以上，我們已求出分角曲線的方程式，並以有向面積之和解釋其幾何意義。接著，我們來看幾個分角曲線的性質。

(1) 基礎性質

〔Property 4-1〕對稱性：$\Phi(A,B,O)=\Phi(B,A,O)$

〔Property 4-2〕$A,B,O\in\Phi(A,B,O)$

〔Property 4-3〕分角曲線自交於節點

性質 4-1 可由分角點的定義看出：由於$\angle OPB\equiv\angle APO\Leftrightarrow -\angle OPB\equiv-\angle APO$
$\angle BPO\equiv\angle OPA\Leftrightarrow\angle OPA\equiv\angle BPO$，因此$P\in\Phi(A,B,O)\Leftrightarrow P\in\Phi(B,A,O)$；性質 4-2 是由於我們先前將$A,B,O$三個可去不連續點加入分角曲線中一併考慮的直接結果。性質 4-3 則是由分角曲線圖形觀察出的結果，以下證明：

觀察<3>式：$r=\dfrac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}$，當$r\to0$時，$\sin(\alpha+\beta-2\theta)\to0$

$\Rightarrow(\alpha+\beta-2\theta)\to k\pi,k\in\mathbb{Z}$，化簡得$\theta\to\dfrac{\alpha+\beta}{2}+k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，即在以$O$為圓心，半徑$r\to0$的圓和$\Phi(A,B,O)$有 4 個交點，因此$O$為一個$\Phi(A,B,O)$的自交點，得證。

另外，可以注意到在$r\to 0$時，θ的解形成公差為$\dfrac{\pi}{2}$的數列，因此在$O(0,0)$處的兩切線將互相垂直。(見圖十五，綠色實線為J點處的兩切線)

(2) 漸近線

從分角曲線的圖形(圖十五中)可見其似乎有一漸近線，我們試證明並求出。

觀察<3>式：

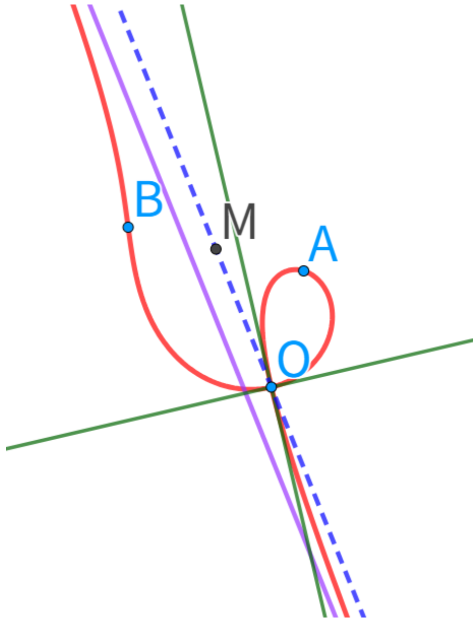
$r=\dfrac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}$，其中

$A[r_1,\alpha],B[r_2,\beta],P[r,\theta]$。令

$f(\theta)=\dfrac{1}{r}=\dfrac{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}$，則當

$r\to\infty$時，$f(\theta)\to 0$，令$f(\theta)=0$，可解得

漸近線之斜角θ_0



圖十五、分角曲線的特徵

(將$\theta=\theta_0$代入$r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)$易驗證在一般情形下$\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\left(r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)\right)\neq 0$，即$f(\theta)$之分子、分母不會同時趨近於 0，因而不用擔心不定式的情況)，其滿足

$\tan\theta_0=\dfrac{r_1\sin\alpha+r_2\sin\beta}{r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta}$，此即漸近線之斜率$m$，換為直角座標則有$m=\dfrac{a_y+b_y}{a_x+b_x}$，

即O與A,B中點M連線(圖十五中藍色虛線)之斜率(因此漸近線平行於$\overline{OM}$)。

令漸近線為$r\sin(\theta-\theta_0)=p$(直線的極坐標方程)，其中θ_0為漸近線之斜角。

我們需要求出p: $p=\lim\limits_{\theta\to\theta_0}r\sin(\theta-\theta_0)=\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\dfrac{\sin(\theta-\theta_0)}{f(\theta)}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\dfrac{\cos(\theta-\theta_0)}{f'(\theta)}=\dfrac{1}{f'(\theta_0)}$，

倒數第二個等號運用了羅必達法則。

計算得$f'(\theta_0)=-\dfrac{r_1\cos\left(\alpha-\theta_0\right)+r_2\cos\left(\beta-\theta_0\right)}{r_1r_2\sin\left(\alpha+\beta-2\theta_0\right)}$，代入可得漸近線方程：

$$r\sin(\theta-\theta_0)=-\frac{r_1r_2\sin\left(\alpha+\beta-2\theta_0\right)}{r_1\cos\left(\alpha-\theta_0\right)+r_2\cos\left(\beta-\theta_0\right)} \qquad \text{<7>}$$

最後，為求出y軸截距，令$\theta=\dfrac{\pi}{2}$代入漸近線方程，

可解得y軸截距為$c=-\dfrac{r_1r_2\sin\left(\alpha+\beta-2\theta_0\right)}{r_1\cos\left(\alpha-\theta_0\right)+r_2\cos\left(\beta-\theta_0\right)}\dfrac{1}{\cos(\theta_0)}$。

2. 曲線方程式結構

(1) 具有<4-1>結構的方程式之圖形皆為分角曲線

我們先前論證了節點為 $O(0,0)$ 的分角曲線的直角坐標方程式的形式如下：

$$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0 \qquad \text{<4-1>}$$

那是否所有形式如上的方程式，圖形皆為分角曲線呢？換言之，我們好奇是否 $\forall a,b,c,d$ ，$\exists A,B$ ，使得 $\Phi(A,B,O):ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0$ 。回憶<5>式，是在已知 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y)$ 下，以 a_x,a_y,b_x,b_y 表示出 a,b,c,d 四個係數，現在我們要反其道而行，在已知 a,b,c,d [註]下，將 a_x,a_y,b_x,b_y 視為未知數求解，找出對應的 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y)$ 。使用 Maxima 軟體可解出四組解，由於 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y)$ 是對稱的，我們只需要考慮以下兩組解(另兩組僅是所有的 (a_x,a_y) 、(b_x,b_y) 互換)：

$$\begin{cases} a_x=-\dfrac{Z+\bar{Z}-2b}{4} \\ a_y=-\dfrac{i\left(Z-\bar{Z}\right)+2a}{4} \\ b_x=\dfrac{Z+\bar{Z}+2b}{4} \\ b_y=\dfrac{i\left(Z-\bar{Z}\right)-2a}{4} \end{cases} \quad \text{<8>} \qquad \begin{cases} a_x=-\dfrac{Z-\bar{Z}-2b}{4} \\ a_y=-\dfrac{i\left(Z+\bar{Z}\right)+2a}{4} \\ b_x=\dfrac{Z-\bar{Z}+2b}{4} \\ b_y=\dfrac{i\left(Z+\bar{Z}\right)-2a}{4} \end{cases} \quad \text{<9>}$$

其中 Z 為 $Z^2=2d+4ci+b^2+2abi-a^2$ 之一根。

可以發現<8>這一組解恆為實數，因此無論給定的係數 a,b,c,d 為何，均能找到對應的 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y)$ 使得 $\Phi(A,B,O):ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0$ 。

[註]：其實給定曲線時只知道 a,b,c,d 的比例。代入相同比例，不同數值的 a,b,c,d 時將解出不同的 a_x,a_y,b_x,b_y (因<5>式對 a_x,a_y,b_x,b_y 並不是齊次的)

(2) 分角曲線與斜環索線等價

參考資料[7]中指出我們的分角曲線(當然，分角曲線的名字是我們自己取的，在參考資料中並沒有出現)其實就是斜環索線，但此資料的論證不嚴謹，採用的方法也與我們不同，因此我們將以我們自己的觀點解釋此一事實。

將<3>式順時針旋轉 $\phi=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (即進行 $\theta\to\theta+\phi$ 的變換)，則

$$r=\frac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}\to r=\frac{r_1r_2\sin(-2\theta)}{r_1\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\theta\right)+r_2\sin\left(-\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\theta\right)}$$ ，化簡有

$r=\dfrac{\sin(2\theta)}{\dfrac{1}{r_2}\sin\left(\theta-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)+\dfrac{1}{r_1}\sin\left(\theta+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}$，此與 Definition 1-2 提及的斜環索線極座標方程式($r=\dfrac{\sin(2\theta)}{2\left(a\cos\theta+b\sin\theta\right)}$)有一樣的形式(將前者的分母利用和差角公式展開後即為後者)。

(六) 三點+節點定分角曲線

由於<4-1>式中沒有常數項且只有四種係數，因此在一般情形下，給定非原點的相異三點 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$，將可唯一決定通過此三點且以原點為節點的分角曲線。藉由參考文獻[16]提到的方法，可得出此曲線即為下式。

$$\begin{vmatrix} x^3+xy^2 & y^3+x^2y & x^2-y^2 & xy \\ x_1^3+x_1y_1^2 & y_1^3+x_1^2y_1 & x_1^2-y_1^2 & x_1y_1 \\ x_2^3+x_2y_2^2 & y_2^3+x_2^2y_2 & x_2^2-y_2^2 & x_2y_2 \\ x_3^3+x_3y_3^2 & y_3^3+x_3^2y_3 & x_3^2-y_3^2 & x_3y_3 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{<10>}$$

我們分情形討論後發現「A_1,A_2,A_3,O 四點共線」是唯一的特例，此時將無法決定唯一的分角曲線(詳細的討論過程過於繁雜，在此從略)。而由於我們將節點設為原點，因此在一般情形下，還需給定節點方能決定分角曲線。

〔Lemma 3〕四點決定一分角曲線

給定相異四點 A_1,A_2,A_3,O，其中 A_1,A_2,A_3,O 四點不共線，則可決定唯一的以 O 為節點的分角曲線，其通過 A_1,A_2,A_3。

(七) 決定分角曲線之 A,B,O 三點唯一性探討

在前一部份我們論證了「具有<4-1>結構的方程式之圖形皆為分角曲線」，且在註解中提到與其對應的 A,B 並不唯一。由 Property 4-2，這些 A,B 都會在給定的那條分角曲線上，我們進一步猜測「對於曲線上任意(非 O)一點 A，都有與其對應的 B，讓此曲線即為 $\Phi(A,B,O)$」。換言之，我們猜測在給定曲線(即給定 a,b,c,d 的比例)、A 點(即給定 a_x,a_y)下，$B(b_x,b_y)$ 皆有解。由於 a,b,c,d 成比例，我們令 $(a,b,c,d)=(a_0,b_0,c_0,d_0)t,t\neq 0$，若 $a_x,a_y\neq 0$，由<5>式的第 1、2 行移項可解出 $\begin{cases} b_y=-a_0t-a_y \\ b_x=b_0t-a_x \end{cases}$，代入第 3、4 行可分別解得 $t=\dfrac{2a_xa_y}{b_0a_y-a_0a_x-c},t=\dfrac{2(a_y^2-a_x^2)}{-2(a_0a_y+b_0a_x)-d}$，此二者應相等，交叉相乘整理後可得 $(a_x^2+a_y^2)(a_0a_x+b_0a_y)+c_0(a_x^2-a_y^2)+d_0a_xa_y=0$，

即 $A(a_x,a_y)$ 在給定曲線 $(x^2+y^2)(a_0x+b_0y)+c_0(x^2-y^2)+d_0xy=0$ 上。

因此當 $a_x,a_y\neq 0$ 時，$B(b_x,b_y)$ 有解的充要條件為 $A(a_x,a_y)$ 在給定曲線上。a_x,a_y 中有 0 時做法類似，如此，便證明了我們的猜測。

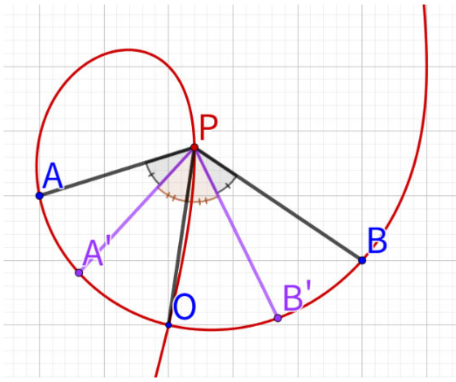
另外，我們提出了一個以幾何方式找出其他生成同一條分角曲線之點的方法。由於若給定 $P\in\Phi(A,B,O)-\{A,B,O\}$，取 $A',B'\in\Phi(A,B,O)$，使得 $\angle B'PB\equiv\angle APA'$，則有 $\angle OPB'=\angle OPB+\angle BPB'\equiv\angle APO+\angle A'PA=\angle A'PO$，因而 $P\in\Phi(A',B',O)$。因此我們猜測除了 P，對其他所有在 $\Phi(A,B,O)$ 上的點，也都在 $\Phi(A',B',O)$ 上，反過來也成立(即 $\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)$)。我們以 Lemma 3 對此猜測(以下 Theorem)給出證明。

〔Theorem〕

給定 $P\in\Phi(A,B,O)-\{A,B,O\}$，取 $A',B'\in\Phi(A,B,O)$，使得 $\angle B'PB\equiv\angle APA'$，

則在一般情形下 $\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)$。

證明：不妨令 O 為原點從上述討論已知 K 為 $\Phi(A,B,O)$ 和 $\Phi(A',B',O)$ 上共同的點，如此，因為 $A',B',P\in\Phi(A,B,O)$，所以 A',B',P 所決定的分角曲線為 ADC(P,Q,J)。同時 $A',B',P\in\Phi(A',B',O)$，因而 A',B',P 所決定的分角曲線為 $\Phi(A',B',O)$。由 Lemma 3，A',B',P 三點決定唯一的分角曲線，因此在一般情形下必然有 $\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)$。



圖十六、幾何方法找其他 A,B,O

四、 分離分角曲線

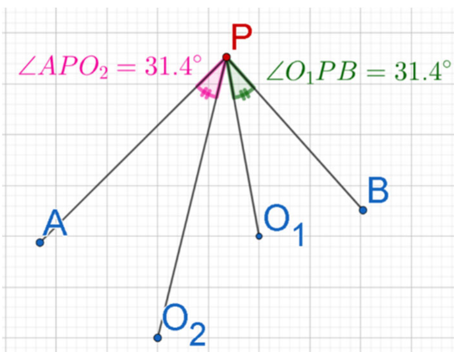
(一) 定義

〔Definition 7〕分離分角點與分離分角曲線

給定二維平面上四點 A,B,O_1,O_2，若有一點 P 滿足

$\angle O_1PB=\angle APO_2$ 或 $\angle O_1PB=\angle APO_2\pm\pi$

(合記為 $\angle O_1PB\equiv\angle APO_2$)，則稱 P 為一個 O_1,O_2 對 A,B 的<u>分離分角點</u>。所有 O_1,O_2 對 A,B 的<u>分離分角點</u>形成 O_1,O_2 對 A,B 的<u>分離分角曲線</u>，記作 $\Phi(A,B,O_1,O_2)$，且稱 O_1,O_2 依序為分離分角曲線的<u>第一、第二節點</u>。



圖十七、分離分角點

(二) 由分角曲線生成的特殊情形

1. 退化為分角曲線的情形(參考上頁圖十六)

由分角曲線唯一性的討論中我們知道若有 $\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)$，則對於其上任一點 P，都有 $\angle B'PB=\angle OPB+\angle B'PO\equiv\angle APO+\angle OPA'=\angle APA'$，因而 $P\in\Phi(A,B,B',A')$，即 $\Phi(A,B,O)\subseteq\Phi(A,B,B',A')$。另一方面，若 $P\in\Phi(A,B,B',A')$，則有 $\angle OPB=\angle OPB'+\angle B'PB\equiv\angle A'PO+\angle APA'=\angle APO$，因而 $P\in\Phi(A,B,O)$，即 $\Phi(A,B,B',A')\subseteq\Phi(A,B,O)$。綜合以上兩點，有 $\Phi(A,B,B',A')=\Phi(A,B,O)$。

(三) 一般情形下之分離分角曲線

1. 軌跡之求解

同求解分角曲線時使用之複數作法，將<3>式略作修改可得

$$\frac{\dfrac{o_2-z}{a-z}}{\dfrac{b-z}{o_1-z}}=\frac{(o_1-z)(o_2-z)}{(a-z)(b-z)}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left\{\frac{(o_1-z)(o_2-z)}{(a-z)(b-z)}\right\}=0 \qquad \text{<11>}$$

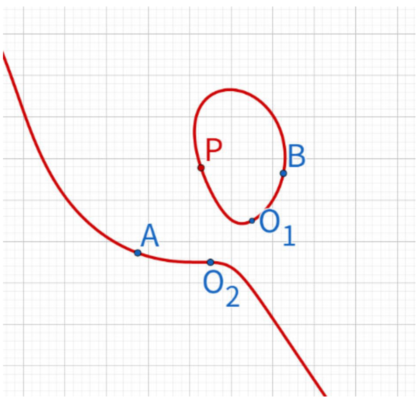
不妨設 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),O_1(1,1),O_2(-1,-1)$，令 $P(x,y)$ 代入<11>式展開得

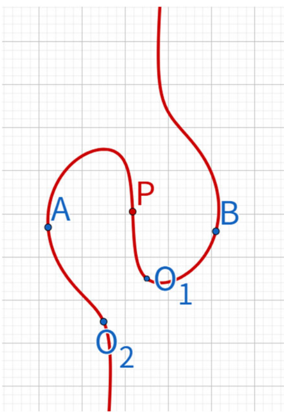
$$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2-2bx-2ay-d=0 \qquad \text{<12>}$$

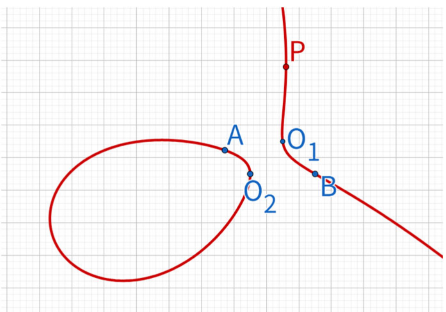
其中

$$\begin{cases}a=-(a_y+b_y)\\ b=a_x+b_x\\ c-2=a_xb_y+a_yb_x\\ d=-2(a_xb_x-a_yb_y)\end{cases} \qquad \text{<13>}$$

和<5>式類似，故同理所有上述形式之三次曲線皆為分離分角曲線。具體的 A,B 可由「將<8>式中所有 c 以 $c-2$ 取代」之修正式給出。和之前一樣，我們將 A,B,O_1,O_2 這四個可去不連續點加回分離分角曲線一併討論。以下為幾張分離分角曲線的圖片。







圖十八、幾張分離分角曲線之圖片

2. 性質

和分角曲線類似，分離分角曲線有以下性質：

〔Property 5-1〕對稱性：$\Phi(A,B,O_1,O_2)=\Phi(O_1,O_2,A,B)=\Phi(A,B,O_2,O_1)$

〔Property 5-2〕$A,B,O_1,O_2 \in \Phi(A,B,O_1,O_2)$

五、 偏移分角曲線

(一) 定義

〔Definition 8〕偏移分角點與偏移分角曲線

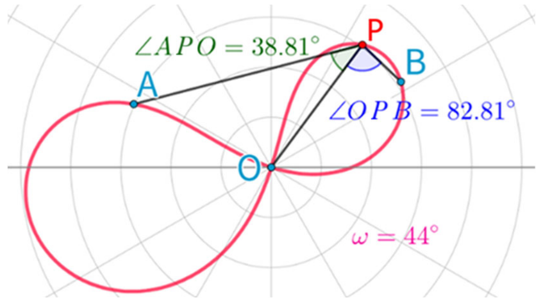
給定二維平面上三點 A,O,B 、一常數 $\omega\in[0,2\pi)$ ，若有一點 P 滿足 $\angle OPB=\angle APO+\omega$ (內角情形)或 $\angle OPB=\angle APO+\omega\pm\pi$ (外角情形)(兩者合記為 $\angle OPB\equiv\angle APO+\omega$)，則稱 P 為一個 O 對 A,B 的<u>偏移ω分角點</u>。所有 O 對 A,B 的<u>偏移ω分角點</u>形成 O 對 A,B 的<u>偏移ω分角曲線</u>，記做 $\Phi(A,B,O;\omega)$ ，且稱 O 為偏移分角曲線的節點。

(二) 軌跡方程

令 $A(a),B(b),P(z)$ ，將<1>式改寫，得

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(o-z)^2}{(a-z)(b-z)}e^{i\omega}\right\}=0 \qquad <14>$$

為軌跡方程。運用求解分角曲線方程式時相同的做法可以得到偏移分角曲線的方程式。



圖十九、偏移分角點，
圖中紅色曲線為偏移分角曲線

1. 極坐標形式

$$r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta)-\omega)=rr_1\sin(\alpha-\theta-\omega)+rr_2\sin(\beta-\theta-\omega)-r^2\sin(\omega) \qquad <15>$$

較分角曲線的極座標方程式(<6>式)類似，而和先前不同，此處 r^2 項並未被消去。當 $\omega=0\vee\pi$ 時，最高次項 r^2 項被消去，退化為分角曲線。

2. 直角坐標形式

最終可解得

$$\sin(\omega)(x^2+y^2)^2+ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0 \qquad <16>$$

其中

$$\begin{cases} a=\cos(\omega)(p_y+q_y)-\sin(\omega)(p_x+q_x) \\ b=-\sin(\omega)(p_y+q_y)-\cos(\omega)(p_x+q_x) \\ c=\sin(\omega)(p_xq_x-p_yq_y)-\cos(\omega)(p_xq_y+p_yq_x) \\ d=2\left(2(p_xq_y+p_yq_x)\sin(\omega)+2(p_xq_x-p_yq_y)\cos(\omega)\right) \end{cases} \qquad <17>$$

較分角曲線多出來的齊次四次方項，即對應到極坐標方程式中的r^2項。而和以往一樣，我們將A,B,O這三個可去不連續點加回偏移分角曲線一併討論。

(三) 軌跡型態、性質

1. 軌跡型態

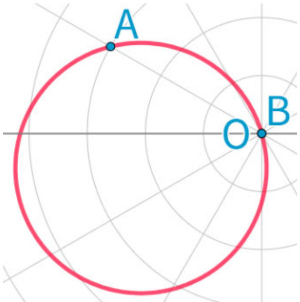
(1) 特殊情形討論：共點

a. $A,O\vee B,O$共點

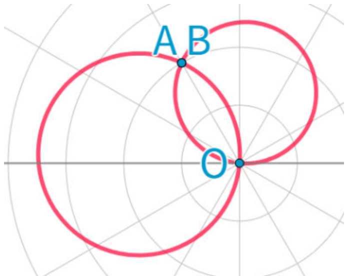
套用偏移分角點之定義，有$\angle OPB\equiv\angle APO+\omega$，若$A,O$共點，則前式化為$\angle APB\equiv\omega$；若$B,O$共點，則化為$\angle APB\equiv-\omega\Rightarrow\angle BPA\equiv\omega$ (可見在此情形下A,B是對稱的)，故$\Phi(A,B,O;\omega)$為滿足$\overset{\frown}{AB}\equiv 2\omega$的圓 (圓周角性質)。

b. A,B共點

套用偏移分角點之定義，有$\angle OPB\equiv\angle APO+\omega\Leftrightarrow\angle OPB\equiv\frac{\omega}{2}(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{2})$，因而此時軌跡為兩圓，分別滿足$\overset{\frown}{OB}\equiv\omega$與$\overset{\frown}{OB}\equiv\omega+\pi$ (圓周角性質)。



圖二十、$A,O\vee B,O$共點

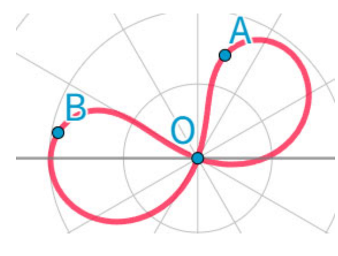
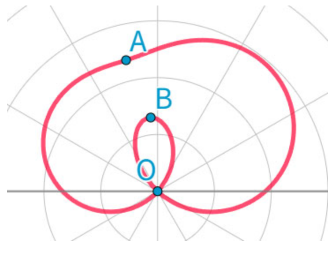
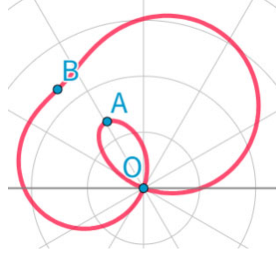


圖二十一、A,B共點

(2) 圖形封閉性

使用 Geogebra 觀察發現僅在退化為分角曲線之情形($\omega=0\vee\pi$)時，軌跡才為開放的，其餘情形下軌跡為封閉的。而圖形之樣態有如兩個「環」，整理如下表：

表一、兩個環

		
兩環分離	B所在小環 被包在A所在大環	A所在小環 被包在B所在大環

偏移分角曲線的封閉性，我們證明如下：

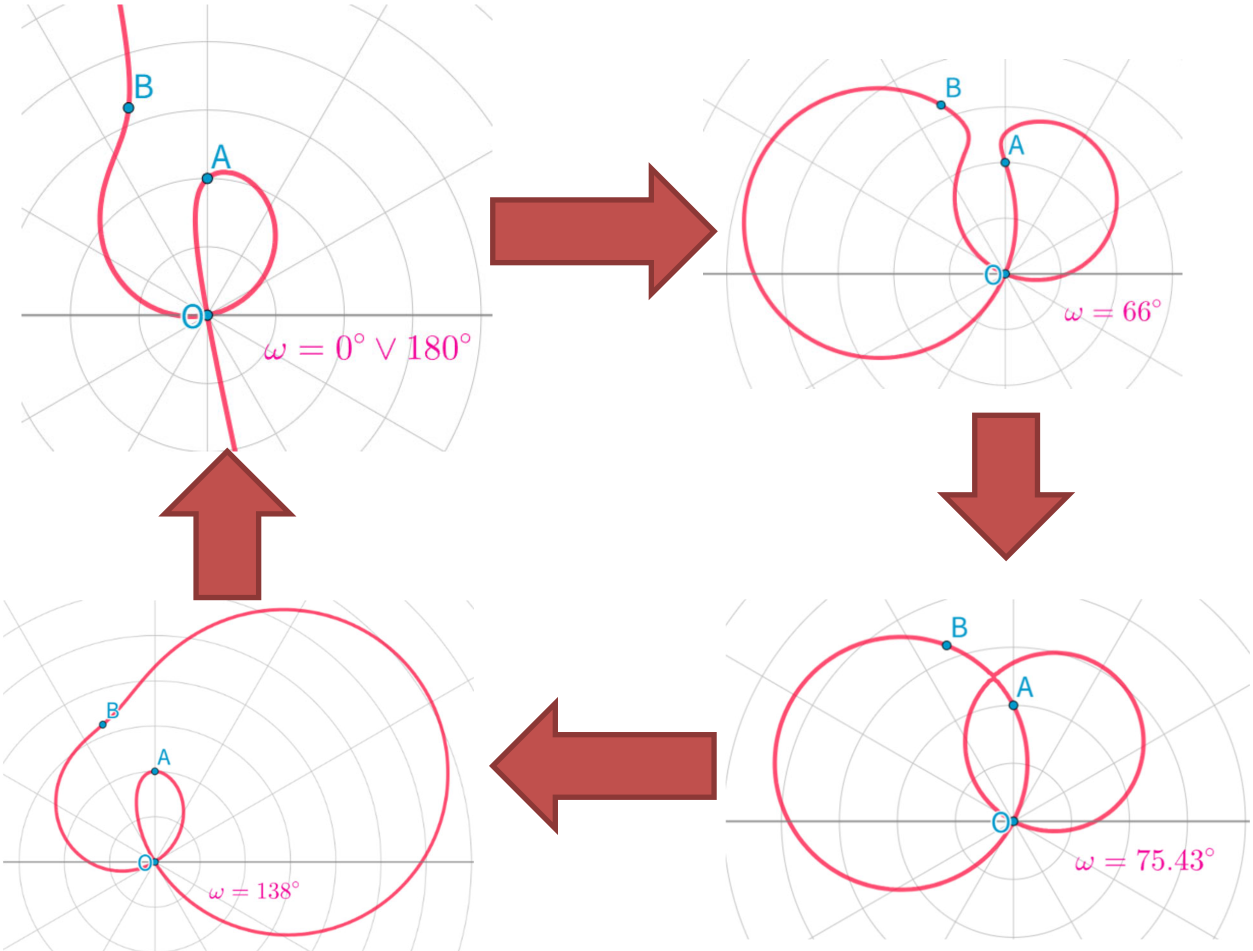
令$\varepsilon=\sin\omega$，當$\varepsilon=\sin\omega\neq 0$時，<15>式可視為$r$的二次方程式，由公式解可得

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\varepsilon c}}{2\varepsilon}\text{，其中}\begin{cases}b=-r_1\sin(\alpha-\theta-\omega)+r_2\sin(\beta-\theta-\omega)\\ c=r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta)-\omega)\end{cases}$$ 皆有界，且ε為非零常數，因此r有界。又顯然圖形連續(因θ微小變化時，r也是微小變化)，且θ每隔2π就會回到同一個點(圖形有週期性)。以上便說明了圖形是封閉有界的。

對於偏移分角曲線有界，我們有另一個直觀的幾何解釋，當P離A,B,O很遠時，$\angle OPB$和$\angle APO$都會趨近於 0，因此在一定的距離之外，$\angle OPB$和$\angle APO$之差必然會小於ω，進而不可能有偏移分角點的存在。

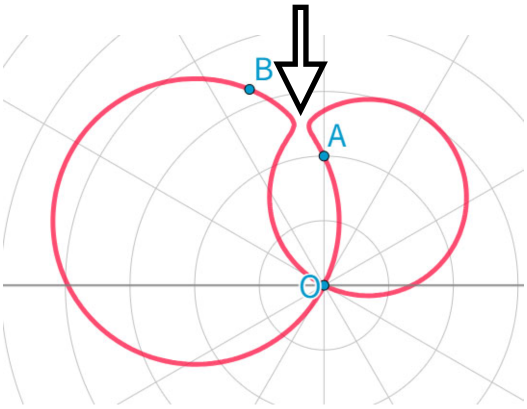
(3) 圖形隨ω變動連續變化

固定A,B,O，使ω自 0 開始變動，偏移分角曲線的圖形將從兩開放端逐漸捲曲，成為大環包小環或兩環分離的其中一種情形，在某角度後過渡成為另一種情形，直到$\omega=\pi$時，曲線再度化為分角曲線。



圖二十二、圖形隨ω變動連續變化

(4) 分界點與臨界角



圖二十三、接近臨界角度

從前面可看出當ω變動時，會有一個角度為「大環包小環」與「兩環分離」情形的分界(如圖二十二中，此臨界角度$\approx 75.43°$)，我們好奇這個分界點為何？假設這個臨界角度為ϕ，在此臨界角度時，軌跡應恰好為兩圓(而其中一圓為$\triangle ABO$外接圓)。以圖十三為說明，即處於臨界角度時，箭頭所指處應接合。我們以「$\triangle ABO$外接圓上任一點皆為偏移分角點」的條件出發，求此分界點。根據條件，對於$\triangle ABO$外接圓上任一點P都有$\angle OPB \equiv \angle APO + \phi$，因而應有

$$\phi \equiv \frac{\overset{\frown}{OB} - \overset{\frown}{AO}}{2} \qquad \text{<18>}$$

此即臨界角，其中$\overset{\frown}{OB}, \overset{\frown}{AO}$為$\triangle ABO$外接圓上的弧。

2. 軌跡性質

(1) 曲線族、平面分割

由定義，有以下顯而易見之性質：

〔Property 6〕偏移分角曲線與平面分割

對於給定三相異定點A,B,O，整個平面除A,B,O外可被不同ω的偏移分角曲線之曲線族(其中$\omega \in [0,\pi)$)分割，即平面上除A,B,O的任一點P都恰好在某條A,B,O所生成之偏移分角曲線上。

六、 n倍分角曲線

(一) 定義

〔Definition 9〕n倍分角點

給定二維平面上三點A,B,O、一常數$n \in \mathbb{N}$，若有一點P滿足$\angle OPB = n\angle APO$(內角情形)或$\angle OPB = n\angle APO \pm \pi$ (外角情形)(兩者合記為$\angle OPB \equiv n\angle APO$)，則稱$P$為一個$O$對$A,B$的<u>$n$倍分角點</u>。所有$O$對$A,B$的<u>$n$倍分角點</u>形成$O$對$A,B$的<u>$n$倍分角曲線</u>，記作$\Phi(n;A,B,O)$。

(二) 軌跡通式

用類似的方法，將<1>式改寫為

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(o-z)^{n+1}}{(a-z)^n(b-z)}\right\}=0 \qquad <19>$$

將a,b,o代入展開可得$\Phi(n;A,B,O)$之通式：

$$f\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}h^{n-2k}l^{2k}(-1)^k+g\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-(2k+1)}l^{2k+1}(-1)^k=0 \qquad <20>$$

其中$\begin{cases} f=b_xy-b_yx \\ g=(x^2+y^2)-(xb_x+yb_y) \\ h=(x^2+y^2)-(xa_x+ya_y) \\ l=a_xy-a_yx \end{cases}$。我們針對最高次項分析，得出一般情形下<20>式為

x,y的二元$2n+1$次方程式。當$(b_x,b_y)=-n(a_x,a_y)$(即$\overrightarrow{OB}=-n\overrightarrow{OA}$)時最高項消去，退化為$2n$次，此時$f=-nl$，代入<19>式可發現每一項皆有$l$這個因式，因此此時曲線為直線$a_xy-a_yx=0$與另外一個二元$2n-1$次曲線構成。

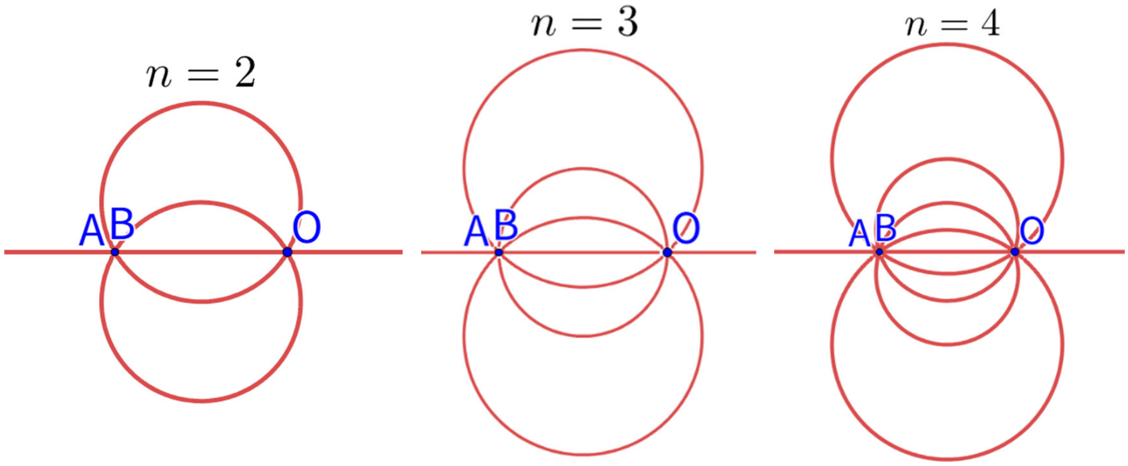
(三) 特殊情形：A,B共點

我們一樣考慮A,B共點時的特殊情形。由$A=B$套用定義，有$\angle OPA\equiv n\angle APO$

$\Rightarrow(n+1)\angle APO\equiv 0\Rightarrow\angle APO\equiv 0(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{n+1})\Rightarrow\angle APO\equiv 0,\frac{\pi}{n+1},\frac{2\pi}{n+1},\ldots,\frac{n\pi}{n+1}(\mathrm{mod}\,\pi)$，

和偏移分角曲線中A,B共點的類似情形，$\Phi(n;A,B,O)$為n個圓

(對應到上式中$\frac{\pi}{n+1},\frac{2\pi}{n+1},\ldots,\frac{n\pi}{n+1}$)與$\overleftrightarrow{OA}$(對應到上式中 0)。(下圖二十四)



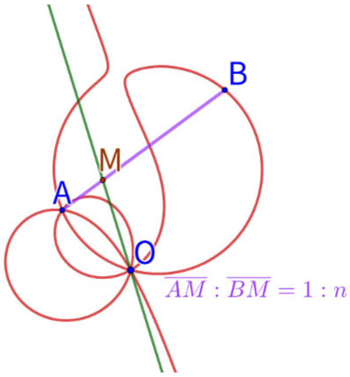
圖二十四、不同n下，A,B共點的情形

(四) 曲線特性

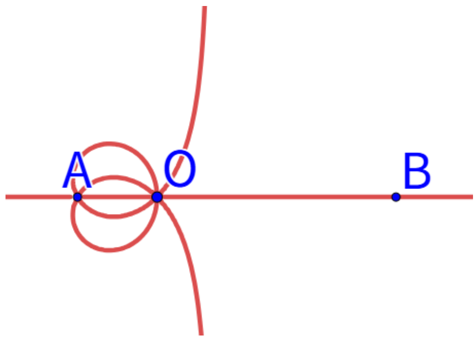
(1) 漸近線

我們仿照參考資料[10] p.86 的作法，將<20>同除以 x^{2n+1}，設 $t=\dfrac{y}{x}$，在 $x\to\infty$ 時，可只考慮最高次項，即求和符號中只考慮 $k=0$ 的項，

因此得 $\left(1+t^2\right)^n\left(b_xt-b_y+na_xt-na_y\right)\to 0$，即漸近線斜率為 $t=\dfrac{b_y+na_y}{b_x+na_x}$。然而我們未能如之前求出漸近線的截距，因此我們僅知道漸近線應平行於圖十四中綠色線)。在先前提到的退化情形中，前述斜率的分子、分母同時為 0，但觀察圖形應仍有漸近線。將因子 $l=a_xy-a_yx$ 除掉，針對剩下的 $2n-1$ 次方程式應用相同的做法，可求出其垂直於 $a_xy-a_yx=0$。



圖二十五、漸近線斜率

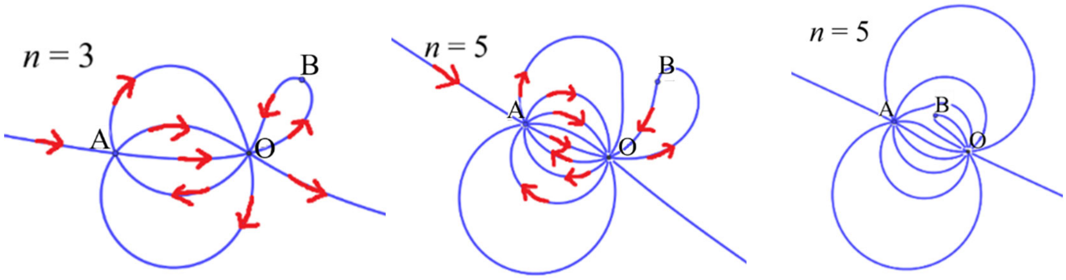


圖二十六、退化情形

(2) 圖形型態：繞圈

我們發現高倍分角曲線其圖形隨 n 之變化有一定規律，有如在「繞圈」，且 n 越大則越多圈。如下圖二十七中，$n=3$ 時，從最右端沿著曲線走，將繞 3 圈，$n=5$ 時則繞 5 圈。同理，所繞圈數恰和 n 相等。而圖二十七中亦可看到，對於左、中圖，過 O,B 的環在過 A,O 的環外；作為對比的是右圖，圖中過 O,B 的環被包在過 A,O 的環中。(就如偏移分角曲線時封閉曲線的兩種情形)

這部分我們僅發現現象，尚未找到方法證明。



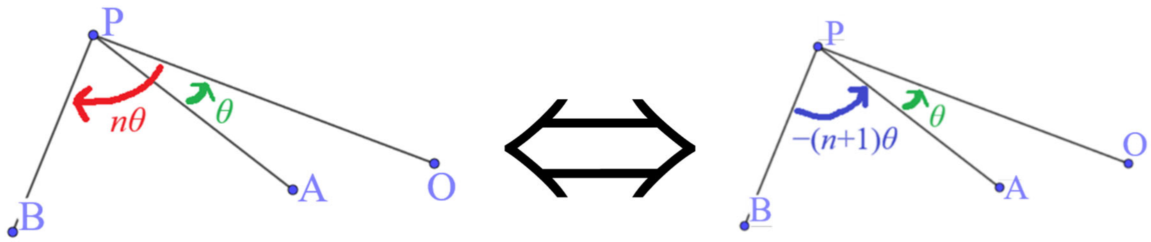
圖二十七、$n=3$、$n=5$

(五) 負整數倍分角曲線

我們好奇若將n的定義推廣至負整數將如何，這相當於

$$\begin{aligned}&\angle OPB \equiv n\angle APO\\ &\Rightarrow \angle OPB+\angle APO \equiv (n+1)\angle APO\\ &\Rightarrow \angle APB = -(n+1)\angle OPA\end{aligned}$$

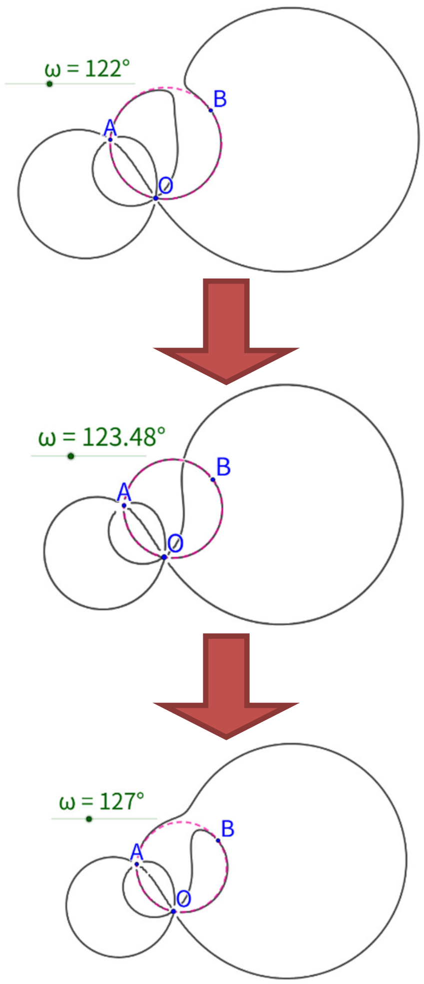
即P為A對O,B之$-(n+1)$倍分角點。幾何上這是顯然的，因為B朝反方向繞回去。



〔Property 7〕負整數倍分角曲線

若n為負整數($n\neq -1$)，則$\Phi(n;A,B,O)=\Phi(-(n+1);O,B,A)$。

(六) 偏移n倍分角曲線的臨界角之推廣



圖二十八、n倍時的臨界角

若我們考慮$\angle OPB \equiv n\angle APO+\omega$ ($n\in\mathbb{N}$)，則對於固定三點A,B,O，也會存在如<18>式中的臨界角，使得當$\omega=\phi$時，P的軌跡包含$\triangle ABO$之外接圓，意即<18>式可推廣至n倍之情形。

$$\overset{\frown}{OB} \equiv n\overset{\frown}{AO}+2\phi \Rightarrow \phi \equiv \frac{\overset{\frown}{OB}-n\overset{\frown}{AO}}{2} \qquad \text{<21>}$$

其中$\overset{\frown}{OB},\overset{\frown}{AO}$為$\triangle ABO$外接圓上的弧。

和之前類似，此時會是「過O,B的環在過A,O的環外」和「圖中過O,B的環被包在過A,O的環中」兩種情形的分界。

七、 對角曲線與偏移對角曲線

(一) 問題的導出與曲線型態

類似分角點，我們想過連接$\overline{AO},\overline{BO}$，改考慮$\angle OBP \equiv \angle PAO$的$P$點形成的軌跡。

〔Definition 10〕對角點與對角曲線

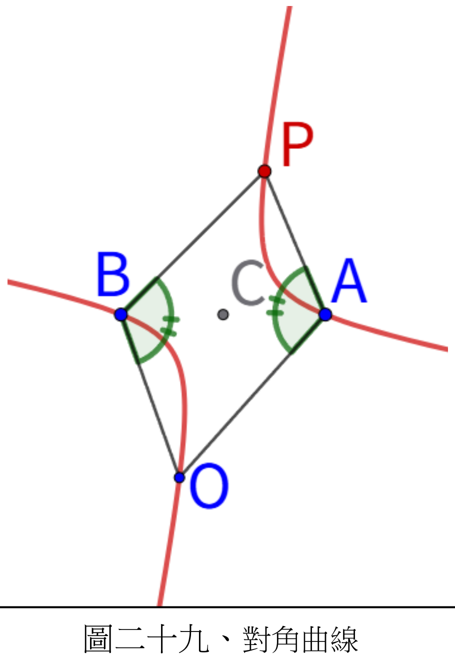
給定二維平面上三點A,B,O，若有一點P滿足$\angle OBP \equiv \angle PAO$，則稱$P$為一個$A,B$對$O$的<u>對角點</u>。所有$A,B$對$O$的<u>對角點</u>形成$A,B$對$O$的<u>對角曲線</u>，記做$\Psi(A,B,O)$，且稱$O$為<u>對角曲線的節點</u>。

類似的，我們有偏移對角點和偏移對角曲線(或n倍對角曲線，記作$\Psi(n;A,B,O)$)

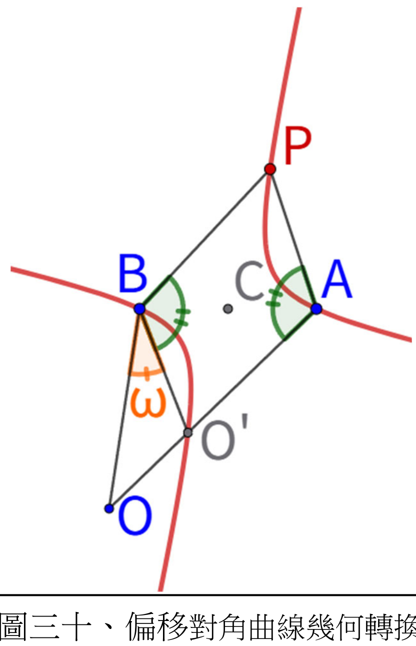
〔Definition 11〕偏移對角點與偏移對角曲線

給定二維平面上三點A,B,O，一常數$\omega \in [0,2\pi)$，若有一點P滿足$\angle OBP \equiv \angle PAO+\omega$，則稱$P$為一個$A,B$對$O$的<u>偏移</u>$\omega$ <u>對角點</u>。所有A,B對O的偏移ω對角點形成A,B對O的<u>偏移</u>ω <u>對角曲線</u>，記做$\Psi(A,B,O;\omega)$，且稱O為<u>偏移</u>ω <u>對角曲線的節點</u>。

容易用直角座標中的直線夾角公式證明對角曲線是等軸雙曲線，且等軸雙曲線的中心為A,B中點(圖二十九，C為A,B中點)。對於偏移對角曲線，我們可在幾何上將其轉化為對角曲線。見圖三十，紅色曲線為$\Psi(A,B,O;\omega)$，取$\overrightarrow{AO}$上一點O'使得$\angle OBO'=\omega$，O'為一定點，如此便可見$\Psi(A,B,O;\omega)=\Psi(A,B,O')$，即偏移對角曲線可對應到一對角曲線，因而也是以$A,B$中點為中心點的等軸雙曲線。



圖二十九、對角曲線



圖三十、偏移對角曲線幾何轉換

我們也發現這其實是等軸雙曲線的一個性質，也就是以下性質

〔Property 8〕等軸雙曲線的性質

對於任意一個等軸雙曲線，取對稱於中心點C的兩點A,B，則對於此雙曲線上任另外兩點O,P，都有$\angle OBP \equiv \angle PAO$。

這個性質一樣可以簡單的用直線夾角公式證明。

(二) 分角曲線系列與對角曲線系列的關係

一開始提到的分角曲線和最後的對角曲線似乎毫無關聯，但其實冥冥之中是有聯繫的！我們發現「分角曲線」系列和「對角曲線」系列對以O為圓心的圓反演後互為對方！為了進一步的說明，我們先定義以下記號：

〔Notation 1〕反演：物件P對單位圓的反演變換記作$\mathcal{O}(P)$。

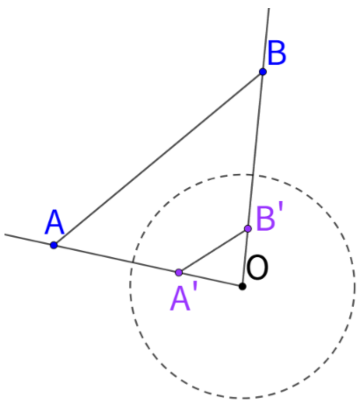
給定平面上三點A,B,O，且不妨設O為原點。我們發現了$\mathcal{O}\left(\Phi(A,B,O)\right)=\Psi(A',B',O)$，其中$A'=\mathcal{O}(A), B'=\mathcal{O}(B)$；甚至比他更強的結論也成立，例如$\mathcal{O}\left(\Phi(A,B,O);\omega\right)=\Psi(A',B',O;\omega)$或$\mathcal{O}\left(\Phi(n;A,B,O)\right)=\Psi(n;A',B',O)$，起初我們認為這很不可思議，但其實這是反演性質的直接結果。我們先證明以下引理：

〔Lemma 5〕(Well know)反演的相似性質

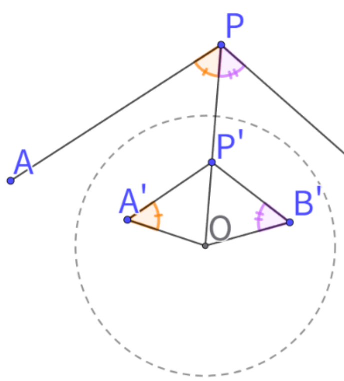
給定非單位圓上兩點A,B、O為原點，作$A'=\mathcal{O}(A), B'=\mathcal{O}(B)$，則$\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$。

證明：$\angle O$為共用角、由反演定義有$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}$，由 SAS 相似性質得證。

這樣，我們就能來說明為何分角曲線和對角曲線有反演之間的關係了。見圖三十二，分別對A,P,O和P,B,O應用上述引理，可得$\angle APO=\angle OA'P', \angle OPB=\angle P'BO$，也就是頂端的兩個角在反演後會被傳送到側邊，此即任何推廣下的分角曲線和對角曲線反演後為對方的原因。



圖三十一、反演的相似性質



圖三十一、反演與角度傳送

肆、 研究結果

一、分角曲線

〔Theorem 1〕分角曲線

令 A,B,O 的直角坐標與極坐標分別為 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),O(0,0)$ 、

$A[r_1,\alpha],B[r_2,\beta],O[0,0]$ ，則 O 對 A,B 的分角曲線($\Phi(A,B,O)$)為

極坐標方程式： $r=\dfrac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}$ 。

直角坐標方程式： $(x^2+y^2)(ax+by)+c(x^2-y^2)+dxy=0$ ，其中 $\begin{cases} a=-(a_y+b_y) \\ b=a_x+b_x \\ c=a_xb_y+a_yb_x \\ d=-2(a_xb_x-a_yb_y) \end{cases}$

〔Theorem 2〕分角曲線之漸近線

承 Theorem 1 之記號， $\Phi(A,B,O)$ 有漸近線

$r\sin(\theta-\theta_0)=-\dfrac{r_1r_2\sin\left(\alpha+\beta-2\theta_0\right)}{r_1\cos\left(\alpha-\theta_0\right)+r_2\cos\left(\beta-\theta_0\right)}$ ，或直角坐標之形式 $y=mx+c$ ，其中

$m=\tan\theta_0=\dfrac{r_1\sin\alpha+r_2\sin\beta}{r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta}=\dfrac{a_y+b_y}{a_x+b_x},c=-\dfrac{r_1r_2\sin\left(\alpha+\beta-2\theta_0\right)}{r_1\cos\left(\alpha-\theta_0\right)+r_2\cos\left(\beta-\theta_0\right)}\dfrac{1}{\cos(\theta_0)}$ 。

此漸近線平行於 O 與 A,B 中點的連線。

〔Theorem 3〕三次曲線與分角曲線

方程式形如 $(x^2+y^2)(ax+by)+c(x^2-y^2)+dxy=0$ 者，其圖形皆為分角曲線。

〔Theorem 4〕三次曲線與分角曲線

給定 $P\in\Phi(A,B,O)-\{A,B,O\}$ ，取 $A',B'\in\Phi(A,B,O)$ ，使得 $\angle B'PB\equiv\angle APA'$ ，

則在一般情形下 $\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)$ 。

二、分離分角曲線

〔Theorem 5〕分離分角曲線之特殊情形

$\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)\Rightarrow\Phi(A,B,O)=\Phi(A',B',O)=\Phi(A,B,B',A')$

〔Theorem 6〕分離分角曲線

令 A,B,O_1,O_2 的直角坐標分別為 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),O_1(1,1),O_2(-1,-1)$，

則 O_1,O_2 對 A,B 的分離分角曲線($\Phi(A,B,O_1,O_2)$)為

$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2-2bx-2ay-d=0$ ，其中 $\begin{cases} a=-(a_y+b_y) \\ b=a_x+b_x \\ c-2=a_xb_y+a_yb_x \\ d=-2(a_xb_x-a_yb_y) \end{cases}$

〔Theorem 7〕三次曲線與分離分角曲線

方程式形如 $ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2-2bx-2ay-d=0$ ，

其圖形皆為分離分角曲線。

三、偏移分角曲線

〔Theorem 8〕偏移分角曲線

令 A,B,O 的直角坐標與極坐標分別為 $A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),O(0,0)$ 、

$A[r_1,\alpha],B[r_2,\beta],O[0,0]$ ，並給定一實數 $\omega\in[0,2\pi)$ ，

則 O 對 A,B 的偏移 ω 分角曲線($\Phi(A,B,O;\omega)$)為

$\sin\omega(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(ax+by)+c(x^2-y^2)-dxy=0$ ，

其中 $\begin{cases} a=\cos(\omega)(p_y+q_y)-\sin(\omega)(p_x+q_x) \\ b=-\sin(\omega)(p_y+q_y)-\cos(\omega)(p_x+q_x) \\ c=\sin(\omega)(p_xq_x-p_yq_y)-\cos(\omega)(p_xq_y+p_yq_x) \\ d=2\left(2(p_xq_y+p_yq_x)\sin(\omega)+2(p_xq_x-p_yq_y)\cos(\omega)\right) \end{cases}$ 。

且偏移分角曲線上的一點 $P[r,\theta]$ 符合

$r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta)-\omega)=rr_1\sin(\alpha-\theta-\omega)+rr_2\sin(\beta-\theta-\omega)-r^2\sin(\omega)$ 。

〔Theorem 9〕偏移分角曲線的封閉性

承Theorem 8之記號，除了退化情形($\omega=0\vee\pi$)，偏移分角曲線皆封閉有界。

〔Theorem 10〕偏移分角曲線的臨界角

承Theorem 8之記號，$\Phi(A,B,O;\omega)$ 的臨界角 $\phi\equiv\dfrac{\overset{\frown}{OB}-\overset{\frown}{AO}}{2}$ ，且臨界情形時 $\triangle ABC$ 的外接圓為偏移分角曲線的一部分。

四、n倍分角曲線

〔Theorem 11〕n倍分角曲線

令A,B,O的直角坐標與極坐標分別為$A(a_x,a_y),B(b_x,b_y),O(0,0)$，並給定$n\in\mathbb{N}$，

則O對A,B的n倍分角曲線($\Phi(n;A,B,O)$)為

$$f\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}h^{n-2k}l^{2k}(-1)^k+g\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-(2k+1)}l^{2k+1}(-1)^k=0$$，其中

$\begin{cases} f=b_xy-b_yx \\ g=(x^2+y^2)-(xb_x+yb_y) \\ h=(x^2+y^2)-(xa_x+ya_y) \\ l=a_xy-a_yx \end{cases}$，次數為$2n+1$次，當$\overrightarrow{OB}=-n\overrightarrow{OA}$時最高項消去，退化為$2n$次，此時曲線包含$a_xy-a_yx=0$此一直線，和另外一個二元$2n-1$次的曲線。

〔Theorem 12〕n倍分角曲線之漸近線

承Theorem 11之記號，未退化情形下，n倍分角曲線的漸近線斜率為$t=\dfrac{b_y+na_y}{b_x+na_x}$。

五、分角曲線與對角曲線

〔Theorem 13〕分角曲線與對角曲線反演後互為對方

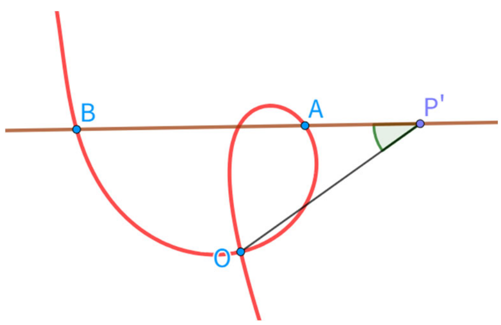
分角曲線系列與對角曲線系列反演後互為對方，如$\mathcal{O}\left(\Phi(A,B,O)\right)=\Psi(A',B',O)$、$\mathcal{O}\left(\Phi(A,B,O);\omega\right)=\Psi(A',B',O;\omega)$、$\mathcal{O}\left(\Phi(n;A,B,O)\right)=\Psi(n;A',B',O)$等等。

其中$A'=\mathcal{O}(A),B'=\mathcal{O}(B)$。

伍、討論

一、使用有向角的原因

見圖三十二，$\overleftrightarrow{AB}$上的任意一點P'顯然都符合(無向角)$\angle OP'B=\angle AP'O$(皆為圖中綠色角)，但$\overleftrightarrow{AB}$卻不是我們要的軌跡(O並未在$\angle AP'B$的角平分線上)，因此我們使用有向角避開這些例外。第二個原因是有向角讓我們能將幾何角度進行抽象化的代數運算(其實在複數的幅角便隱藏著有向角的概念)，再表達推廣(如偏移、n倍)的條件時也較容易。



圖三十二、無向角的例外

二、分角曲線終極推廣

整合以上討論的所有內容，$\angle O_1PB \equiv n\angle APO_2 + \omega$ 的 P 點軌跡由

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(j_1-z)(j_2-z)^n}{(p-z)^n(q-z)}e^{i\omega}\right\}=0 \qquad \text{<b>}$$

給出，但一次變數過多，已超出我們的研究實力。不過據我們在 Geogebra 的觀察，其將同時具有先前探討的各種之性質，包括隨著 n 的增長繞圈圈數變多、ω 影響曲線彎曲程度等等。

三、對角曲線與等角差線

由於我們在參加台大數學營時，自他人口中聽聞此與李永約幾年前在數學傳播期刊上所提出之「等角差線」，意外發現這和我們正在研究的「對角曲線」是等價的。且等角差線相關的研究也已被詳細研究，為別校學長的科展題目(那時尚未公開)(參考資料[13])，探討 n 倍等角差線的各種性質，因此我們關於對角點的研究便就此止步。

四、未來展望

(一) 以幾何方式解釋為何分角曲線為斜環索線。

(二) 求出 n 倍分角曲線的漸近線、並證明我們對其曲線型態的觀察。

(三) 對各種分角曲線的退化情形進行系統性的分類與整理。

(四) 求出偏移分角曲線上的點到原點距離的上界。

(五) 證明偏移分角曲線($\Phi(A,B,O;\omega)$)對 $\triangle ABO$ 外接圓反演後仍為偏移分角曲線，並深入研究特殊情形與其性質。

陸、 結論

一、我們求出了分角曲線的方程式，為一個二元三次曲線(斜環索線)，並且一般情形下有一條漸近線，還發現具相同形式之二元三次曲線皆可對應到分角曲線。

二、對於分離分角曲線，我們先運用分角曲線唯一性的討論結果進行轉化，得出在特殊情形下分離分角曲線具有分角曲線之型態。之後也有求出其軌跡方程式，為一個二元三次曲線。類似的，有相同形式之二元三次曲線皆可對應到一分離分角曲線。

三、我們求出了偏移分角曲線的方程式，為一個二元四次曲線，並探討其型態與性質，且除了退化情形，圖形皆封閉有界。

四、我們求出了 n 倍分角曲線的方程式，次數為 $2n+1$ 次。我們觀察其形態並求出漸近線斜率。

五、我們發現分角曲線系列和對角曲線系列反演後互為對方。

柒、 參考文獻資料

一、參考文獻

[1] 2022 Taiwan Mathematics Olympiad. (n.d.). Art of Problem Solving. Retrieved March 1, 2025, from https://pse.is/75ykpd

[2] 環索線 - 維基百科，自由的百科全書. (2020, March 27). 维基百科，自由的百科全書. Retrieved March 1, 2025, from https://zh.wikipedia.org/zh-tw/環索線

[3] 无情天魔精致. (2021, December 1). 【平面几何】斜环索线的焦点是怎么产生的-百度经验. 百度经验——实用生活指南. https://ppt.cc/fRdckx

[4] 无情天魔精致. (2019, June 14). 【代数几何】环索线的定义和性质-百度经验. 百度经验——实用生活指南. https://ppt.cc/fnZyjx

[5] 姜很犟. (2021, November 29). 环索线的一些深刻性质 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/438740944

[6] 姜很犟. (2021, November 29). 环索线焦点的由来 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/439169780

[7] 姜很犟. (2021, November 20). 环索线与三角形 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/435395763

[8] 蒋声. (1999). 形形色色的曲线 (上海教育出版社).

[9] 李永約. (2021, December). 等角差線——漸近線及其性質. 數學傳播, 45 卷(4 期), p.34–42

[10] 鍾文體. (2022, March). 等角差線實為雙曲線. 數學傳播, 46 卷(1 期), p.84–87

[11] 張鎮華. (2022, September). 再談等角差線－兼談108數學課綱之圓錐曲線教學. 數學傳播, 46 卷(3 期), p.38-48

[12] 李永約. (2023, June). 等角差線定義修正與n倍等角差線(NE.D.L.)猜想. 數學傳播, 47 卷(2 期), p.65-76

[13] 鄭郁寬, 郭炳宏, & 江承祐. (2024). n 倍等角差線. 中華民國第64屆中小學科學展覽會. https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/64/pdf/NPHSF2024-050409.pdf

[14] Dr. Vineeta Negi Maths. (2020, October 5). Asymptotes of polar curves examples and solutions asymptote lecture – 4 [Video]. YouTube. https://youtu.be/ZxjL1RzOkEU

[15] Asymptotes. (n.d.). Retrieved January 27, 2025, from https://math24.net/asymptotes.html

[16] Ccjou. (2014, March 5). 利用行列式求直線、平面和圓方程式 | 線代啟示錄. https://ccjou.wordpress.com/2014/03/05/利用行列式求直線、平面和圓方程式/

二、圖片來源：除特別標示外，皆為自行繪製。

【評語】050416

本作品從以下問題出發：給定平面三點 A、O、B，問所有滿足∠APO=∠OPB 的所有 P 點所形成的圖形。作者藉由平面點的極座標公式證明該圖形為斜環索線,即一等軸雙曲線以線上的點為中心做反演所得到的圖形。反之，給定斜環索線，作者也可以找到 A、O、B 使得 P 點所形成的圖形是該斜環索線。這一部分的工作主要是由方程式的係數去加以觀察,是有些繁瑣但不算是太困難。以相同手法,作者也可以解決當題目改為 ∠APO=∠OPB+ω，以及∠APO=n∠OPB，其中ω是定角、n 是整數的情形。作者分別用解析幾何及極座標來分析這些問題,最後也提出反演變換來給出一些幾何解釋。整體而言，作品的結論還算有趣。

作品海報

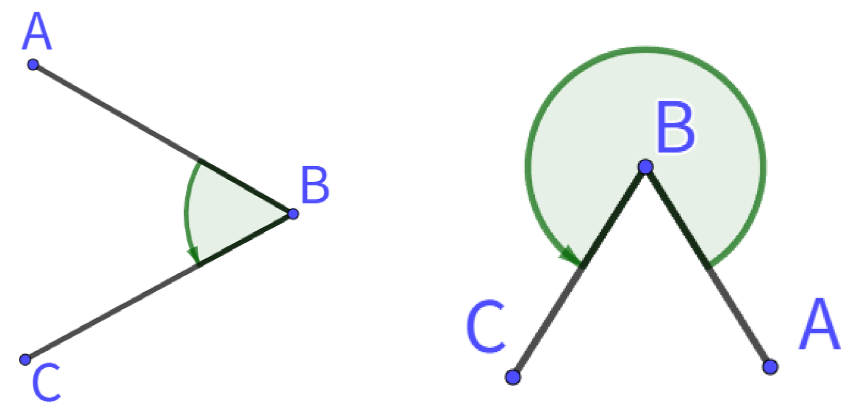
分角曲線之探討

摘要

本研究探討給定平面任意三點A,B,O，滿足$\angle OPB\equiv\angle APO$的點$P$軌跡為何？有什麼性質？我們主要運用複數解析求出曲線方程式，再運用其對觀察到的曲線性質進行證明，我們亦在作品中給出一些幾何解釋。之後我們更進一步更改兩角度之間的關係(如成倍數關係、差為定值等)，得到了豐碩的成果。最終還發現此軌跡與其他曲線間的關聯，並說明了背後的幾何本質。

角度定義

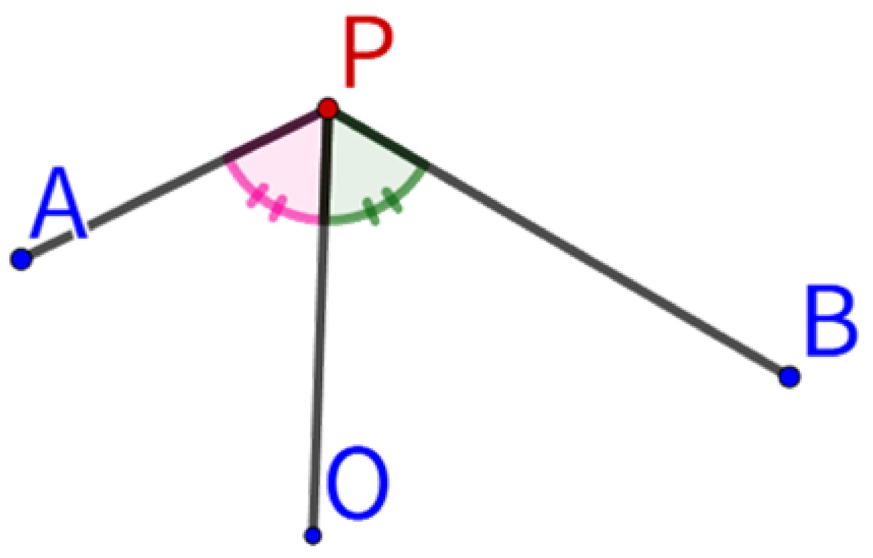
1. 本研究考慮的角度皆為有向角，量值屬於區間$(0,2\pi]$
2. 對於不在區間$(0,2\pi]$內的角度量值，定義$\theta+2n\pi=\theta$，$n\in\mathbb{Z}$，即直接將其視作在區間內的同界角。
   例：$730^\circ=-350^\circ=10^\circ$



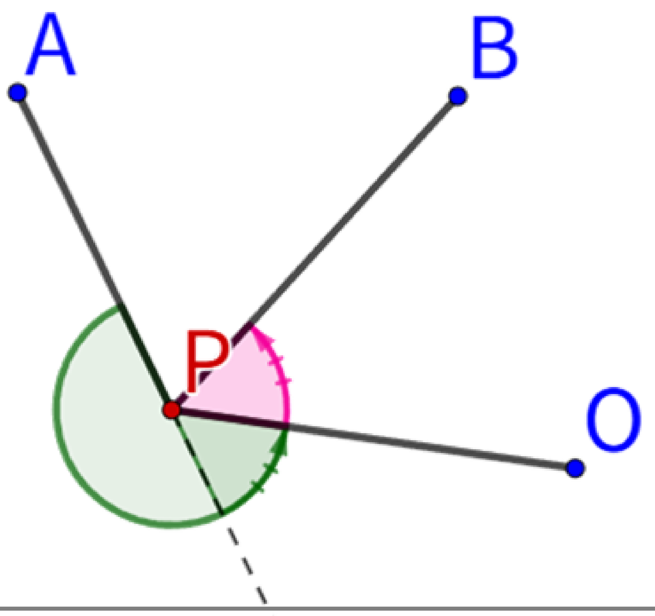
圖一、有向角

問題陳述與轉化

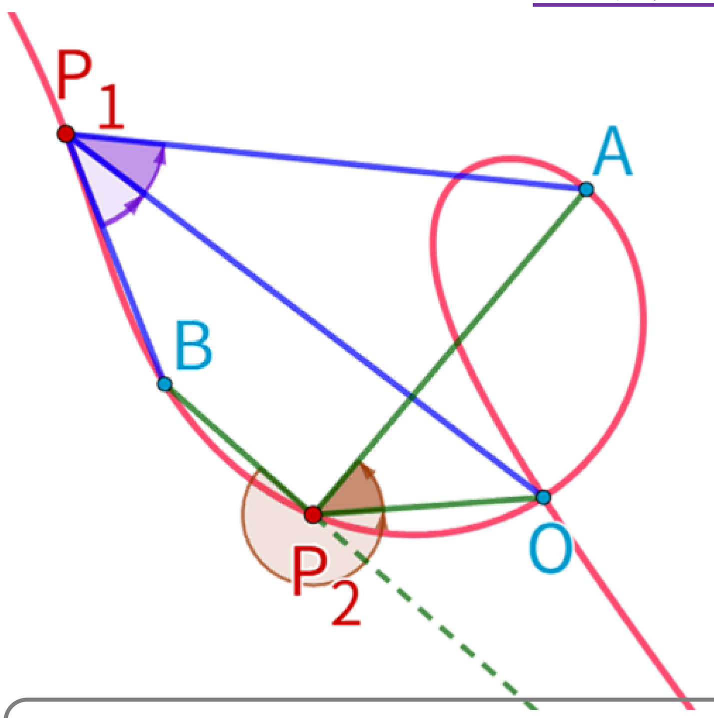
給定平面任意三點A,B,O，起初我們想研究所有滿足$\angle OPB=\angle APO$的點P(如圖二)的軌跡。然而用一些角平分線的幾何性質在GGB作圖後發現畫出來的軌跡多出了一段，在曲線的那一段上並不符合$\angle OPB=\angle APO$。經過我們的觀察發現原先的$\angle OPB=\angle APO$可視為O在$\angle APB$的內角平分線上，而多出來的那一段上的點P則符合O在$\angle APB$的外角平分線上，此對應到我們有向角的定義便有$\angle OPB=\angle APO\pm\pi$。為了軌跡的完整性，我們改為一併考慮此二種情形，並且將其合記為$\angle OPB\equiv\angle APO(\bmod\pi)$，進一步簡記為$\angle OPB\equiv\angle APO$。我們稱這條$P$點的軌跡為分角曲線。



圖二、符合條件的P點

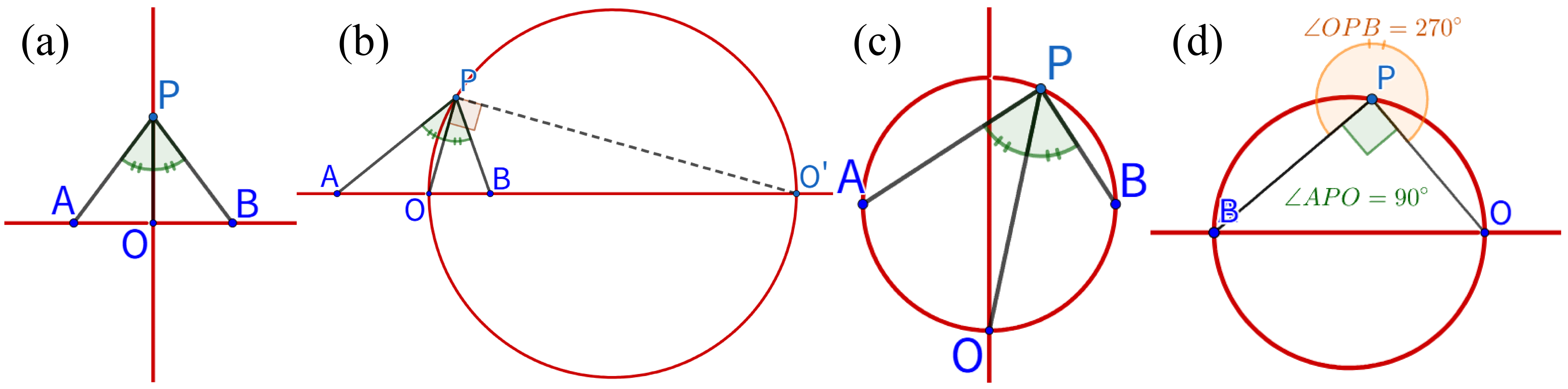


圖三、O在外角平分線上



圖四、分角曲線

特殊情形觀察



圖五、特殊情形 (a)(b) A, B, O共線 (c) O在$\overline{AB}$中垂線上 (d) $A=B$

研究過程、方法與結果

一 分角曲線($\angle OPB\equiv\angle APO$)

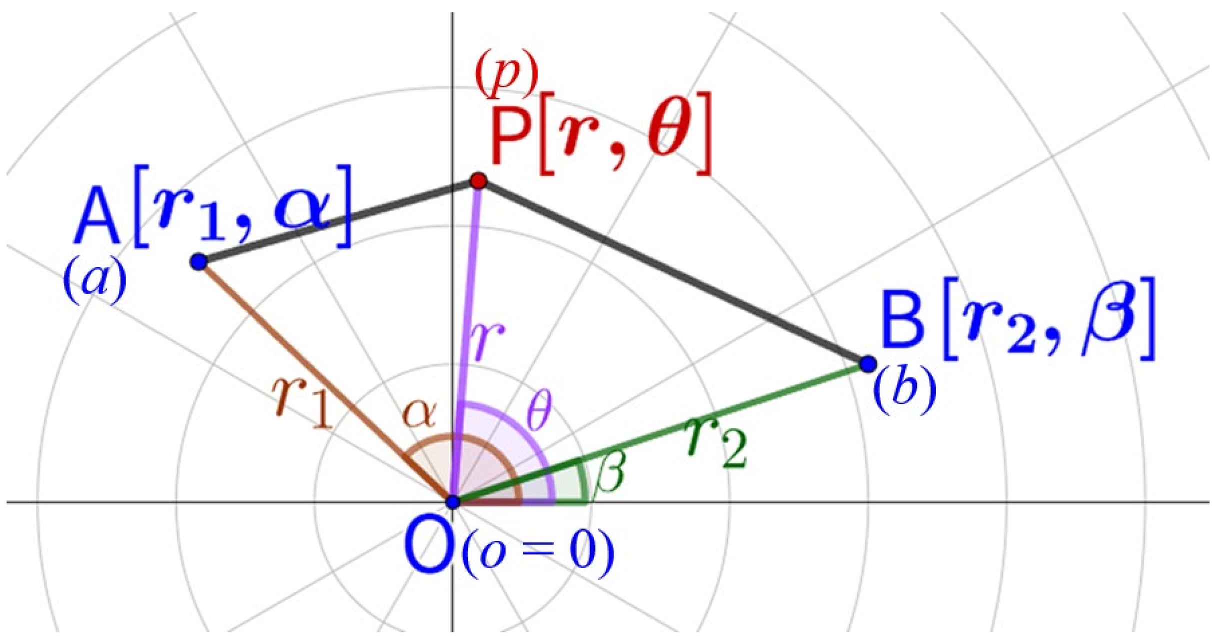
(一) 曲線方程式

如圖六建立複數坐標系，由角度的關係可得

$$\frac{\frac{o-p}{a-p}}{\frac{b-p}{o-p}}=\frac{(o-p)^2}{(a-p)(b-p)}\in\mathbb{R}$$

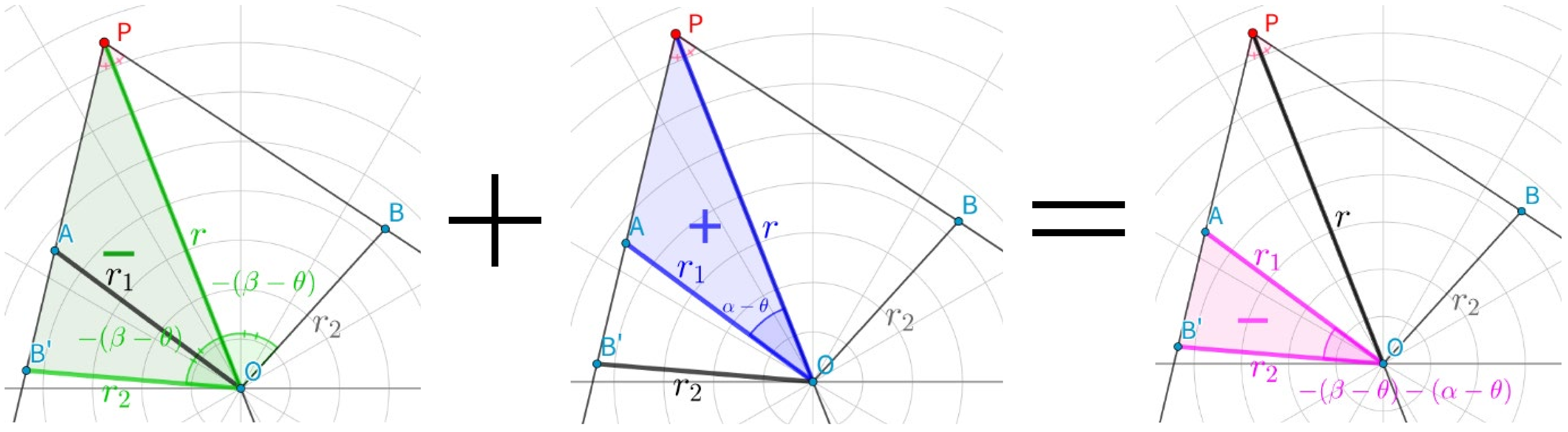
，進一步可得出曲線方程式的

極坐標形式：$r=\dfrac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta)}{r_1\sin(\alpha-\theta)+r_2\sin(\beta-\theta)}$ 或 $rr_2\sin(\beta-\theta)+rr_1\sin(\alpha-\theta)=r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta))$



圖六、坐標假設

作B對$\overline{PO}$的對稱點B'，則可發現如下幾何意義：$[B'OP]+[POA]=[B'OA]$



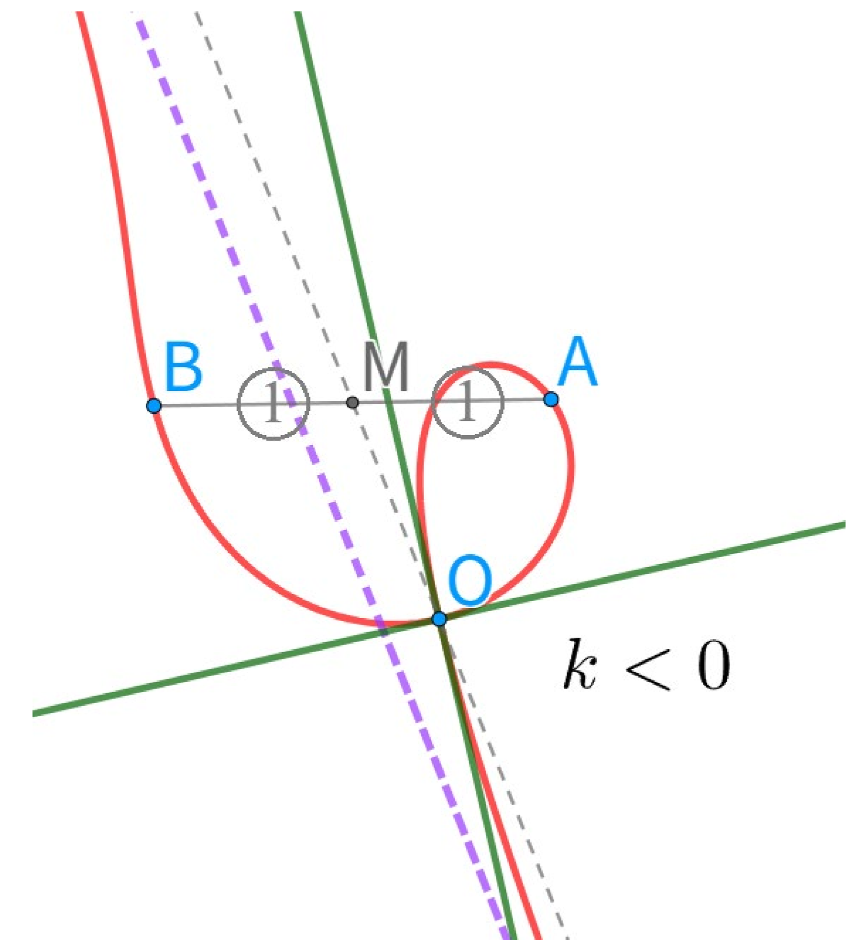
圖七、曲線方程式極坐標的幾何意義

可以進一步將其轉換為直角坐標形式：$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0$，

其中 $\begin{cases} a=-a_y-b_y \\ b=a_x+b_x \\ c=a_xb_y+a_yb_x \\ d=2(a_yb_y-a_xb_x) \end{cases}$，$A(a_x,a_y),B(b_x,b_y)$。從方程式的形式來看，我們發現分角曲線和一個既有的曲線——斜環索線是等價的。我們已推論得分角曲線的直角坐標方程式形式皆如上式，而其實，所有形如上式的方程式，它的圖形也都是分角曲線，我們只需根據四個係數a, b, c, d，依照他與a_x,a_y,b_x,b_y的關係反推出對應的A、B點即可。

(二) 圖形特徵

1. A,B互換後曲線不變(A,B有對稱性)。
2. A,B,O在曲線上。
3. O在曲線與自身的交叉點上，且此處的兩切線相互垂直。
4. 有漸近線(用極坐標方程式推導)
   極坐標方程式為：$r\sin(\theta-\theta_0)=k$
   其中θ_0為斜角，滿足斜率 $m=\tan\theta_0=\dfrac{r_1\sin\alpha+r_2\sin\beta}{r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta}=\dfrac{a_y+b_y}{a_x+b_x}$
   而 $k=-\dfrac{r_1r_2\sin(\alpha+\beta-2\theta_0)}{r_1\cos(\alpha-\theta_0)+r_2\cos(\beta-\theta_0)}$ 為漸近線與原點O的有向距離
   (若O在直線下方半平面則k為正，反之為負)(亦有幾何意義)

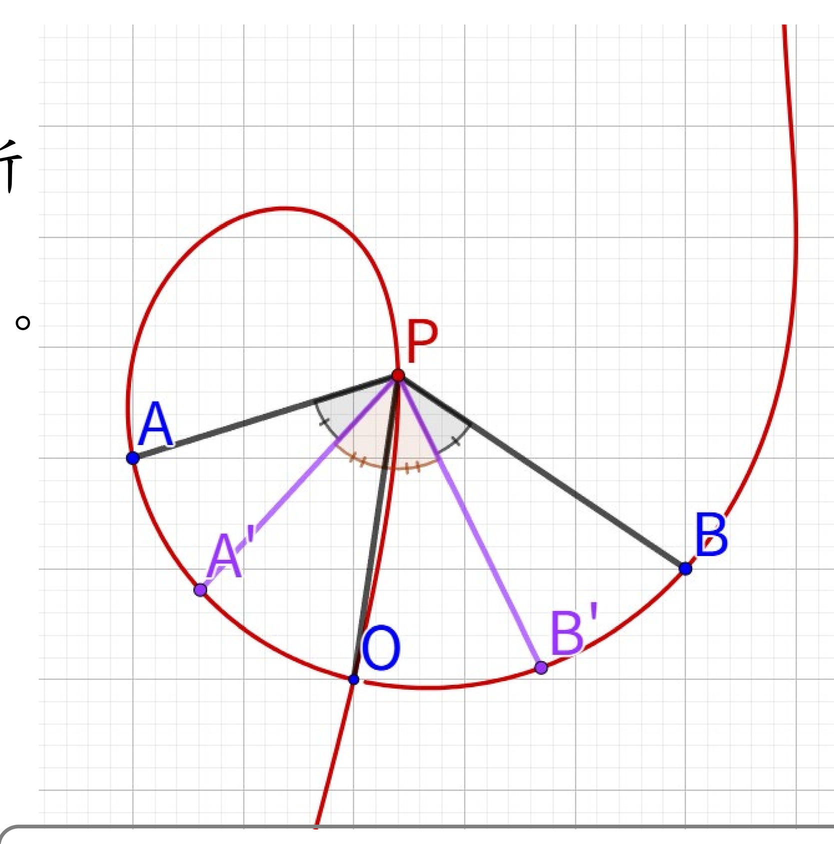


圖七、分角曲線圖形特徵

(三) A, B, O與分角曲線的多對一關係

給定一分角曲線只能確定係數a, b, c, d的「比例」，若我們使用不同一組的(a, b, c, d)，依照其與a_x,a_y,b_x,b_y的關係求解出的(a_x,a_y,b_x,b_y)將有所不同。也就是給定的A, B, O與其所決定的分角曲線是多對一的。

圖八中由A, B, O決定的分角曲線與由A', B', O所決定的分角曲線相同。

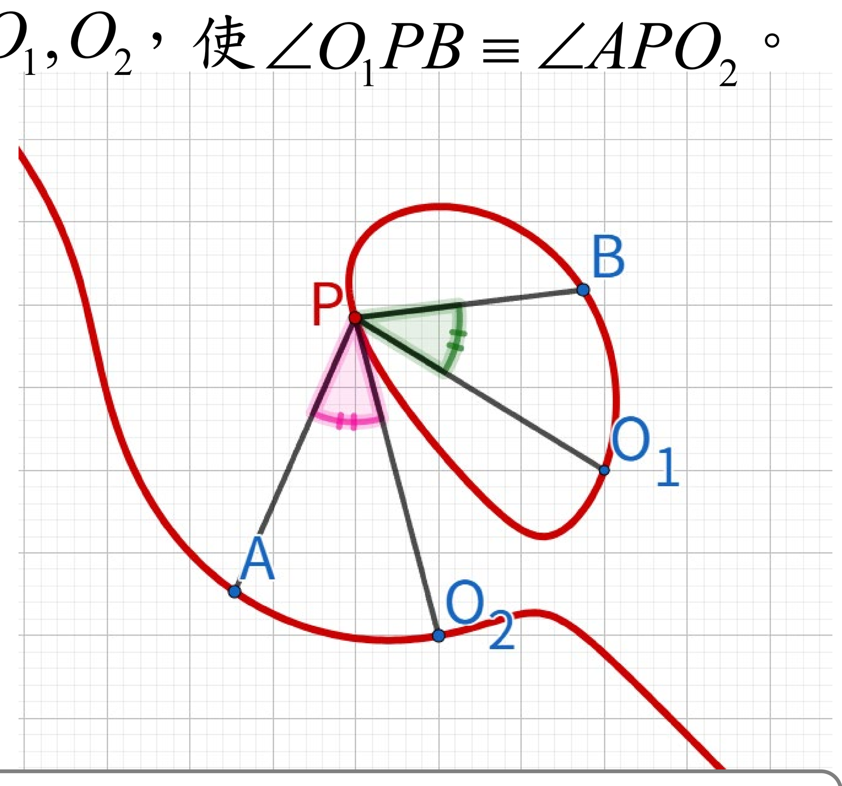


圖八、多組A, B, O

二 分離分角曲線($\angle O_1PB\equiv\angle APO_2$)

(一) 定義

將原先的O點拆開成兩點O_1,O_2，使$\angle O_1PB\equiv\angle APO_2$。



圖九、分離分角曲線

(二) 特殊情形

若A, B, O與 A',B',O 決定的分角曲線相同，則 A,B,B',A' 的分離分角曲線將退化為分角曲線，就是由A, B, O決定的那一條。(圖八)

(三) 曲線方程式

採用類似的作法，可以求出分離分角曲線的直角坐標方程式如下，和分角曲線類似，這裡假設$O_1(1,1),O_2(-1,-1)$。

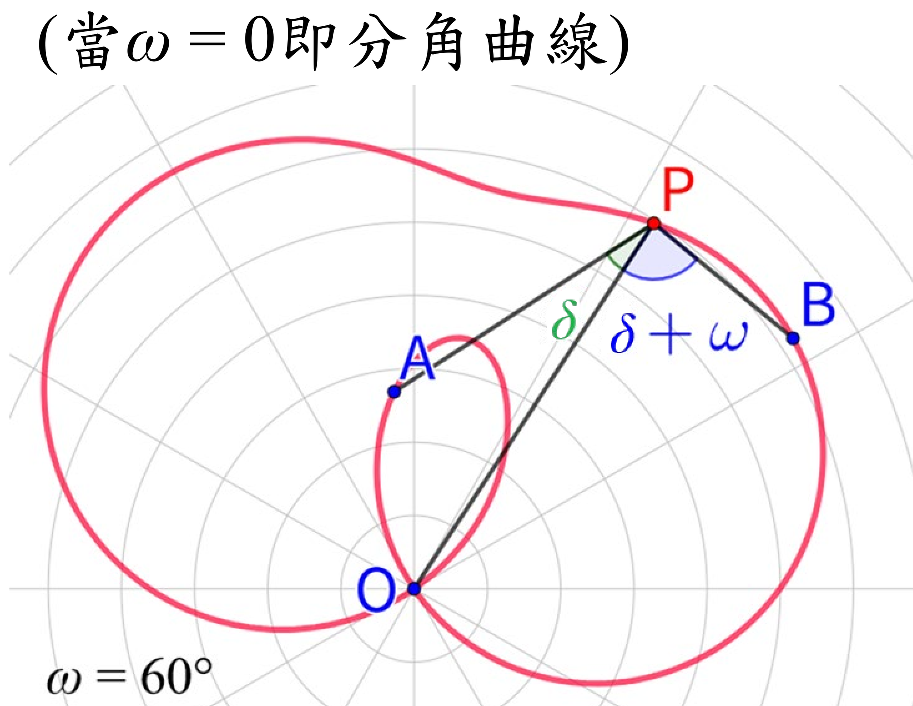
$$ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2-2bx-2ay-d=0$$

其中 $\begin{cases} a=-(a_y+b_y) \\ b=a_x+b_x \\ c-2=a_xb_y+a_yb_x \\ d=-2(a_xb_x-a_yb_y) \end{cases}$。類似的，具此形式者皆為分離分角曲線。

三 偏移分角曲線($\angle OPB\equiv\angle APO+\omega$)

(一) 定義

將分角曲線的兩角相等改為考慮兩角之差為一定值ω。(當$\omega=0$即分角曲線)



圖十、偏移分角曲線($\omega=60^\circ$)

(二) 曲線方程式

運用相同的複數作法，可以得到偏移分角曲線的極坐標方程式如下，當$\omega=0$時退化回分角曲線。

$$r_1r_2\sin((\alpha-\theta)+(\beta-\theta)-\omega)=rr_1\sin(\alpha-\theta-\omega)+rr_2\sin(\beta-\theta-\omega)-r^2\sin(\omega)$$

進一步有直角座標方程式：

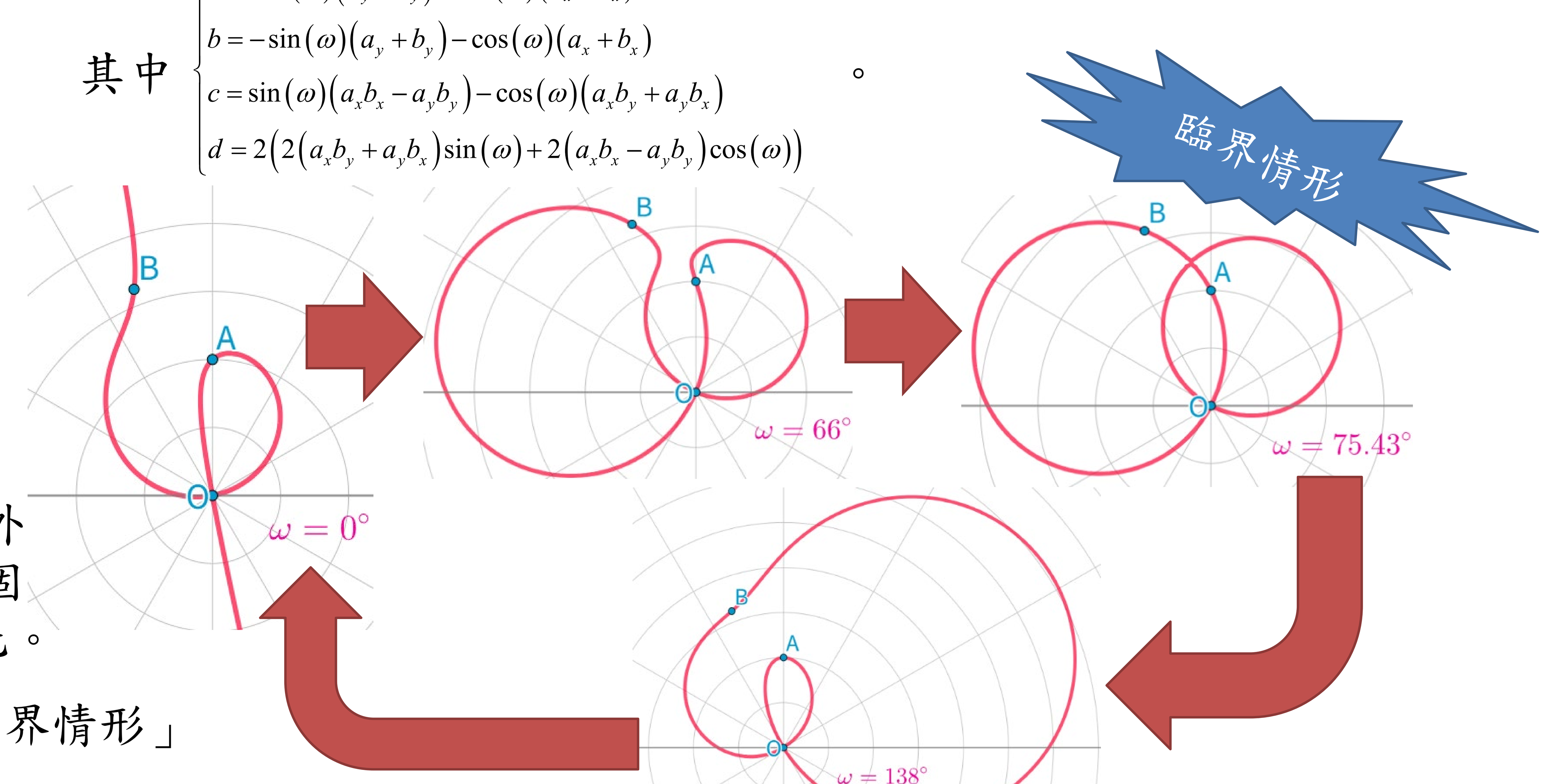
$$\sin(\omega)(x^2+y^2)^2+ax^3+bx^2y+axy^2+by^3+cx^2+dxy-cy^2=0$$

其中 $\begin{cases} a=\cos(\omega)(a_y+b_y)-\sin(\omega)(a_x+b_x) \\ b=-\sin(\omega)(a_y+b_y)-\cos(\omega)(a_x+b_x) \\ c=\sin(\omega)(a_xb_x-a_yb_y)-\cos(\omega)(a_xb_y+a_yb_x) \\ d=2\left(2(a_xb_y+a_yb_x)\sin(\omega)+2(a_xb_x-a_yb_y)\cos(\omega)\right) \end{cases}$。

(三) 曲線的封閉性與圖形的連續變化

除了退化成分角曲線的情形外，偏移分角曲線都是封閉的，且固定A, B, O時，曲線隨著ω連續變化。

當$\omega=\phi\equiv\dfrac{1}{2}\left(\widehat{OB}-\widehat{AO}\right)$時會達到「臨界情形」，此時偏移分角曲線成為「兩圓形」，其中一者為△ABO外接圓。(圖十一)

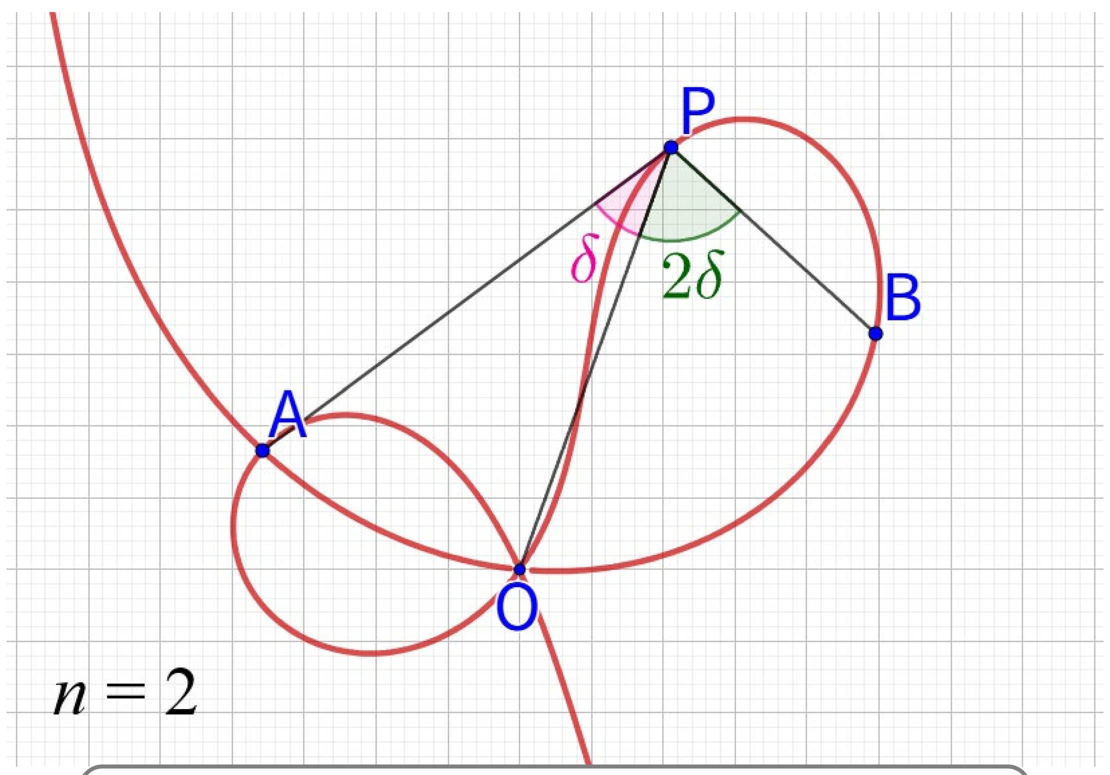


圖十一、偏移分角曲線連續變化

四 n倍分角曲線($\angle OPB \equiv n\angle APO$)

(一) 定義

將分角曲線的兩角相等改為考慮兩角成倍數關係(n倍，當$n=1$即為分角曲線)。



圖十二、n倍分角曲線($n=2$)

(二) 曲線方程式

使用一樣的複數做法，得出曲線方程式：

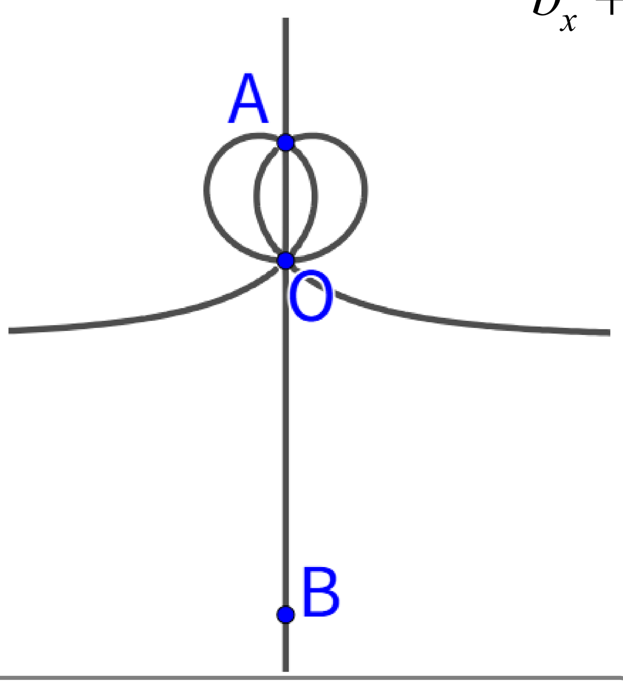
$$f\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2k}h^{n-2k}l^{2k}(-1)^k+g\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-(2k+1)}l^{2k+1}(-1)^k=0$$

其中 $\begin{cases} f=b_x y-b_y x \\ g=(x^2+y^2)-(xb_x+yb_y) \\ h=(x^2+y^2)-(xa_x+ya_y) \\ l=a_x y-a_y x \end{cases}$。分析知其次數基本上為$2n+1$次。當$(b_x,b_y)=-n(a_x,a_y)$，

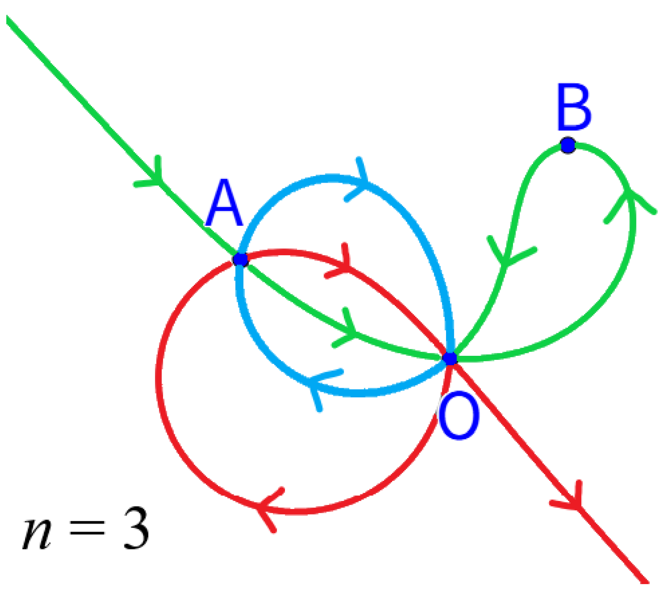
也就是$\overrightarrow{OB}=-n\overrightarrow{OA}$時，將退化為$2n$次(當$n=1$時就是$O$為$\overline{AB}$中點，退化為兩直線的情形)。

(三) 曲線型態

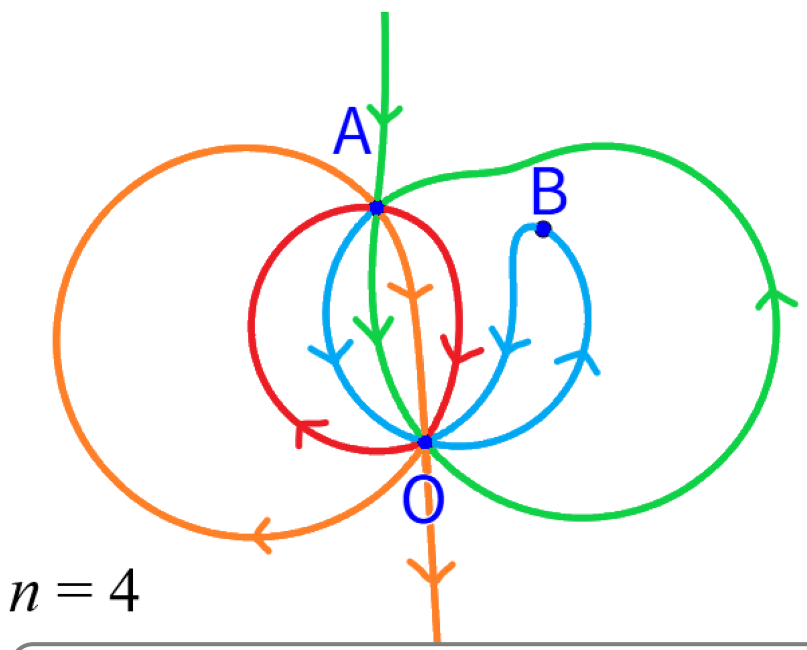
曲線的圖形有如在繞圈，n是多少就繞多少圈(圖十四、十五)。而一般情形下有漸近線，斜率為$t=\dfrac{b_y+na_y}{b_x+na_x}$，截距未知(圖十六)。



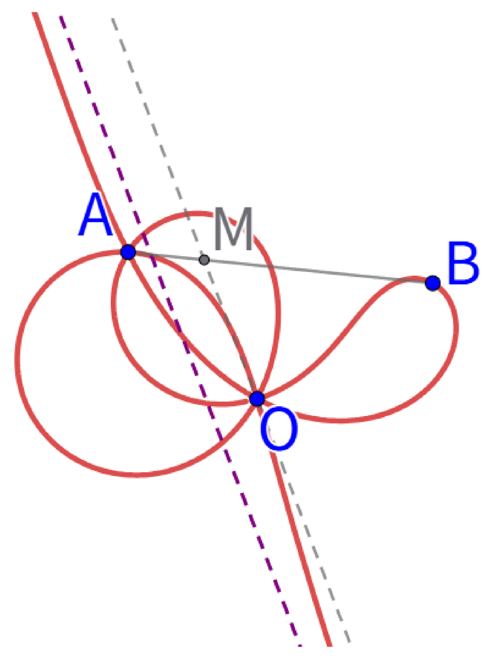
圖十三、退化情形



圖十四、繞圈($n=3$)



圖十五、繞圈($n=4$)



圖十六、漸近線

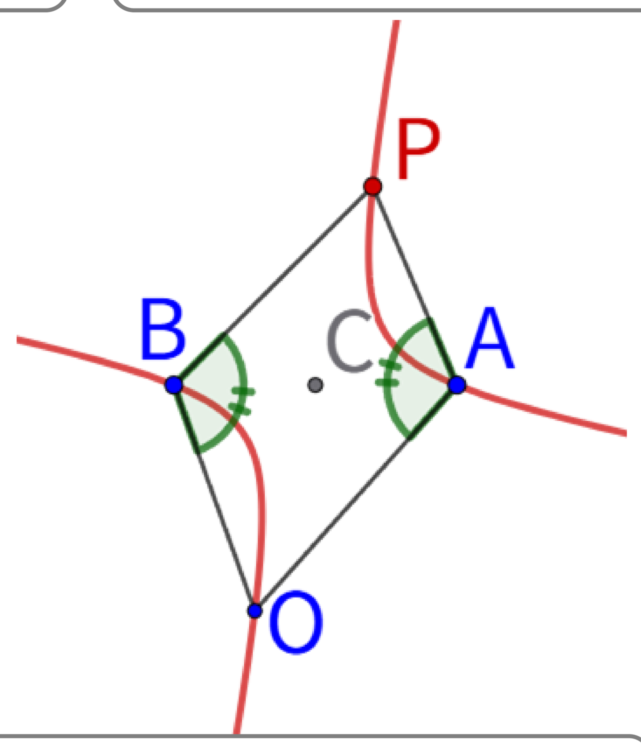
五 (偏移)對角曲線($\angle OBP \equiv \angle PAO(+\omega)$)

(一) 定義

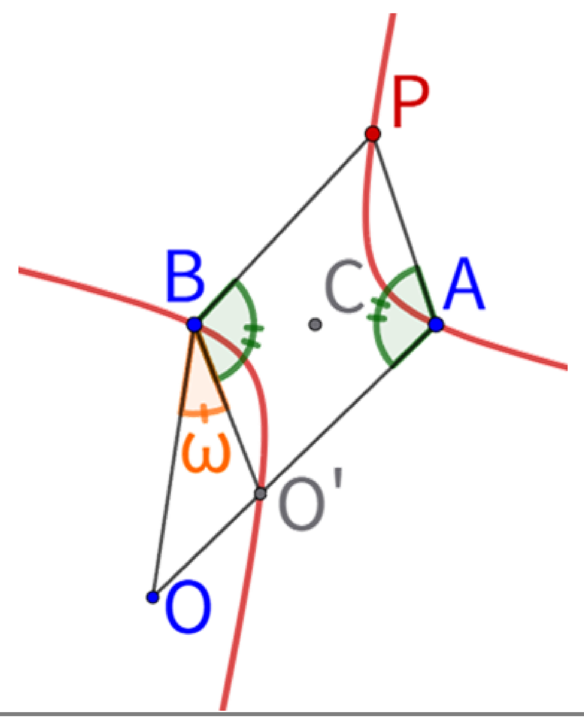
改成考慮A和B張開的$\angle OBP,\angle PAO$，這兩個對面的角相等(或差為定值)。

(二) 曲線

使用直角坐標解析與直線夾角公式可得軌跡為等軸雙曲線，其中心為$\overline{AB}$中點。而偏移對角曲線能在幾何上對應回對角曲線。



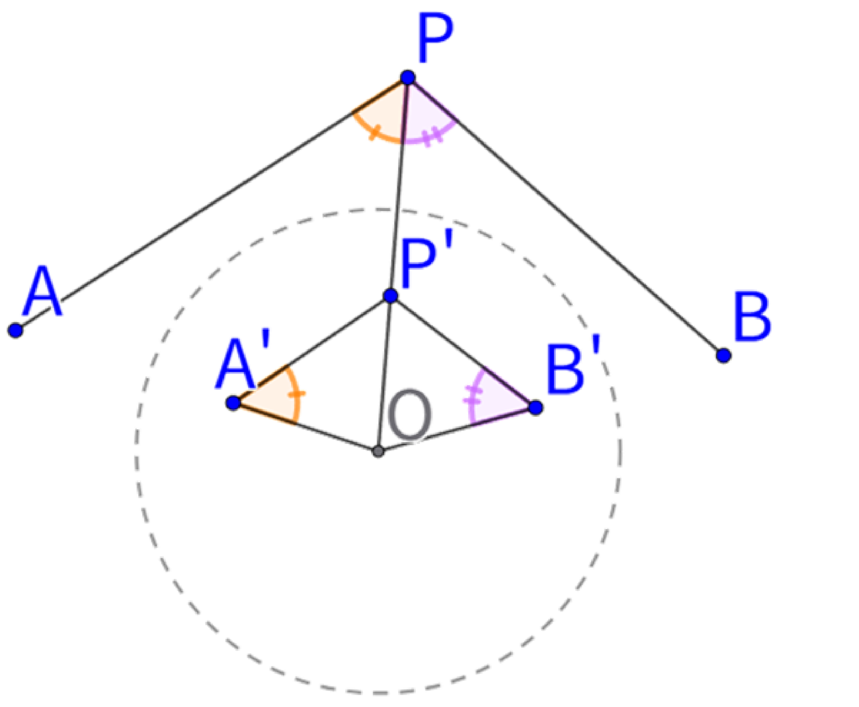
圖十七、對角曲線



圖十八、偏移對角曲線

(三) 與分角曲線的關係

(偏移)分角曲線經以O為圓心的圓反演後即為(偏移)對角曲線。原因是處於頂端的角度經反演會被傳送到兩側(圖十九)。順著相同的邏輯，若類似的定義n倍對角曲線，其反演後亦為n倍分角曲線。



圖十九、反演角度傳送

結論

我們求出了分角曲線與其推廣曲線(分離、偏移、n倍)的方程式與諸多性質，其中分角曲線、n倍分角曲線有漸近線；偏移分角曲線封閉有界。我們也針對一些特例情況或極端情形進行深入探究(如偏移分角曲線的臨界情形、分離分角曲線退化為分角曲線的情形)。最後也發現分角曲線系列與對角曲線系列反演後互為對方，而此竟源於反演的基礎性質！

參考文獻資料

1. 2022 Taiwan Mathematics Olympiad. (n.d.). Art of Problem Solving. Retrieved March 1, 2025, from https://pse.is/75ykpd
2. 環索線 - 維基百科，自由的百科全書. (2020, March 27). 維基百科，自由的百科全書. Retrieved March 1, 2025, from https://pse.is/7dhq3c
3. 无情天魔精致. (2021, December 1). 【平面几何】斜环索线的焦点是怎么产生的-百度经验. 百度经验——实用生活指南. https://ppt.cc/fRdckx
4. 无情天魔精致. (2019, June 14). 【代数几何】环索线的定义和性质-百度经验. 百度经验——实用生活指南. https://ppt.cc/fnZyjx
5. 姜很犟. (2021, November 29). 环索线的一些深刻性质 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/438740944
6. 姜很犟. (2021, November 29). 环索线焦点的由来 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/439169780
7. 姜很犟. (2021, November 20). 环索线与三角形 - 知乎. 知乎专栏 - 随心写作，自由表达 - 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/435395763
8. 蒋声. (1999). 形形色色的曲线 (上海教育出版社).
9. 李永約. (2021, December). 等角差線——漸近線及其性質. 數學傳播, 45 卷(4 期), p.34–42
10. 鍾文體. (2022, March). 等角差線實為雙曲線. 數學傳播, 46 卷(1 期), p.84–87
11. 張鎮華. (2022, September). 再談等角差線—兼談108數學課綱之圓錐曲線教學. 數學傳播, 46 卷(3 期), p.38-48
12. 李永約. (2023, June). 等角差線定義修正與n倍等角差線(NE.D.L.)猜想. 數學傳播, 47 卷(2 期), p.65-76
13. 鄭郁寬, 郭炳宏, & 江承祐. (2024). n倍等角差線. 中華民國第64屆中小學科學展覽會. https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/64/pdf/NPHSF2024-050409.pdf
14. Dr. Vineeta Negi Maths. (2020, October 5). Asymptotes of polar curves examples and solutions asymptote lecture – 4 [Video]. YouTube. https://youtu.be/ZxjL1RzOkEU
15. Asymptotes. (n.d.). Retrieved January 27, 2025, from https://math24.net/asymptotes.html
16. Ccjou. (2014, March 5). 利用行列式求直線、平面和圓方程式 | 線代啟示錄. https://ccjou.wordpress.com/2014/03/05/利用行列式求直線、平面和圓方程式/