中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050415

圓內接多邊形西姆松線的延伸思考

學校名稱： 國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 王昱翔	楊玉星
高一 郭政昇	陳維廷
高一 洪嘉穗	

關鍵詞： 西姆松定理、西姆松線夾角、圓內接多邊形

摘要

本研究是將三角形的西姆松線推廣至圓內接 N 邊形的西姆松線，已知三角形的西姆松線有孟氏定理，利用數學歸納法可證得圓內接 N 邊形的西姆松線也有孟氏定理；若只考慮外接圓上的一點 P 對圓內接 N 邊形各邊所在直線作垂足，則各邊截線段比值的連乘積也會等於 1；已知三角形外接圓上兩點P、P′的西姆松線之夾角，會等於P、P′兩點所對的圓周角。利用四點共圓、兩層西姆松線的關係可證得：圓內接 N 邊形圓上兩點P、P′的西姆松線之夾角，會等於P、P′兩點所對的圓周角的(N-2)倍；已知若兩個三角形的外接圓相同，則外接圓上一點P對應兩者的西姆松線之夾角為定值，跟P的位置無關。利用四點共圓、兩層西姆松線的關係可證得：兩個 N 邊形的外接圓相同時也成立。

壹、前言

(本研究每張圖片皆為作者用 *Geometer's Sketchpad* 電腦動態幾何軟體繪製而成)

一、研究動機

從文獻[1]得知：將三角形的西姆松線推廣至圓內接 N 邊形時，會有相對的西姆松線。我們發想：三角形的西姆松線有孟氏定理，那圓內接 N 邊形的西姆松線也有孟氏定理嗎？若只考慮外接圓上一點P對各邊所在的直線作垂足，則多邊形各邊截線段比值的連乘積會等於 1 嗎？又從文獻[3]得知：三角形外接圓上兩點P、P′的西姆松線之夾角，會等於P、P′兩點所對的圓周角；兩個三角形的外接圓相同，則外接圓上一點P對應兩者的西姆松線之夾角為定值，跟P的位置無關，那上述三角形西姆松線的性質是否也可以推廣至圓內接 N 邊形？

二、研究目的

(一) 三角形的西姆松線有孟氏定理，那圓內接 N 邊形的西姆松線也有孟氏定理嗎？如果有，並試著加以證明。

(二) 只考慮外接圓上的一點P對各邊所在直線作垂足，則三角形各邊截線段比值的連乘積會等於 1，那圓內接 N 邊形時也會成立嗎？如果有，並試著加以證明。

(三) 三角形外接圓上兩點P、P′的西姆松線之夾角，會等於P、P′兩點所對的圓周角，那圓內接 N 邊形時也會成立嗎？如果有，並試著加以證明。

(四) 兩個三角形的外接圓相同，則外接圓上一點P對應兩者的西姆松線之夾角為定值，跟P的位置無關，那圓內接 N 邊形時也會成立嗎？如果有，並試著加以證明。

三、研究工具

本研究主要利用 *Geometer's Sketchpad* 和 *Geogebra* 電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

四、研究特色

以往的研究有：將三角形的西姆松線推廣至任意三角形的西姆松圓、將西姆松線重新做定義得出新的研究方向、探討西姆松線之交點軌跡及找出 **N** 邊形的西姆松線之方程式和 **N** 尖瓣線等。本研究則是聚焦於三角形的西姆松線性質，當推廣至圓內接 **N** 邊形時是否維持不變？我們發現性質大致維持不變。圓內接 **N** 邊形的西姆松線也有孟氏定理；只考慮外接圓上一點**P**對各邊所在直線作垂足，則各邊截線段比值的連乘積也會等於 1；圓內接 **N** 邊形圓上兩點**P**、**P′**的西姆松線之夾角，會等於**P**、**P′**兩點所對圓周角的**(N-2)**倍；若兩個 **N** 邊形的外接圓相同，則外接圓上一點**P**對應兩者的西姆松線之夾角為定值，跟**P**的位置無關。

五、研究架構

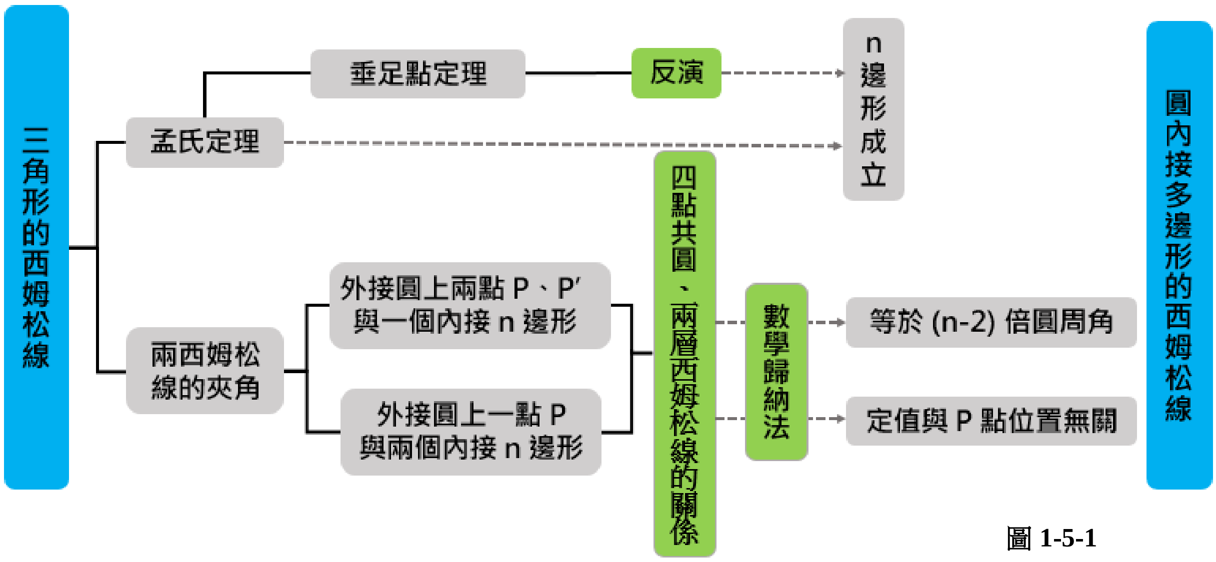


圖 1-5-1

貳、文獻探討與前置研究

一、西姆松定理 參[1]

西姆松定理：在平面中，給定一個三角形Δ**ABC**，以及Δ**ABC**外接圓上的一點 **P**。則 **P** 分別對直線$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$、 $\overleftrightarrow{CA}$作的三個垂足 **N**、**L**、**M** 會共線。上述中的直線$\overleftrightarrow{MNL}$ 稱為Δ**ABC** 關於 **P** 點的西姆松線（*Simson line*），如圖 **2-1-1**。

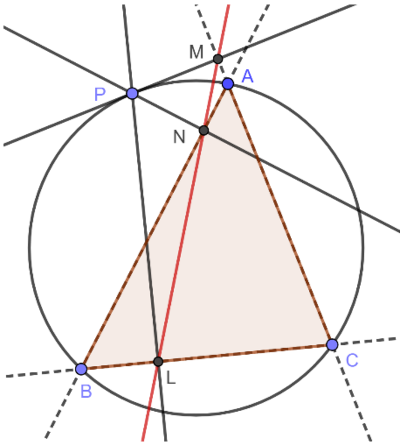


圖 2-1-1

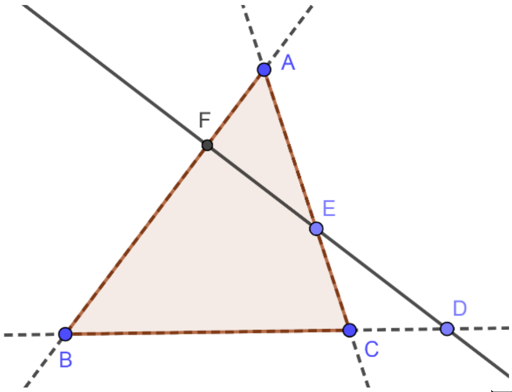


圖 2-2-1

二、孟氏定理 參[1]

孟氏定理：一直線分別截 ΔABC 的三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$或延長線於 D、E、F，

則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$，如圖 2-2-1。

三、反演 參[4]

(一)反演變換的定義

1. 平面上一半徑為 R 的定圓 O，記作圓$O(R)$，φ是去掉 O 點的平面到其自身的變換，如果對於平面上異於 O 點的任一點 P，其對應點P'在射線 OP 上，且$\overline{OP}\times\overline{OP'}=R^2$，那麼稱$\varphi$為關於圓$O(R)$的反演變換，記為$\varphi(O,R^2)$，其中，圓 O 叫做反演圓，圓心 O 叫做反演中心，R^2叫做反演冪。
2. 在反演變換$\varphi(O,R^2)$下，點 P 變為P'，圖形 F 變為F'，此時，P'叫做 P 的反點，圖形 F' 叫做圖形 F 的反形。
3. 在反演變換$\varphi(O,R^2)$下，異於 O 點的任一點 P，一定存在一個反點P'，而反演中心 O 在歐氏平面上不存在它的反點。事實上，由於$\overline{OP}\times\overline{OP'}=R^2\neq 0$，當 P 點充分接近點 O 時，它的反點$P'$遠離 O 點而去，因此可以認為，反演中心與無窮遠點相對應。

(二)反演變換的性質

1. 在反演變換下，反演圓是不變點的集合，過反演中心的直線是不變直線。與反演圓正交的圓是不變圖形。
2. 在反演變換下，不過反演中心的直線的反形是過反演中心的圓。

3. 在反演變換下，過反演中心的圓的反形是不過反演中心的直線。
4. 在反演變換$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{O},\mathbf{R}^2)$下，不過反演中心 **O** 的圓$\mathbf{C_1}(\mathbf{R_1})$的反形是不過中心的圓$\mathbf{C_2}(\mathbf{R_2})$。
5. 在反演變換下，兩條曲線在交點處交角保持不變，但方向相反(保角性)。
6. 如圖 **2-3-1**，設已給以 **O** 為反演中心，**R** 為反演半徑的反演變換$\boldsymbol{\varphi}$，**A**、**B** 是任意兩異於 **O** 及$\mathbf{O}_\infty$的點，且$\mathbf{A}' = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A})$，$\mathbf{B}' = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B})$，則 $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} = \frac{\mathbf{R}^2}{\overline{\mathbf{OA}}\times\overline{\mathbf{OB}}} \times \overline{\mathbf{AB}}$。

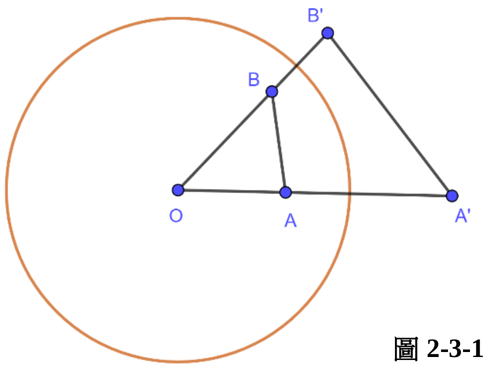


圖 **2-3-1**

四、廖偉恩。圓來如此–西姆松「圓」的研究。參**[5]**

本研究是針對西姆松「圓」的專門研究，只運用基本幾何的方法，深入探討西姆松「圓」的性質，發現了不少結果，而且範圍頗廣。但未深入探討西姆松點與三角形內各「心」之間的關係。

五、李微、賴永堯、謝昀臻。點點圓－西姆松線研究。參**[6]**

本研究對西姆松線進行相關研究，雖然這方面的研究已有不少成果，本作品的優點為作者將西姆松線重新做了一個更廣泛的定義，得出新的研究方向。

六、洪嘉佑、彭昇禾、汪俞宏。複數平面解析應用－西姆松線之交點軌跡性質探討。參**[7]**

本研究利用複數平面進行幾何的研究，探討西姆松線之交點軌跡的性質，引進一些新的想法，透過動點移動速度的不同產生擺線，並且進而得到一些分類的結果。

七、陳雲淇、李書帆、黃威瑀。多邊形與西姆松線的研究與深入探討。參**[8]**

本研究是探討如何把三邊形的西姆松線推廣至 **N** 邊形的西姆松線。作者們的想法主要是推廣 **2012** 年俄羅斯數學家 ***Olga Radko*** 的想法，並得到了 **N** 邊形的西姆松線之方程式。此外，也定義廣義的 **N** 尖瓣線，並推廣了 **3** 尖瓣線至 **N** 尖瓣線。

參、研究過程與方法

一、名詞定義

為了給出西姆松定理向圓內接多邊形的推廣，我們先給出 n 階垂足多邊形定義如下：

定義：如圖 3-1-1，由多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$所在的平面上一點 P，向多邊形的各邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$作垂線，設垂足為$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、⋯、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$，則稱多邊形$A_{(1)1}A_{(1)2}A_{(1)3}\cdots A_{(1)n-1}A_{(1)n}$為 P 點關於多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的一階垂足多邊形(簡稱垂足多邊形)。由 P 點再向多邊形$A_{(1)1}A_{(1)2}A_{(1)3}\cdots A_{(1)n-1}A_{(1)n}$各邊$\overline{A_{(1)1}A_{(1)2}}$、$\overline{A_{(1)2}A_{(1)3}}$、⋯、$\overline{A_{(1)n-1}A_{(1)n}}$、$\overline{A_{(1)n}A_{(1)1}}$作垂線，設垂足為$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、⋯、$A_{(2)n-1}$、$A_{(2)n}$，則稱多邊形$A_{(2)1}A_{(2)2}A_{(2)3}\cdots A_{(2)n-1}A_{(2)n}$為 P 點關於多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的二階垂足多邊形。依此類推，可定義 P 點關於多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的 k 階垂足多邊形為$A_{(k)1}A_{(k)2}A_{(k)3}\cdots A_{(k)n-1}A_{(k)n}$。

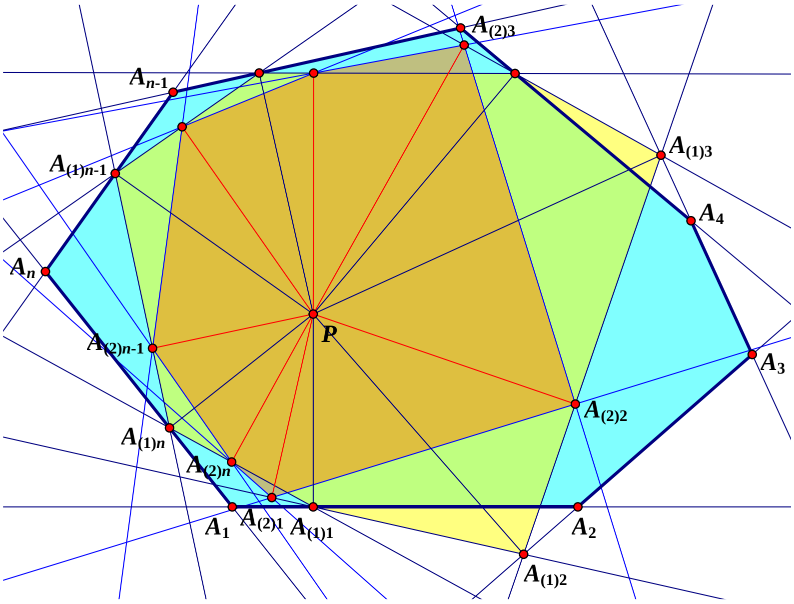


圖 3-1-1

二、研究過程

(一) 引理一 多邊形的孟氏定理

1. 四邊形孟氏定理

不論四邊形為凸四邊形、凹四邊形或蝶形四邊形，都會有以下的引理：

> 引理 3-2-1
>
> 設$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，一直線分別截此四邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_4A_1}$或延長線於B_1、B_2、B_3、B_4，則 $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4B_4}}{\overline{B_4A_1}}=1$。

[證明]

如圖 3-2-1、3-2-2、3-2-3，連接$\overleftrightarrow{A_1A_3}$，設交此直線於 C 點，所以此直線截$\Delta A_1A_2A_3$的邊 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$或延長線於B_1、B_2、C，且截$\Delta A_1A_3A_4$的邊 $\overline{A_1A_3}$、 $\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_4A_1}$或延長線於 C、B_3、B_4，從而 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{CA_1}}=1$ 且 $\frac{\overline{A_1C}}{\overline{CA_3}}\times\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{B_4A_1}}=1$，將兩式相乘，推知：$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{B_4A_1}}=1$，得證。

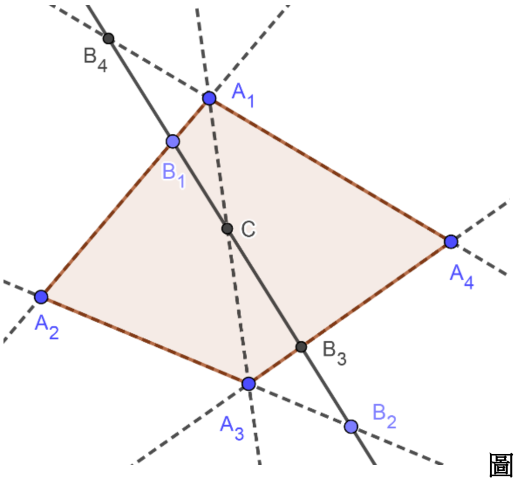


圖 3-2-1

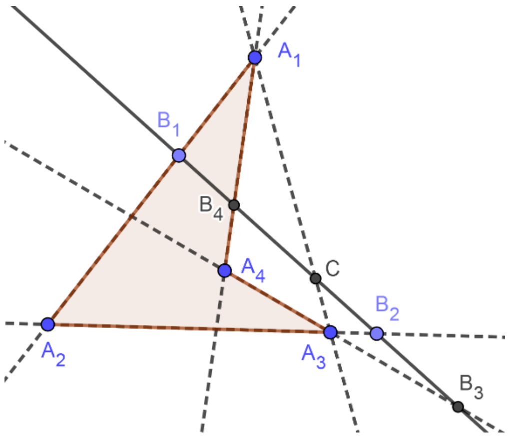


圖 3-2-2

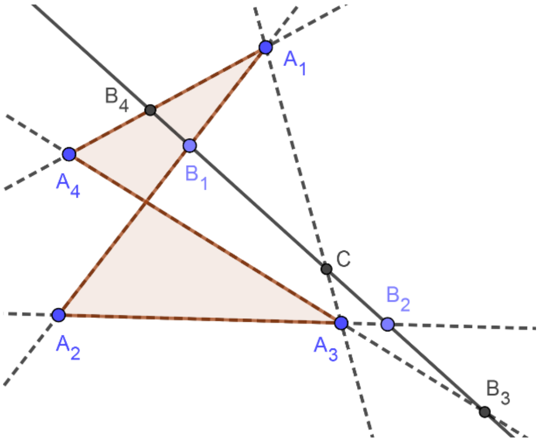


圖 3-2-3

2. 多邊形孟氏定理

不論多邊形為凸多邊形或凹多邊形，都會有以下的引理：

引理 3-2-2

設$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$為任意 n 邊形，一直線分別截此 n 邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$或延長線於$B_1$、$B_2$、…、$B_{n-1}$、$B_n$，則 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}B_{n-1}}}{\overline{B_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{B_nA_1}}=1$。

[證明]

(1)由前面證明可知，n = 4 時成立。

(2)如圖 3-2-4，設任意 k 邊形都有孟氏定理，且對任意 k+1 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$，一直線

分別截此 **k+1** 邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_kA_{k+1}}$、$\overline{A_{k+1}A_1}$或延長線於B_1、B_2、…、B_k、B_{k+1}，連接$\overleftrightarrow{A_1A_k}$，設交此直線於 **C** 點，所以此直線截 **k** 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k$的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_{k-1}A_k}$、$\overline{A_kA_1}$或延長線於$B_1$、$B_2$、…、$B_{k-1}$、$C$，且截$\Delta A_1A_kA_{k+1}$的邊$\overline{A_1A_k}$、$\overline{A_kA_{k+1}}$、$\overline{A_{k+1}A_1}$或延長線於 **C**、$B_k$、$B_{k+1}$，

從而 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-1}B_{k-1}}}{\overline{B_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kC}}{\overline{CA_1}}=1$且 $\frac{\overline{A_1C}}{\overline{CA_k}}\times\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}B_{k+1}}}{\overline{B_{k+1}A_1}}=1$，將兩式相乘

，推知：$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}B_{k+1}}}{\overline{B_{k+1}A_1}}=1$，從而任意 **k+1** 邊形也有孟氏定理。

如圖 **3-2-5**，由數學歸納法知：對任意 $n(n\geq 4)$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$，一直線分別截 **n** 邊形的邊 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$或延長線於B_1、B_2、…、B_{n-1}、B_n，

則 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}B_{n-1}}}{\overline{A_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{B_nA_1}}=1$，得證。

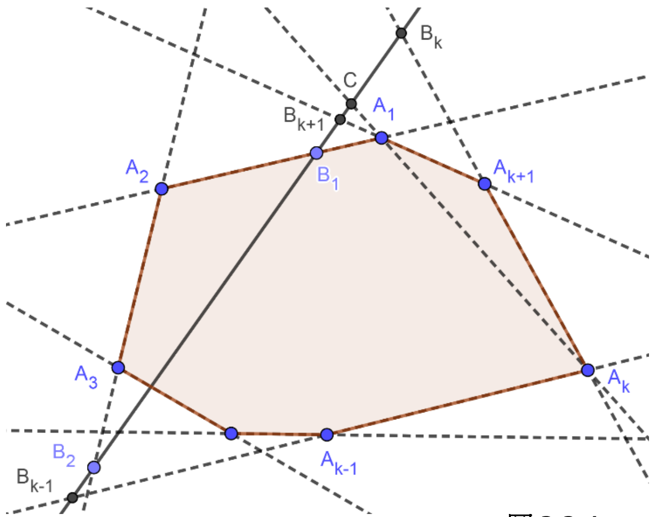


圖 3-2-4

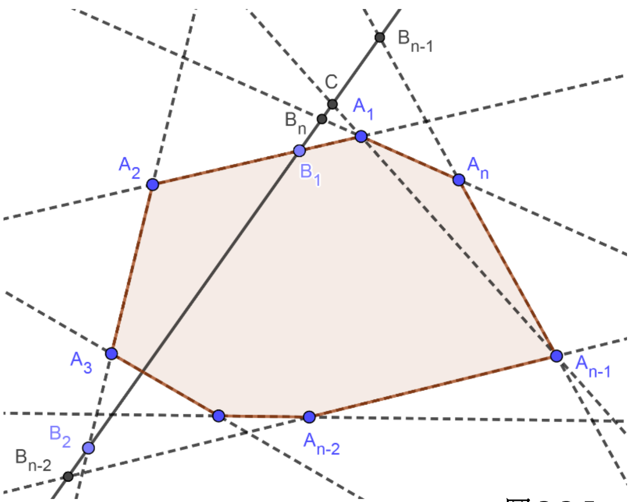


圖 3-2-5

(二)引理二 圓內接多邊形的西姆松線定理

1. 圓內接四邊形的西姆松線定理

引理 **3-2-3**

外接圓上**P**點關於內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的二階垂足四邊形的四個頂點$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$會在同一直線上。這條直線叫做 **P** 點關於圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的西姆松線，可得$\frac{\overline{A_{(1)1}A_{(2)1}}}{\overline{A_{(2)1}A_{(1)2}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_{(2)2}}}{\overline{A_{(2)2}A_{(1)3}}}\times\frac{\overline{A_{(1)3}A_{(2)3}}}{\overline{A_{(2)3}A_{(1)4}}}\times\frac{\overline{A_{(1)4}A_{(2)4}}}{\overline{A_{(2)4}A_{(1)1}}}=1$。

[證明]

如圖 3-2-6，不失一般性，考慮 P 點為$\widehat{A_1A_2}$上一點，連接$\overleftrightarrow{A_1A_3}$，過 P 點作$\overleftrightarrow{A_1A_3}$的垂線，設垂足為$Q_1$點，由題設知：P 點關於$\Delta A_1A_2A_3$的西姆松線為$\overleftrightarrow{A_{(1)2}A_{(1)1}Q_1}$，同樣，P 點關於$\Delta A_1A_3A_4$的西姆松線為$\overleftrightarrow{A_{(1)3}Q_1A_{(1)4}}$。因為$\angle A_1A_{(1)4}P = \angle A_1Q_1P = \angle A_1A_{(1)1}P = 90°$，所以 P 點在$\Delta Q_1A_{(1)4}A_{(1)1}$的外接圓上，由西姆松定理知：P 點在$\Delta Q_1A_{(1)4}A_{(1)1}$三邊的垂足$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$、$A_{(2)1}$共線。同理可證，P 點在$\Delta Q_2A_{(1)1}A_{(1)2}$三邊的垂足$A_{(2)4}$、$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$也共線，故$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$四點共線。

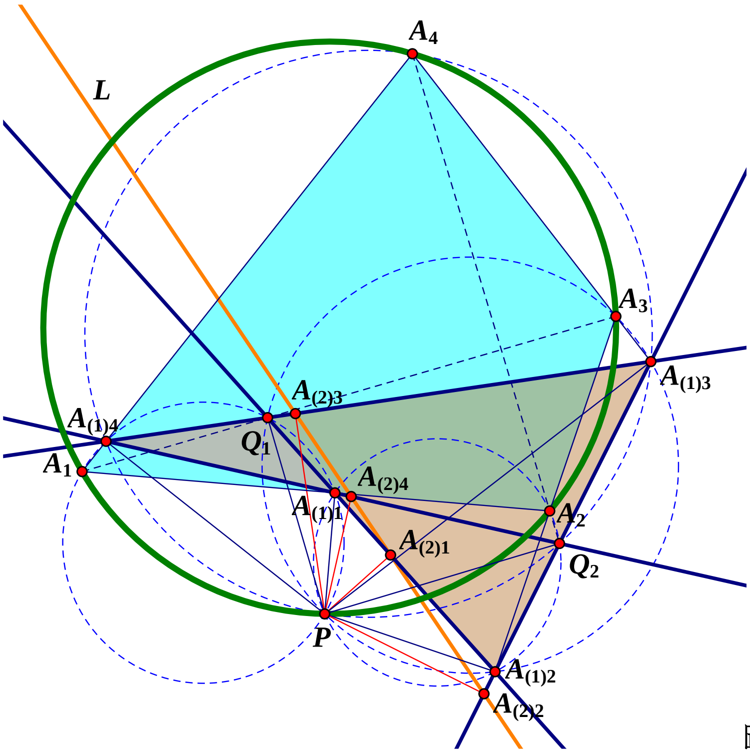


圖 3-2-6

[討論]

由上述證明過程中可以發現，P 點關於$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、$\Delta A_3A_4A_1$、$\Delta A_4A_1A_2$的西姆松線$\overleftrightarrow{Q_1A_{(1)1}A_{(1)2}}$、$\overleftrightarrow{A_{(1)2}Q_2A_{(1)3}}$、$\overleftrightarrow{A_{(1)3}Q_1A_{(1)4}}$、$\overleftrightarrow{A_{(1)4}A_{(1)1}Q_2}$正好包絡出圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的一階垂足四邊形$A_{(1)1}A_{(1)2}A_{(1)3}A_{(1)4}$，而 P 點關於$\Delta Q_1A_{(1)4}A_{(1)1}$、$\Delta Q_1A_{(1)2}A_{(1)3}$、$\Delta Q_2A_{(1)1}A_{(1)2}$、$\Delta Q_2A_{(1)3}A_{(1)4}$的西姆松線為$\overleftrightarrow{A_{(2)3}A_{(2)4}A_{(2)1}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)1}A_{(2)2}A_{(2)3}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)4}A_{(2)1}A_{(2)2}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)2}A_{(2)3}A_{(2)4}}$，從而圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的二階垂足四邊形$A_{(2)1}A_{(2)2}A_{(2)3}A_{(2)4}$的四個頂點$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$在同一直線上。

2. 圓內接五邊形的西姆松線定理

> 引理 3-2-4
>
> 外接圓上P點關於內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的三階垂足五邊形的五個頂點$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(3)3}$、$A_{(3)4}$、$A_{(3)5}$會在同一直線上。這條直線叫做 P 點關於圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的西姆松線，可得 $\frac{\overline{A_{(2)1}A_{(3)1}}}{\overline{A_{(3)1}A_{(2)2}}}\times\frac{\overline{A_{(2)2}A_{(3)2}}}{\overline{A_{(3)2}A_{(2)3}}}\times\frac{\overline{A_{(2)3}A_{(3)3}}}{\overline{A_{(3)3}A_{(2)4}}}\times\frac{\overline{A_{(2)4}A_{(3)4}}}{\overline{A_{(3)4}A_{(2)5}}}\times\frac{\overline{A_{(2)5}A_{(3)5}}}{\overline{A_{(3)5}A_{(2)1}}}=1$。

[證明]

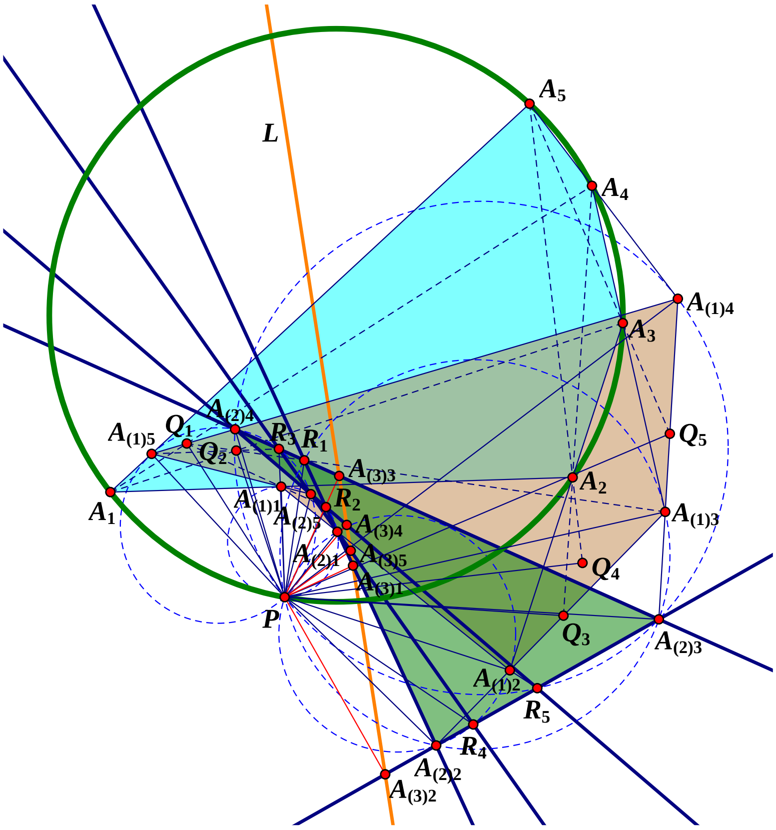


圖 3-2-7

(1)如圖 3-2-7，不失一般性，考慮 P 點為$\widehat{A_1A_2}$上一點，連接$\overleftrightarrow{A_1A_4}$，過 P 點作$\overleftrightarrow{A_1A_4}$的垂線，設垂足為$Q_1$點，由題設知：P 點關於圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的垂足四邊形為四邊形$Q_1A_{(1)1}A_{(1)2}A_{(1)3}$，再分別過 P 點作$\overleftrightarrow{A_{(1)3}Q_1}$、$\overleftrightarrow{A_{(1)1}Q_1}$的垂線，設垂足分別為$R_1$、$R_2$點，由引理 3-2-3 可知：P 點在四邊形$Q_1A_{(1)1}A_{(1)2}A_{(1)3}$四邊的垂足$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、$R_1$、$R_2$共線。

(2)連接$\overleftrightarrow{A_1A_3}$，過 P 點作$\overleftrightarrow{A_1A_3}$的垂線，設垂足為$Q_2$點，由題設知：P 點關於圓內接四邊形$A_3A_4A_5A_1$的垂足四邊形為四邊形$Q_2A_{(1)3}A_{(1)4}A_{(1)5}$，過 P 點作$\overleftrightarrow{A_{(1)5}Q_2}$的垂線，設垂足為$R_3$點，又由西姆松定理知：P 點在$\Delta A_1A_3A_4$三邊的垂足$Q_1$、$Q_2$、$A_{(1)3}$共線，

所以過 P 點作$\overleftrightarrow{A_{(1)3}Q_2}$的垂線，垂足也是$R_1$點，由引理 3-2-3 可知：P 點在四邊形$Q_2A_{(1)3}A_{(1)4}A_{(1)5}$四邊的垂足$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$、$R_1$、$R_3$共線。

(3)因為$\angle A_{(1)3}A_{(2)2}P=\angle A_{(1)3}A_{(2)3}P=\angle A_{(1)3}R_1P=90°$，所以 P 點在$\Delta R_1A_{(2)2}A_{(2)3}$的外接圓上，由西姆松定理知：P 點在$\Delta R_1A_{(2)2}A_{(2)3}$三邊的垂足$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(3)3}$共線。同理可證，P 點在$\Delta R_4A_{(2)1}A_{(2)2}$三邊的垂足$A_{(3)5}$、$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$也共線；P 點在$\Delta R_3A_{(2)4}A_{(2)5}$三邊的垂足$A_{(3)3}$、$A_{(3)4}$、$A_{(3)5}$也共線，故$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(3)3}$、$A_{(3)4}$、$A_{(3)5}$五點共線。

[討論]

由上述證明過程中可以發現，P 點關於四邊形$A_1A_2A_3A_4$、$A_2A_3A_4A_5$、$A_3A_4A_5A_1$、$A_4A_5A_1A_2$、$A_5A_1A_2A_3$的西姆松線$\overleftrightarrow{R_1R_2A_{(2)1}A_{(2)2}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)2}R_4R_5A_{(2)3}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)3}R_1R_3A_{(2)4}}$、$\overleftrightarrow{A_{(2)4}A_{(2)5}R_2R_5}$、$\overleftrightarrow{R_3A_{(2)5}A_{(2)1}R_4}$正好包絡出圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的二階垂足四邊形$A_{(2)1}A_{(2)2}A_{(2)3}A_{(2)4}A_{(2)5}$，而 P 點關於$\Delta R_1A_{(2)2}A_{(2)3}$、$\Delta R_5A_{(2)3}A_{(2)4}$、$\Delta R_3A_{(2)4}A_{(2)5}$、$\Delta R_2A_{(2)5}A_{(2)1}$、$\Delta R_4A_{(2)1}A_{(2)2}$的西姆松線為$\overleftrightarrow{A_{(3)1}A_{(3)2}A_{(3)3}}$、$\overleftrightarrow{A_{(3)2}A_{(3)3}A_{(3)4}}$、$\overleftrightarrow{A_{(3)3}A_{(3)4}A_{(3)5}}$、$\overleftrightarrow{A_{(3)4}A_{(3)5}A_{(3)1}}$、$\overleftrightarrow{A_{(3)5}A_{(3)1}A_{(3)2}}$，從而圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的三階垂足五邊形$A_{(3)1}A_{(3)2}A_{(3)3}A_{(3)4}A_{(3)5}$的五個頂點$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(3)3}$、$A_{(3)4}$、$A_{(3)5}$在同一直線上。

3. 圓內接多邊形的西姆松線定理

引理 **3-2-5**

外接圓上P點關於內接 **n** 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的**(n-2)**階垂足 **n** 邊形的 **n** 個頂點$A_{(n-2)1}$、$A_{(n-2)2}$、⋯、$A_{(n-2)n-1}$、$A_{(n-2)n}$會在同一直線上。這條直線叫做 **P** 點關於圓內接 **n** 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的西姆松線，可得

$$\frac{\overline{A_{(n-3)1}A_{(n-2)1}}}{\overline{A_{(n-2)1}A_{(n-3)2}}}\times\frac{\overline{A_{(n-3)2}A_{(n-2)2}}}{\overline{A_{(n-2)2}A_{(n-3)3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(n-3)n-1}A_{(n-2)n-1}}}{\overline{A_{(n-2)n-1}A_{(n-3)n}}}\times\frac{\overline{A_{(n-3)n}A_{(n-2)n}}}{\overline{A_{(n-2)n}A_{(n-3)1}}}=1。$$

[證明]

(1)由前面證明可知，**n = 4**、**5** 時皆成立。

(2)設任意圓內接 **k** 邊形都有西姆松線定理，且對任意圓內接 **k+1** 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$，每次取 **k** 個頂點形成 **k+1** 個圓內接 **k** 邊形，所以 **P** 點對這 **k+1** 個圓內接 **k** 邊形作 **k-2** 次

垂足，得到 k+1 條圓內接 k 邊形的西姆松線。由 P 點對這 k+1 條西姆松線作垂線，得到 k+1 個垂足。依序選取這 k+1 條西姆松線中的三條，會得到 k+1 個由三條西姆松線所圍成的三角形 S，仿照圓內接四邊形和圓內接五邊形的證明方法，可得 P 點會和 S 的三頂點共圓，由西姆松定理知：由 P 點對 S 的三邊所作的三垂足會共線，且此三垂足必為上述 k+1 個垂足中的三點，從而 k+1 個垂足也會共線，所以任意圓內接 k+1 邊形也有西姆松線定理。如圖 3-2-8，由數學歸納法可知：P 點與圓內接多邊形$\mathbf{A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n}$的 $\mathbf{n(n \geq 4)}$個頂點共圓時，則 P 點關於 n 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n}$的 n-2 階垂足 n 邊形的 n 個頂點$\mathbf{A_{(n-2)1}}$、$\mathbf{A_{(n-2)2}}$、⋯、$\mathbf{A_{(n-2)n-1}}$、$\mathbf{A_{(n-2)n}}$在同一直線上。

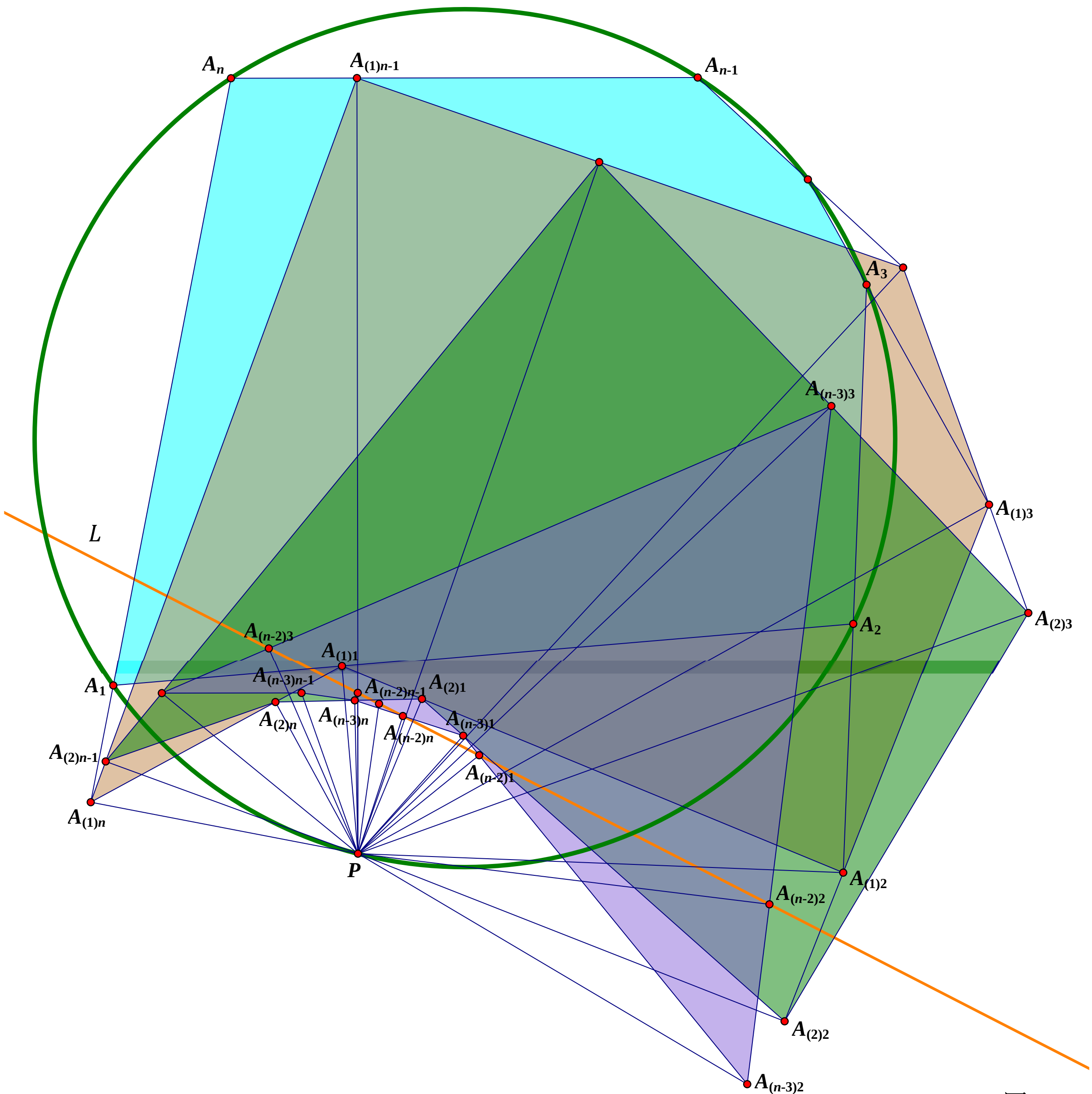


圖 3-2-8

如果只考慮圓內接多邊形的外接圓上一點P對多邊形各邊所在的直線作垂足，雖然這些垂足點並沒有共線但多邊形的頂點共圓，各邊截線段比值的連乘積卻會等於 **1**，而有以下的垂足點定理。

(三) 圓內接多邊形的垂足點定理

定理 3-2-1

設外接圓上P點關於內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足為$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、…、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$，則 $\frac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\frac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}A_{(1)n-1}}}{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}}=\mathbf{1}$。

[證明]

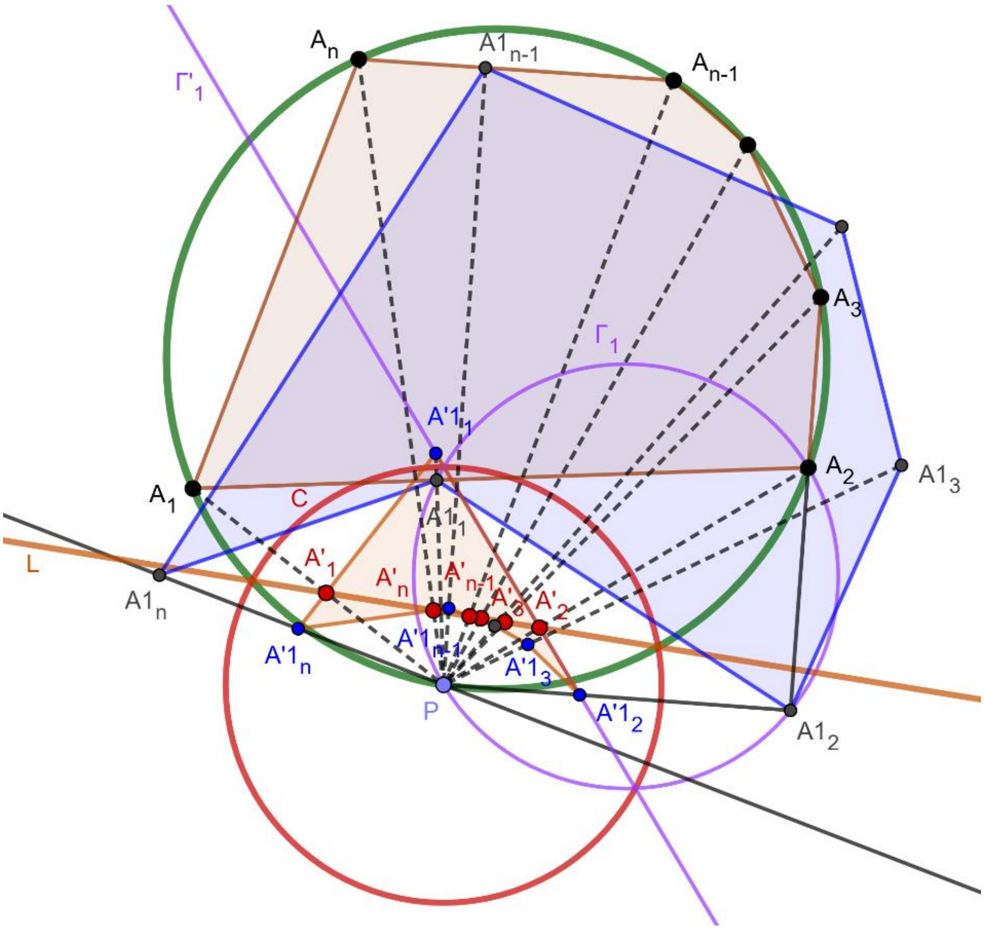


圖 3-2-9

(1)如圖 **3-2-9**，以 **P** 點為圓心，作半徑為 **r** 的一圓 **C**。再以圓 **C** 為反演圓進行反演變換。由於圓 **O** 經過反演中心 **P**，透過反演變換會變成不過 **P** 點的直線 **L**。再將圓上五點A_1、A_2、A_3、…、A_{n-1}、A_n透過反演變換變成A'_1、A'_2、A'_3、…、A'_{n-1}、A'_n，則這 **n** 個點會在 **L** 上。再將點 $A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、$A_{(1)3}$、…、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$透過反演變換變成 $A'_{(1)1}$、$A'_{(1)2}$、$A'_{(1)3}$、…、$A'_{(1)n-1}$、$A'_{(1)n}$。

(2)接著探討點A'_2、A'_3、⋯、A'_{n-1}、A'_n、A'_1和直線 $\overleftrightarrow{A'_{(1)1}A'_{(1)2}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(1)2}A'_{(1)3}}$、⋯、$\overleftrightarrow{A'_{(1)n-2}A'_{(1)n-1}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(1)n-1}A'_{(1)n}}$及$\overleftrightarrow{A'_{(1)n}A'_{(1)1}}$的關係。如圖 3-2-9，以點$A'_2$、$A'_{(1)1}$及$A'_{(1)2}$為例，其反演點分別是$A_2$、$A_{(1)1}$及$A_{(1)2}$。因為點$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$分別是過 P 點對於直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$的垂足，所以$\angle PA_{(1)1}A_2 = \angle PA_{(1)2}A_2 = 90°$，從而 P、$A_{(1)1}$、$A_2$、$A_{(1)2}$四點共圓，設此圓為$\Gamma_1$。

(3)Γ_1是過反演中心 P 點的圓，設經過反演變換變成不過反演中心的直線 Γ'_1。其中A_2、$A_{(1)1}$及$A_{(1)2}$的反演點A'_2、$A'_{(1)1}$及$A'_{(1)2}$都在Γ'_1上，故A'_2、$A'_{(1)1}$、$A'_{(1)2}$三點共線；即點A'_2在直線$\overleftrightarrow{A'_{(1)1}A'_{(1)2}}$上。同理，點$A'_3$、⋯、$A'_{n-1}$、$A'_n$、$A'_1$分別會在直線$\overleftrightarrow{A'_{(1)2}A'_{(1)3}}$、⋯、$\overleftrightarrow{A'_{(1)n-2}A'_{(1)n-1}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(1)n-1}A'_{(1)n}}$及$\overleftrightarrow{A'_{(1)n}A'_{(1)1}}$上。

故由引理 3-2-3 得 $\dfrac{\overline{A'_{(1)1}A'_2}}{\overline{A'_2A'_{(1)2}}}\times\dfrac{\overline{A'_{(1)2}A'_3}}{\overline{A'_3A'_{(1)3}}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A'_{(1)n-1}A'_n}}{\overline{A'_nA'_{(1)n}}}\times\dfrac{\overline{A'_{(1)n}A'_1}}{\overline{A'_1A'_{(1)1}}} = 1$。

(4)最後利用反演線段的性質：$\overline{A'_{(1)i}A'_j} = \overline{A_{(1)i}A_j}\times\dfrac{r^2}{\overline{PA_{(1)i}}\times\overline{PA_j}}$，

於是 $\dfrac{\overline{A'_{(1)1}A'_2}}{\overline{A'_2A'_{(1)2}}}\times\dfrac{\overline{A'_{(1)2}A'_3}}{\overline{A'_3A'_{(1)3}}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A'_{(1)n-1}A'_n}}{\overline{A'_nA'_{(1)n}}}\times\dfrac{\overline{A'_{(1)n}A'_1}}{\overline{A'_1A'_{(1)1}}} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_{(1)1}A_2}\times\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)1}}\times\overline{PA_2}}}{\overline{A_2A_{(1)2}}\times\frac{r^2}{\overline{PA_2}\times\overline{PA_{(1)2}}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_3}\times\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)2}}\times\overline{PA_3}}}{\overline{A_3A_{(1)3}}\times\frac{r^2}{\overline{PA_3}\times\overline{PA_{(1)3}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(1)n-1}A_n}\times\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)n-1}}\times\overline{PA_n}}}{\overline{A_nA_{(1)n}}\times\frac{r^2}{\overline{PA_n}\times\overline{PA_{(1)n}}}}\times\frac{\overline{A_{(1)n}A_1}\times\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)n}}\times\overline{PA_1}}}{\overline{A_1A_{(1)1}}\times\frac{r^2}{\overline{PA_1}\times\overline{PA_{(1)1}}}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_{(1)1}A_2}}{\overline{A_2A_{(1)2}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_3}}{\overline{A_3A_{(1)3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}{\overline{A_nA_{(1)n}}}\times\frac{\overline{A_{(1)n}A_1}}{\overline{A_1A_{(1)1}}}\times\frac{\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)1}}\times\overline{PA_2}}}{\frac{r^2}{\overline{PA_2}\times\overline{PA_{(1)2}}}}\times\frac{\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)2}}\times\overline{PA_3}}}{\frac{r^2}{\overline{PA_3}\times\overline{PA_{(1)3}}}}\times\cdots$$

$$\times\frac{\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)n-1}}\times\overline{PA_n}}}{\frac{r^2}{\overline{PA_n}\times\overline{PA_{(1)n}}}}\times\frac{\frac{r^2}{\overline{PA_{(1)n}}\times\overline{PA_1}}}{\frac{r^2}{\overline{PA_1}\times\overline{PA_{(1)1}}}} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\overline{A_{(1)1}A_2}}{\overline{A_2A_{(1)2}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_3}}{\overline{A_3A_{(1)3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}{\overline{A_nA_{(1)n}}}\times\frac{\overline{A_{(1)n}A_1}}{\overline{A_1A_{(1)1}}} = 1$$

從而 $\dfrac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n\text{-}1}A_{(1)n\text{-}1}}}{\overline{A_{(1)n\text{-}1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}} = \dfrac{1}{\frac{\overline{A_{(1)1}A_2}}{\overline{A_2A_{(1)2}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_3}}{\overline{A_3A_{(1)3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}{\overline{A_nA_{(1)n}}}\times\frac{\overline{A_{(1)n}A_1}}{\overline{A_1A_{(1)1}}}} = 1$。

(四) 圓內接多邊形的西姆松線夾角定理

1. 三角形的西姆松線夾角定理 (文獻[3])

> 定理 3-2-2
>
> 設外接圓上兩點**P**、**P′**點關於內接三角形$\Delta A_1A_2A_3$的西姆松線為**L**、**L′**，則**L**、**L′**的夾角正好為**P**、**P′**兩點所對的圓周角。

[證明]

為了方便討論，以下證明均採用有向角的觀點，即$\angle\mathbf{ABC}$表示$\overrightarrow{\mathbf{BA}}$轉向$\overrightarrow{\mathbf{BC}}$的有向角。

(I)若$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$同在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$、$\widehat{\mathbf{A_2A_3}}$、$\widehat{\mathbf{A_3A_1}}$中一弧

如圖 **3-2-10**，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$同在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$上，因為點$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$分別是過$\mathbf{P}$點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$的垂足，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)1}A_2} = \angle\mathbf{PA_{(1)2}A_2} = 90°$，從而$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$四點共圓。設$\angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，則$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_2P} = \angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，所以$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = \boldsymbol{\alpha}$，推得$\angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}A_{(1)1}} = \angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}P} - \angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = 90° - \boldsymbol{\alpha}$。另外$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_1}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_3}$四點共圓，從而$\angle\mathbf{A_1A_3P} = \boldsymbol{\alpha}$。同理可證：$\mathbf{P}'$、$\mathbf{A'_{(1)1}}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A'_{(1)2}}$四點共圓，

設$\angle\mathbf{A_1A_2P'} = \boldsymbol{\beta}$，且$\mathbf{A'_{(1)1}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$上，則$\angle\mathbf{A'_{(1)1}A_2P'} = \angle\mathbf{A_1A_2P'} = \boldsymbol{\beta}$，

所以$\angle\mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)2}P'} = \boldsymbol{\beta}$，推得$\angle\mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)2}A_{(1)2}} = \angle\mathbf{P'A'_{(1)2}A_{(1)2}} + \angle\mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)2}P'}$

$= 90° + \boldsymbol{\beta}$。另外$\mathbf{P}'$、$\mathbf{A_1}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_3}$四點共圓，從而$\angle\mathbf{A_1A_3P'} = \boldsymbol{\beta}$。

設$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$兩點關於圓內接$\Delta\mathbf{A_1A_2A_3}$的西姆松線$\mathbf{L}$、$\mathbf{L}'$相交於 **M** 點，在$\Delta\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}}$中，

$$\begin{aligned}\angle\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}} &= 180° - \left(\angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}A_{(1)1}} + \angle\mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)2}A_{(1)2}}\right) \\ &= 180° - (180° - \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}，\end{aligned}$$

因此$\angle\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}} = \angle\mathbf{A_1A_3P} - \angle\mathbf{A_1A_3P'} = \angle\mathbf{P'A_3P}$，故兩西姆松線 $\mathbf{L}$、$\mathbf{L}'$的其一夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$兩點所對的圓周角。

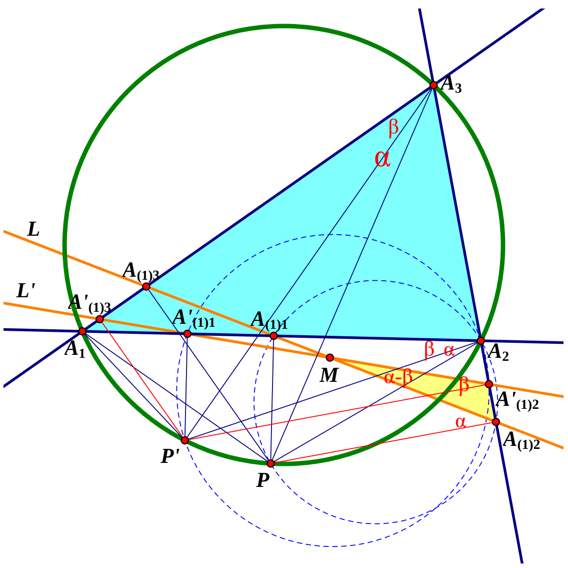


圖 **3-2-10**

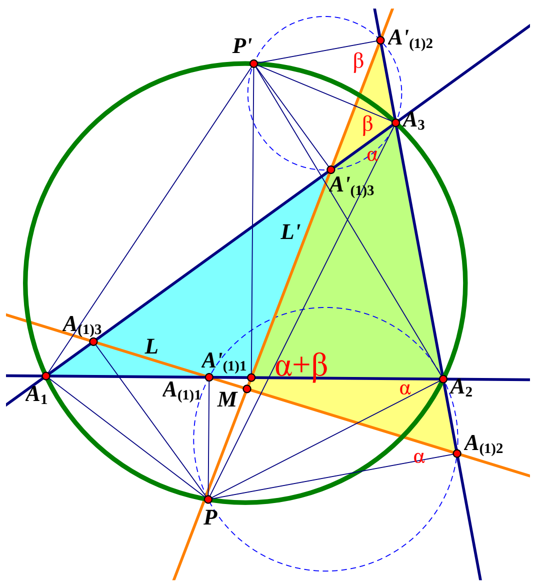


圖 **3-2-11**

(II)若$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$分別在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$、$\widehat{\mathbf{A_2A_3}}$、$\widehat{\mathbf{A_3A_1}}$中二弧

如圖 **3-2-11**，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$、$\mathbf{P}'$分別在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$、$\widehat{\mathbf{A_1A_3}}$上，因為點$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$分別

是過$\mathbf{P}$點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$的垂足，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)1}A_2} = \angle\mathbf{PA_{(1)2}A_2} = \mathbf{90°}$，

從而 $\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$四點共圓。設$\angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，則$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_2P} = \angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，

所以$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = \boldsymbol{\alpha}$，推得$\angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}A_{(1)1}} = \angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}P} - \angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = \mathbf{90°} - \boldsymbol{\alpha}$。

另外$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_1}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_3}$四點共圓，從而$\angle\mathbf{A_1A_3P} = \boldsymbol{\alpha}$。同理可證：$\mathbf{P'}$、$\mathbf{A'_{(1)2}}$、$\mathbf{A_3}$、$\mathbf{A'_{(1)3}}$四點共圓，設$\angle\mathbf{P'A_3A_1} = \boldsymbol{\beta}$，且$\mathbf{A'_{(1)3}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}$上，則$\angle\mathbf{P'A_3A'_{(1)3}} = \angle\mathbf{P'A_3A_1} = \boldsymbol{\beta}$，所以

$\angle\mathbf{P'A'_{(1)2}A'_{(1)3}} = \boldsymbol{\beta}$，推得$\angle\mathbf{A'_{(1)3}A'_{(1)2}A_{(1)2}} = \angle\mathbf{P'A'_{(1)2}A_{(1)2}} - \angle\mathbf{P'A'_{(1)2}A'_{(1)3}} = \mathbf{90°} - \boldsymbol{\beta}$。

設$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點關於圓內接$\Delta\mathbf{A_1A_2A_3}$的西姆松線$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$相交於 **M** 點，

在$\Delta\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}}$中，$\angle\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}} = \mathbf{180°} - \left(\angle\mathbf{A'_{(1)2}A_{(1)2}A_{(1)1}} + \angle\mathbf{A'_{(1)3}A'_{(1)2}A_{(1)2}}\right)$

$= \mathbf{180°} - (\mathbf{180°} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$，因此$\angle\mathbf{A_{(1)2}MA'_{(1)2}} = \angle\mathbf{A_1A_3P} + \angle\mathbf{P'A_3A_1} = \angle\mathbf{P'A_3P}$，

故兩西姆松線 $\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$的其一夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點所對的圓周角。

[討論]

由上述**(I) (II)**證明可知，雖然$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點在外接圓上位置改變了，但若從有向角的觀點來看，其實證明是一致的，因此接下來的證明我們只考慮$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$分別在不同弧的情形。

在證明圓內接四邊形、五邊形的西姆松線夾角定理時我們遇到了瓶頸，後來發現西姆松線所截的垂足多邊形之邊線正好是上一層的西姆松線，利用上一層的西姆松線的夾角和四點共圓的性質，證明才得以順利展開。

2. 圓內接四邊形的西姆松線夾角定理

> 定理 **3-2-3**
>
> 設外接圓上兩點$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$點關於內接四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$的西姆松線為$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$，則$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$的夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點所對的圓周角的 **2** 倍。

[證明]

(1)如圖 **3-2-12**，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$分別在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$、$\widehat{\mathbf{A_1A_4}}$上，因為點$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$分別是過$\mathbf{P}$點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$的垂足，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)1}A_2} = \angle\mathbf{PA_{(1)2}A_2} = \mathbf{90°}$，

從而$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$四點共圓。設$\angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，則$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_2P} = \angle\mathbf{A_1A_2P} = \boldsymbol{\alpha}$，

所以$\angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = \boldsymbol{\alpha}$。且$\mathbf{A_{(2)1}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}}}$上，則$\angle\mathbf{A_{(2)1}A_{(1)2}P} = \angle\mathbf{A_{(1)1}A_{(1)2}P} = \boldsymbol{\alpha}$，

又$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(2)1}}$、$\mathbf{A_{(2)2}}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$四點共圓，從而$\angle\mathbf{A_{(2)1}A_{(2)2}P} = \boldsymbol{\alpha}$。另外$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_1}$、$\mathbf{A_2}$、$\mathbf{A_3}$四點

共圓，從而$\angle A_1A_3P=\alpha$。同理可證：P'、$A'_{(1)3}$、A_4、$A'_{(1)4}$四點共圓，

設$\angle P'A_4A_1=\beta$，且$A'_{(1)4}$在$\overleftrightarrow{A_1A_4}$上，則$\angle P'A_4A'_{(1)4}=\angle P'A_4A_1=\beta$，所以

$\angle P'A'_{(1)3}A'_{(1)4}=\beta$。且$A'_{(2)3}$在$\overleftrightarrow{A'_{(1)3}A'_{(1)4}}$上，則$\angle P'A'_{(1)3}A'_{(2)3}=\angle P'A'_{(1)3}A'_{(1)4}=\beta$，

又P'、$A'_{(2)2}$、$A'_{(1)3}$、$A'_{(2)3}$四點共圓，從而$\angle P'A'_{(2)2}A'_{(2)3}=\beta$。另外$P'$、$A_1$、$A_3$、$A_4$

四點共圓，從而$\angle P'A_3A_1=\beta$。

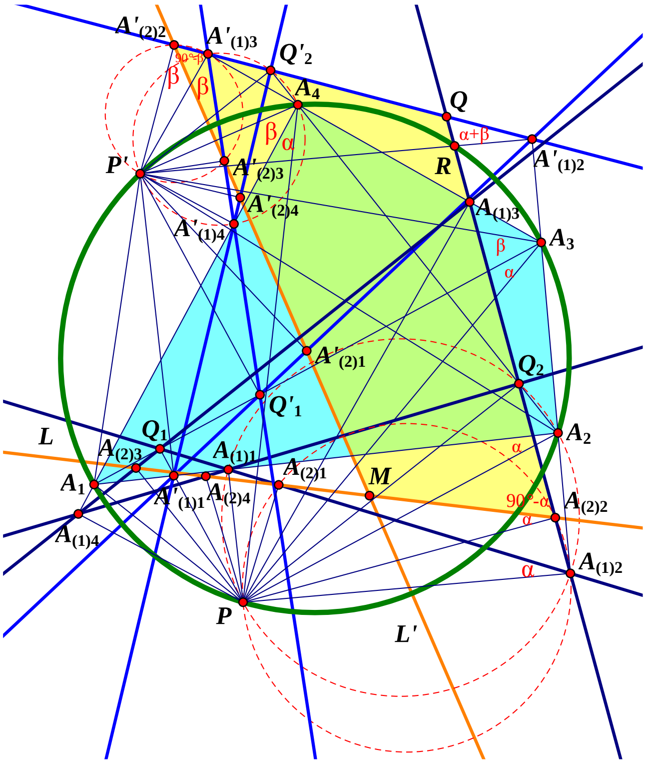


圖 3-2-12

(2)設P、P'兩點關於圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的西姆松線L、L'相交於 M 點，$\overleftrightarrow{A_{(1)2}A_{(1)3}}$與

$\overleftrightarrow{A'_{(1)2}A'_{(1)3}}$相交於 Q 點，因為$\overleftrightarrow{A_{(1)2}A_{(1)3}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(1)2}A'_{(1)3}}$分別為$P$、$P'$兩點關於圓內接

$\Delta A_2A_3A_4$的西姆松線，所以$\angle A_{(1)2}QA'_{(1)2}=\angle P'A_3P=\angle P'A_3A_1+\angle A_1A_3P=\alpha+\beta$。

在四邊形$A_{(2)2}MA'_{(2)2}Q$中，

因為 $\angle QA_{(2)2}M=\angle QA_{(2)2}P-\angle MA_{(2)2}P=\angle A_{(1)3}A_{(2)2}P-\angle A_{(2)1}A_{(2)2}P=90^\circ-\alpha$，

$\angle MA'_{(2)2}Q=\angle P'A'_{(2)2}Q-\angle P'A'_{(2)2}M=\angle P'A'_{(2)2}A'_{(1)3}-\angle P'A'_{(2)2}A'_{(2)3}=90^\circ-\beta$，

$\angle A'_{(2)2}QA_{(2)2}=180^\circ-\angle A_{(1)2}QA'_{(1)2}=180^\circ-(\alpha+\beta)$，

所以 $\angle A_{(2)2}MA'_{(2)2}=360^\circ-\left(\angle QA_{(2)2}M+\angle MA'_{(2)2}Q+\angle A'_{(2)2}QA_{(2)2}\right)$

$=360^\circ-[(90^\circ-\alpha)+(90^\circ-\beta)+180^\circ-(\alpha+\beta)]$

$=360^\circ-[360^\circ-2(\alpha+\beta)]=2(\alpha+\beta)=2\angle P'A_3P$。

故兩西姆松線L、L'的其一夾角正好為P、P'兩點所對的圓周角的 2 倍。

3. 圓內接五邊形的西姆松線夾角定理

> 定理 3-2-4
>
> 設外接圓上兩點$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$點關於內接五邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4A_5}$的西姆松線為$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$，則$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$的夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點所對的圓周角的 3 倍。

[證明]

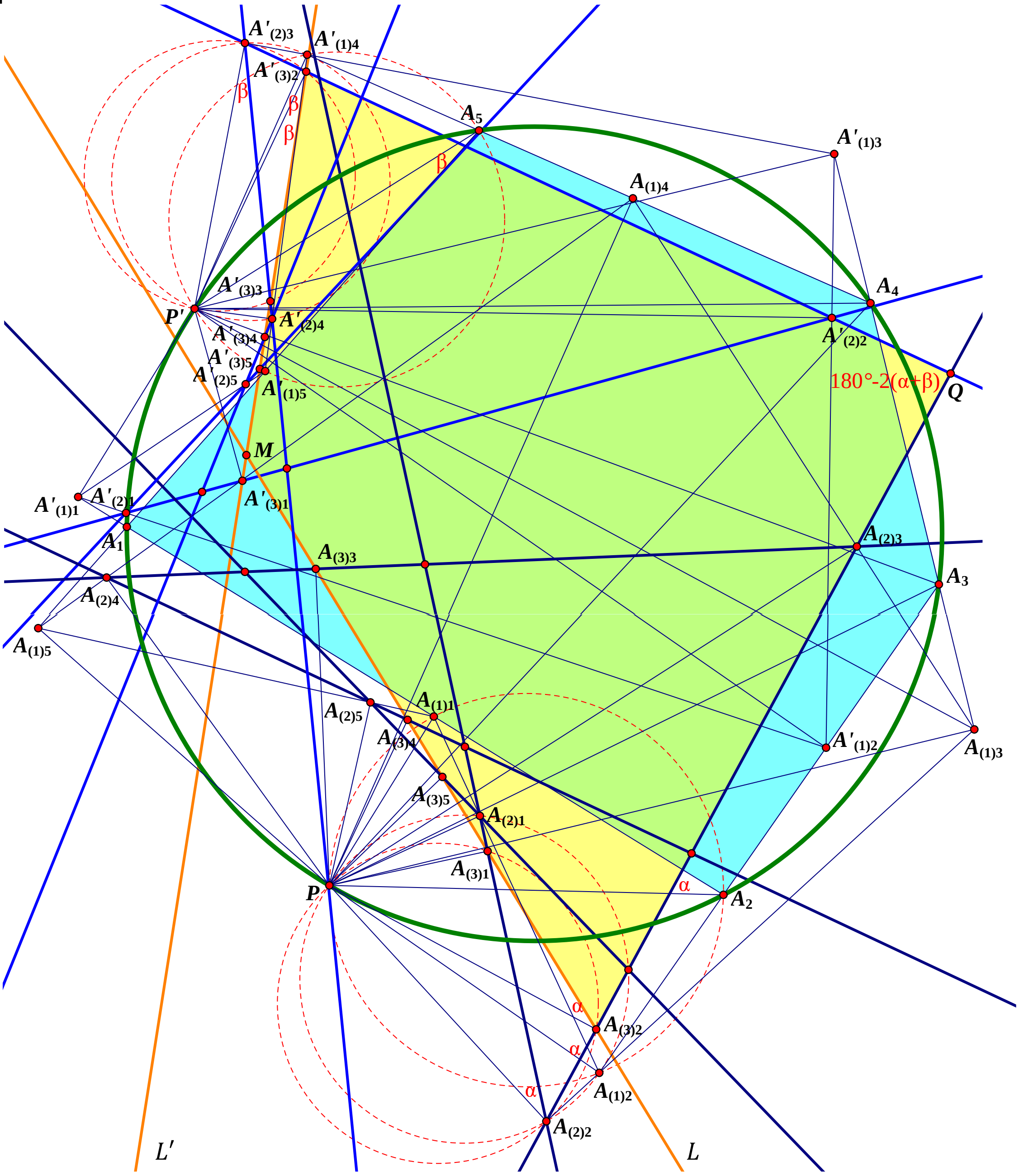


圖 3-2-13

(1)如圖 3-2-13，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$分別在$\widehat{\mathbf{A_1A_2}}$、$\widehat{\mathbf{A_1A_5}}$上，因為點$\mathbf{A_{(1)1}}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$分別是過$\mathbf{P}$點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$的垂足，所以$\angle \mathbf{PA_{(1)1}A_2} = \angle \mathbf{PA_{(1)2}A_2} = \mathbf{90^\circ}$，從而$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)1}}$、

A_2、$A_{(1)2}$四點共圓。設$\angle A_1A_2P=\alpha$，則$\angle A_{(1)1}A_2P=\angle A_1A_2P=\alpha$，

所以$\angle A_{(1)1}A_{(1)2}P=\alpha$。且$A_{(2)1}$在$\overleftrightarrow{A_{(1)1}A_{(1)2}}$上，則$\angle A_{(2)1}A_{(1)2}P=\angle A_{(1)1}A_{(1)2}P=\alpha$，

又P、$A_{(2)1}$、$A_{(1)2}$、$A_{(2)2}$四點共圓，從而$\angle A_{(2)1}A_{(2)2}P=\alpha$。且$A_{(3)1}$在$\overleftrightarrow{A_{(2)1}A_{(2)2}}$上，

則$\angle A_{(3)1}A_{(2)2}P=\angle A_{(2)1}A_{(2)2}P=\alpha$，又$P$、$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(2)2}$四點共圓，

從而$\angle A_{(3)1}A_{(3)2}P=\alpha$。另外$P$、$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$五點共圓，

從而$\angle A_1A_3P=\angle A_1A_4P=\alpha$。同理可證：$P'$、$A'_{(1)4}$、$A_5$、$A'_{(1)5}$四點共圓，

設$\angle P'A_5A_1=\beta$，且$A'_{(1)5}$在$\overleftrightarrow{A_1A_5}$上，則$\angle P'A_5A'_{(1)5}=\angle P'A_5A_1=\beta$，所以

$\angle P'A'_{(1)4}A'_{(1)5}=\beta$。且$A'_{(2)4}$在$\overleftrightarrow{A'_{(1)4}A'_{(1)5}}$上，則$\angle P'A'_{(1)4}A'_{(2)4}=\angle P'A'_{(1)4}A'_{(1)5}=\beta$，

又P'、$A'_{(2)3}$、$A'_{(1)4}$、$A'_{(2)4}$四點共圓，從而$\angle P'A'_{(2)3}A'_{(2)4}=\beta$。且$A'_{(3)3}$在$\overleftrightarrow{A'_{(2)3}A'_{(2)4}}$

上，則$\angle P'A'_{(2)3}A'_{(3)3}=\angle P'A'_{(2)3}A'_{(2)4}=\beta$，又$P'$、$A'_{(3)3}$、$A'_{(3)2}$、$A'_{(2)3}$四點共圓，

從而$\angle P'A'_{(3)2}A'_{(3)3}=\beta$。另外$P'$、$A_1$、$A_3$、$A_4$、$A_5$五點共圓，從而

$\angle P'A_3A_1=\angle P'A_4A_1=\beta$，故$\angle P'A_3P=\angle P'A_4P=\angle P'A_3A_1+\angle A_1A_3P=\alpha+\beta$。

(2)設P、P'兩點關於圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的西姆松線L、L'相交於 M 點，$\overleftrightarrow{A_{(2)2}A_{(2)3}}$與

$\overleftrightarrow{A'_{(2)2}A'_{(2)3}}$相交於 Q 點，因為$\overleftrightarrow{A_{(2)2}A_{(2)3}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(2)2}A'_{(2)3}}$分別為$P$、$P'$兩點關於圓內接四邊形

$A_2A_3A_4A_5$的西姆松線，所以$\angle A'_{(2)2}QA_{(2)2}=180°-2\angle P'A_3P=180°-2(\alpha+\beta)$。

在四邊形$A_{(3)2}MA'_{(3)2}Q$中，

因為 $\angle QA_{(3)2}M=\angle QA_{(3)2}P-\angle MA_{(3)2}P=\angle A_{(2)3}A_{(3)2}P-\angle A_{(3)1}A_{(3)2}P=90°-\alpha$，

$\angle MA'_{(3)2}Q=\angle P'A'_{(3)2}Q-\angle P'A'_{(3)2}M=\angle P'A'_{(3)2}\angle A'_{(2)2}-\angle P'A'_{(3)2}A'_{(3)3}=90°-\beta$，

$\angle A'_{(3)2}QA_{(3)2}=\angle A'_{(2)2}QA_{(2)2}=180°-2(\alpha+\beta)$，

$$\begin{aligned}\text{所以 } \angle A_{(3)2}MA'_{(3)2}&=360°-\left(\angle QA_{(3)2}M+\angle MA'_{(3)2}Q+\angle A'_{(3)2}QA_{(3)2}\right)\\&=360°-[(90°-\alpha)+(90°-\beta)+180°-2(\alpha+\beta)]\\&=360°-[360°-3(\alpha+\beta)]=3(\alpha+\beta)=3\angle P'A_3P\text{。}\end{aligned}$$

故兩西姆松線L、L'的其一夾角正好為P、P'兩點所對的圓周角的 3 倍。

因為要利用數學歸納法證明幾何問題時，必須先找到圖形內在結構的一致性，而我們從兩層西姆松線的圖形關係找到證明的關鍵想法，並完成一般化的證明如下：

4. 圓內接多邊形的西姆松線夾角定理

> **定理 3-2-5**
>
> 設外接圓上兩點**P**、**P′**點關於內接 **n** 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}$**(n** $\geq$ **4)**的西姆松線為**L**、**L′**，則**L**、**L′**的夾角正好為**P**、**P′**兩點所對的圓周角的**(n-2)**倍。

[證明]

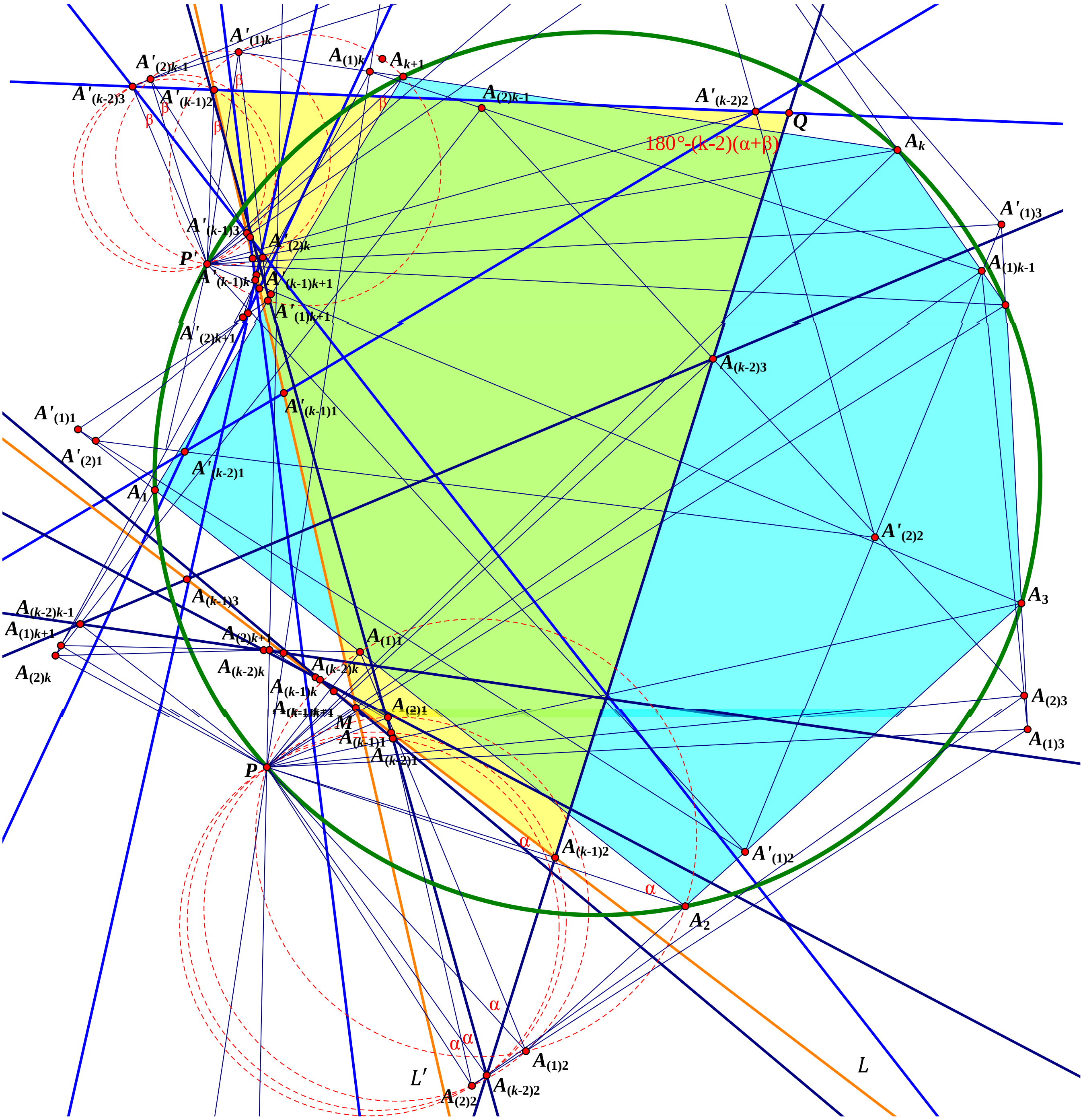


圖 3-2-14

(1)由前面證明可知，**n=4**、**5** 時皆成立。

(2)為了方便以下的證明，我們定義P點關於多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\ge 4)$的 **k** 階垂足多邊形為$A_{(k)1}A_{(k)2}A_{(k)3}\cdots A_{(k)n\text{-}1}A_{(k)n}$。設$P$、$P'$兩點關於圓內接$k(k\ge 3)$邊形的西姆松線夾角正好為$P$、$P'$兩點所對的圓周角的**(k-2)**倍。如圖 **3-2-14**，當 **n=k+1** 時，考慮P、P'分別在$\widehat{A_1A_2}$、$\widehat{A_1A_{k+1}}$上，因為點$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$分別是過 **P** 點對於$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$的垂足，

所以$\angle PA_{(1)1}A_2=\angle PA_{(1)2}A_2=90°$，從而$P$、$A_{(1)1}$、$A_2$、$A_{(1)2}$四點共圓。

設$\angle A_1A_2P=\alpha$，仿照定理 **3-2-4** 的證明，

可得$\angle A_{(k-1)1}A_{(k-1)2}P=\angle A_{(k-2)1}A_{(k-2)2}P=\cdots=\angle A_{(1)1}A_{(1)2}P=\angle A_1A_2P=\alpha$。

另外P、A_1、A_2、$\cdots$、A_{k-1}、A_k 等**(k+1)**個點共圓，從而$\angle A_1A_3P=\angle A_1A_4P=\cdots$ $=\angle A_1A_{k-1}P=\angle A_1A_kP=\angle A_1A_2P=\alpha$。同理可證：$P'$、$A'_{(1)k}$、$A_{k+1}$、$A'_{(1)k+1}$四點共圓，設$\angle P'A_{k+1}A_1=\beta$，可得$\angle P'A'_{(k-1)2}A'_{(k-1)3}=\angle P'A'_{(k-2)3}A'_{(k-2)4}=\cdots=$ $\angle P'A'_{(1)k}A'_{(1)k+1}=\angle P'A_{k+1}A_1=\beta$。另外$P'$、$A_1$、$A_3$、$\cdots$、$A_k$、$A_{k+1}$等**(k+1)**個點共圓，從而$\angle P'A_3A_1=\angle P'A_4A_1=\cdots=\angle P'A_{k-1}A_1=\angle P'A_kA_1=\angle P'A_{k+1}A_1=\beta$，

故$\angle P'A_3P=\angle P'A_4P=\cdots=P'A_{k-1}P=\angle P'A_kP=\angle P'A_3A_1+\angle A_1A_3P=\alpha+\beta$。

(3)設P、P'兩點關於圓內接**(k+1)**邊形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$的西姆松線$L$、$L'$相交於 **M** 點，

$\overleftrightarrow{A_{(k-2)2}A_{(k-2)3}}$與$\overleftrightarrow{A'_{(k-2)2}A'_{(k-2)3}}$相交於 **Q** 點，因為$\overleftrightarrow{A_{(k-2)2}A_{(k-2)3}}$、$\overleftrightarrow{A'_{(k-2)2}A'_{(k-2)3}}$分別為$P$、$P'$兩點關於圓內接 **k** 邊形$A_2A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}$的西姆松線，

所以$\angle A'_{(k-2)2}QA_{(k-2)2}=180°-(k-2)\angle P'A_3P=180°-(k-2)(\alpha+\beta)$。

在四邊形$A_{(k-1)2}MA'_{(k-1)2}Q$中，

因為 $\angle QA_{(k-1)2}M=\angle QA_{(k-1)2}P-\angle MA_{(k-1)2}P=\angle A_{(k-2)3}A_{(k-1)2}P-\angle A_{(k-1)1}A_{(k-1)2}P$

$$=90°-\alpha，$$

$$\angle MA'_{(k-1)2}Q=\angle P'A'_{(k-1)2}Q-\angle P'A'_{(k-1)2}M=\angle P'A'_{(k-1)2}A'_{(k-2)2}-\angle P'A'_{(k-1)2}A'_{(k-1)3}$$

$$=90°-\beta，$$

$$\angle A'_{(k-1)2}QA_{(k-1)2}=\angle A'_{(k-2)2}QA_{(k-2)2}=180°-(k-2)(\alpha+\beta)，$$

所以 $\angle A_{(k-1)2}MA'_{(k-1)2}=360°-\left(\angle QA_{(k-1)2}M+\angle MA'_{(k-1)2}Q+\angle A'_{(k-1)2}QA_{(k-1)2}\right)$

$$=360°-[(90°-\alpha)+(90°-\beta)+180°-(k-2)(\alpha+\beta)]$$

$$=360°-[360°-(k-1)(\alpha+\beta)]$$

$$=(k-1)(\alpha+\beta)=(k-1)\angle P'A_3P。$$

故兩西姆松線$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$的其一夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點所對的圓周角的**(k-1)**倍，即**(k+1)-2** 倍。由數學歸納法可知：若$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點與圓內接 **n** 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n}$$(\mathbf{n \geq 4})$的 **n** 個頂點共圓，則兩西姆松線的夾角正好為$\mathbf{P}$、$\mathbf{P'}$兩點所對的圓周角的**(n-2)**倍。

(五) 圓內接多邊形的西姆松線定夾角定理

1. 三角形的西姆松線定夾角定理 (文獻[3])

> 定理 3-2-6
>
> 設外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接三角形$\mathbf{\Delta A_1A_2A_3}$、$\mathbf{\Delta A'_1A'_2A'_3}$的西姆松線為$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$，則$\mathbf{L}$與$\mathbf{L'}$的夾角為定值，跟$\mathbf{P}$點的位置無關。

[證明]

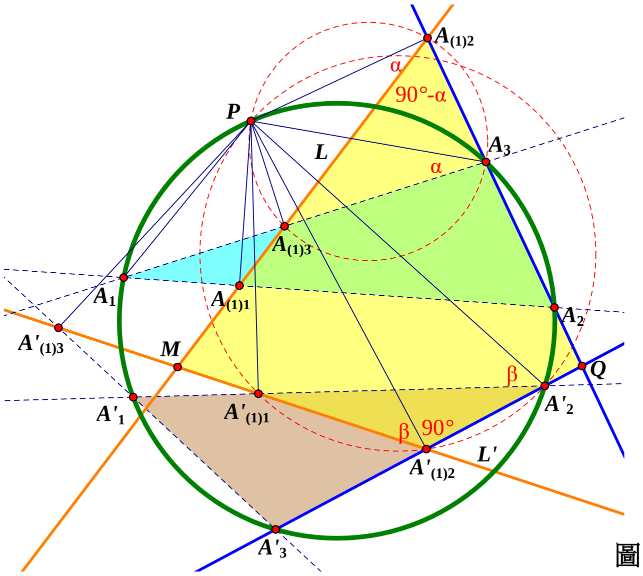


圖 3-2-15

為了方便討論，接下來的證明均採用有向角的觀點，即$\angle\mathbf{ABC}$表示$\overrightarrow{\mathbf{BA}}$轉向$\overrightarrow{\mathbf{BC}}$的有向角。

(1)如圖 **3-2-15**，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$點在$\widehat{\mathbf{A_1A_3}}$上，設外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接三角形$\mathbf{\Delta A_1A_2A_3}$、$\mathbf{\Delta A'_1A'_2A'_3}$的西姆松線$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$相交於 **M** 點，$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$與$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_2A'_3}}$相交於 **Q** 點，因為點$\mathbf{A_{(1)2}}$、$\mathbf{A_{(1)3}}$分別是過 **P** 點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_3A_1}}$的垂足，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)2}A_3} = \angle\mathbf{PA_{(1)3}A_3} = \mathbf{90^\circ}$，從而$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)2}}$、$\mathbf{A_3}$、$\mathbf{A_{(1)3}}$四點共圓。為了方便以下的證明，$\widehat{\mathbf{A_iA_j}}$皆表示$\overline{\mathbf{A_iA_j}}$所對劣弧的弧度。設$\angle\mathbf{PA_3A_1} = \boldsymbol{\alpha}$，則$\angle\mathbf{PA_3A_{(1)3}} = \angle\mathbf{PA_3A_1} = \boldsymbol{\alpha}$，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)2}A_{(1)3}} = \boldsymbol{\alpha}$，推得$\angle\mathbf{MA_{(1)2}Q} = \angle\mathbf{A_{(1)3}A_{(1)2}A_3} = \angle\mathbf{PA_{(1)2}A_3} - \angle\mathbf{PA_{(1)2}A_{(1)3}} = \ \mathbf{90^\circ} - \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{90^\circ} - \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{A_1P}}$。

同理可證：$\mathbf{P}$、$\mathbf{A'_{(1)1}}$、$\mathbf{A'_{(1)2}}$、$\mathbf{A'_2}$四點共圓，設$\angle\mathbf{PA'_2A'_1} = \boldsymbol{\beta}$，且$\mathbf{A'_{(1)1}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_1A'_2}}$上，

則$\angle PA'_2A'_{(1)1} = \angle PA'_2A'_1 = \beta$，所以$\angle PA'_{(1)2}A'_{(1)1} = \beta$，推得

$\angle QA'_{(1)2}M = \angle A'_2A'_{(1)2}A'_{(1)1} = \angle A'_2A'_{(1)2}P + \angle PA'_{(1)2}A'_{(1)1} = 90° + \beta = 90° + \frac{1}{2}\widehat{A'_1P}$。

(2)因為$\angle A_3QA'_3$為圓外角，所以$\angle A_{(1)2}QA'_{(1)2} = \angle A_3QA'_3 = \frac{1}{2}\left[\left(360° - \widehat{A_3A'_3}\right) - \widehat{A_2A'_2}\right]$

$= \ 180° - \frac{1}{2}\left(\widehat{A_2A'_2} + \widehat{A_3A'_3}\right)$。在四邊形$A'_{(1)2}MA_{(1)2}Q$中，

$$\begin{aligned}\angle A'_{(1)2}MA_{(1)2} &= 360° - \left(\angle MA_{(1)2}Q + \angle QA'_{(1)2}M + \angle A_{(1)2}QA'_{(1)2}\right)\\ &= 360° - \left[\left(90° - \frac{1}{2}\widehat{A_1P}\right) + \left(90° + \frac{1}{2}\widehat{A'_1P}\right) + \left(180° - \frac{1}{2}\left(\widehat{A_2A'_2} + \widehat{A_3A'_3}\right)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(\widehat{A'_1P} - \widehat{A_1P}\right) + \left(\widehat{A_2A'_2} + \widehat{A_3A'_3}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\widehat{A_2A'_2} + \widehat{A_3A'_3} - \widehat{A_1A'_1}\right)\end{aligned}$$

故兩西姆松線L與L'的夾角為定值，跟P點的位置無關。

[討論] 若改變$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A'_1A'_2A'_3$的位置，則$\angle A_3QA'_3$可為圓內角或圓周角，證法類似。

在證明圓內接四邊形、五邊形的西姆松線夾角定理時我們遇到了瓶頸，後來發現西姆松線所截的垂足多邊形之邊線正好是上一層的西姆松線，利用上一層的西姆松線的夾角和四點共圓的性質，證明才得以順利展開。

2. 圓內接四邊形的西姆松線定夾角定理

> 定理 3-2-7
>
> 設外接圓上P點關於兩內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$、$A'_1A'_2A'_3A'_4$的西姆松線為L、L'，則L與L'的夾角為定值，跟 P 點的位置無關。

[證明]

(1)如圖 3-2-16，不失一般性，考慮P點在$\widehat{A_1A_4}$上，設外接圓上P點關於兩內接四邊形

$A_1A_2A_3A_4$、$A'_1A'_2A'_3A'_4$的西姆松線L、L'相交於 M 點，$\overleftrightarrow{A_{(1)2}A_{(1)3}}$與$\overleftrightarrow{A'_{(1)3}A'_{(1)4}}$相交於

Q 點，因為點$A_{(1)3}$、$A_{(1)4}$分別是過 P 點對於$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$的垂足，

所以$\angle PA_{(1)3}A_4 = \angle PA_{(1)4}A_4 = 90°$，從而$P$、$A_{(1)3}$、$A_4$、$A_{(1)4}$四點共圓。

設$\angle PA_4A_1 = \alpha$，則$\angle PA_4A_{(1)4} = \angle PA_4A_1 = \alpha$，所以$\angle PA_{(1)3}A_{(1)4} = \alpha$。

且$A_{(2)3}$在$\overleftrightarrow{A_{(1)3}A_{(1)4}}$上，則$\angle PA_{(1)3}A_{(2)3} = \angle PA_{(1)3}A_{(1)4} = \alpha$，

又P、$A_{(2)2}$、$A_{(1)3}$、$A_{(2)3}$四點共圓，從而$\angle PA_{(2)2}A_{(2)3} = \alpha$。

推得$\angle QA_{(2)2}M=\angle QA_{(2)2}A_{(2)3}=\angle QA_{(2)2}P+\angle PA_{(2)2}A_{(2)3}=90^\circ+\alpha=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{A_1P}$。

同理可證：P、$A'_{(1)1}$、A'_1、$A'_{(1)4}$四點共圓，設$\angle A'_2A'_1P=\beta$，且$A'_{(1)1}$在$\overleftrightarrow{A'_1A'_2}$上，

則$\angle A'_{(1)1}A'_1P=\angle A'_2A'_1P=\beta$，所以$\angle A'_{(1)1}A'_{(1)4}P=\beta$。且$A'_{(2)4}$在$\overleftrightarrow{A'_{(1)4}A'_{(1)1}}$上，

則$\angle A'_{(2)4}A'_{(1)4}P=\angle A'_{(1)1}A'_{(1)4}P=\beta$，又P、$A'_{(2)3}$、$A'_{(1)4}$、$A'_{(2)4}$四點共圓，

從而$\angle A'_{(2)4}A'_{(2)3}P=\beta$。推得

$\angle MA'_{(2)3}Q=\angle A'_{(2)4}A'_{(2)3}Q=\angle PA'_{(2)3}Q+\angle A'_{(2)4}A'_{(2)3}P=90^\circ+\beta=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{A'_2P}$。

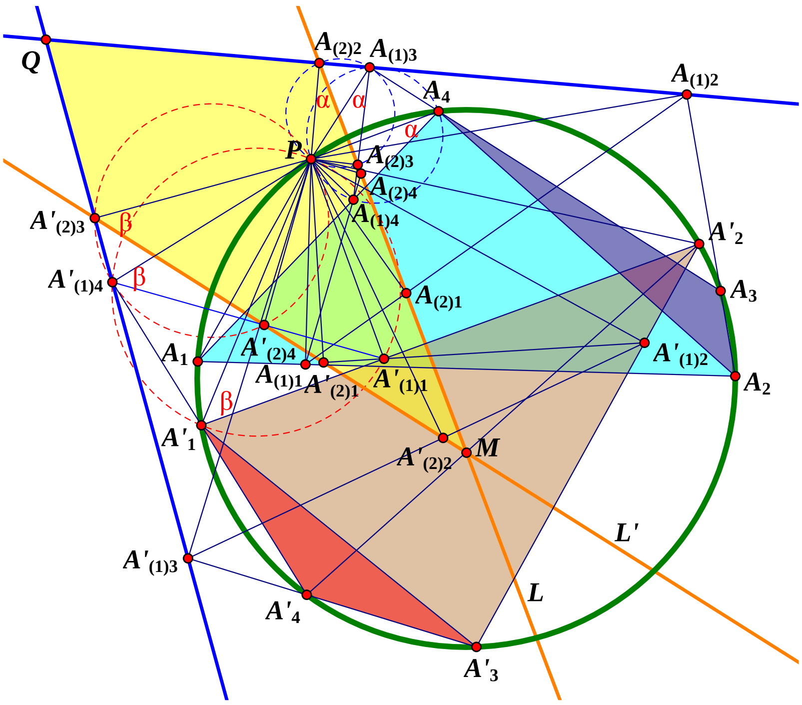


圖 3-2-16

(2)因為$\angle A'_{(2)3}QA_{(2)2}$為外接圓上P點關於兩內接三角形$\Delta A_2A_3A_4$、$\Delta A'_3A'_4A'_1$的西姆松線的夾角，所以由定理 3-2-6 可得$\angle A'_{(2)3}QA_{(2)2}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)$。

在四邊形$A_{(2)2}MA'_{(2)3}Q$中，

$$\begin{aligned}\angle A_{(2)2}MA'_{(2)3}&=360^\circ-\left(\angle QA_{(2)2}M+\angle MA'_{(2)3}Q+\angle A'_{(2)3}QA_{(2)2}\right)\\&=360^\circ-\left[\left(90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{A_1P}\right)+\left(90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{A'_2P}\right)+\frac{1}{2}\left(\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)\right]\\&=180^\circ-\frac{1}{2}\left[\left(\widehat{A'_2P}+\widehat{A_1P}\right)+\left(\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)\right]\\&=180^\circ-\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)\end{aligned}$$

且 $180^\circ-\angle A_{(2)2}MA'_{(2)3}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)$

故兩西姆松線L與L′的夾角為定值，跟P點的位置無關。

3. 圓內接五邊形的西姆松線定夾角定理

> **定理 3-2-8**
>
> 設外接圓上P點關於兩內接五邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4A_5}$、$\mathbf{A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5}$的西姆松線為$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$，則$\mathbf{L}$與$\mathbf{L'}$的夾角為定值，跟 **P** 點的位置無關。

[證明]

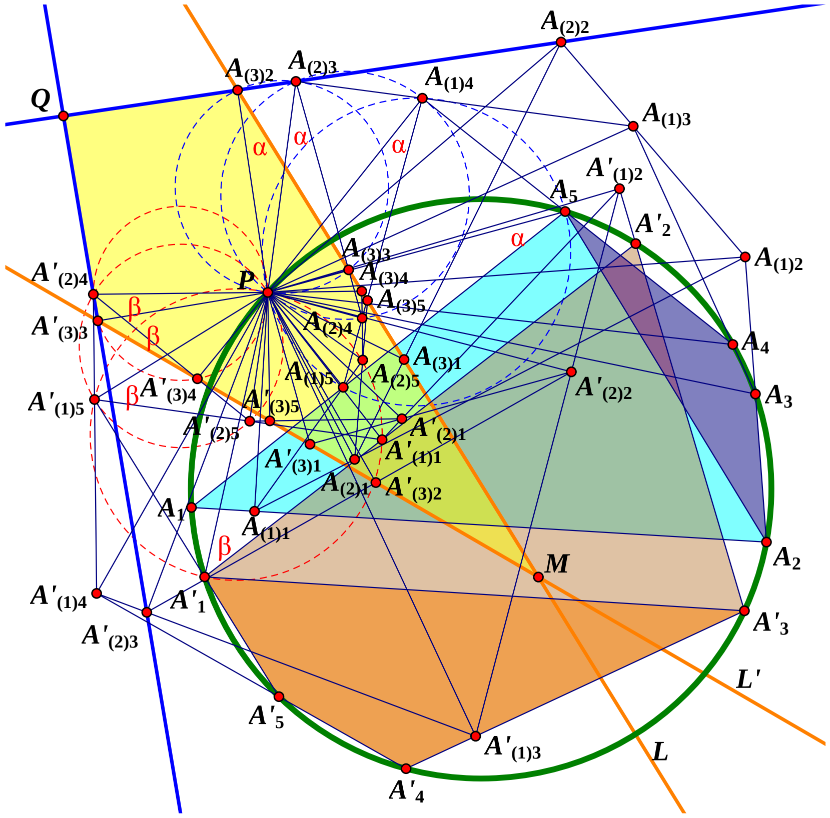


圖 3-2-17

(1)如圖 **3-2-17**，不失一般性，考慮$\mathbf{P}$點在$\widehat{\mathbf{A_1A_5}}$上，設外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接五邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4A_5}$、$\mathbf{A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5}$的西姆松線$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$相交於 **M** 點，$\overleftrightarrow{\mathbf{A_{(2)2}A_{(2)3}}}$與$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_{(2)3}A'_{(2)4}}}$相交於 **Q** 點，因為點$\mathbf{A_{(1)4}}$、$\mathbf{A_{(1)5}}$分別是過 **P** 點對於$\overleftrightarrow{\mathbf{A_4A_5}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{A_5A_1}}$的垂足，

所以$\angle\mathbf{PA_{(1)4}A_5} = \angle\mathbf{PA_{(1)5}A_5} = \mathbf{90^\circ}$，從而$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(1)4}}$、$\mathbf{A_5}$、$\mathbf{A_{(1)5}}$四點共圓。

設$\angle\mathbf{PA_5A_1} = \boldsymbol{\alpha}$，則$\angle\mathbf{PA_5A_{(1)5}} = \angle\mathbf{PA_5A_1} = \boldsymbol{\alpha}$，所以$\angle\mathbf{PA_{(1)4}A_{(1)5}} = \boldsymbol{\alpha}$。

且$\mathbf{A_{(2)4}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A_{(1)4}A_{(1)5}}}$上，則$\angle\mathbf{PA_{(1)4}A_{(2)4}} = \angle\mathbf{PA_{(1)4}A_{(1)5}} = \boldsymbol{\alpha}$，又$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(2)3}}$、$\mathbf{A_{(1)4}}$、$\mathbf{A_{(2)4}}$四點共圓，從而$\angle\mathbf{PA_{(2)3}A_{(2)4}} = \boldsymbol{\alpha}$。且$\mathbf{A_{(3)3}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A_{(2)3}A_{(2)4}}}$上，

則$\angle\mathbf{PA_{(2)3}A_{(3)3}} = \angle\mathbf{PA_{(2)3}A_{(2)4}} = \boldsymbol{\alpha}$，又$\mathbf{P}$、$\mathbf{A_{(3)2}}$、$\mathbf{A_{(2)3}}$、$\mathbf{A_{(3)3}}$四點共圓，

從而$\angle\mathbf{PA_{(3)2}A_{(3)3}} = \boldsymbol{\alpha}$。

推得$\angle\mathbf{QA_{(3)2}M} = \angle\mathbf{QA_{(3)2}A_{(3)3}} = \angle\mathbf{QA_{(3)2}P} + \angle\mathbf{PA_{(3)2}A_{(3)3}} = \mathbf{90^\circ} + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{90^\circ} + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{A_1P}}$。

同理可證：$\mathbf{P}$、$\mathbf{A'_{(1)1}}$、$\mathbf{A'_1}$、$\mathbf{A'_{(1)5}}$四點共圓，設$\angle \mathbf{A'_2A'_1P} = \boldsymbol{\beta}$，且$\mathbf{A'_{(1)1}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_1A'_2}}$上，

則$\angle \mathbf{A'_{(1)1}A'_1P} = \angle \mathbf{A'_2A'_1P} = \boldsymbol{\beta}$，所以$\angle \mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)5}P} = \boldsymbol{\beta}$。且$\mathbf{A'_{(2)5}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_{(1)5}A'_{(1)1}}}$上，

則$\angle \mathbf{A'_{(2)5}A'_{(1)5}P} = \angle \mathbf{A'_{(1)1}A'_{(1)5}P} = \boldsymbol{\beta}$，又$\mathbf{P}$、$\mathbf{A'_{(2)4}}$、$\mathbf{A'_{(1)5}}$、$\mathbf{A'_{(2)5}}$四點共圓，

從而$\angle \mathbf{A'_{(2)5}A'_{(2)4}P} = \boldsymbol{\beta}$。且$\mathbf{A'_{(3)4}}$在$\overleftrightarrow{\mathbf{A'_{(2)4}A'_{(2)5}}}$上，則$\angle \mathbf{A'_{(3)4}A'_{(2)4}P} = \angle \mathbf{A'_{(2)5}A'_{(2)4}P}$

$= \boldsymbol{\beta}$，又$\mathbf{P}$、$\mathbf{A'_{(3)4}}$、$\mathbf{A'_{(3)3}}$、$\mathbf{A'_{(2)4}}$四點共圓，從而$\angle \mathbf{A'_{(3)4}A'_{(3)3}P} = \boldsymbol{\beta}$。推得

$\angle \mathbf{MA'_{(3)3}Q} = \angle \mathbf{A'_{(3)4}A'_{(3)3}Q} = \angle \mathbf{PA'_{(3)3}Q} + \angle \mathbf{A'_{(3)4}A'_{(3)3}P} = 90^\circ + \boldsymbol{\beta} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{A'_2P}}$。

(2)因為$\angle \mathbf{A'_{(3)3}QA_{(3)2}}$為外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接四邊形$\mathbf{A_2A_3A_4A_5}$、$\mathbf{A'_3A'_4A'_5A'_1}$的西姆松線的夾角，所以由定理 **3-2-7** 可得$\angle \mathbf{A'_{(3)3}QA_{(3)2}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{A_2A'_3}} + \widehat{\mathbf{A_3A'_4}} + \widehat{\mathbf{A_4A'_5}} - \widehat{\mathbf{A_5A'_1}}\right)$。

在四邊形$\mathbf{A_{(3)2}MA'_{(3)3}Q}$中，

$$\angle \mathbf{A_{(3)2}MA'_{(3)3}} = 360^\circ - \left(\angle \mathbf{QA_{(3)2}M} + \angle \mathbf{MA'_{(3)3}Q} + \angle \mathbf{A'_{(3)3}QA_{(3)2}}\right)$$

$$= 360^\circ - \left[\left(90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{A_1P}}\right) + \left(90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{A'_2P}}\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{A_2A'_3}} + \widehat{\mathbf{A_3A'_4}} + \widehat{\mathbf{A_4A'_5}} - \widehat{\mathbf{A_5A'_1}}\right)\right]$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\mathbf{A'_2P}} + \widehat{\mathbf{A_1P}}\right) + \left(\widehat{\mathbf{A_2A'_3}} + \widehat{\mathbf{A_3A'_4}} + \widehat{\mathbf{A_4A'_5}} - \widehat{\mathbf{A_5A'_1}}\right)\right]$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{A_1A'_2}} + \widehat{\mathbf{A_2A'_3}} + \widehat{\mathbf{A_3A'_4}} + \widehat{\mathbf{A_4A'_5}} - \widehat{\mathbf{A_5A'_1}}\right)$$

且 $180^\circ - \angle \mathbf{A_{(3)2}MA'_{(3)3}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{A_1A'_2}} + \widehat{\mathbf{A_2A'_3}} + \widehat{\mathbf{A_3A'_4}} + \widehat{\mathbf{A_4A'_5}} - \widehat{\mathbf{A_5A'_1}}\right)$

故兩西姆松線$\mathbf{L}$與$\mathbf{L'}$的夾角為定值，跟$\mathbf{P}$點的位置無關。

因為要利用數學歸納法證明幾何問題時，必須先找到圖形內在結構的一致性，而我們從兩層西姆松線的圖形關係找到證明的關鍵想法，並完成一般化的證明如下：

4. 圓內接多邊形的西姆松線定夾角定理

> 定理 **3-2-9**
>
> 設外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接 **n** 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n}$、$\mathbf{A'_1A'_2A'_3 \cdots A'_{n-1}A'_n} (\mathbf{n} \geq \mathbf{4})$的西姆松線為$\mathbf{L}$、$\mathbf{L'}$，則$\mathbf{L}$與$\mathbf{L'}$的夾角為定值，跟 **P** 點的位置無關。

[證明]

(1)由前面證明可知，**n=4**、**5** 時皆成立。

(2)為了方便以下的證明，我們定義 **P** 點關於多邊形$\mathbf{A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n}$的 **k** 階垂足多邊形為$\mathbf{A_{(k)1}A_{(k)2}A_{(k)3} \cdots A_{(k)n-1}A_{(k)n}}$。設外接圓上$\mathbf{P}$點關於兩內接$\mathbf{k}(\mathbf{k} \geq \mathbf{3})$邊形的西姆松線夾角

為定值，跟 P 點的位置無關。如圖 3-2-18，當 n=k+1 時，只考慮P點在$\widehat{A_1A_{k+1}}$上，因為點$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$分別是過 P 點對於$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$的垂足，所以$\angle PA_{(1)1}A_2 = \angle PA_{(1)2}A_2 = 90°$，從而P、$A_{(1)1}$、$A_2$、$A_{(1)2}$四點共圓。 設$\angle PA_{k+1}A_1 = \alpha$，仿照定理 3-2-8 的證明，可得$\angle PA_{(k-1)2}A_{(k-1)3} = \angle PA_{(k-2)3}A_{(k-2)4} = \cdots = \angle PA_{(1)k}A_{(1)k+1} = \angle PA_{k+1}A_1 = \alpha$。

推得$\angle QA_{(k-1)2}M = \angle QA_{(k-1)2}A_{(k-1)3} = \angle QA_{(k-1)2}P + \angle PA_{(k-1)2}A_{(k-1)3} = 90° + \alpha$

$$= 90° + \frac{1}{2}\widehat{A_1P}\text{。}$$

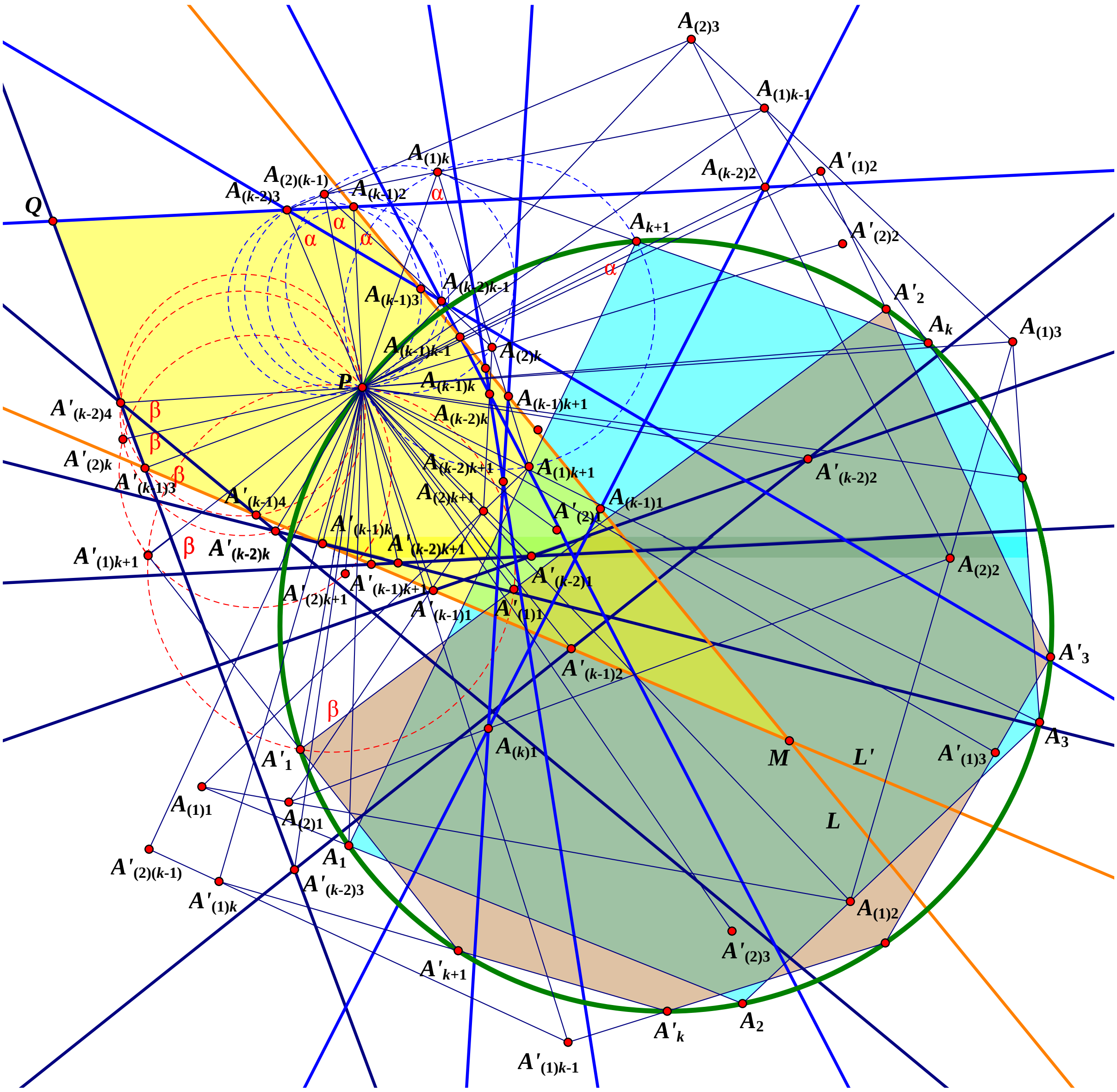


圖 3-2-18

同理可證：P、$A'_{(1)k}$、A'_1、$A'_{(1)k+1}$四點共圓，設$\angle A'_2A'_1P=\beta$，可得

$\angle A'_{(k-1)4}A'_{(k-1)3}P=\angle A'_{(k-2)5}A'_{(k-2)4}P=\cdots=\angle A'_{(1)1}A'_{(1)k+1}P=\angle A'_2A'_1P=\beta$。

推得$\angle MA'_{(k-1)3}Q=\angle A'_{(k-1)4}A'_{(k-1)3}Q=\angle PA'_{(k-1)3}Q+\angle A'_{(k-1)4}A'_{(k-1)3}P=90°+\beta$

$=90°+\frac{1}{2}\widehat{A'_2P}$。

(3)設外接圓上P點關於兩內接$(k+1)$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_kA'_{k+1}$的西姆松線$L$、$L'$相交於 M 點，$\overleftrightarrow{A_{(k-2)2}A_{(k-2)3}}$與$\overleftrightarrow{A'_{(k-2)3}A'_{(k-2)4}}$相交於 Q 點，

因為$\angle A'_{(k-1)3}QA_{(k-1)2}$為外接圓上 P 點關於兩 k 邊形$A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$、$A'_3A'_4\cdots A'_{k+1}A'_1$的西姆松線的夾角，所以$\angle A'_{(k-1)3}QA_{(k-1)2}$為定值，不妨設$\angle A'_{(k-1)3}QA_{(k-1)2}=\theta$。

則在四邊形$A_{(k-1)2}MA'_{(k-1)3}Q$中，

$$\angle A_{(k-1)2}MA'_{(k-1)3}=360°-\left(\angle QA_{(k-1)2}M+\angle MA'_{(k-1)3}Q+\angle A'_{(k-1)3}QA_{(k-1)2}\right)$$
$$=360°-\left[\left(90°+\frac{1}{2}\widehat{A_1P}\right)+\left(90°+\frac{1}{2}\widehat{A'_2P}\right)+\theta\right]$$
$$=180°-\frac{1}{2}\left[\left(\widehat{A'_2P}+\widehat{A_1P}\right)+\theta\right]=180°-\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\theta\right)$$

且 $180°-\angle A_{(k-1)2}MA'_{(k-1)3}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\theta\right)$，由數學歸納法可知：$P$點關於兩圓內接 n 邊形的西姆松線時，其西姆松線的夾角為定值，跟P點的位置無關。

肆、研究討論

一、外接圓上P點關於內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、⋯、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$不會共線，但會滿足$\frac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\frac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}A_{(1)n-1}}}{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}}=1$，此結論與多邊形孟氏定理一致。我們發現用反演變換可以解釋這個現象。

二、設外接圓上兩點P、P'點關於內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的西姆松線為 L、L'，則 L、L'的夾角正好為P、P'兩點所對的圓周角的(n-2)倍。隨著$\widehat{PP'}$的度數逐漸增加，則兩西姆松線 L、L'的夾角$\frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}$也會隨之增加，從而 L、L'會不斷地旋轉，最後兩西姆松線的其一夾角 $\emptyset=\frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}-180°k(k\in\mathbb{N})$。故兩西姆松線的其一夾角度數$\emptyset$會滿足 $\emptyset\equiv\frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}(\mathrm{mod}\,180°)$。

三、設外接圓上P點關於兩內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n(n\geq 4)$的西姆松線分別為$L$、$L'$，則$L$與$L'$的交角為定值。若考慮兩多邊形外接圓上兩兩對應點所成的劣弧，則其值正好是其所對的 n 組 $\frac{1}{2}\widehat{A_iA'_j}$中，(n-1)組取正值、一組取負值的總和。在本文中兩內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n$的頂點排序，前者逆時針、後者順時針，並考慮P點在$\widehat{A_1A_n}$上，可得兩西姆松線$L$、$L'$其一夾角如下：

(1)n=4 時，$180^\circ-\angle A_{(2)2}MA'_{(2)3}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}-\widehat{A_4A'_1}\right)$；

(2)n=5 時，$180^\circ-\angle A_{(3)2}MA'_{(3)3}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\widehat{A_2A'_3}+\widehat{A_3A'_4}+\widehat{A_4A'_5}-\widehat{A_5A'_1}\right)$

利用數學歸納法可得：

$180^\circ-\angle A_{(n-2)2}MA'_{(n-2)3}=\frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2}+\widehat{A_2A'_3}+\cdots+\widehat{A_{n-1}A'_n}-\widehat{A_nA'_1}\right)$。

四、本文中所討論的圓內接多邊形皆為凸多邊形，其實圓內接蝶形多邊形也有西姆松線。如圖 4-4-1、4-4-2，圓內接蝶形四邊形、五邊形也有西姆松線，其證明方法和圓內接凸四邊形、五邊形完全一致。

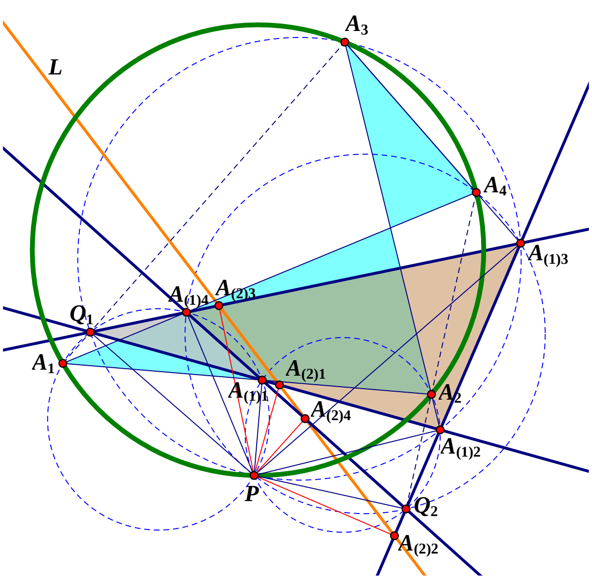


圖 4-4-1

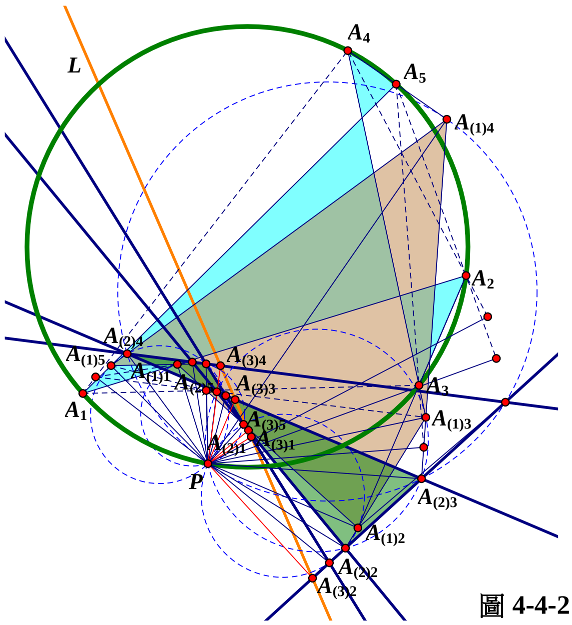


圖 4-4-2

五、如圖 4-5-1，設$\Delta A_1A_2A_3$的垂心為 H，則 P 點關於$\Delta A_1A_2A_3$的西姆松線和$\overline{PH}$的交點 M 為$\overline{PH}$的中點，且此中點 M 在九點圓上。如果考慮圓內接四邊形四頂點中任取三頂點可得四個三角形，因此可得四個三角形的垂心，而此時這四個垂心會共圓，不妨就定義圓

內接四邊形的垂心就是過此四點之圓(垂心圓)的圓心。依此類推，就可以定義圓內接多邊形的垂心。如圖 **4-5-2**，設圓內接四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$的垂心為 **H**，但 **P** 點關於圓內接四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$的西姆松線和$\overline{\mathbf{PH}}$的交點 **N** 並不是$\overline{\mathbf{PH}}$的中點 **M**。如果圓內接四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$的兩對角線互相垂直，且$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{W}$是各邊中點，作$\overline{\mathbf{XX'}}$、$\overline{\mathbf{YY'}}$、$\overline{\mathbf{ZZ'}}$、$\overline{\mathbf{WW'}}$分別垂直於對邊，得到垂足點 $\mathbf{X'}$、$\mathbf{Y'}$、$\mathbf{Z'}$、$\mathbf{W'}$，則 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{W}$、$\mathbf{X'}$、$\mathbf{Y'}$、$\mathbf{Z'}$、$\mathbf{W'}$ 這八點共圓。但此中點 **M** 也不在八點圓上。

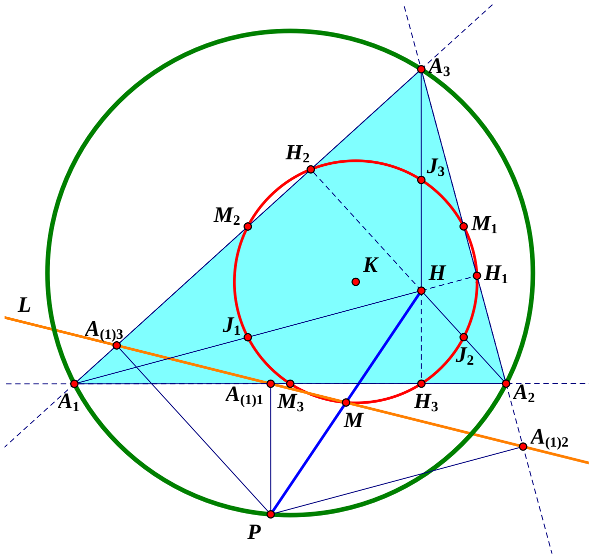


圖 4-5-1

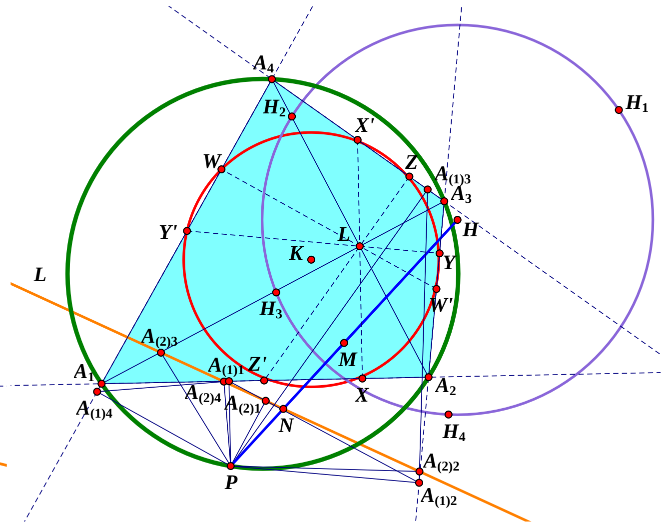


圖 4-5-2

伍、研究結果與結論

一、設$\mathbf{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}(\mathbf{n}\geq 4)$為任意 **n** 邊形，一直線分別截此 n 邊形的邊$\overline{\mathbf{A_1A_2}}$、$\overline{\mathbf{A_2A_3}}$、$\cdots$、$\overline{\mathbf{A_{n\text{-}1}A_n}}$、$\overline{\mathbf{A_nA_1}}$或延長線於$\mathbf{B_1}$、$\mathbf{B_2}$、$\cdots$、$\mathbf{B_{n-1}}$、$\mathbf{B_n}$，

則 $\dfrac{\overline{\mathbf{A_1B_1}}}{\overline{\mathbf{B_1A_2}}}\times\dfrac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{B_2A_3}}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{\mathbf{A_{n\text{-}1}B_{n\text{-}1}}}}{\overline{\mathbf{A_{n\text{-}1}A_n}}}\times\dfrac{\overline{\mathbf{A_nB_n}}}{\overline{\mathbf{B_nA_1}}}=\mathbf{1}$。**(多邊形孟氏定理)**

二、外接圓上**P**點關於內接 **n** 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}(\mathbf{n}\geq 4)$的**(n-2)**階垂足 **n** 邊形的 **n** 個頂點$\mathbf{A_{(n-2)1}}$、$\mathbf{A_{(n-2)2}}$、$\cdots$、$\mathbf{A_{(n-2)n-1}}$、$\mathbf{A_{(n-2)n}}$會在同一直線上。這條直線叫做 **P** 點關於圓內接 **n** 邊形$\mathbf{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}$的西姆松線，可得

$$\frac{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}3)1}A_{(n\text{-}2)1}}}}{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}2)1}A_{(n\text{-}3)2}}}}\times\frac{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}3)2}A_{(n\text{-}2)2}}}}{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}2)2}A_{(n\text{-}3)3}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}3)n\text{-}1}A_{(n\text{-}2)n\text{-}1}}}}{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}2)n\text{-}1}A_{(n\text{-}3)n}}}}\times\frac{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}3)n}A_{(n\text{-}2)n}}}}{\overline{\mathrm{A_{(n\text{-}2)n}A_{(n\text{-}3)1}}}}=\mathbf{1}。$$

(圓內接多邊形的西姆松線定理)

三、設外接圓上P點關於內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足為$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、$\cdots$、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$，則 $\frac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\frac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}A_{(1)n-1}}}{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}}=1$。

(圓內接多邊形的垂足點定理)

四、設外接圓上兩點P、P′點關於內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則L、L′的夾角∅正好為P、P′兩點所對的圓周角的(n-2)倍。

即 $\emptyset\equiv\frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}(\mathrm{mod}180°)$。**(圓內接多邊形的西姆松線夾角定理)**

五、設外接圓上P點關於兩內接 n 邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則L與L′的夾角為定值，跟 P 點的位置無關。

(圓內接多邊形的西姆松線定夾角定理)

陸、參考文獻資料

[1] 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，39~51、204~212，2000 年 09 月。

[2] 張景中著。幾何新方法和新體系。科學出版社，97~99、122~130，2016 年 11 月。

[3] Simson Line from Wolfram Mathworld https://mathworld.wolfram.com/SimsonLine.html。

[4] 嚴鎮軍著。反射與反演。九章出版社，42~72，2002 年 09 月。

[5] 廖偉恩。圓來如此–西姆松「圓」的研究。2011 年台灣國際科展數學科優勝作品。

[6] 李微、賴永堯、謝昀臻。點點圓－西姆松線研究。第 52 屆全國中小學科展國中組數學科作品，2012。

[7] 洪嘉佑、彭昇禾、汪俞宏。複數平面解析應用－西姆松線之交點軌跡性質探討。第 61 屆全國中小學科展高中組數學科作品，2021。

[8] 陳雲淇、李書帆、黃威瑀。多邊形與西姆松線的研究與深入探討。第 62 屆全國中小學科展高中組數學科作品，2022。

【評語】050415

本作品是將三角形的西姆松線推廣至圓內接 N 邊形的西姆松線及孟式定理的推廣。推廣後的性質如下：在西姆松線上會有類似孟式定理的比值乘積為 1 的性質；固定圓內接 n 邊形，兩條西姆松線的夾角是其所對應的外接圓上的兩點所成的圓周角的 n-2 倍；以及固定兩圓內接 n 邊形，兩條西姆松線的夾角僅與其所對應的外接圓上的兩點所成的圓周角有關。本作品係跟隨在[8] 之後所獲得的相關結果，作者展現出不錯的數學功底，並以清楚的思路來完成此份作品。

作品海報

圓內接多邊形

西姆松線的延伸思考

壹、研究動機

從**文獻[1]**得知：將三角形的西姆松線**推廣至圓內接n邊形**時，會有相對的**西姆松線**。我們發想：**三角形的西姆松線有孟氏定理**，那**圓內接n邊形的西姆松線也有孟氏定理**嗎？又從**文獻[3]**得知：三角形**外接圓上兩點P、P′**的西姆松線之夾角，**會等於P、P′兩點所對的圓周角；兩個三角形的外接圓相同時，則外接圓上一點P對應兩者的西姆松線之夾角為定值，跟P的位置無關**，那上述**三角形西姆松線的性質**是否也可以**推廣至圓內接n邊形**？

（本研究每張圖片皆為作者用 *Geometer's Sketchpad* 電腦動態幾何軟體繪製而成）

貳、研究目的

一、考慮**圓內接n邊形的西姆松線**，是否有**相對的孟氏定理**？

二、**外接圓上一點P對內接n邊形各邊所在的直線作垂足**，則**各邊截線段比值的連乘積**是否會等於**1**？

三、**外接圓上兩點P、P′對應內接n邊形的西姆松線之夾角**，是否會等於**P、P′兩點所對的圓周角**？

四、**外接圓上一點P對應兩內接n邊形的西姆松線之夾角是否為定值**？

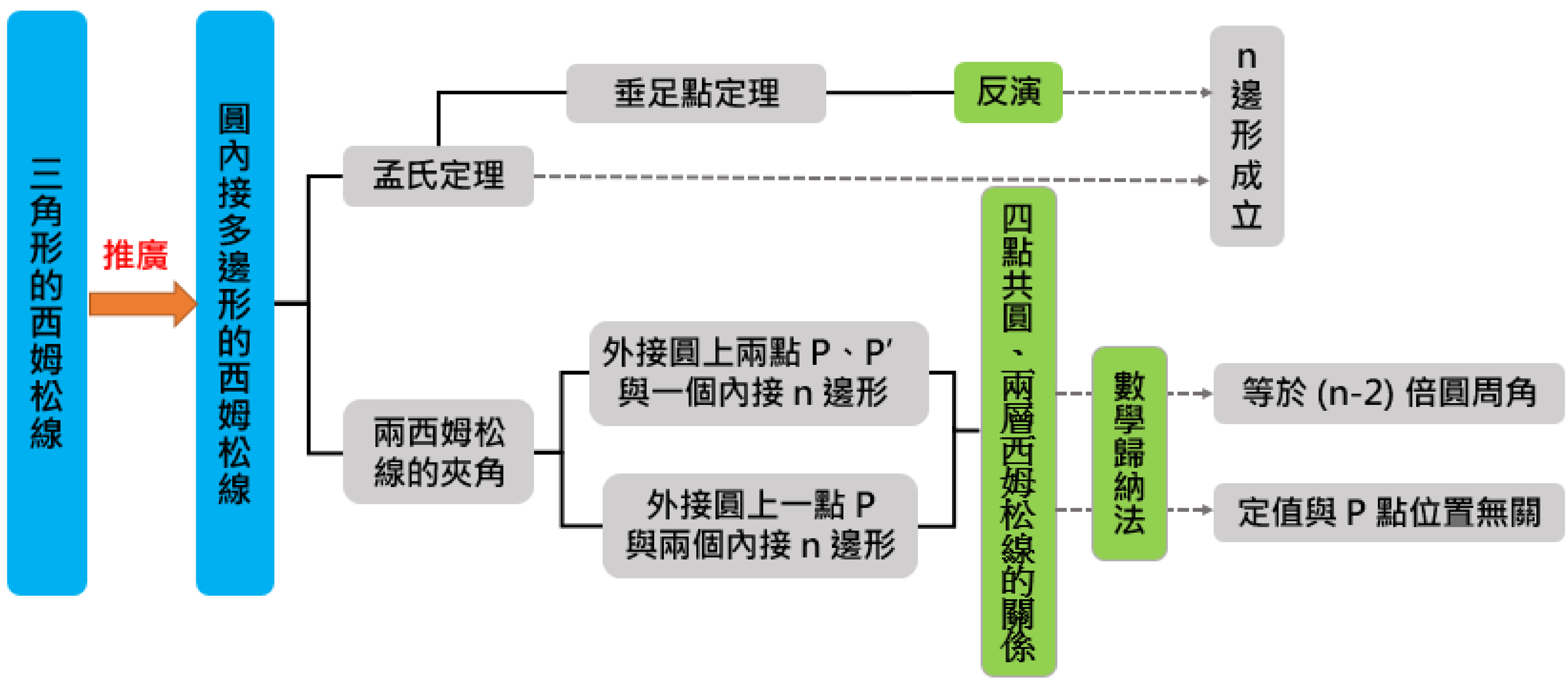
參、研究工具與研究特色

一、本研究主要利用***Geometer's Sketchpad***和***Geogebra***等電腦動態幾何軟體進行研究問題的**幾何實驗**。

二、本研究**聚焦於三角形的西姆松線性質**，當推廣至**圓內接n邊形時是否維持不變**？

肆、研究過程或方法

一、研究架構



二、名詞定義 ：k階垂足多邊形

如圖 1, P點關於多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的k階垂足多邊形為$A_{(k)1}A_{(k)2}A_{(k)3}\cdots A_{(k)n-1}A_{(k)n}$。

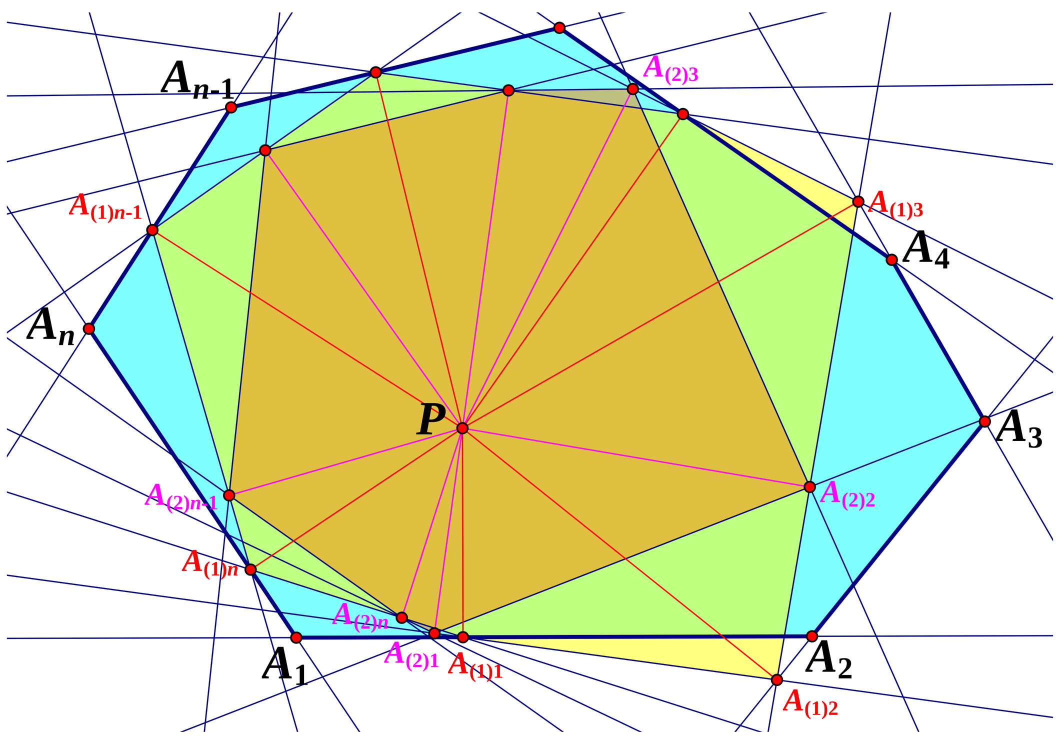


圖1

三、文獻探討與前置研究

(一)西姆松定理：如圖 2 ，在平面中，給定ΔABC，以及ΔABC外接圓上的一點P。則P分別對$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$、 $\overleftrightarrow{CA}$作的三個垂足N、L、M會共線。$\overleftrightarrow{MNL}$ 稱為ΔABC關於P點的西姆松線（*Simson line*）。

(二)孟氏定理：如圖 3 ，一直線分別截ΔABC的三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$或延長線於D、E、F，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ 。

(三)反演：如圖 4 ，設已給以O為反演中心，R為反演半徑的反演變換φ，A、B是任意兩異於O及O_∞的點，

且 $A'=\varphi(A)$，$B'=\varphi(B)$，則 $\overline{A'B'}=\frac{R^2}{\overline{OA}\times\overline{OB}}\times\overline{AB}$ 。

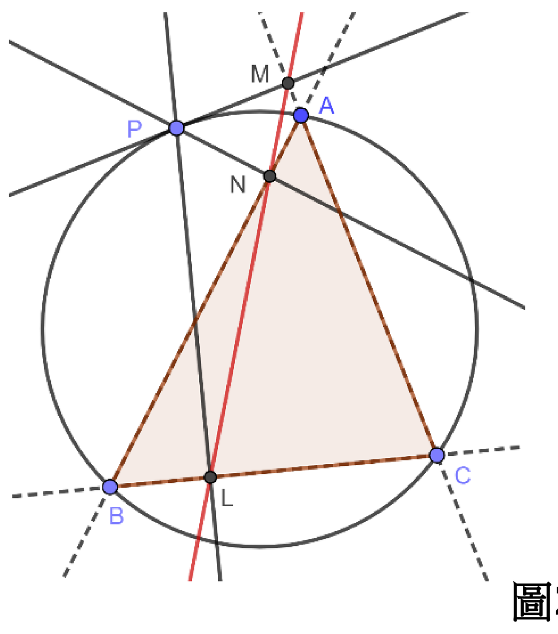


圖2

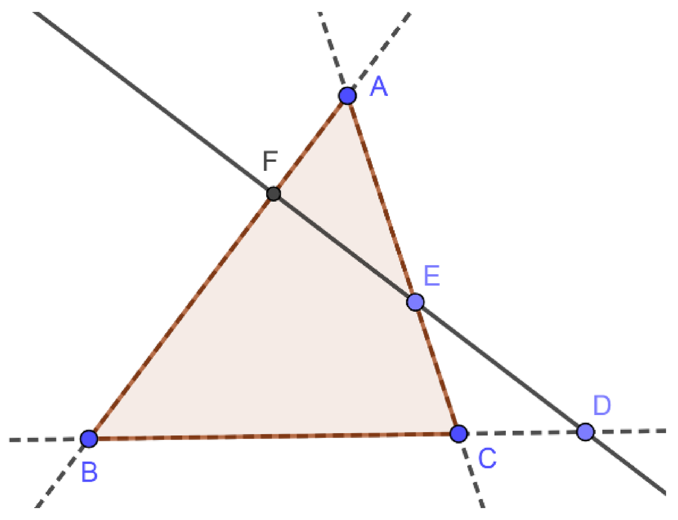


圖3

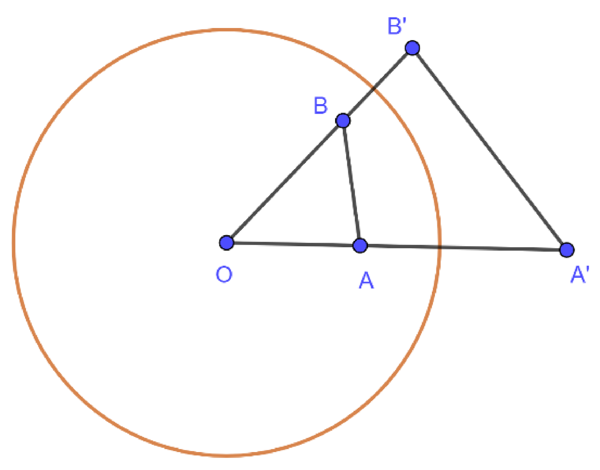


圖4

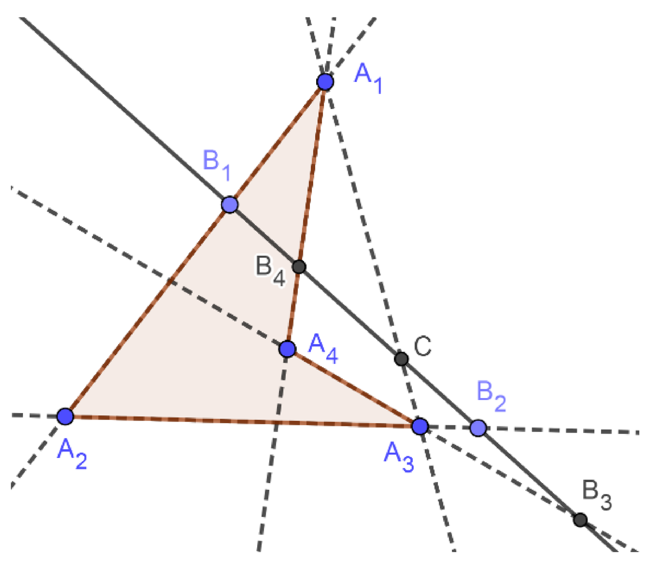


圖5

四、研究過程

引理1 (四邊形孟氏定理)

設$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，一直線分別截此四邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_4A_1}$或延長線於B_1、B_2、B_3、B_4，則 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{B_4A_1}}=1$ 。 如圖 5

引理2 (多邊形孟氏定理)

設$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$為任意n邊形，一直線分別截此n邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$ 或延長線於 B_1、B_2、…、B_{n-1}、B_n，

則 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}B_{n-1}}}{\overline{B_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{B_nA_1}}=1$ 。 如圖 6

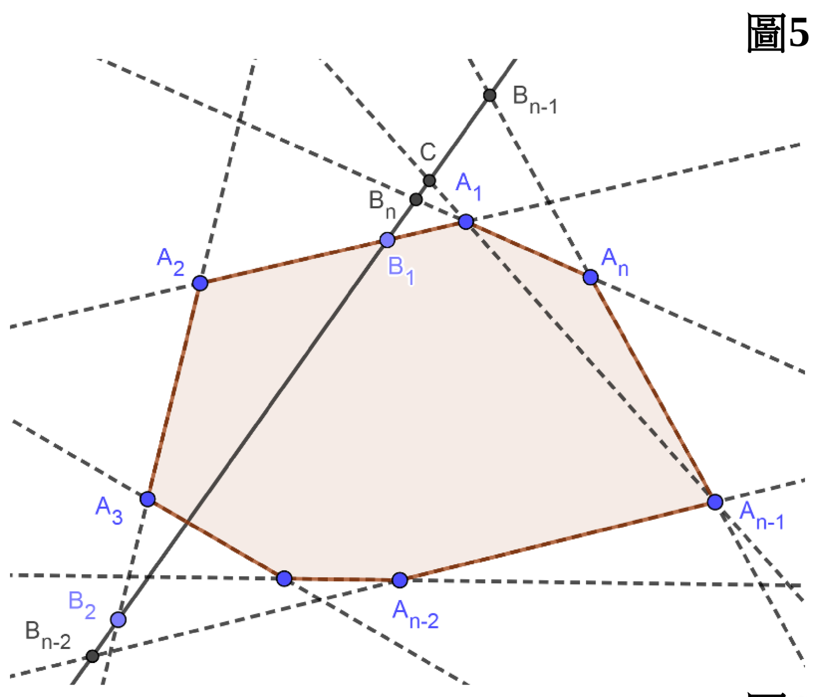


圖6

引理3 (圓內接四邊形的西姆松線定理)

外接圓上P點關於內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的二階垂足四邊形的四個頂點$A_{(2)1}$、$A_{(2)2}$、$A_{(2)3}$、$A_{(2)4}$會在同一直線上。這條直線叫做P點關於圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的西姆松線，可得$\frac{\overline{A_{(1)1}A_{(2)1}}}{\overline{A_{(2)1}A_{(1)2}}}\times\frac{\overline{A_{(1)2}A_{(2)2}}}{\overline{A_{(2)2}A_{(1)3}}}\times\frac{\overline{A_{(1)3}A_{(2)3}}}{\overline{A_{(2)3}A_{(1)4}}}\times\frac{\overline{A_{(1)4}A_{(2)4}}}{\overline{A_{(2)4}A_{(1)1}}}=1$ 。 如圖 7

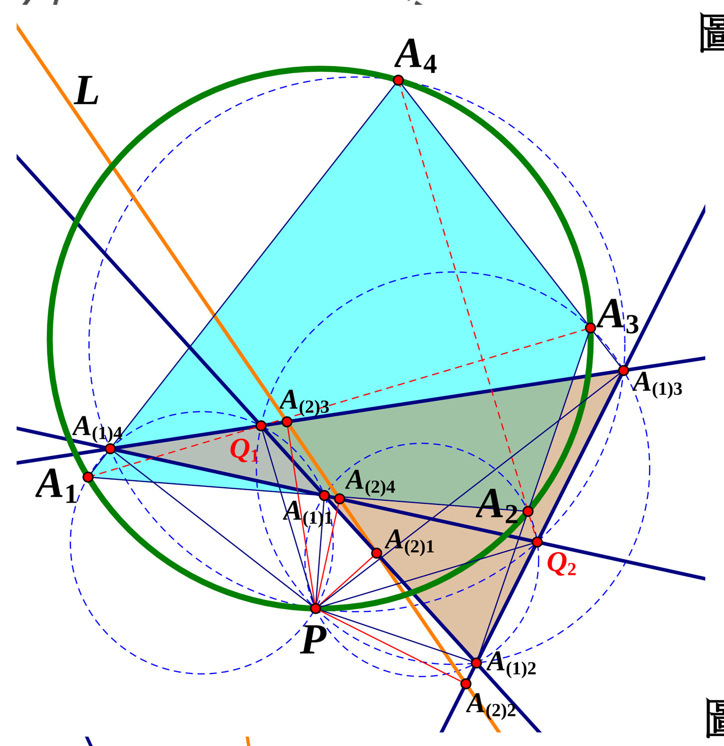


圖7

引理4 (圓內接五邊形的西姆松線定理)

外接圓上P點關於內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的三階垂足五邊形的五個頂點$A_{(3)1}$、$A_{(3)2}$、$A_{(3)3}$、$A_{(3)4}$、$A_{(3)5}$會在同一直線上。這條直線叫做P點關於圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的西姆松線，可得

$\frac{\overline{A_{(2)1}A_{(3)1}}}{\overline{A_{(3)1}A_{(2)2}}}\times\frac{\overline{A_{(2)2}A_{(3)2}}}{\overline{A_{(3)2}A_{(2)3}}}\times\frac{\overline{A_{(2)3}A_{(3)3}}}{\overline{A_{(3)3}A_{(2)4}}}\times\frac{\overline{A_{(2)4}A_{(3)4}}}{\overline{A_{(3)4}A_{(2)5}}}\times\frac{\overline{A_{(2)5}A_{(3)5}}}{\overline{A_{(3)5}A_{(2)1}}}=1$。 如圖 8

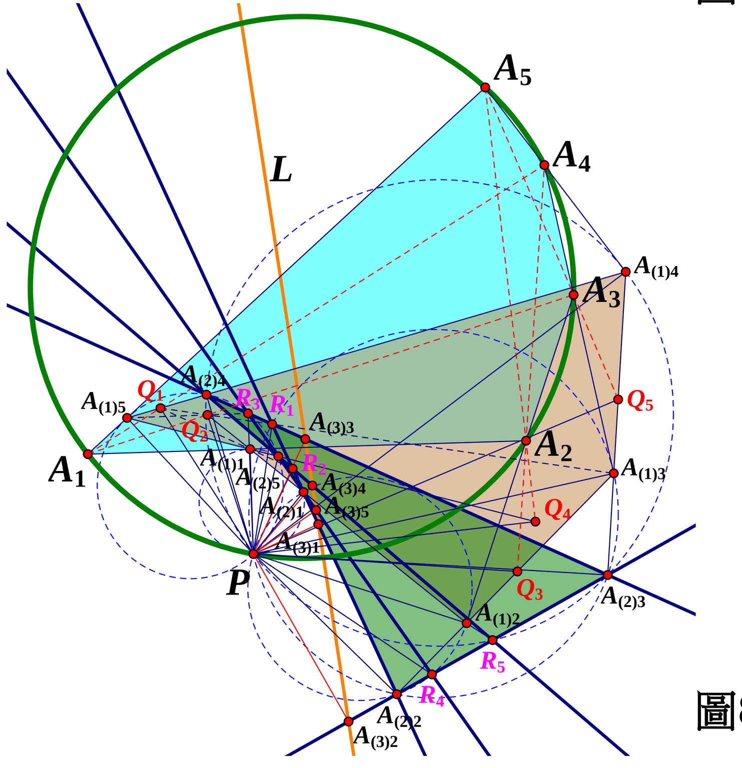


圖8

引理5 (圓內接多邊形的西姆松線定理)

外接圓上P點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的(n-2)階垂足n邊形的n個頂點 $A_{(n-2)1}$、$A_{(n-2)2}$、⋯、$A_{(n-2)n-1}$、$A_{(n-2)n}$會在同一直線上。這條直線叫做P點關於圓內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的西姆松線，可得

$$\frac{\overline{A_{(n-3)1}A_{(n-2)1}}}{\overline{A_{(n-2)1}A_{(n-3)2}}}\times\frac{\overline{A_{(n-3)2}A_{(n-2)2}}}{\overline{A_{(n-2)2}A_{(n-3)3}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{(n-3)n-1}A_{(n-2)n-1}}}{\overline{A_{(n-2)n-1}A_{(n-3)n}}}\times\frac{\overline{A_{(n-3)n}A_{(n-2)n}}}{\overline{A_{(n-2)n}A_{(n-3)1}}}=1。$$

如圖 9

定理1 (圓內接多邊形的垂足點定理)

設外接圓上P點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足為 $A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、⋯、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$，

則 $\frac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\frac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}A_{(1)n-1}}}{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}}=1$。

如圖 10

定理2 (三角形的西姆松線夾角定理)

設外接圓上兩點P、P′點關於內接三角形$\Delta A_1A_2A_3$的西姆松線為L、L′，則其夾角正好為P、P′兩點所對的圓周角。

如圖 11、12

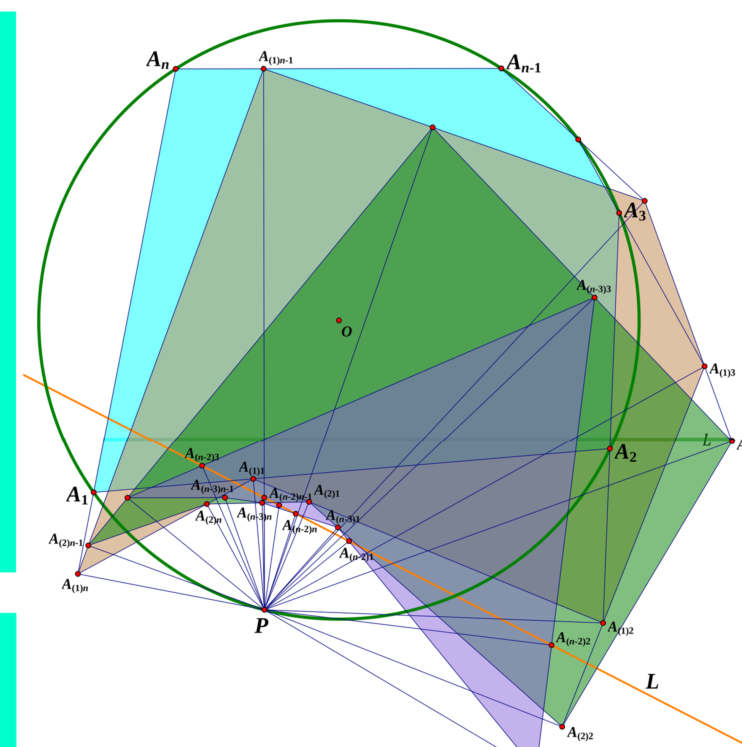


圖 9

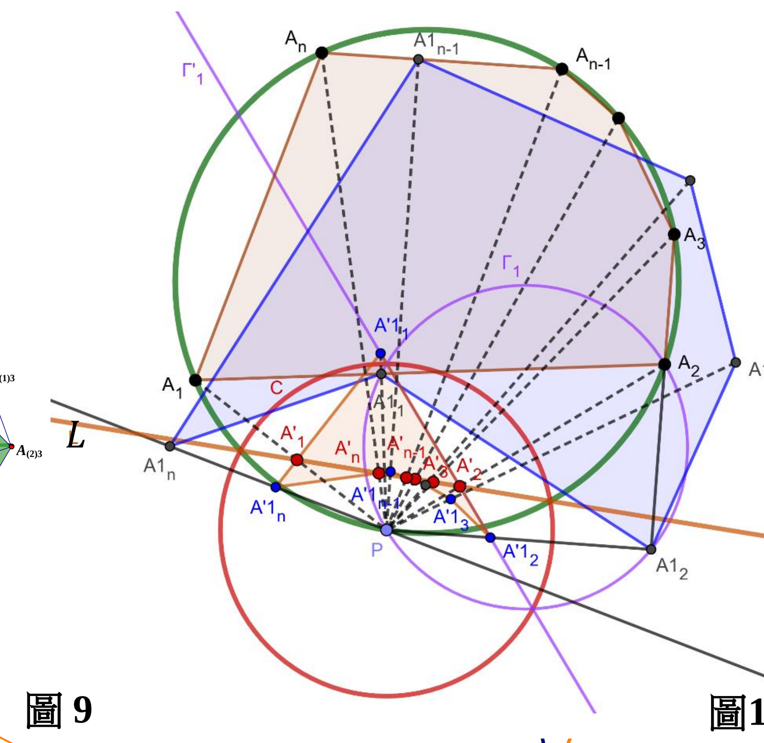


圖10

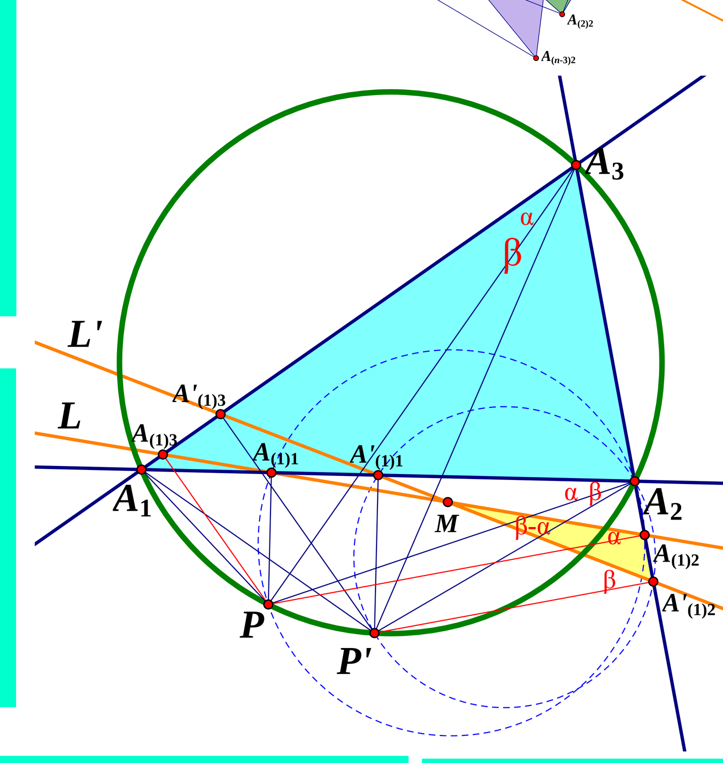


圖11

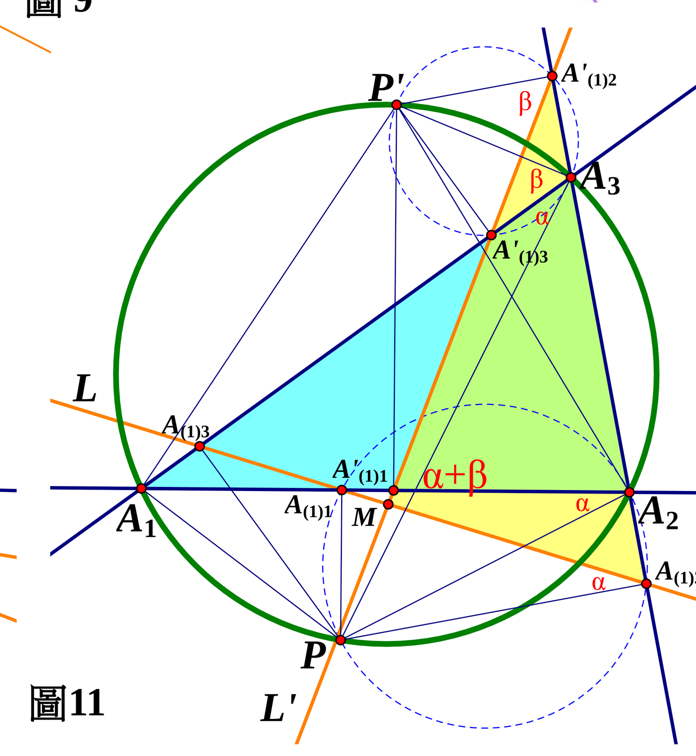


圖12

定理3 (圓內接四邊形的西姆松線夾角定理)

設外接圓上兩點P、P′點關於一內接四邊形的西姆松線為L、L′，則其夾角正好為P、P′兩點所對的圓周角的2倍。

如圖 13

定理4 (圓內接五邊形的西姆松線夾角定理)

設外接圓上兩點P、P′點關於一內接五邊形的西姆松線為L、L′，則其夾角正好為P、P′兩點所對的圓周角的3倍。

如圖 14

定理5 (圓內接多邊形的西姆松線夾角定理)

設外接圓上兩點P、P′點關於一內接n邊形的西姆松線為L、L′，則其夾角正好為P、P′兩點所對的圓周角的(n-2)倍。

如圖 15

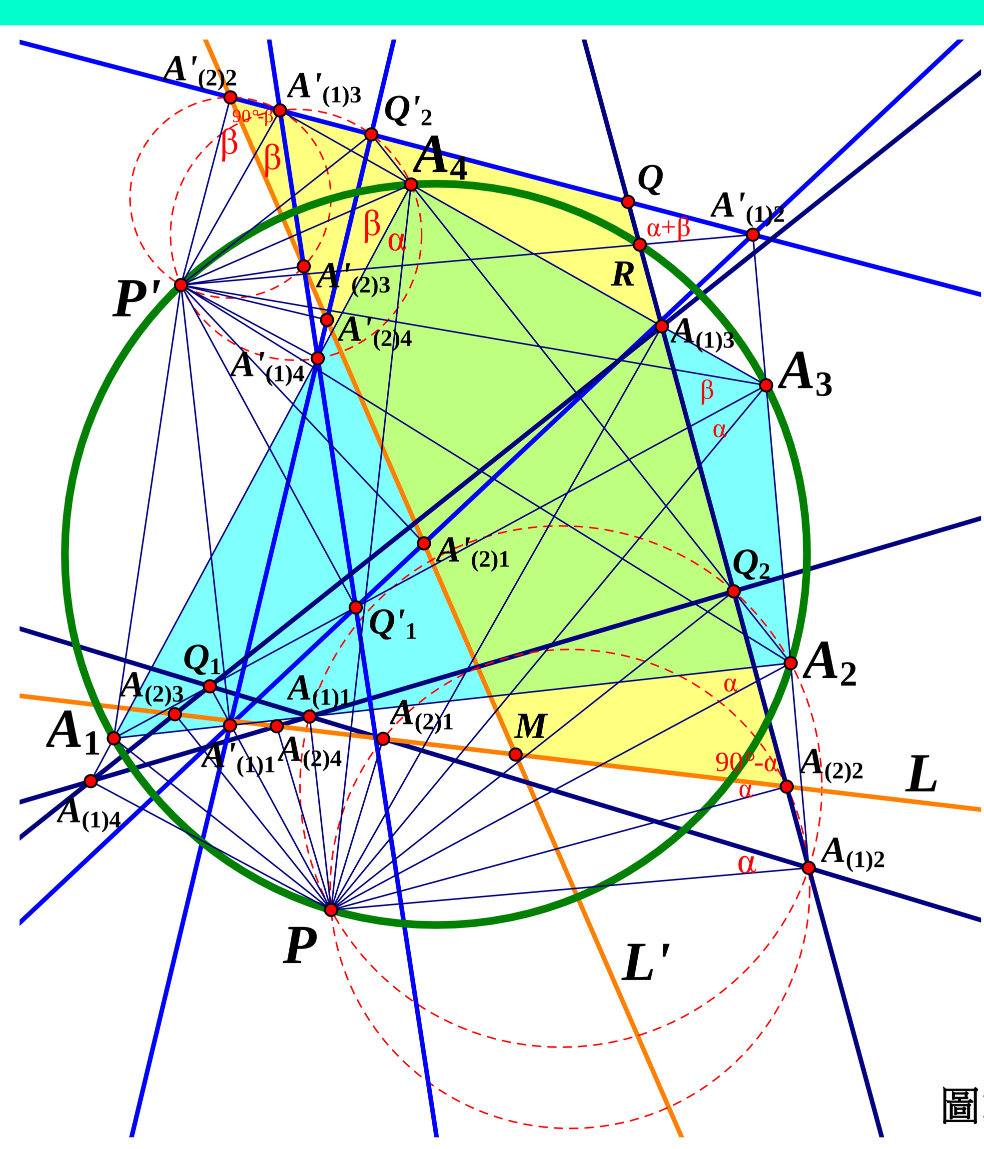


圖13

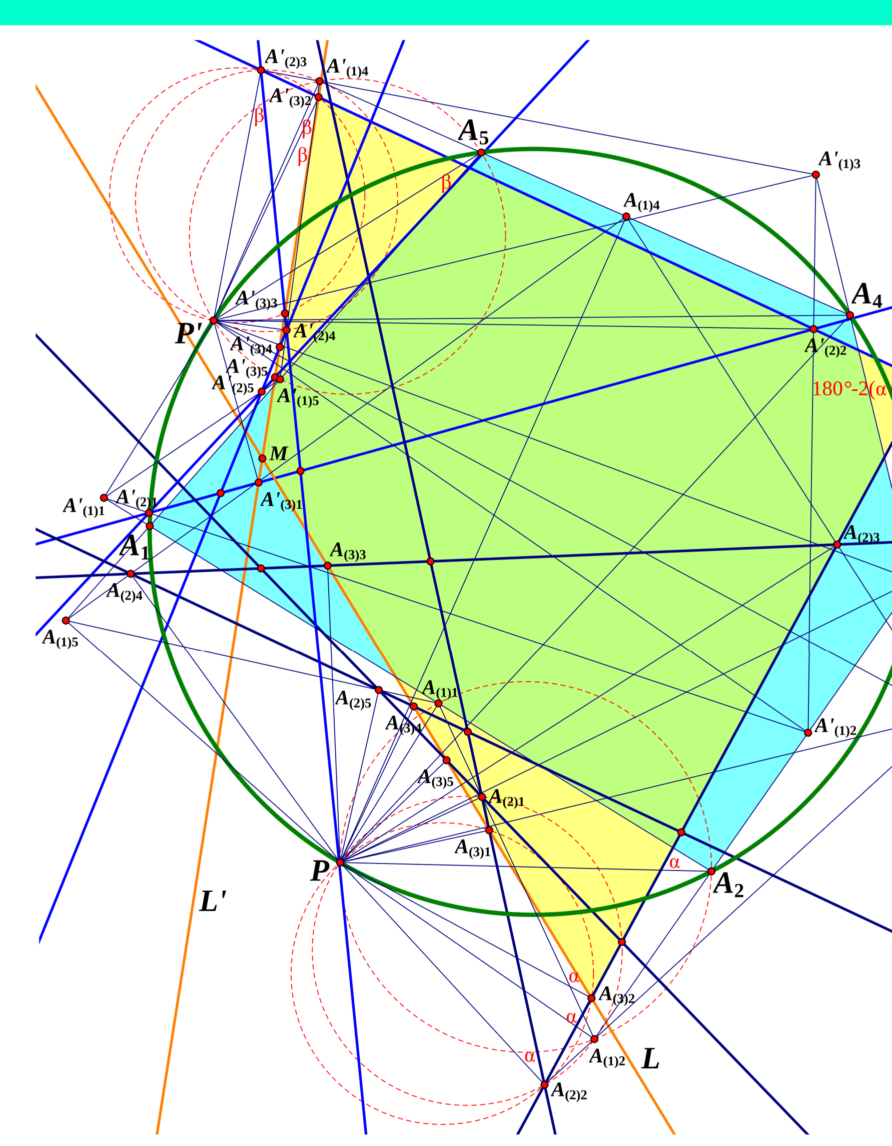


圖14

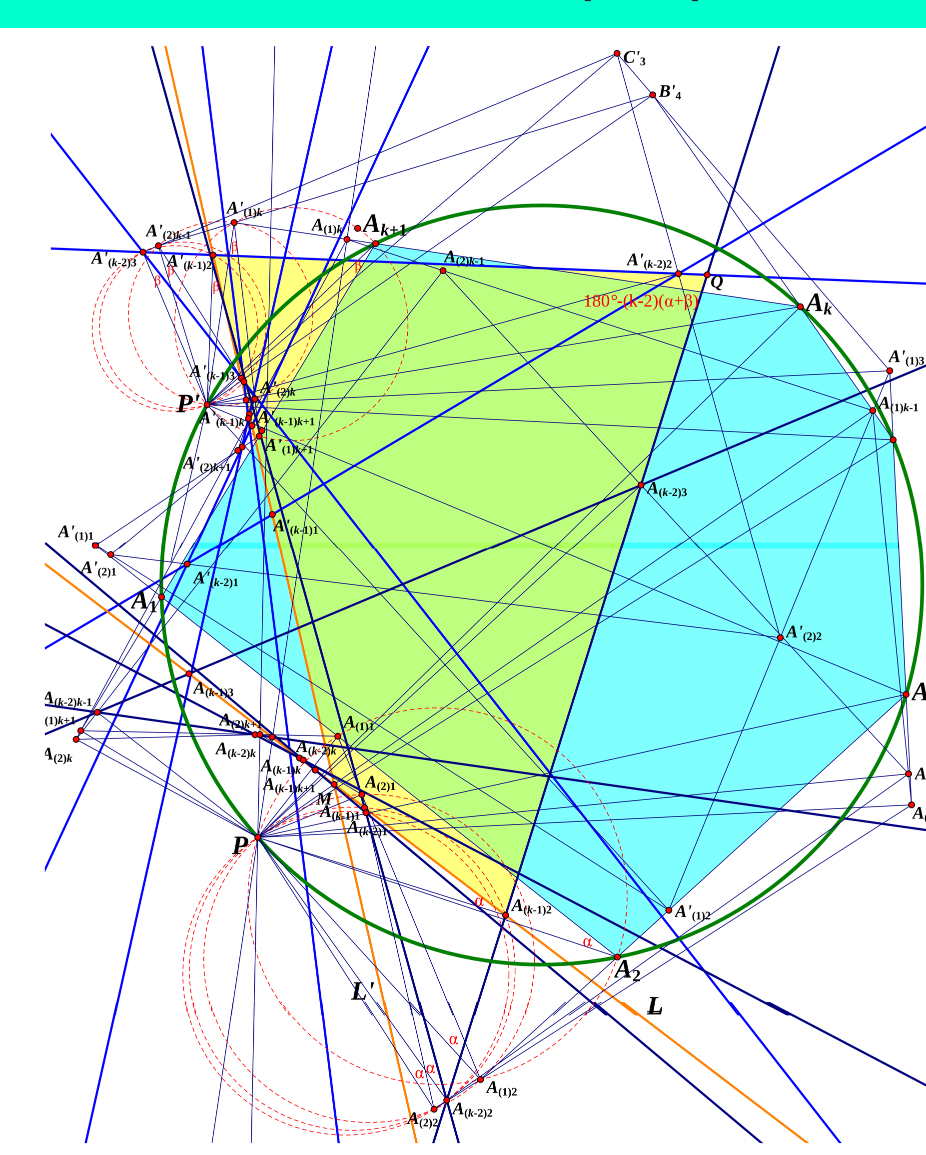


圖15

定理6 (三角形的西姆松線定夾角定理)

設外接圓上P點關於兩相異內接三角形的西姆松線為L、L′，則其夾角為定值，跟P點的位置無關。

如圖 16

定理7 (圓內接四邊形的西姆松線定夾角定理)

設外接圓上P點關於兩相異內接四邊形的西姆松線為L、L′，則其夾角為定值，跟P點的位置無關。

如圖 17

定理8 (圓內接五邊形的西姆松線定夾角定理)

設外接圓上P點關於兩相異內接五邊形的西姆松線為L、L′，則其夾角為定值，跟P點的位置無關。

如圖 18

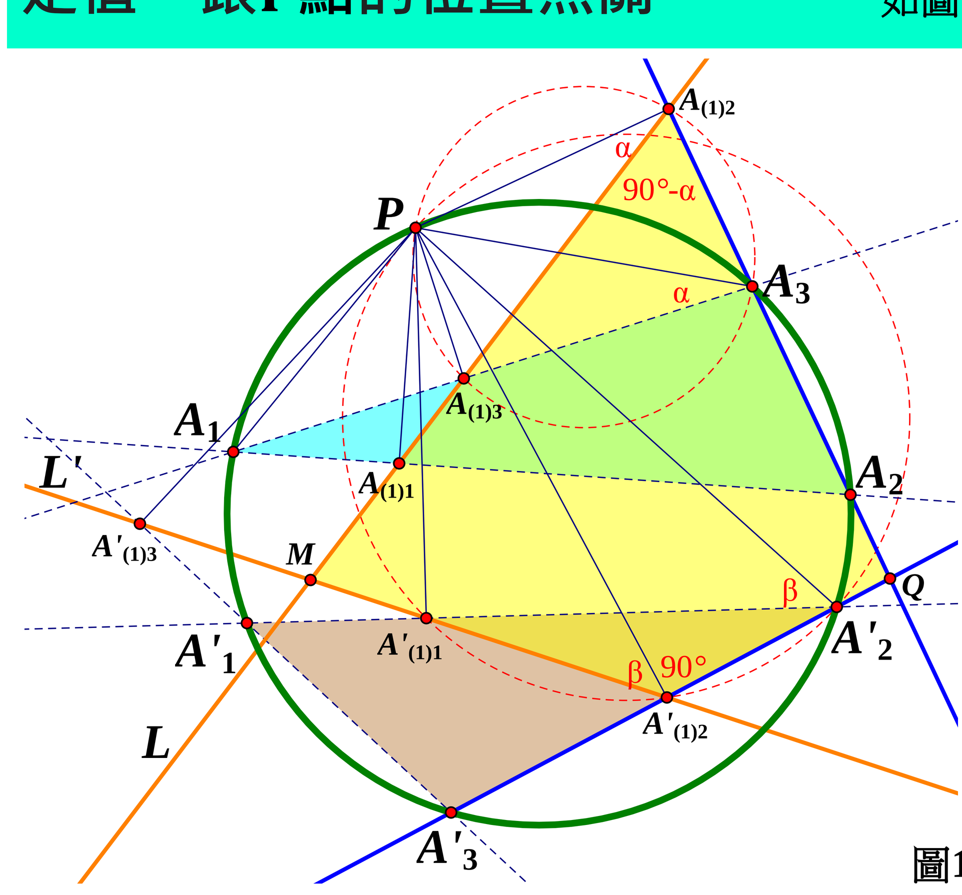


圖16

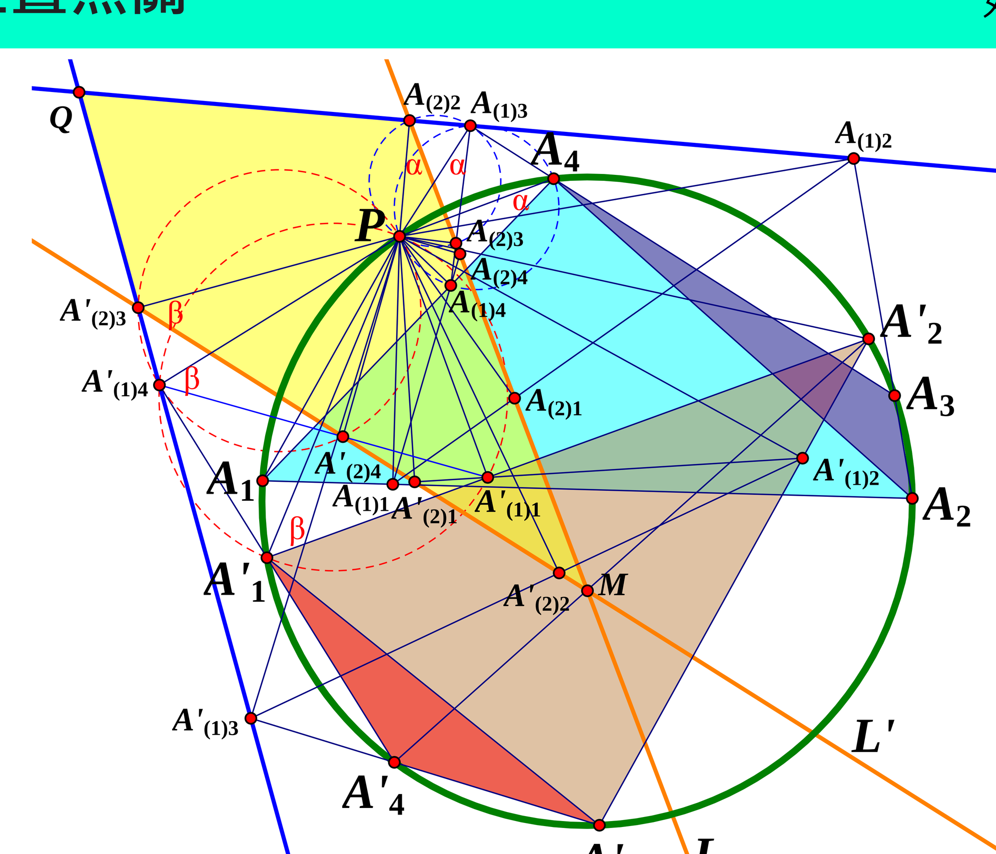


圖17

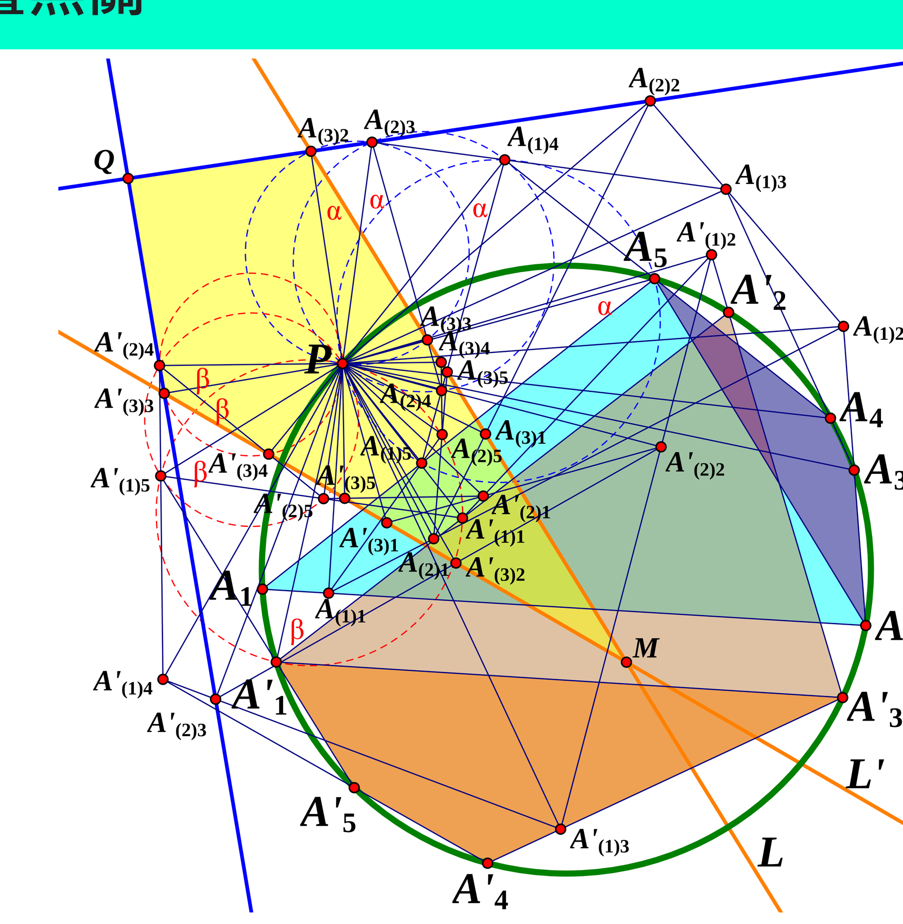


圖18

定理9 (圓內接多邊形的西姆松線定夾角定理)

設外接圓上P點關於兩內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則其夾角為定值，跟P點的位置無關。

如圖 19

伍、研究討論

一、外接圓上P點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、⋯、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$不會共線，但會滿足

$\frac{\overline{A_1A_{(1)1}}}{\overline{A_{(1)1}A_2}}\times\frac{\overline{A_2A_{(1)2}}}{\overline{A_{(1)2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}A_{(1)n-1}}}{\overline{A_{(1)n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nA_{(1)n}}}{\overline{A_{(1)n}A_1}}=1$，此結論與多邊形孟氏定理一致。

我們發現用反演變換可以解釋這個現象。

二、設外接圓上兩點P、P′點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則其夾角正好為 P、P′兩點所對的圓周角的(n-2)倍。隨著$\overset{\frown}{PP'}$的度數逐漸

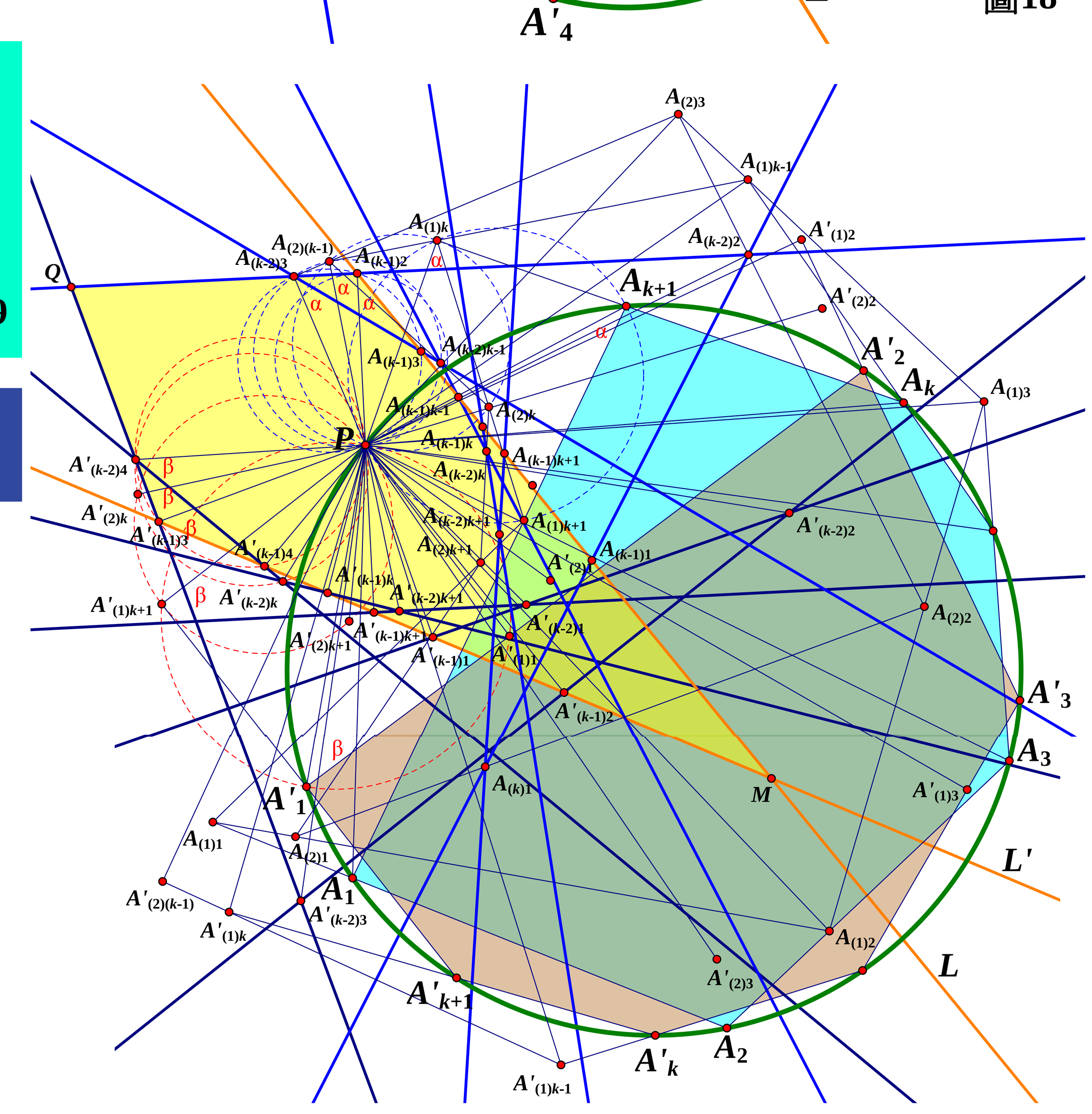


圖19

增加，則兩西姆松線 L、L′的夾角$\frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}$也會隨之增加，從而 L、L′會不斷地旋轉，最後兩西姆松線的其一夾角 $\emptyset = \frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'} - 180°k(k\in \mathbb{N})$，故會滿足 $\emptyset \equiv \frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'} (\text{mod } 180°)$。

三、設外接圓上P點關於兩內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n(n\geq 4)$的西姆松線分別為L、L′，則其夾角為定值。若考慮兩多邊形在外接圓上兩兩對應點所成的劣弧，則其值正好是其所對的n組$\frac{1}{2}\widehat{A_iA'_j}$中，(n-1)組取正值、一組取負值的總和。在本文中兩內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n$的頂點排序，前者逆時針、後者順時針，並考慮P點在$\widehat{A_1A_n}$上，可得兩西姆松線L、L′其一夾角如下：

(1)n=4時，$180° - \angle A_{(2)2}MA'_{(2)3} = \frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2} + \widehat{A_2A'_3} + \widehat{A_3A'_4} - \widehat{A_4A'_1}\right)$；

(2)n=5時，$180° - \angle A_{(3)2}MA'_{(3)3} = \frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2} + \widehat{A_2A'_3} + \widehat{A_3A'_4} + \widehat{A_4A'_5} - \widehat{A_5A'_1}\right)$

利用數學歸納法可得：$180° - \angle A_{(n-2)2}MA'_{(n-2)3} = \frac{1}{2}\left(\widehat{A_1A'_2} + \widehat{A_2A'_3} + \cdots + \widehat{A_{n-1}A'_n} - \widehat{A_nA'_1}\right)$。

四、本文中所討論的圓內接多邊形皆為凸多邊形，其實圓內接蝶形多邊形也有西姆松線。如圖20、21，圓內接蝶形四邊形、蝶形五邊形也有西姆松線，其證明方法和圓內接凸四邊形、凸五邊形完全一致。

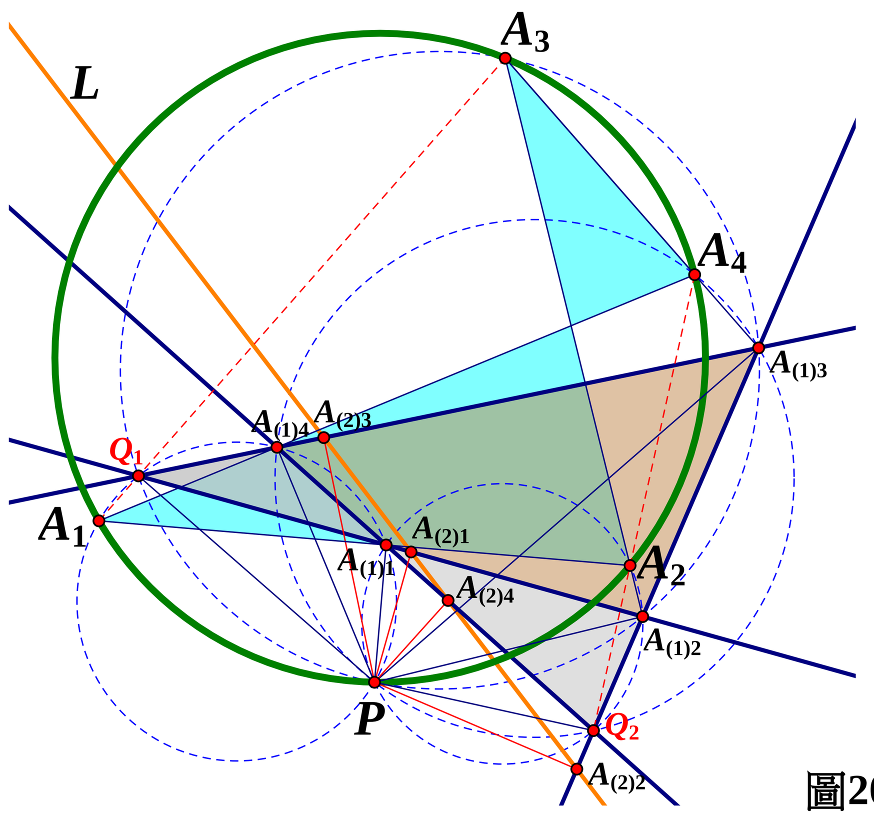


圖20

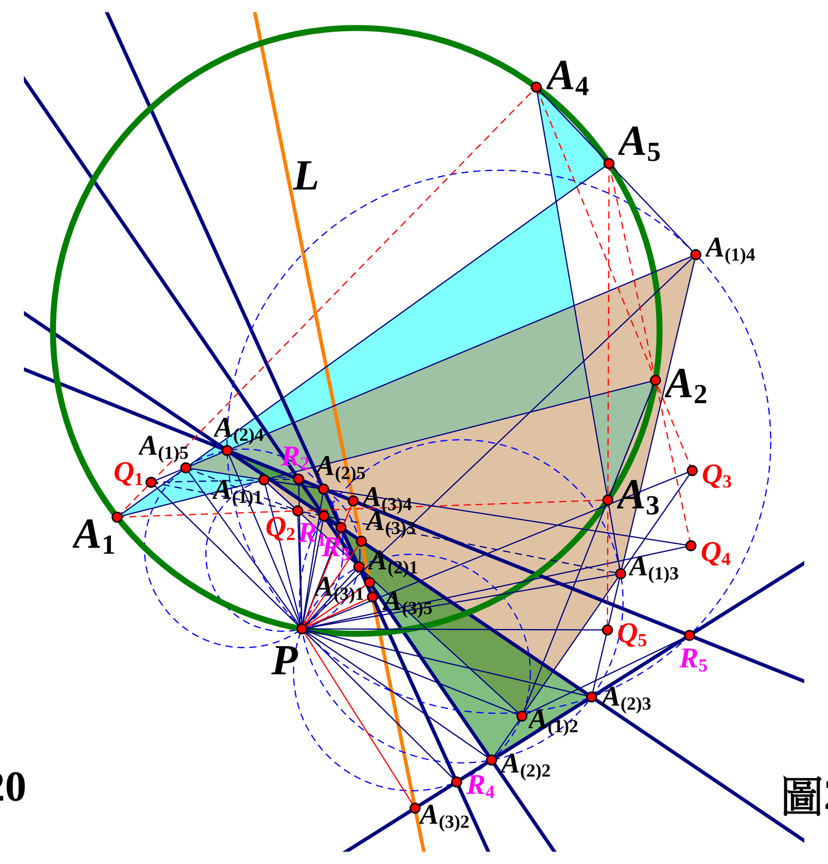


圖21

五、從文獻[3]得知：如圖22，設$\Delta A_1A_2A_3$的垂心為H，則P點關於$\Delta A_1A_2A_3$的西姆松線和$\overline{PH}$的交點M為$\overline{PH}$的中點，且此中點M在九點圓上。如果考慮圓內接四邊形四頂點中任取三頂點可得四個三角形，因此可得四個三角形的垂心，而此時這四個垂心會共圓，不妨就定義圓內接四邊形的垂心就是過此四點之圓(垂心圓)的圓心。依此類推，就可以定義圓內接多邊形的垂心。如圖23，設圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的垂心為H，但P點關於圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的西姆松線和$\overline{PH}$的交點N並不是$\overline{PH}$的中點M。如果圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的兩對角線互相垂直，且X、Y、Z、W是各邊中點，作$\overline{XX'}$、$\overline{YY'}$、$\overline{ZZ'}$、$\overline{WW'}$分別垂直於對邊，得到垂足點X′、Y′、Z′、W′，則X、Y、Z、W、X′、Y′、Z′、W′這八點共圓。但此中點M也不在八點圓上。

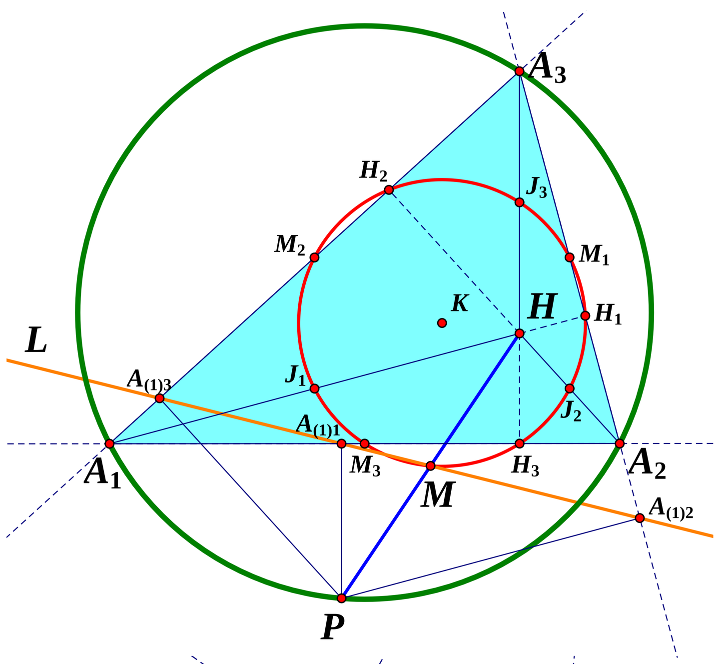


圖22

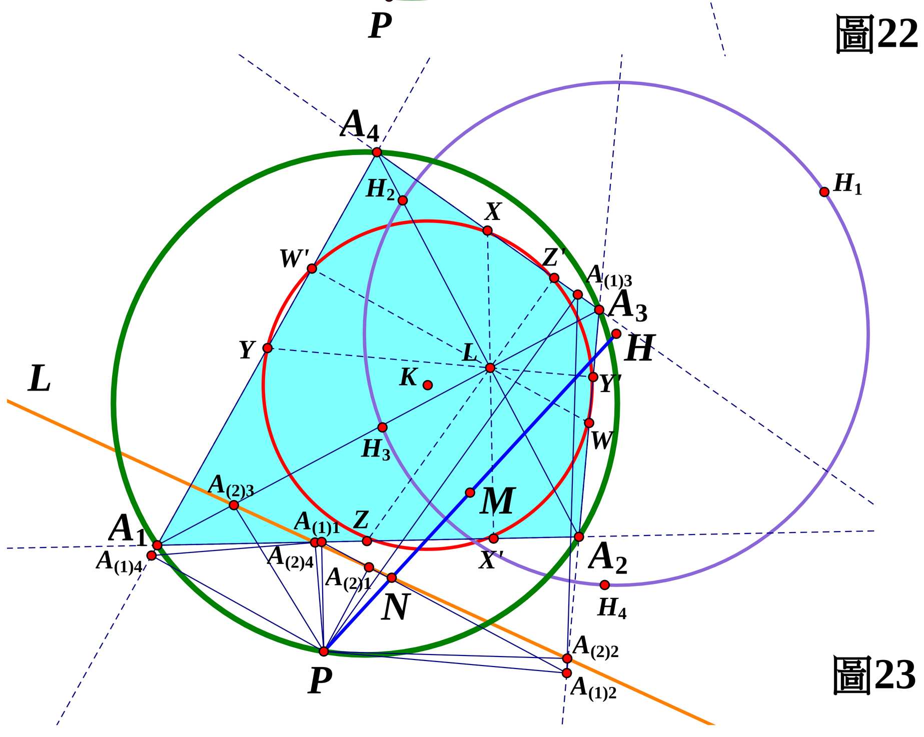


圖23

陸、研究結果與結論

一、設$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$為任意n邊形，一直線分別截此n邊形的邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$或延長線於$B_1$、$B_2$、…、$B_{n-1}$、$B_n$，則$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\times\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\times\cdots\times\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{B_{n-1}A_n}\times\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1$。(多邊形孟氏定理)

二、外接圓上P點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的(n-2)階垂足n邊形的n個頂點$A_{(n-2)1}$、$A_{(n-2)2}$、…、$A_{(n-2)n-1}$、$A_{(n-2)n}$會在同一直線上。這條直線叫做P點關於圓內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$的西姆松線，可得$\frac{A_{(n-3)1}A_{(n-2)1}}{A_{(n-2)1}A_{(n-3)2}}\times\frac{A_{(n-3)2}A_{(n-2)2}}{A_{(n-2)2}A_{(n-3)3}}\times\cdots\times\frac{A_{(n-3)n-1}A_{(n-2)n-1}}{A_{(n-2)n-1}A_{(n-3)n}}\times\frac{A_{(n-3)n}A_{(n-2)n}}{A_{(n-2)n}A_{(n-3)1}}=1$。(圓內接多邊形的西姆松線定理)

三、設外接圓上P點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$各邊的垂足為$A_{(1)1}$、$A_{(1)2}$、…、$A_{(1)n-1}$、$A_{(1)n}$，則$\frac{A_1A_{(1)1}}{A_{(1)1}A_2}\times\frac{A_2A_{(1)2}}{A_{(1)2}A_3}\times\cdots\times\frac{A_{n-1}A_{(1)n-1}}{A_{(1)n-1}A_n}\times\frac{A_nA_{(1)n}}{A_{(1)n}A_1}=1$。(圓內接多邊形的垂足點定理)

四、設外接圓上兩點P、P′點關於內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則其夾角∅正好為P、P′兩點所對的圓周角的(n-2)倍。即 $\emptyset \equiv \frac{(n-2)}{2}\widehat{PP'}(\text{mod } 180°)$。(圓內接多邊形的西姆松線夾角定理)

五、設外接圓上P點關於兩內接n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$、$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_{n-1}A'_n(n\geq 4)$的西姆松線為L、L′，則其夾角為定值，跟P點的位置無關。(圓內接多邊形的西姆松線定夾角定理)

柒、參考文獻資料

[1] 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，39~51、204~212，2000年09月。

[2] 張景中著。幾何新方法和新體系。科學出版社，97~99、122~130，2016年11月。

[3] Simson Line from Wolfram Mathworld https://mathworld.wolfram.com/SimsonLine.html。

[4] 嚴鎮軍著。反射與反演。九章出版社，42~72，2002年09月。

[5] 洪嘉佑、彭昇禾、汪俞宏。複數平面解析應用 - 西姆松線之交點軌跡性質探討。第61屆全國中小學科展高中組數學科作品，2021。

[6] 陳雲淇、李書帆、黃威瑀。多邊形與西姆松線的研究與深入探討。第62屆全國中小學科展高中組數學科作品，2022。