

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

佳作

050414

領域展開-Dual graph 解 Hamilton cycle 在平面圖上的存在性問題

學校名稱： 國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 林晉源	魏安孜

關鍵詞： 對偶圖、漢米爾頓迴圈、平面圖

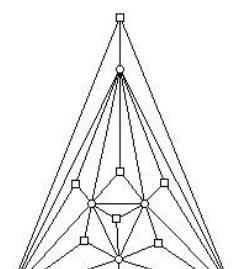
摘要

本研究以對偶圖的性質，取代以往著重點或邊數量的方法，探討平面圖中漢米爾頓迴圈的存在性。我們設計一套定理，判斷對偶圖對應之原圖是否存在漢米爾頓迴圈，並提出「T 搜索」，有效降低電腦計算的時間複雜度。此外，我們建立多項化簡定理，能在不影響迴圈存在與否的前提下，透過邊、點的替換與收縮，或圖的結構分解來簡化圖形。研究中也討論 *Herschel Graph* 與 *Tutte's Graph*，並提出當圖中出現特定結構時，原圖不具漢米爾頓迴圈的判別條件。最後，成果可用於構造具漢米爾頓迴圈平面圖之對偶圖，並期望數學方法推導出無漢米爾頓迴圈的平面圖，或用電腦窮舉所有無漢米爾頓迴圈平面圖之對偶圖，以便延伸討論。

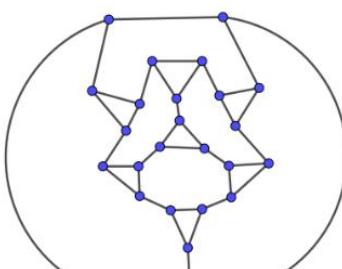
壹、前言（研究動機）

在國三的時候，在宜蘭縣內做了一篇科展報告，篇名為「Untangle Game」—遊戲中的數學，內文中提到的「環狀程式解題法」必定需要找到漢米爾頓迴圈。無向漢米爾頓迴圈對目前來說為 **NP-complete** 問題，則是否存在一種特徵或簡化方法，目前透過動態規劃也只能將時間複雜度壓縮到 $O(2^n \times n^3)$ ，且目前已有很多定理如 **狄拉克定理**、**歐爾定理**、**波紹定理** 等等利用點的度數探討存在漢米爾頓迴圈的必要條件，卻無充分條件，可觀上來說研究難度並不低。

並且我發現當初報告書的內容並不嚴謹，例如在其中提到「若平面圖 G 滿足 $e \geq 3v - 8$ ，則其必定存在漢米爾頓迴圈」這個敘述是錯的，下圖提供一個反例與其對偶圖，套用本篇報告書推論三即可得證。



圖一



圖二

貳、研究工具及器材

1. 平板記錄軟體 Goodnotes 6

2. 幾何繪圖軟體 Geogebra 5

參、研究的先備知識

一、平面圖的基本定義

圖 $G = (V(G), E(G), F(G))$ ，其中 $V(G)$ 為點集合， $E(G)$ 為邊集合， $F(G)$ 為平面集合，並且我們以 $|V|, |E|, |F|$ 分別描述其集合長度，即點的數量、線的數量、平面的數量。

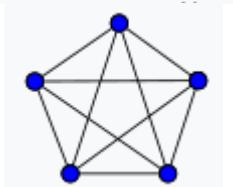
二、平面圖 Planar graph

平面圖是可以畫在平面上並且使得不同的邊可以互不交疊的圖。而如果一個圖無論怎樣都無法畫在平面上，並使得不同的邊互不交疊，那麼這樣的圖不是平面圖，或者稱為非平面圖。

右上圖為一種平面圖，右下圖 K_5 為非平面圖。



圖三

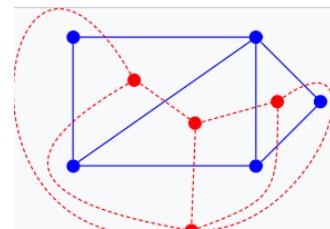


圖四

三、對偶圖 Dual graph

若對於一張平面圖 G ，令其平面集合 $F(G) = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ ，且對於任兩平面 F_n, F_m 若共邊，在集合 S 中便有 $F_{n,m} \in S$ ，反之沒有。

則其對偶圖 G' 點集合為 $V(G') = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ ，滿足若有 $F_{n',m'} \in S$ 存在於 S 集合中，則 $V_{n'}$ 與 $V_{m'}$ 相鄰。右圖藍色為圖 G ，紅色為 G' 。

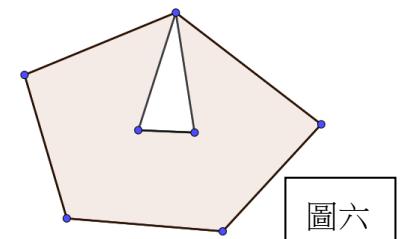


圖五

四、面 (平面) Face

對於平面圖中，任取一個封閉區域，我們稱其為一個面或平面，例如右圖的著色區域為一個平面。

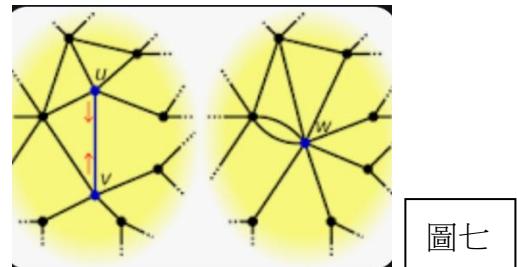
注意：此時的平面與幾何平面完全無關，顯然不具向量，僅與圖論中平面圖的封閉區域有關。



圖六

五、邊收縮

令相鄰的兩點 P_1, P_2 分別相鄰的點集合為 S_1, S_2 ，將 P_1, P_2 以 P 點取代並且滿足 P 相鄰的點集合為 $S_1 \cup S_2$ ，其中 $S_1 \cap S_2$ 中的點與 P 以重線連接。



圖七

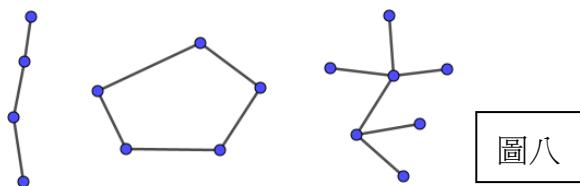
六、路徑 Path、迴圈 Cycle、樹 Tree

若圖 G 點集合為 $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ，若其邊集合恰為 $E(G) = \{E_{1,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n-1,n}\}$ ，則圖 G 為一條路徑。

若圖 G 點集合為 $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ，若其邊集合恰為 $E = \{E_{1,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n-1,n}, E_{1,n}\}$ ，則圖 G 為一個迴圈。

若圖 G 為不存在任意迴圈的連通圖，則圖 G 為一個樹。

下圖分別路徑、迴圈、樹。



圖八

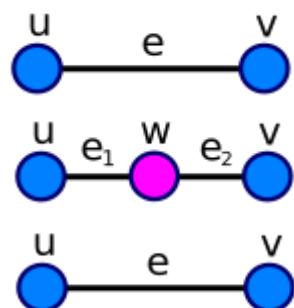
七、歐拉公式

平面圖滿足 $f = e - v + 2$ ，其中 f, e, v 分別代表面數、邊數、點數。

順帶一提，對於任意平面圖皆滿足 $e \leq 3v - 6$ ，反之若違背此式，則圖為非平面圖。

八、細分和平滑（來自維基百科）

例如現在有一條邊，記作 e ，其由頂點 u 和 v 組成，記為 $\{u, v\}$ ；透過細分變換，產生了新的頂點 w ，將 e 分割成兩條邊，分別記為 e_1 和 e_2 ，皆連到新頂點 w ；而細分變換存在逆變換，稱為平滑（smoothing）變換。細分變換的結果套用平滑變換會形成原像。



圖九

九、原圖的對偶圖之對偶圖等價於原圖

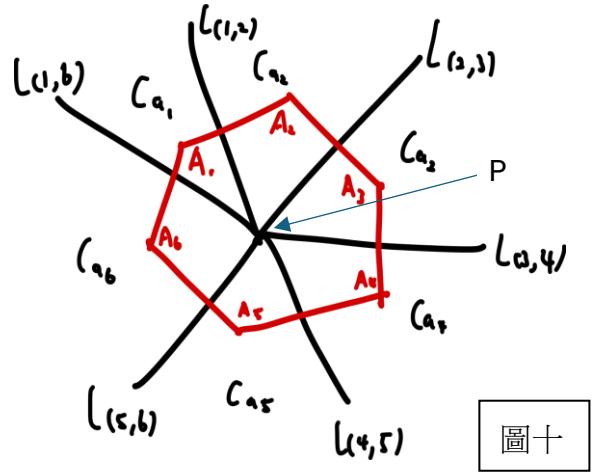
#說明：(這是已知的事，但為了後續探究更多性質，解釋一次。)

不失一般性假設有平面 C_{a_1} 與 C_{a_2} 以邊 $L_{(1,2)}$ 共邊，接著 C_{a_k} 與 $C_{a_{k+1}}$ 以 $L_{(k,k+1)}$ 共邊，直到最後 C_n 與 C_1 以 $L_{(1,n)}$ 共邊。如右下圖：

(C_k 為平面， A_k 為點。圖的正中心點為 P 。)

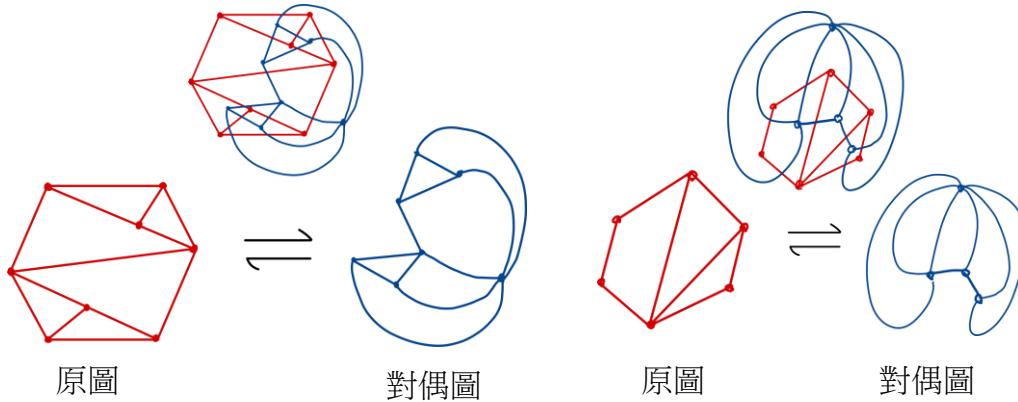
我們進行一次對偶，將 C_k 轉換成 A_k 此時
我們會發現： C_{a_k} 與 $C_{a_{k+1}}$ 以 $L_{(k,k+1)}$ 共
邊，被轉換成 A_k 與 A_{k+1} 相鄰，且必會構
成唯一的迴圈，組成的點為 $A_1 \sim A_n$ 。

那我們再進行一次對偶，唯一迴圈被轉
換為點 P' ，又由於 A_k 與 A_{k+1} 相鄰，所以
點 P' 必會向外連出所有 $L_{(k,k+1)}'$ ，與此同
時，畫出現也分割了所有區域 C_{a_k}' ，故
對偶後兩次，此局部區域無異於原圖。



圖十

由上述可知，進行兩次對偶後， P 點與 C_k 的關聯性與原圖相同。又因將中心 P 點
帶入原圖中的任意點皆會成立，故得證。下圖為兩例子。



圖十一

接著為了後續相關證明，我們首先排除存在 $\deg = 1$ 的平面圖，因為其必不可
能包含漢米爾頓迴圈，故後只討論對於任意點皆滿足 $\deg \geq 2$ 的平面圖。

參、研究方法與結果

定理一：對於任意平面圖 G ，存在一個迴圈 C ， C 分割出的內部圖與外部圖皆各自為連通圖。

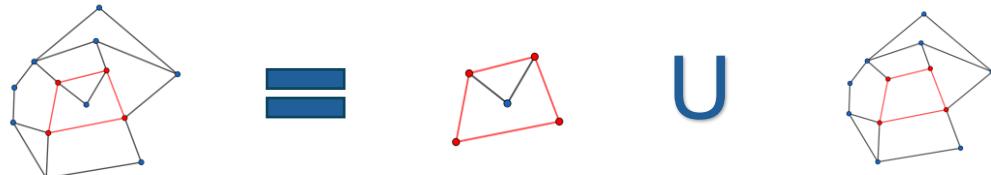
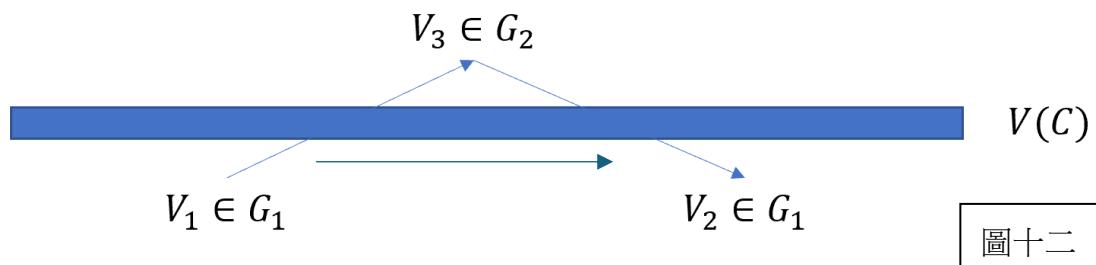
證明：主定理會使用到（雖然是顯然的）。

假設迴圈 C 內為圖 G_1 ，外為圖 G_2 （注意： $G_1 \cap G_2 \cap C = C$ ）。由於原圖 G 為連通圖，因此對於任兩點 $V_1 \in V(G), V_2 \in V(G)$ ，在圖 G 上皆存在一條路徑 P 使得 $V_1 \in P, V_2 \in P$ 。

由於我們要證明迴圈內外各自連通，因此我們假設 $V_1, V_2 \in G_1$ ，並且在存在一條路徑 $V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_3 \rightarrow \dots \rightarrow V_2$ 。我們發現如果 $V_3 \in G_2$ ，則我們不能說明 V_1 與 V_2 在 G_1 上必定連通。

路徑有順序之分。由此可知若有區段如 $X—Y—Z$ ，其中 $X \in V(G_1 - C), Z \in V(G_2 - C)$ ，可得 Y 必定屬於 $V(C)$ 。因此必會存在區段 $S—T—\dots—U—W$ 其中 $S \in V(C), T \in V(G_2 - C), U \in V(G_2 - C), W \in V(C)$ ，但因為 C 為迴圈，所以 C 上必有路徑連接 S 與 W 。

所以我們將包含 $S—T—\dots—U—W$ 此類的區段，其中 $T—\dots—U$ 替換成 C 上的點；換句話說，我們將包含 $V \in V(G_2)$ 的路徑替換成僅有 $V \in V(C)$ 的路徑，如此我們就得到 $V(P) \cap V(G_2) = \emptyset$ ，因此 G_1 可獨自構成連通，得證。



圖十三

主定理：圖 G 對偶後的圖 G' ，存在一個子圖 A 。圖 G 存在漢米爾頓迴圈，若且唯若

1. A is a tree.
2. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖。
3. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $V(C) \cap V(A) \neq \emptyset$ 。

證明：

假設圖 G 為漢米爾頓圖，圖 G 的平面集合為 $F(G)$ ，根據定理一，令 F_1 與 F_2 恰為圖 G 中漢米爾頓迴圈 H 分割出的「兩個連通平面子集」（即 $F(G) - F_1 = F_2$ ）；平面子集 F_1 經對偶後對應到點集合 $V(A)$ ，平面子集 F_2 經對偶後對應到點集合 $V(B)$ ，並且我們同樣有「 $V(G') - V(A) = V(B)$ 」，且又因為 F_1 與 F_2 皆為連通的，因此「 $V(A), V(B)$ 的導出子圖 A, B 亦為連通圖」。

注意到漢米爾頓迴圈包含 $V(G)$ 中所有點，所以 $\forall P \in V(G)$ 都存在 $C_1 \in F_1$ 使得 $P \in V(C_1)$ 且 $C_2 \in F_2$ 使得 $P \in V(C_2)$ ，因此「 $\forall C \in F(G')$ 都有 $V(C) \cap V(A) \neq \emptyset$ 且 $V(C) \cap V(B) \neq \emptyset$ 」。相反的，倘若圖 G 非漢米爾頓圖，則最大的迴圈 H' 不包含 $V(G)$ 中所有點，也就是對於某些點 $P \in V(G)$ ，不存在 $C_1 \in F_1$ 使得 $P \in V(C_1)$ 且 $C_2 \in F_2$ ， $P \in V(C_2)$ ，必會構成 $C \in F(G')$ 有 $|V(C) \cap V(A)| = 0$ 或 $|V(C) \cap V(B)| = 0$ 。

若且唯若圖 G 存在漢米爾頓迴圈，則滿足以下三條件：

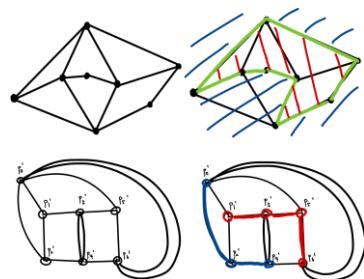
圖十四

條件(1) $V(A), V(B)$ is a partition of $V(G')$.

條件(2) A, B 皆為連通圖。

條件(3) $\forall C \in F(G')$ ，都有

$$V(C) \cap V(A) \neq \emptyset \text{ 且 } V(C) \cap V(B) \neq \emptyset.$$



以附圖為例，上圖為原圖，下圖為對偶圖。紅色與藍色部分分別代表 A, B 。

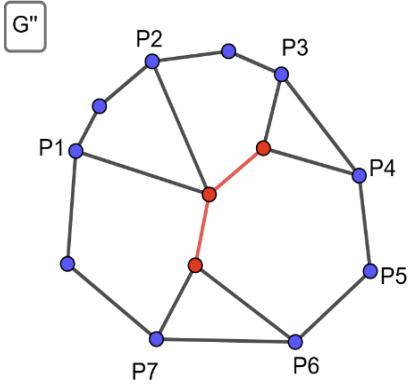
但既然搜索漢米頓迴圈是 NP-complete，同時搜索 A 和 B 點集合會增加複雜度，所以修改敘述，只尋找 A 點集合，將包含 B 的敘述刪除用等價關係取代。

我們首先直接刪去條件(1)並默認其恆存在，並處理條件(3)。因為 $\forall C \in F(G')$ 都有 $V(C) \cap V(B) \neq \emptyset$ 且 $V(A), V(B)$ is a partition of $V(G')$ 。所以只要 $V(C) \cap V(A) \neq V(C)$ 即可，然而如此 A 則包含迴圈。

圖十五

注意到右圖，假設紅色部分為樹 B ， G'' 為外平面代表的平面集合，滿足 $V(B) \cap V(G'') = \emptyset$ ，「若 $\forall V_{G'} \in V(G')$ 其 $\exists V_B \in V(B)$ 與之相鄰，皆滿足 $V_{G'} \in V(A)$ ，則必有 $V(B) \cap V(G'') = \emptyset$ ，否則圖 B 不連通」。

反之，若不滿足所有 $V_{G'} \in V(A)$ ，則 B 就可以新增此不屬於 A 的點，使得 $V(B) \cap V(G'') \neq \emptyset$ ，如此一來若所有樹 B 皆有以上規則，則 $\forall C \in F(G')$ 滿足 $V(C) \cap V(B) \neq \emptyset$ ，且在新增的過程中， $V_{G'} \cup V(B)$ 的導出子圖 B 恒為連通圖，因此可以替換掉條件(2)(3)中有關 B 的敘述。



最後我們發現到「對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖」且「圖 A 不存在迴圈」等價於「不滿足所有 $V_{G'} \in V(A)$ 」。原因需要直接討論：

若存在一構造，滿足所有 $V_{G'} \in V(A)$ ，由於圖 A 是連通圖，假設 A 已存在一條路徑連通 P_1, P_2, \dots, P_n ，且因為 P_1 與 P_n 被包含於同個平面，若在此平面 C 上， P_1 與 P_n 連通，則構成迴圈，反之 P_1 與 P_n 不連通。

相反的，若圖中不存在滿足所有 $V_{G'} \in V(A)$ 的構造，則不可能存在路徑包含所有 P_1, P_2, \dots, P_n ，因此不存在 P_1 與 P_n 在圖 A 中不連通的狀況，也不構成迴圈。

統整以上得到：

新增(2) 圖 A 不存在迴圈。

新增(3) 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖。

主定理：圖 G 對偶後的圖 G' ，存在一個子圖 A 。圖 G 存在漢米爾頓迴圈，若且唯若

1. A is a tree.

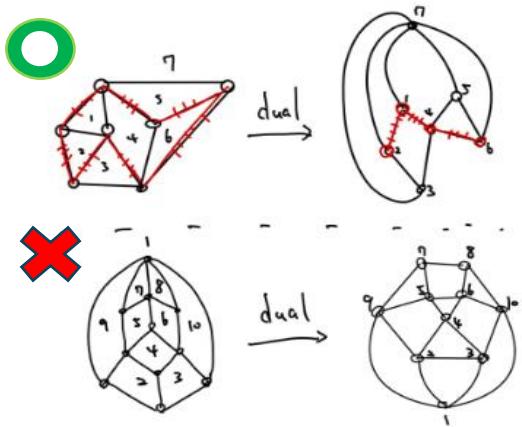
條件(2) 新增(2)

2. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖。 新增(3)

3. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $V(C) \cap V(A) \neq \emptyset$ 。 條件(3)

右圖為例。

上方為有漢米爾頓迴圈的圖，可以發現其對偶圖遵循主定理。右下圖則無漢米爾頓迴圈，則其就不包含主定理提及的樹 A 。



圖十六

這裡值得注意的是，根據鴿籠原理或 $V(A), V(B)$ is a partition of $V(G')$ 得到不存在於 $V(A)$ 點集合中的點皆屬於 $V(B)$ 點集合。且因為 A 和 B 在證明中未將包含 B 的敘述刪去前，遵循的規則完全相同（即條件(1)(2)(3)），故 A 或 B 樹皆遵循主定理。

所以我稱這種存在兩個點集合並且互為交集為空、聯集為全集，且其中任一個導出子圖所構成的樹皆符合主定理的此特徵為「延伸定理」。

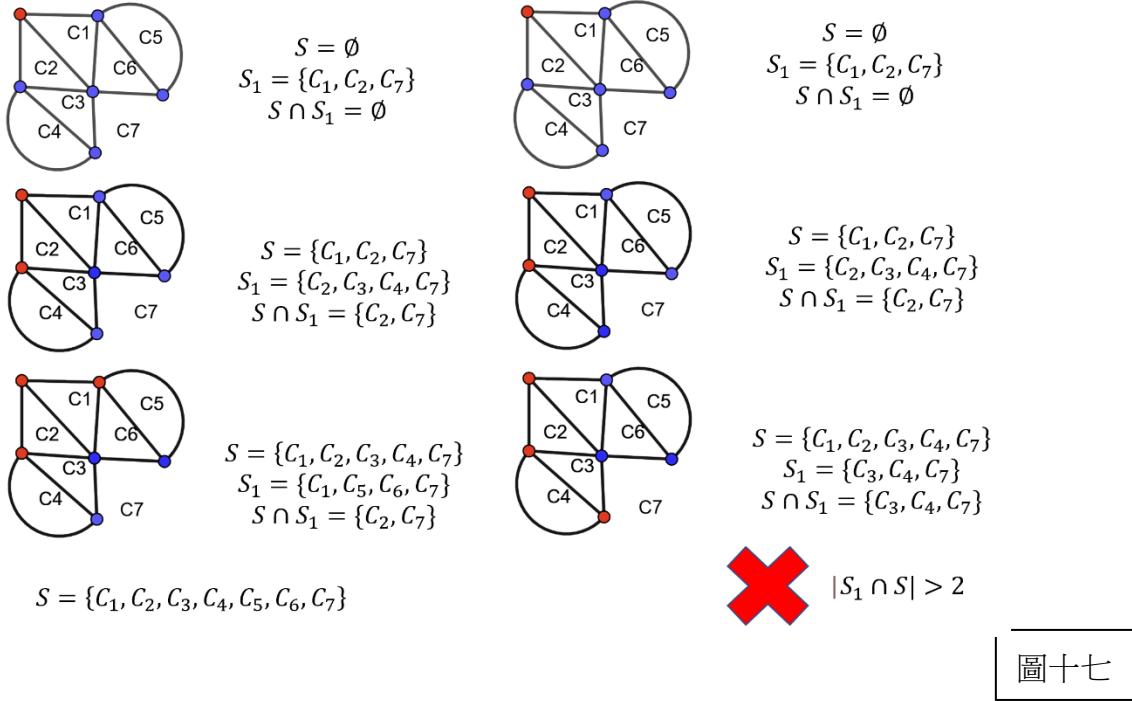
最後，此定理最大的用處是能夠讓電腦實際運算 A 樹是否存在，並且不需要檢驗 B 樹是否滿足主定理，首先任取一點 P ，並記錄其屬於的平面 C_1, C_2, \dots 於平面集合 S 中，隨後分為三個部分。

1. 操作：向外延伸，選擇恰與 $V(A)$ 點集合其中一點 V_A 相鄰的點 K 加入。
(記錄新點 K 屬於的平面 C_3, C_4, \dots 於平面集合 $S_1 = \{\}$ 中)
2. 條件：若新增的點 K 滿足 $|S_1 \cap S| > 2$ ，則 K 點不能存在於 $V(A)$ 。
(若 K 點存在於 $V(A)$ ，則將 S_1 的每一元存於 $S = \{C_1, C_2, \dots\}$ 當中)
3. 目標：若平面集合 $S = U$ 宇集，則點集合 $V(A)$ 的導出子圖即為所求。

因為不構成迴圈，故新的點必須恰與一點相鄰。而且我們發現到，由於一條邊 P_1P_2 為兩平面 C_1, C_2 的共邊，因此點 P_1 與 P_2 會被包含於此兩平面中，若出現第三平面，則此邊不包含於第三個平面中，構成非連通圖，違反主定理第二點，因此條件中我們改寫成「新點不能滿足 $|S_1 \cap S| > 2$ 」

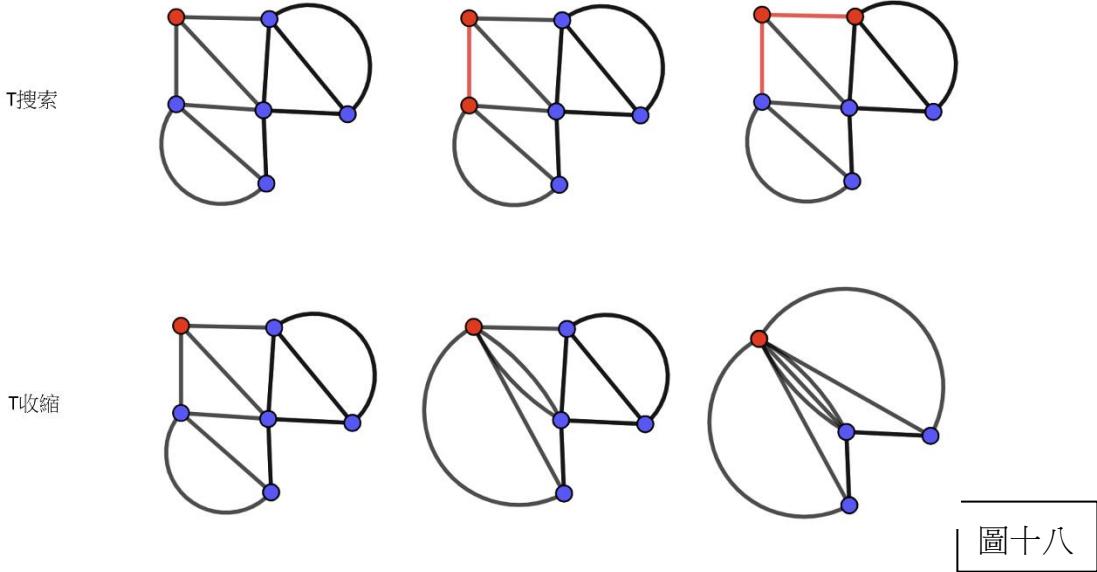
如此一來，定理變得簡潔且可以執行。後續有提到，稱此種方法為「T 搜索」。

如下左圖為一個成功 T 搜索的例子，下右圖則是違反條件的狀況。



圖十七

並且我們發現，若確定要將 K 納入 $V(A)$ ，由於點與平面的關係經收縮後不變，因此我們能夠不違反主定理的條件，將邊 $V_A K$ 收縮，例如下圖所示。



圖十八

我們稱這種 T 搜索後進行邊收縮為「T 收縮」，關於收縮的性質在定理二-1 與二-2 研討，而對於 T 收縮的實際幫助，主要在於歸納有解圖的特徵，在後續再繼續討論。

定義：若圖 G 有漢米爾頓迴圈，則我們稱對偶後的圖 G' 為有解圖。

定義：若圖 G 無漢米爾頓迴圈，則我們稱對偶後的圖 G' 為無解圖。

定義：假設圖 G 經邊收縮後為圖 G' ，則我們將 G' 還原成 G 得步驟稱為逆收縮。

定理二-1：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一邊 P_1P_2 ，收縮後以點 P 取代，稱為圖 G'' ，以圖二十·1 為例。

若圖 G 無漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為無解圖），則圖 G'' 為無解圖。

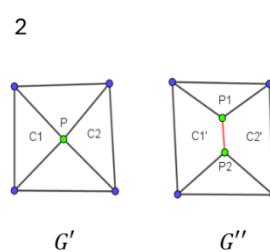
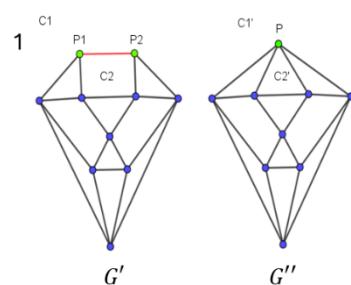
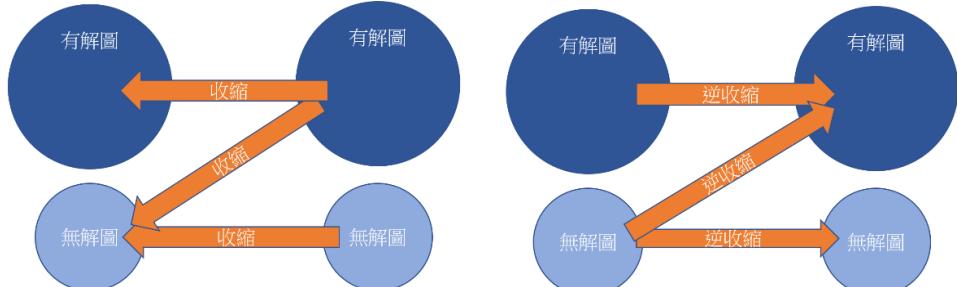
證明：因為符合主定理的 $V(A)$ 點集合不存在於對偶圖 G' 。因此將其取代為點 P 並不影響 $V(A)$ 點集合不存在於這件事實，得證。

另一種解釋是，假設平面 C_1, C_2 在 G' 中以 P_1P_2 共邊，在 G'' 中不共邊，意義同於在 G 中刪去某一條邊，又因為原沒有漢米爾頓迴圈的圖 G 刪去一條邊後，不影響迴圈的不存在性，由此可知 G'' 為無解圖。

定理二-2：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一點 P ，逆收縮後以邊 P_1P_2 取代，稱為圖 G'' ，以圖二十·2 為例。

若圖 G 有漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為有解圖），則圖 G'' 為有解圖。

證明：由於無解圖收縮後必為無解圖，因此有解圖逆收縮後必為有解圖，詳細狀況如下表所示。'

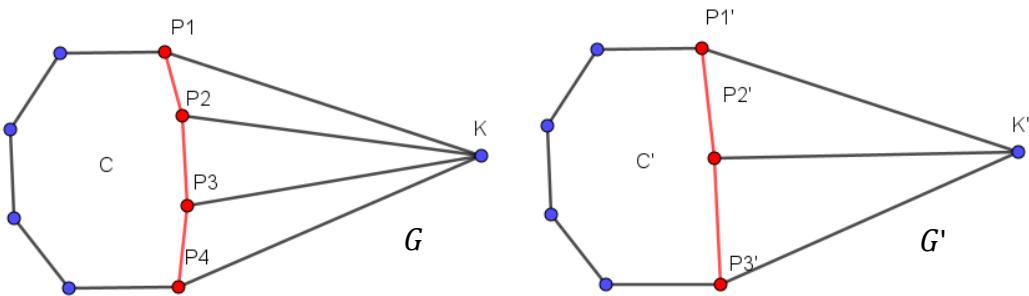


圖十九

圖二十

為了使的後續的點或邊的數量減少，我們先探討幾個簡化定理。

化簡一：對偶圖 G 中，若存在平面 C 上有一條路徑 P （圖中紅線）上的點大於等於四個，且 P 上的所有點皆與 C 外一點 K 相鄰；則可以直接將路徑 $P_1 - \dots - P_n$ 的路徑取代成 $P'_1 - P'_2 - P'_3$ 的路徑，並且 K 與 P'_1, P'_2, P'_3 以僅各自以一條線相連，構成圖 G' 。我們就有若圖 G 為有解圖，則圖 G' 為有解圖；若圖 G 為無解圖，則圖 G' 為無解圖。如下圖。



圖二十一

證明：方法是直接分析，此操作的最初目的為找出 G' —— 令圖 G, G' 符合主定理的點集合的集合分別為 $V(GA), V(G'A)$ ，分別存在兩個路徑 P, P' ，並且將滿足 $V(GA) - V(P) = V(GA') - V(P')$ 。

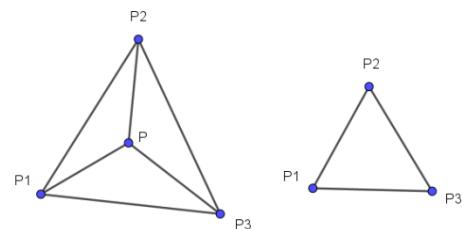
隨後開始分析，若已有 $K \in V(A)$ ，則 $|P \cap V(A)| \leq 1$ ，否則構成迴圈或 $C \cap A$ 不連通，圖 G' 也如此。若 $K \notin V(A)$ ，則分為兩種狀況。

狀況 1. P_1 或 P_n 只有其中一個被包含於 $V(A)$ ，則 P_2 到 P_{n-1} 必須被包含於 $V(A)$ ；

狀況 2. P_1 或 P_n 皆被包含於 $V(A)$ ，則 P_2 到 P_{n-1} 只有一點不被包含於 $V(A)$ 。

把上述的 n 以 3 帶入就會發現「不論 n 為何，其分析都有 P_1 對應到 P'_1 、 P_n 對應到 P'_3 、 P_2 到 P_{n-1} 的路徑對應到 P'_2 」，得證。

化簡二：若圖 G 中有一區域為 K_4 ，則替換成 K_3 後仍為有解圖或仍為無解圖。

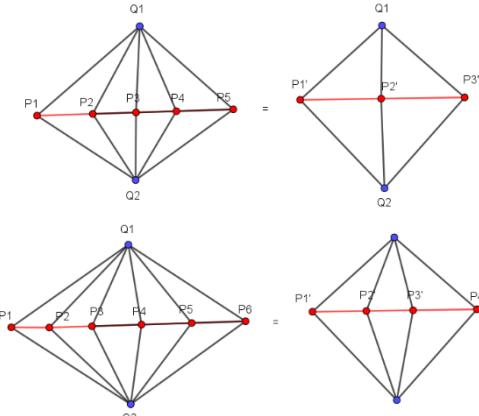


圖二十二

注意到 K_4 圖，由於不能違反主定理第一點，故 $V(A)$ 不同時包含 P_1, P_2, P_3 ，並且根據延伸定理不失一般性假設 $V(A)$ 包含 P_1, P_2 ，則 $V(A)$ 不包含 P 點。

同樣的我們也可以根據延伸定理不失一般性假設 K_3 圖中的 $V(A)$ 包含 P_1, P_2 ，因為與 K_4 去除 P 點後完全相同，故得證。

圖二十三



化簡三：若圖 G 中有平面可構成子圖 $K_{1,2n,1}$ ，則替換成 $K_{1,4,1}$ 後仍為有解圖或仍為無解圖。 $(n \in N)$ 紅線稱為路徑 P 。

化簡四：若圖 G 中有平面可構成子圖 $K_{1,2n+1,1}$ ，則替換成 $K_{1,3,1}$ 後仍為有解圖或仍為無解圖。 $(n \in N)$ 紅線稱為路徑 P 。

化簡三：若圖 G 中有平面可構成子圖 $K_{1,2n,1}$ ，則替換成 $K_{1,4,1}$ 後仍為有解圖或仍為無解圖。 $(n \in N)$ 紅線稱為路徑 P 。

化簡四：若圖 G 中有平面可構成子圖 $K_{1,2n+1,1}$ ，則替換成 $K_{1,3,1}$ 後仍為有解圖或仍為無解圖。 $(n \in N)$ 紅線稱為路徑 P 。

證明：方法同為分析，故放在一起討論。

狀況 1. 若 Q_1 或 Q_2 皆被包含於 $V(A)$ ，則 $|V(P) \cap V(A)| \leq 1$ ，否則構成迴圈。

狀況 2. 若僅 Q_1 或 Q_2 被包含於 $V(A)$ ，則為了滿足主定理第二點及第三點，

$\forall k \in \mathbb{N}$ ，都要有 $P_{2k-1} \in V(A)$ 或 $P_{2k} \in V(A)$ 。

狀況 3. 若 Q_1 或 Q_2 皆不被包含於 $V(A)$ ，則 $|V(P) \cap V(A)| \geq |V(P)| - 1$ 。

將以上敘述以 $2n = 4$ 和 $2n - 1 = 3$ 代入會有相同結果，且對非子圖的部分影響相同，得證。這裡注意到是 $2n = 4$ 而非 $2n = 2$ ，因為若 $2n = 2$ ，狀況 2. 的 P_{2k-1} 不存在。

化簡三結果為： P_1 對應到 P'_1 、 P_2, \dots, P_{2n-1} 對應到 $P'_2, P'_3, \dots, P'_{2n}$ 對應到 P'_4 。

化簡四結果為： P_1 對應到 P'_1 、 P_2, \dots, P_{2n} 對應到 P'_2, P'_3 對應到 P'_4 。

主定理的前情提要：

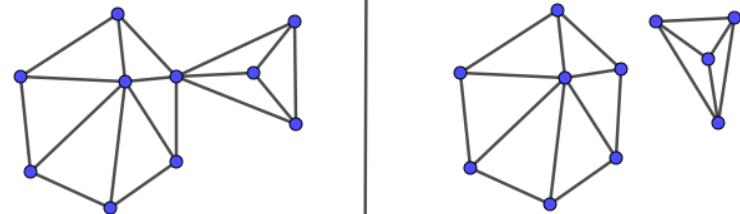
平面圖的最小邊數的平面為三角形，若有「二邊形」，對於路徑或迴圈來說只是某邊多了一條一樣的路徑而已，故二邊形只取其中一條邊即可，故對偶圖的任意點 $\deg(P_k) \geq 3$ ，但也可 $\deg(P_k) = 2$ ，但直接將邊平滑 (smoothing) 即可。

再來我們要將任意對偶圖分為四種：

1. 存在一平面 C_n 上的 n 個點無法獨立構成漢米爾頓迴圈（後續不再討論）
2. 若存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖 (3 以上)
3. 若不存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少兩組互不連通的連通圖 (1)
4. 若不存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖 (1 和 2)

推論一：若原圖或其對偶圖平面圖存在任意一個平面 C_n ，並且在 C_n 上的 n 個點無法獨立構成漢米爾頓迴圈，則原圖不存在漢米爾頓迴圈。(下圖為例)

圖二十四



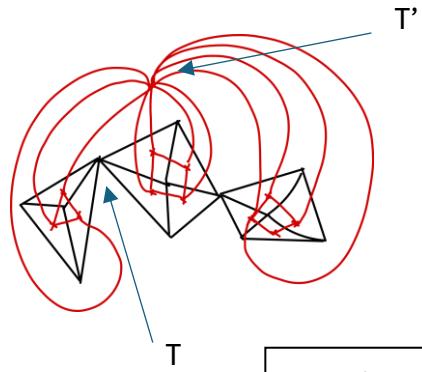
證明：因為平面為一個區域，且是無向的，因此我們可以直接討論開放平面是否存在推論一的敘述即可，故平面不存在漢米爾頓迴圈有兩種可能：

1. 為兩個或以上的圖相接 \Rightarrow 任兩平面組以單點或單線連接
2. 為兩個或以上的圖不相接 \Rightarrow 任兩平面組不連接（連通）

狀況 2 顯然非連通圖。狀況 1 如下。

解釋 1：假設任兩組平面組為 S_1, S_2 ，有兩點 $P_1 \in V(S_1), P_2 \in V(S_2)$ ，連接點為 T ，則對於任何路徑 P ，若有 $P_1 \in V(P)$ 及 $P_2 \in V(P)$ ，則必定 $T \in V(P)$ ，但由於迴圈的構成必須要至少有一條路徑包含 P_1, P_2 且不包含 T ，故得證。

解釋 2：對偶圖後此平面形成連接點 T' ，套用延伸定理， T' 必定包含於滿足主定理的一點集合 $V(A)$ 中，但如此 $V(A)$ 補集便不構成連通圖，因此得知其為無解圖，得證。



圖二十五

圖二十六

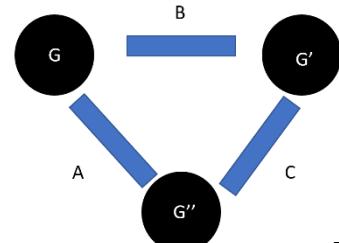
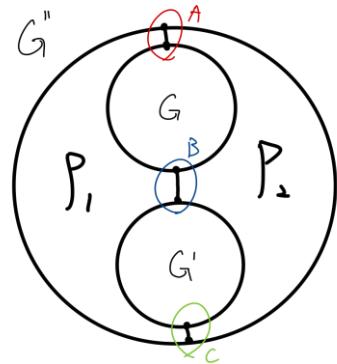
推論二：若對偶圖存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖，，則此對偶圖為無解圖，即原圖不存在漢米爾頓迴圈。

證明：由於 P_1 與 P_2 共分割三個互不連通的平面組 G, G', G'' ，我們將可以連接任兩平面組的點，稱為點組，如圖中 A, B, C 。

假設 G, G', G'' 中皆至少有一點屬於主定理的 T 樹中，則為了滿足主定理的第二點，不失一般性假設 G, G' 以 B 點組連接，若要連接 G'' ，則必須選中 A 或 C 。

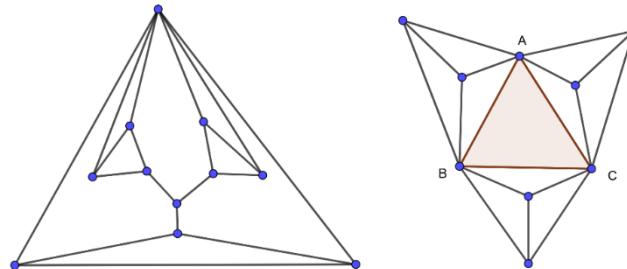
既然 T 必須選中兩點組，則 T' 亦然，但根據延伸定理，若 $T \cap A = A, T \cap B = B$ ，則 $T' \cap A = \emptyset, T' \cap B = \emptyset$ ，根據鴿籠原理 T' 無法選中兩點組，得證。

下圖為例。左下為原圖，右下為對偶圖，其中著色區域的三角形與外平面分別以 A, B, C 共點。注意： AB, AC, BC 邊並不是著色區域與外平面的交集，因此兩平面的交集為至少三組互不連通的連通圖。



圖二十七

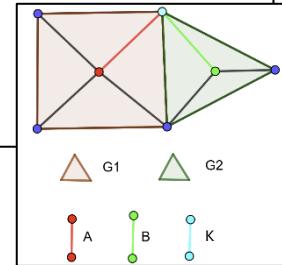
圖二十八



對於目前並沒有公式或顯著的特徵能夠二分「若不存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少二或三組互不連通的連通圖 (1 或 1 和 2)」的有解或無解圖，但後續推出的定理有望達成目標。

定理三：假設對偶圖 G 可分為兩連通子圖 G_1, G_2 ，並且 G_1 本身存在樹 A 滿足主定理； G_2 本身存在樹 B 滿足主定理。令 $G_1 \cap G_2$ 的圖為 K ，所有平面 $c \in F(G)$ 構成 $V(c) \cap K \neq \emptyset$ 的平面集合為 C 。

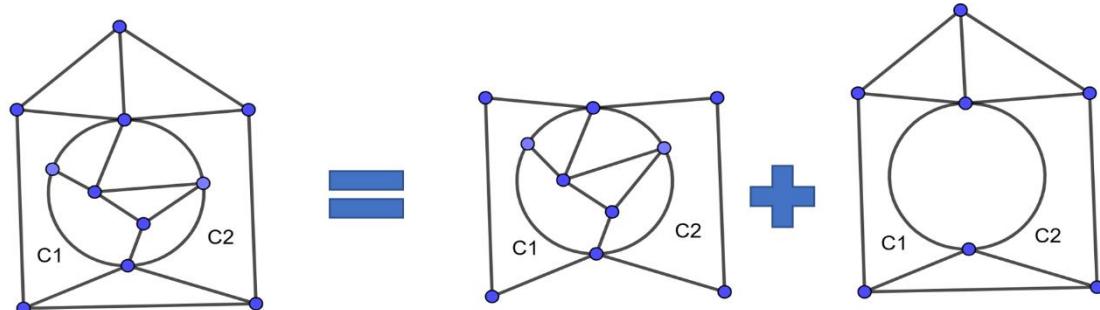
若有 $A \cap K = B \cap K$ ，則 $A \cup B$ 在圖 G 滿足主定理。



圖二十九

因為交集處符合主定理，非交集處也符合主定理，故得證。右圖為一例子。定理四可以使用，但仍提供證明。

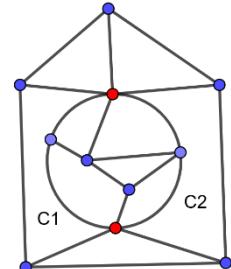
定理四：令圖 G 存在兩平面 C_1, C_2 的交集恰為兩組連通圖，並且兩平面分割的內外區域分別為圖 H_1, H_2 。若且唯若 $C_1 \cup C_2 \cup H_1$ 及 $C_1 \cup C_2 \cup H_2$ 皆為有解圖，則圖 G 為有解圖。如下圖。



圖三十

證明：先聲明這種圖的性質如下。

注意到 $C_1 \cup C_2$ 為不連通的兩點組 A, B ，顯然發現到 $G - A \cup B$ 為非連通圖，因為若有兩點 P_1, P_2 分別屬於 H_1, H_2 ，則若路徑 P 有 $P_1, P_2 \in P$ ，則 P 必定包含 A 或 B 。



圖三十一

再來開始證明定理 ($n = 1$ or 2)。

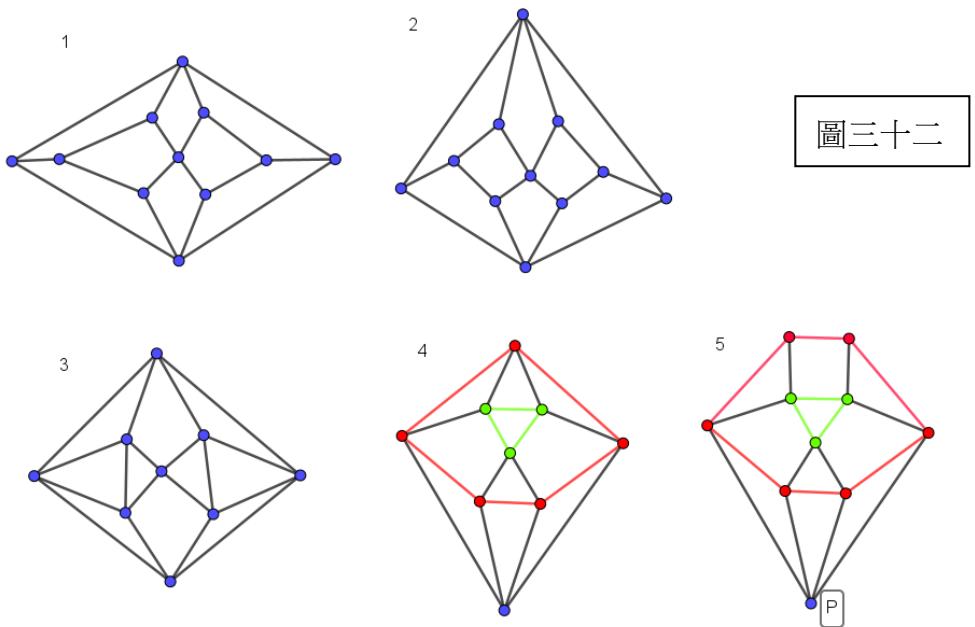
若圖 G 為有解圖，則其存在點集合 S 滿足主定理，反之沒有。

若圖 $C_1 \cup C_2 \cup H_n$ 則其存在點集合 S_n 滿足主定理，並且根據延伸定理 $C_1 \cup C_2 \cup H_n - S_n$ 也滿足主定理，稱為 S'_n 。為了滿足主定理第二點， S_n 不可能有 $A, B \in S_n$ 或 $A, B \notin S_n$ 。那麼不失一般性假設 $A \in S_1, S_2, S$ ，則 $S_1 \cup S_2 = S$ 。

反之，若 G 為無解圖，則必有一 $C_1 \cup C_2 \cup H_n$ 為無解圖，得證。

我們先觀察目前有的非漢米爾頓圖之對偶圖，著明的有「*Herschel Graph*」、「*Tutte's Graph*」，其推導的結果皆可用於快速證明大部分無解圖。

Herschel Graph :



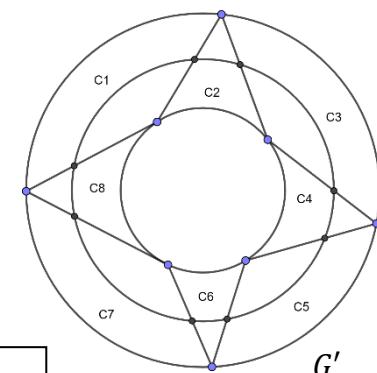
看到上圖，圖一為*Herschel Graph*，圖二為圖一的同構圖，圖三為圖二的對偶圖，圖四為圖三的同構，因此我們猜想圖五為無解圖並證明其一般化結果。

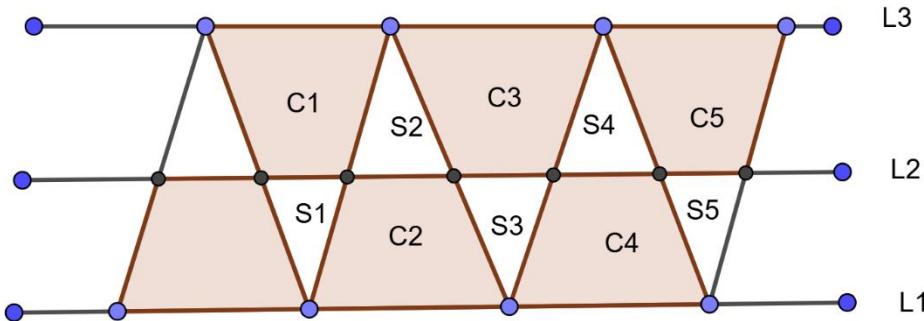
推論三：若圖 G 的對偶圖 G' 存在平面集合 $C' = \{C_1, \dots, C_n\}$ 恰使得 C_1, C_2, C_3 和 C_2, C_3, C_4 和 \dots, C_{n-1}, C_n, C_1 和 C_n, C_1, C_2 內部都有一塊區域，並且 $|V(C_1 \cap C_2)| = |V(C_2 \cap C_3)| = \dots = |V(C_{n-1} \cap C_n)| = |V(C_1 \cap C_n)| \geq 1$ 。則對偶圖 G' 為無解圖，即圖 G 不存在漢米爾頓迴圈。右下圖 G' 一例子。

從原定裡敘述可以推得 $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{n}{2}$ ，都有

$C_{2k-1} \cap C_{2k+1} \neq \emptyset$ ， $C_1 \cup C_3 \cup \dots \cup C_{n-1}$ 會存在存在一點或一個迴圈於其外（或內部）部。

由於圖論我只在意任兩者之間的關係而非方向性，因此我們將 $G \cap C' \neq \emptyset$ 的部分拉開討論。





圖三十四

由於 $|V(C_1 \cap C_2)| = |V(C_2 \cap C_3)| = \dots = |V(C_{n-1} \cap C_n)| = |V(C_1 \cap C_n)| \neq 0$ 且對於所有 $C_{2k-1} \cap C_{2k+1}$ 與 $C_{2k} \cap C_{2k+2}$ 皆不為空集合，因此會有三條迴圈如上圖分布，分別為 L_1, L_2, L_3 ，並且我們特別定義點組集合 $L_1 = \{C_1 \cap C_3, C_3 \cap C_5, \dots\}$ ， $L_2 = \{C_1 \cap C_2, C_2 \cap C_3, \dots\}$ ， $L_3 = \{C_2 \cap C_4, C_4 \cap C_6, \dots\}$ 。我們只關注 $L_1 \sim L_3$ 間的子圖，並且稱非著色部分 $C_{2k-1}, C_{2k}, C_{2k+1}$ 中的區域為平面集合為 S_{2k} ； $C_{2k}, C_{2k+1}, C_{2k+2}$ 中的區域為平面集合為 S_{2k+1} 。還有 $GP_1 = \{S_{2k-1}\} + \{C_{2k}\}$ ， $GP_2 = \{S_{2k}\} + \{C_{2k-1}\}$ 。

根據排容原理，我們可以得到對於任意集合皆有 $|U_1 \cup U_2 \cup U_3| = |U_1 \cup U_2| + |U_3| - |(U_1 \cup U_2) \cap U_3|$ 。隨後我們即可開始證明。

加入的新點位於	c	s
$V_1 \Rightarrow f_1(c, s)$	c+2	s+1
$V_2 \Rightarrow f_2(c, s)$	c+2	s+2
$V_3 \Rightarrow f_3(c, s)$	c+2	s+1

圖三十五

假設有一點集合 $V(A)$ 滿足主定理，我們令 $V(A) \cap V(L_t) = P_t$ ，那麼我們現在有 P_1, P_2, P_3 三個點集合。若有一點 $V_1 \in P_1$ ，則 V_1 只與 GP_1 的元素有交集，且為兩個平面 C 一個平面集合 S ；若有一點 $V_2 \in P_2$ ，則 V_2 與 GP_1 及 GP_2 的元素皆有交集，且為兩個平面 C 兩個平面集合 S ，若有一點 $V_3 \in P_3$ ，則 V_3 只與 GP_2 的元素有交集，且為兩個平面 C 一個平面集合 S 。如上表。

根據主定理第二點，若兩點 V_1', V_2' 不連通，則不存在同時包含 V_1, V_2 的平面。

再來，若兩點連通，因為對於任意邊，恰會包含於一個平面 C 一個平面集合 S ，任連通的兩點所共同屬於的平面數為一，平面集合數為一，如右表。

對於新點的交集	c	s
$V_1 - V_1 \Rightarrow f_1'(c, s)$	c-1	s
$V_2 - V_2 \Rightarrow f_2'(c, s)$	c-1	s-1
$V_3 - V_3 \Rightarrow f_3'(c, s)$	c-1	s
$V_1 - V_2 \Rightarrow f_4'(c, s)$	c-1	s-1
$V_2 - V_3 \Rightarrow f_5'(c, s)$	c-1	s-1

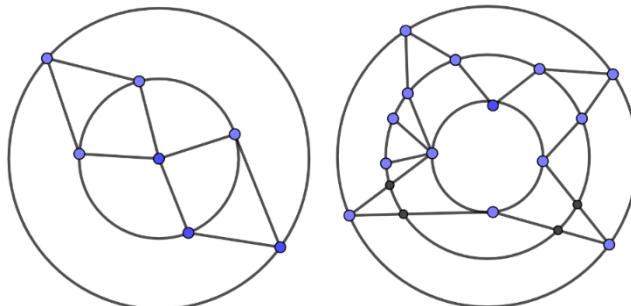
圖三十六

最後利用排容計算 A 與所有 C 和 S 有交集的平面或平面集合個數 ($|C|, |S|$)。

不失一般性，假設最初點位於 L_1 上，如此得到 $(c_1, s_1) = f_1(0,0)$ ，接著套用排容原理後遞迴 $|U_1 \cup U_2 \cup U_3| = |U_1 \cup U_2| + |U_3| - |(U_1 \cup U_2) \cap U_3|$ ，如下列方程式為共有 n 個點，則 $(|C|, |S|)$ 的狀況。 $(n \in \mathbb{N}, a = 1, 2, 3, b = 1, 2, 3, 4, 5)$

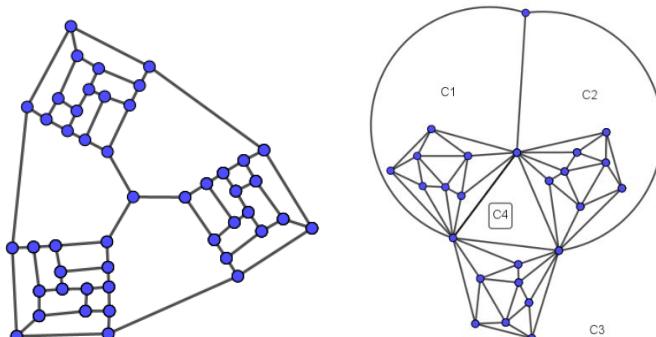
$$\begin{cases} (c_1, s_1) = f_1(0,0) \\ (c_{n+1}, s_{n+1}) = (f_a \cdot f_b')(c_n, s_n) \end{cases}$$

我們發現只有 f'_1 與 f'_3 函數能使 $c - s$ 變小，但此時的前提是要有新點來自 L_1 或 L_3 的加入，也就是 f_1 和 f_3 函數，但我們發現合成函數 $f_1 \cdot f'_1$ 與 $f_3 \cdot f'_3$ 不影響 $c - s$ ，故若初始 $c_1 > s_1$ ，則 $c_n > s_n$ ，因此得知點集合 A 不存在，證畢。下圖為兩例子。



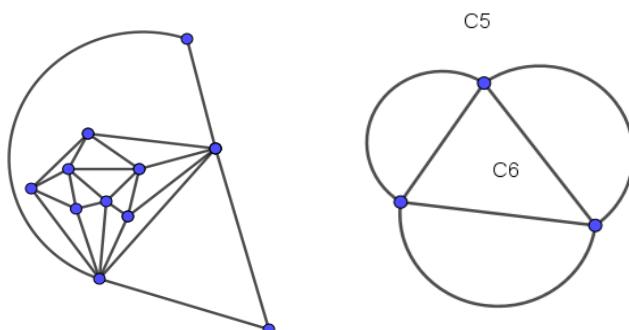
圖三十七

Tutte's Graph :



圖三十八

左圖為 *Tutte's Graph*，右圖為其對偶圖，因為 $C_k \cap C_4$ 為恰為兩組互不連通的連通圖 ($k = 1$ or 2 or 3)，因此我們套用定理四得到下兩圖（左*3 右*1）。

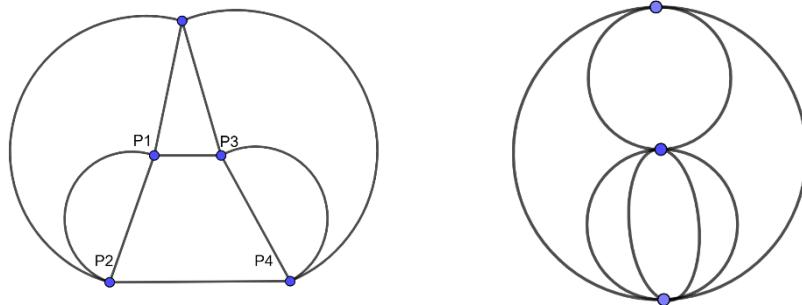


圖三十九

發現右圖 C_5 及 C_6 可代入推論二，因為根據定理四若有一張圖為無解圖，則原對偶圖為無解圖，故得證 *Tutte's Graph* 不存在漢米爾頓迴圈。

經過定理四後，圖就只會存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為連通圖及存在重線而已，此時就有若對偶圖 G 存在平面 F 包含三組重線，則圖 G 為無解圖。

定理五：若對偶圖中有平面 C 存在兩重線 P_1P_2, P_3P_4 ，則 $C - P_1P_2 - P_3P_4$ 構成的互不連通的兩組連通圖收縮後不影響原圖無解或有解性，如下圖。



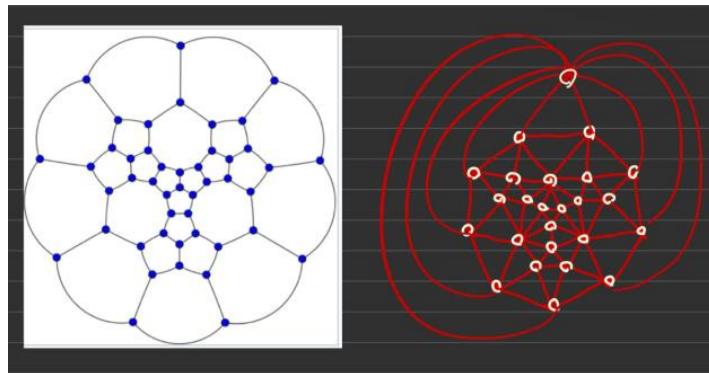
圖四十

P_1 不得與 P_2 同時存在於符合主定理的點集合 A 中，否則構成迴圈， P_3, P_4 亦然。並且 P_1 不得與 P_4 同時存在於符合主定理的點集合 A 中，否則違反主定理第二點， P_2, P_3 亦然。故若 $P_1 \in A$ ，則 $P_3 \in A$ ， P_2, P_4 亦然。

因此如同 T 收縮，可以直接將 $C - P_1P_2 - P_3P_4$ 構成的互不連通的兩組連通圖進行邊收縮，且不影響無解或有解性，得證。

如此一來原本的分類便只剩下只存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為連通的連通圖

(1) 及重線的狀況，雖然猜想推論三也許可以解決所有無重線的狀況，但仍然有少部分的圖無法證明，例如下圖為 *Grinberg's theorem* 能夠證明的圖與其對偶圖，雖然我們能夠輕易得用主定理證明，但並不直觀，因此還有待討論。



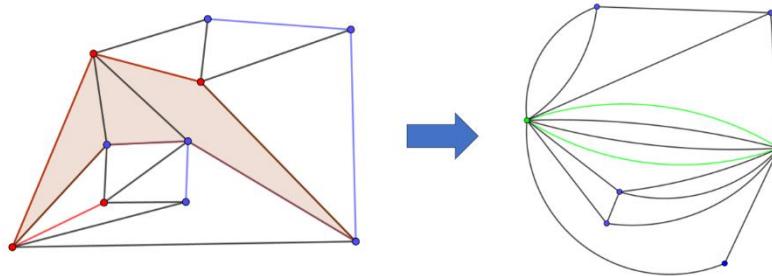
圖四十一

但值得注意的是，目前我們已經將所有圖化簡到對於任意平面只存在一重線的狀況了。(推論一、推論二、定理四、定理五)

肆、討論與未來展望

性質一：任意有解圖 G 中，必存在一或多個迴圈 C ，構成 $A \cap B = C, A \cup B = G$ ，滿足 A, B 存在滿足主定理的 T_A, T_B ，並且 $T_A \cap C = T_B \cap C$ 。

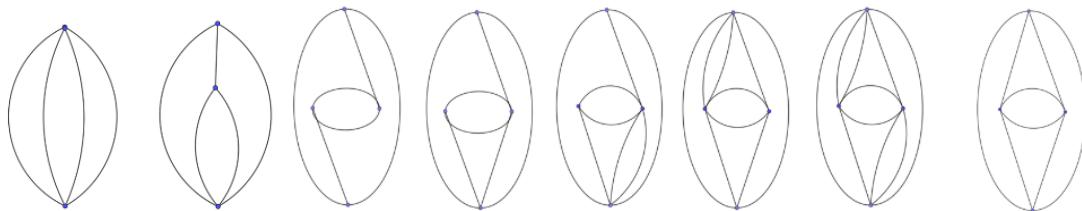
首先我們思考有解圖的構造方法，已知若圖 G 為有解圖，則其存在兩互相分割的樹遵守主定理。如此我們將一張圖的兩樹分出來，如下左圖。任取一迴圈若有一樹在此樹上連通，則另外一樹也必然如此，所以我們可以將兩樹在此迴圈上分別收縮構成兩平面以兩分別不連通的子圖交集，如下圖。



圖四十二

此時，迴圈內外滿足主定理的樹仍然存在，由此得證。

性質二：任意有解圖 G 必定由以下八種子圖套用定理四疊加後，再套用定理二-2 逆收縮而得。



圖四十三

我們思考性質一的遞迴，即有解圖 A, B 繼續套用性質一的狀況，列出所有迴圈 C 與迴圈 C 以內的圖存在的迴圈 C' ，分別為圖 1~8。

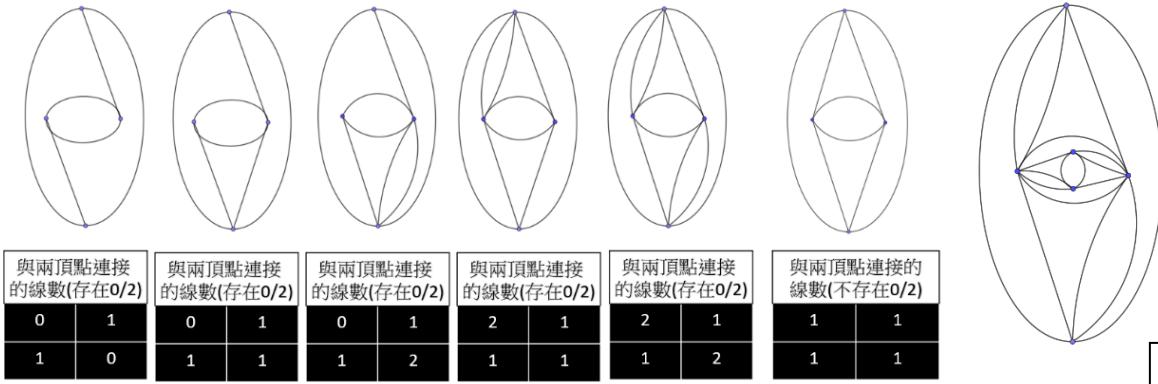
(圖中 C 為外平面的點與線) (C' 為除了 C 以外的任意重線)

首先圖 1 與圖 2 是考慮 $C \cap C' \neq \emptyset$ 的狀況經窮舉得出，值得注意的是顯然的 n 重線在主定理中的貢獻完全相同，因此圖 1 得重線數可為任意值。

其餘圖 3~8，我們先思考，若在某端同時存在重線或不連通，則必定不符合主定理，因此不存在右圖狀況，如此便可開始窮舉。下右圖為疊加後的樣子。

與兩頂點連接的線數(存在0/2)	
?(任意數)	0/2
?(任意數)	0/2

圖四十四

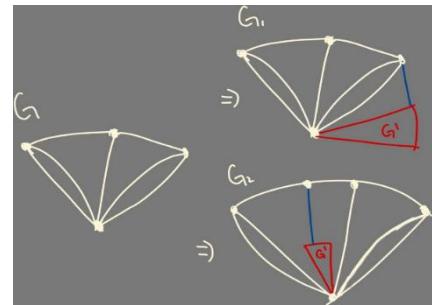


圖四五五

性質三：有解圖 G' 必由某有解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存有一點 P 滿足對於任意平面 C 皆有 $P \in V(C)$ 。並且此圖的構造方法如下。 $(G \neq G')$

(原敘述經過主定理後直接得證)

假設已有某圖 G 其存在一點 P 滿足對於任意平面 C 皆滿足 $P \in V(C)$ ，則只要在內或外部再新增滿足以上敘述的圖並以一條線連接即可，如右圖。(若新增兩線，則不符合敘述)

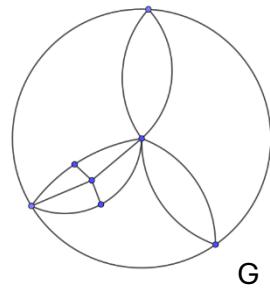


圖四十六

性質四：若無解圖 G' 不滿足推論一或二，則其必由無解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在點 P 滿足平面集合 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 皆構成 $P \in V(C_n)$ ，對於任一平面 C_a ，皆存在 C_b 與其交集為兩組互不連通的連通圖。 $(G \neq G')$

在進行 T 收縮時，若未達成目標且不能再繼續操作，即代表此圖有一點 P 其周圍皆為重線。

值得注意的是，此為無解圖的性質，但沒有如同原本預期的容易套用，經過電腦運算也仍然要檢測圖 G 經過逆收縮後是否仍然是無解圖。



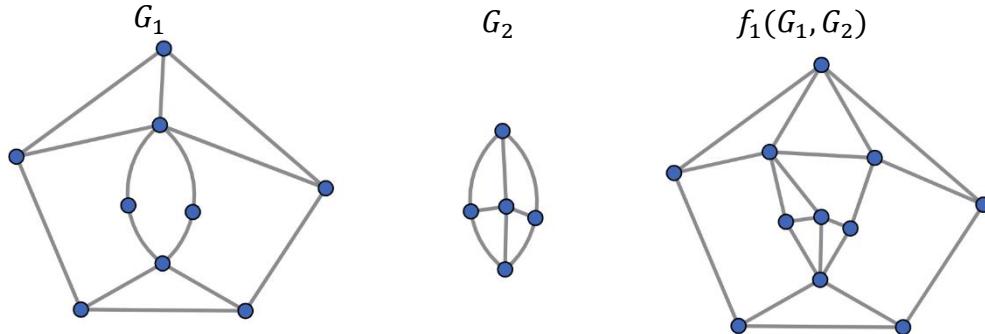
圖四十七

以上我們共提供了四種性質，又其中，發現了某些與虛數和質數的共通性。

1.有解圖的封閉性（實數封閉性）

根據定理四，我們發現任意兩張存在重線的有解圖疊加後必為有解圖；根據性質一，我們發現任意有解圖必由兩張存在重線的有解圖疊加並逆收縮而成。

因此我們構造一個函數 $f_1(G_1, G_2)$ ，使得其為 G_1, G_2 的疊加與逆收縮，如下。



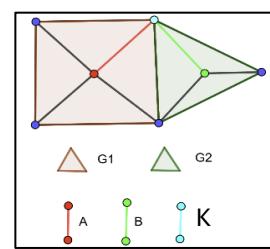
圖四十八

定義有解圖集合為 S ，可知「如果 $G_1, G_2 \in S$ ，則必有 $f_1(G_1, G_2) \in S$ 」，其餘若有其中一者 $\notin S$ ，則 $f_1(G_1, G_2)$ 有可能為有解圖或無解圖，不可斷定。

2.無解圖的去解性（質數去合性）

從性質一我們可以得到定理三可以構造所有的有解圖，此時得到了一件嚴重的事實，我們目前仍無法直接構造無解圖。推論三雖然能夠解釋 $|E|$ 較小的狀況但無解圖仍有無限多種，例如質數，我們只能透過質數或合數相乘得到某數，我們就可以知道這個某數並非質數，最後再將所有的某數去除即可得到質數。

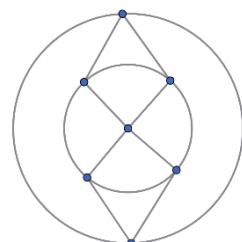
無解圖也如此，透過定理三我們可以將兩有解圖聯集得到更多的有解圖，此時我們發現無解圖是構造不出來的，因此仍然是透過刪去有解圖以得無解圖。



圖四十九

最後，說明一下 *Herschel Graph* 為不存在 $\deg \leq 2$ 的最小非漢米爾頓圖。

根據定理三，我們檢驗的方法為先將原圖拆成兩張圖並搜索符合主定理的樹後校對交集部分是否相同，我們發現推論三恰存在一個迴圈區分了兩張圖，嘗試想要構造更小的無解圖，發現其外平面只有兩個點，即重線，故不合，因此又構造較大的圖並收縮得到 *Herschel Graph*。

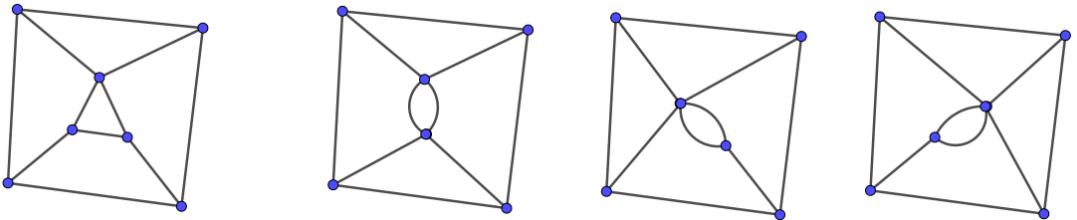


圖五十

記憶式搜索（動態規劃遞迴檢驗法）：

對於一張圖 G 根據 T 收縮的方法，我們能夠對其進行多種邊收縮，例如下左圖 G 能夠收縮成右下三種圖 G_1, G_2, G_3 。如果我們在資料庫裏面能夠紀錄 G_1, G_2, G_3 皆為有解圖，則時間複雜度為 $O(n)$ 。

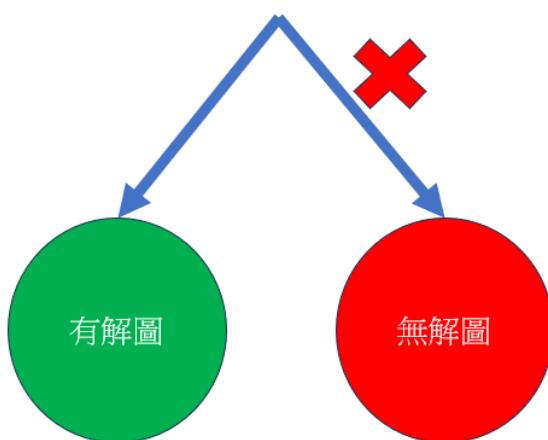
圖五十一



但顯然這是行不通的，圖同構問題是 NP-complete，因此在資料庫裡記錄所有較小的圖之時間複雜度也不可能多項式函數。

未來展望一：所有無解圖

綜上所述，目前最有數學性質可以不須經過電腦計算的為性質二，我們知道有解圖與無解圖在所有圖的集合中是分割的，因此我們只要探討透過性質二構造不出甚麼圖即可得到所有無解圖。說來簡單，實際有些難度。



圖五十二

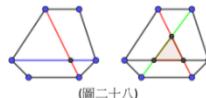
未來展望二：電腦計算

性質四雖然較難探討，不過經過電腦計算仍仍然能夠得到較多筆無解圖的資料，為後續研究帶來幫助，只是本篇報告書皆未經過電腦驗證（採用人工繪圖以窮舉出少部分狀況）以及探討。

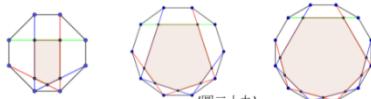
未來展望三：非平面圖

由於在非平面圖中必定存在多個平面子圖，且在國中做過的科展中就對非平面圖有研究（原報告書稱其為庫圖），希望能在探討完這個問題後，找一種特徵判別所有無解圖是否存在漢米爾頓迴圈。
(原報告書中的無解圖與此篇不同)

圖五十三



而經由細分可得以下三張圖，根據規律我們發現細分圖皆會構成內部的奇數邊形。因此，若存在內部奇數邊形，則包含庫圖的細分圖，也就是此圖為無解圖。



在能夠快速判斷環狀圖形有無解後，我們能夠深入探討有解圖的特性與解法等。

伍、結論

共 1 個已知定理、4+5 個化簡定理、4 個主定理、以及 4 個重要性值。

化簡定理(5)：

定理二-1：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一邊 P_1P_2 ，收縮後以點 P 取代，稱為圖 G'' ，以圖 1 為例。

若圖 G 無漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為無解圖），則圖 G'' 為無解圖。

定理二-2：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一點 P ，逆收縮後以邊 P_1P_2 取代，稱為圖 G'' ，以圖 2 為例。

若圖 G 有漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為有解圖），則圖 G'' 為有解圖。

定理三：假設對偶圖 G 可分為兩連通子圖 G_1, G_2 ，並且 G_1 本身存在樹 A 滿足主定理； G_2 本身存在樹 B 滿足主定理。令 $G_1 \cap G_2$ 的圖為 K ，所有平面 $c \in F(G)$ 構成 $V(c) \cap K \neq \emptyset$ 的平面集合為 C 。

若有 $A \cap K = B \cap K$ ，則 $A \cup B$ 在圖 G 滿足主定理。

定理四：令圖 G 存在兩平面 C_1, C_2 的交集恰為兩組連通圖，並且兩平面分割的內外區域分別為圖 H_1, H_2 。若且唯若 $C_1 \cup C_2 \cup H_1$ 及 $C_1 \cup C_2 \cup H_2$ 皆為有解圖，則圖 G 為有解圖。

定理五：若對偶圖中有平面 C 存在兩重線 P_1P_2, P_3P_4 ，則 $C - P_1P_2 - P_3P_4$ 構成的互不連通的兩組連通圖收縮後不影響原圖無解或有解性。

主定理：

主定理：圖 G 對偶後的圖 G' ，存在一個點集合 A ，令其導出子圖為 G'_A 。圖 G 存在漢米爾頓迴圈，若且唯若 1. G'_A is a tree. 2. 對於任意平面 $C \in F'$ ， $C \cap G'_A$ 構成連通圖。3. 對於任意平面 $C \in F'$ ， $V(C) \cap A \neq \emptyset$ 。

推論一：若原圖或其對偶圖平面圖存在任意一個平面 C_n ，並且在 C_n 上的 n 個點無法獨立構成漢米爾頓迴圈，則原圖不存在漢米爾頓迴圈。

推論二：若對偶圖存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖，，則此對偶圖為無解圖，即原圖不存在漢米爾頓迴圈。

推論三：若圖 G 的對偶圖 G' 存在平面集合 $C' = \{C_1, \dots, C_n\}$ 恰使得 C_1, C_2, C_3 和 C_2, C_3, C_4 和 ... C_{n-1}, C_n, C_1 和 C_n, C_1, C_2 內部都有一塊區域，則圖 G 不存在漢米爾頓迴圈。

有解圖性質：

性質一：任意有解圖 G 中，必存在一或多個迴圈 C ，構成 $A \cap B = C, A \cup B = G$ ，滿足 A, B 存在滿足主定理的 T_A, T_B ，並且 $T_A \cap C = T_B \cap C$ 。

性質二：任意有解圖 G 必定由以下八種子圖套用定理四疊加後，再套用定理二-2 逆收縮而得。

性質三：有解圖 G' 必由某有解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在一點 P 滿足對於任意平面 C 皆有 $P \in V(C)$ 。並且此圖的構造方法如下。 $(G \neq G')$

無解圖性質：

性質四：若無解圖 G' 不滿足推論一或二，則其必由無解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在點 P 滿足平面集合 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 皆構成 $P \in V(C_n)$ ，對於任一平面 C_a ，皆存在 C_b 與其交集為兩組互不連通的連通圖。 $(G \neq G')$

有解圖的封閉性（實數封閉性）& 無解圖的去解性（質數去合性）

陸、參考文獻與圖片來源

1. 「Untangle Game」—遊戲中的數學原文

<https://drive.google.com/file/d/1HPRVVo2YsY1INytkSz3jOsJsYTsF6pAR/view?usp=drivesdk>

2. 對偶圖-維基百科

https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_graph

3. 圖論-維基百科

[https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%9B%BE_\(%E5%9B%BE%E8%AE%BA\)](https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%9B%BE_(%E5%9B%BE%E8%AE%BA))

4. 哈密頓圖-維基百科

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%93%88%E5%AF%86%E9%A1%BF%E5%9B%BE>

5. A Non-Hamiltonicity Proof System(NHPS)

<https://www.cs.utoronto.ca/~ahertel/WebPageFiles/Papers/NHPS06.pdf>

5. 樹-師大圖論演算法筆記

<https://web.ntnu.edu.tw/~algo/Tree.html>

7. 演算法-動態規劃 DP

<https://mycollegenotebook.medium.com/%E6%BC%94%E7%AE%97%E6%B3%95-%E5%8B%95%E6%85%8B%E8%A6%8F%E5%8A%83-dp-1-bf647b23504b>

8. Herschel graph-維基百科

https://en.wikipedia.org/wiki/Herschel_graph

9. Tutte's Graph-Wolfram Mathworld

[Tutte's Graph -- from Wolfram MathWorld](Tutte's%20Graph%20--%20from%20Wolfram%20MathWorld)

10. [graph theory - Trivial example of a non-Hamiltonian planar triangulation? - Mathematics Stack Exchange](https://math.stackexchange.com/questions/10000/graph-theory-trivial-example-of-a-non-hamiltonian-planar-triangulation) (E=3V-6 的非漢米爾頓圖)

圖源：

圖一：參考資料 10

維基百科：圖三、圖四、圖五、圖七、圖九

圖五十三：參考資料 1

其餘皆為作者使用研究器材繪製並截圖。

圖說：

圖一：3n-6 條線的非漢米爾頓圖、圖二：圖一之對偶圖、圖三：一種平面圖、圖四：異種非平面圖、圖五：對偶圖說明、圖六：平面說明、圖七：邊收縮說明、圖八：由左到右分別為路徑、迴圈、樹、圖九：細分和平滑說明、圖十：配合其左文的證明、圖十一：原圖的對偶圖之對偶圖與原圖相等、圖十二：替換路徑法、圖十三： $V = G_1 \cup G_2$ 、圖十四：上圖為原圖，下圖為對偶圖。紅色與藍色部分分別代表 A, B 、圖十五：紅色部分為樹 B , G'' 為外平面代表的平面集合、圖十六：上圖符合主定理；下圖不符合、圖十七：成功與失敗的 T 搜索的例子、圖十八：一個 T 收縮的例子、圖十九：有解圖與無解圖經收縮與逆收縮的關係、圖二十：定理二-1 與-2 的範例、圖二十一：化簡一的範例、圖二十二：化簡二的範例、圖二十三：化簡三和四的範例、圖二十四：推論一的唯二狀況、圖二十五：配合解釋一與解釋二描述、圖二十六：推論二的簡釋圖、圖二十七： G, G', G'' 三者的相連關係、圖二十八：推論二的一個例子，左圖為原圖，右圖為對偶圖、圖二十九：定理三的一個例子、圖三十：定理四的一個例子、圖三十一：搭配證明，其中紅點為 A 及 B 、圖三十二：*Herschel Graph* 以及其轉換、圖三十三：推論三示意圖、圖三十四：圖三十三的局部圖、圖三十五：加入的新點與圖中的交集關係、圖三十六：兩加入的新點與圖中的交集之交集數、圖三十七：推論三的兩個例子、圖三十八：*Tutte's Graph* 以及其對偶圖、圖三十九：*Tutte's Graph* 套用定理四後、圖四十：左圖為原圖，右圖為左圖套用定理五、圖四十一：一張能用 *Grinberg's theorem* 證明其無漢米爾頓迴圈的圖以及其對偶圖、圖四十二：左圖為原圖，右圖為其套用性質一與 T 收縮後的圖、圖四十三：所有重線相連的狀況、圖四十四：某端不能同時存在重線或不連通、圖四十五：窮舉得到所有狀況，最右圖為八種狀況的某疊加、圖四十六：性質三的操作法：圖四十七：性質四的圖 G 、圖四十八： $G_1, G_2, f_1(G_1, G_2)$ 、圖四十九=圖二十九、圖五十：存在重線但滿足推論三的圖、圖五十一：最左圖為圖 G ，其餘為對圖 G 上的平面分別進行三種收縮法、圖五十二：我們能夠構造有解圖卻不能構造無解圖、圖五十三：國中時對非平面圖做的研究。

【評語】050414

本作品討論平面圖的漢米爾頓迴圈存在性問題，作者給出平面圖有漢米爾頓迴圈的等價條件，該條件關於平面圖的對偶圖(dual graph)的性質。此外，為了增加判斷漢米爾頓迴圈存在性的效率，作者又更深入的證出存在漢米爾頓迴圈的平面圖的性質以及不存在漢米爾頓迴圈的平面圖的性質，並提出「T 搜索」與「T 收縮」，有效化簡圖的結構，期望能降低電腦計算的時間複雜度。可以看出作者對於圖論的基本工具與技巧有良好的掌握，不過由於問題本質上的困難度，成果較為有限。

作品海報

領域展開

-Dual graph 解 Hamilton cycle 在平面圖上的存在性問題

摘要

本研究以對偶圖的性質，取代以往著重點或邊數量的方法，探討平面圖中漢米爾頓迴圈的存在性。我們設計一套定理，判斷對偶圖對應之原圖是否存在漢米爾頓迴圈，並提出「T 搜索」，有效降低電腦計算的時間複雜度。此外，我們建立多項化簡定理，能在不影響迴圈存在與否的前提下，透過邊、點的替換與收縮，或圖的結構分解來簡化圖形。研究中也討論 Herschel Graph 與 Tutte's Graph，並提出當圖中出現特定結構時，原圖不具漢米爾頓迴圈的判別條件。最後，成果可用於構造具漢米爾頓迴圈平面圖之對偶圖，並期望數學方法推導出無漢米爾頓迴圈的平面圖，或用電腦窮舉所有無漢米爾頓迴圈平面圖之對偶圖，以便延伸討論。

壹、前言（研究動機）

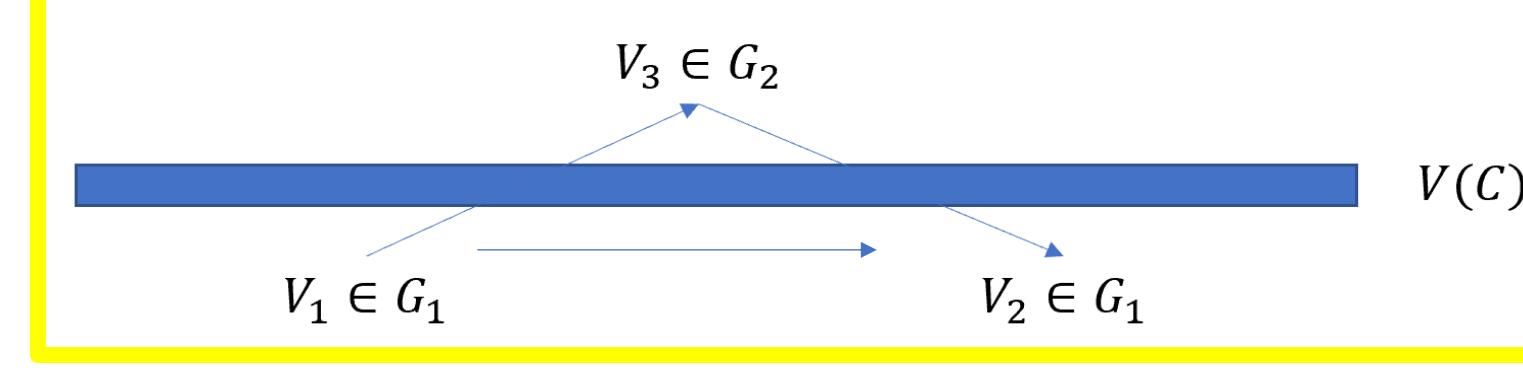
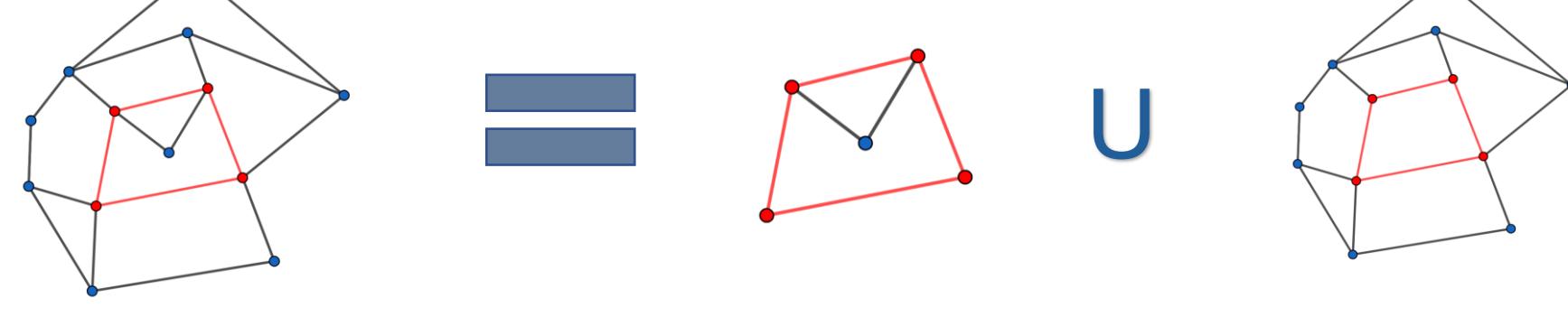
在我國三的時候，在宜蘭縣內做了一篇科展報告，篇名為「Untangle Game」—遊戲中的數學，內文中提到的「環狀程式解題法」必定需要找到漢米爾頓迴圈，若沒有則要使用到細分（狀況複雜因此報告中並未提及）。令我思考，既然無向漢米爾頓迴圈對目前來說為 **NP-complete** 問題，則是否存在一種特徵或簡化方法，其能夠使尋找漢米爾頓迴圈時降低時間複雜度。但透過動態規劃最低只能將時間複雜度壓縮到 $O(2^n \times n^3)$ ，且目前已有很多定理如狄拉克定理、歐爾定理、波紹定理等等利用點的度數探討存在漢米爾頓迴圈的必要條件，卻無充分條件，客觀上來說研究難度並不低。並且，我發現因為當初證明並不嚴謹，因此「Untangle Game」—遊戲中的數學有些謬誤，例如對於任意平面圖 $G = V(G), E(G)$ 若有 $e \geq 3v - 8$ ，則必存在漢米爾頓迴圈是錯的，在討論時會舉出一個反例並證明。

貳、研究工具及器材

1. 平板記錄軟體 Goodnotes 6 2. 幾何繪圖軟體 Geogebra 5

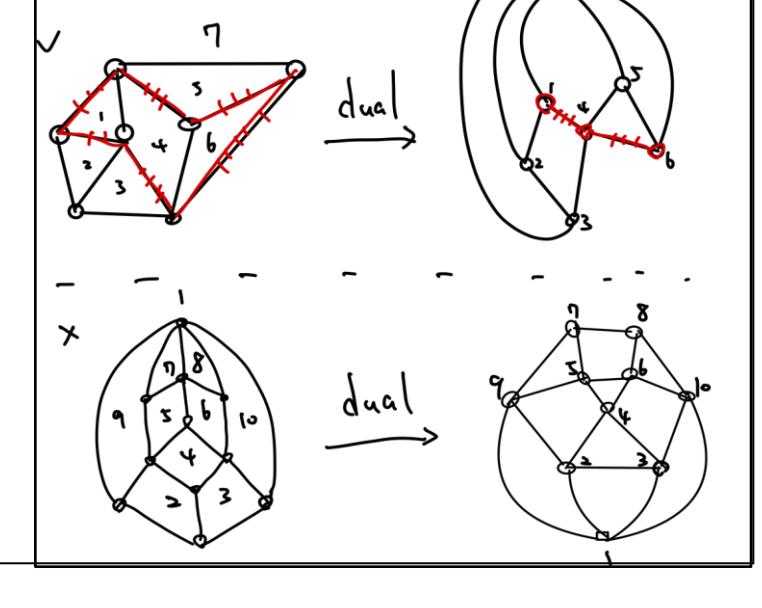
參、研究過程與結果

定理一：對於任意平面圖 G ，存在一個迴圈 C ， C 分割出的內部圖與外部圖皆各自為連通圖。



主定理：圖 G 對偶後的圖 G' ，存在一個子圖 A 。圖 G 存在漢米爾頓迴圈，若且唯若

1. A is a tree.
2. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖。
3. 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $V(C) \cap V(A) \neq \emptyset$ 。



條件(1) $V(A), V(B)$ is a partition of $V(G')$.

新增(2) 圖 A 不存在迴圈。

條件(2) A, B 皆為連通圖。

新增(3) 對於任意平面 $C \in F(G')$ ， $C \cap A$ 構成連通圖。

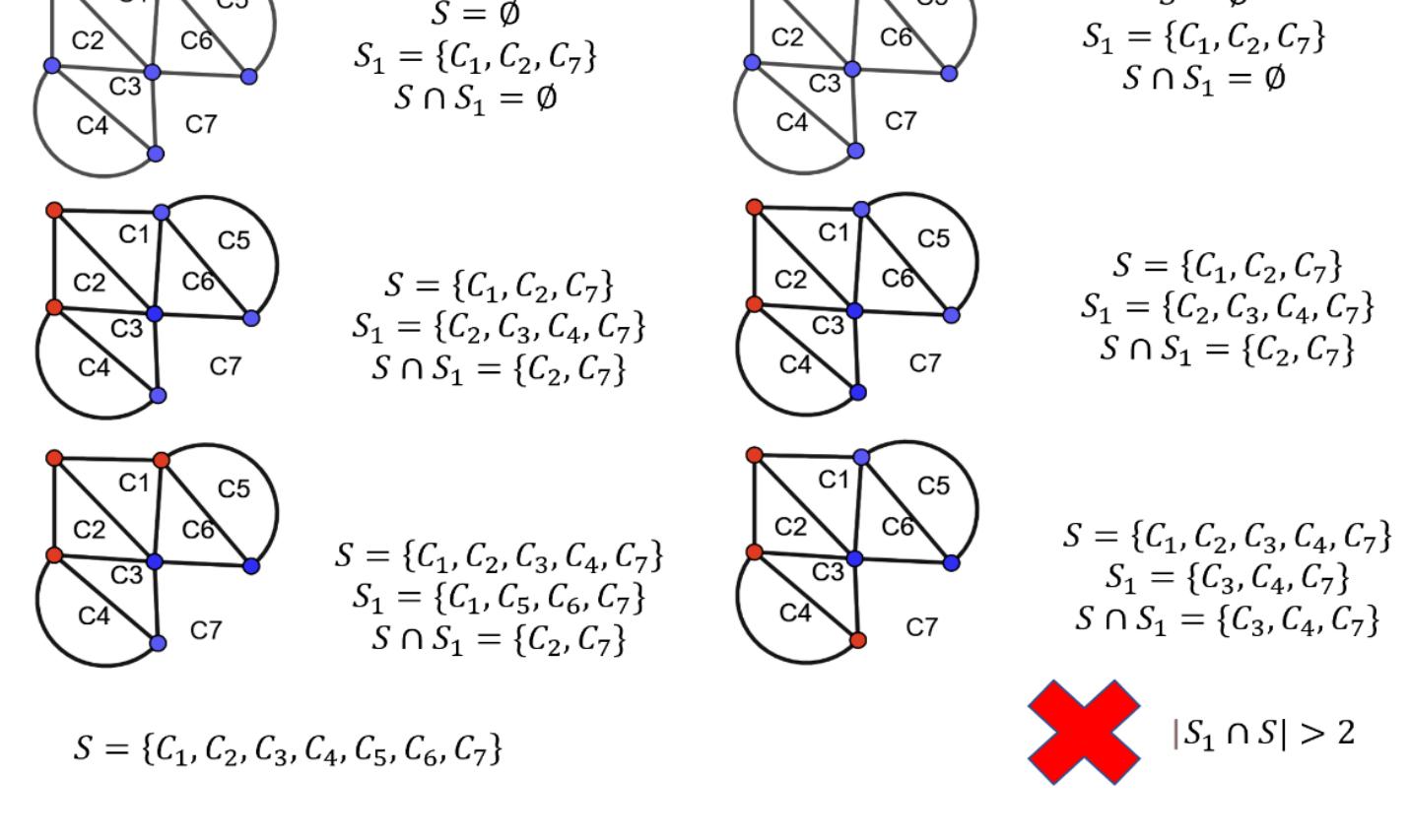
條件(3) $\forall C \in F(G')$ ，都有 $V(C) \cap V(A) \neq \emptyset$ 且 $V(C) \cap V(B) \neq \emptyset$ 。

分別證明上述三點

用等價取代包含B的敘述

T搜索

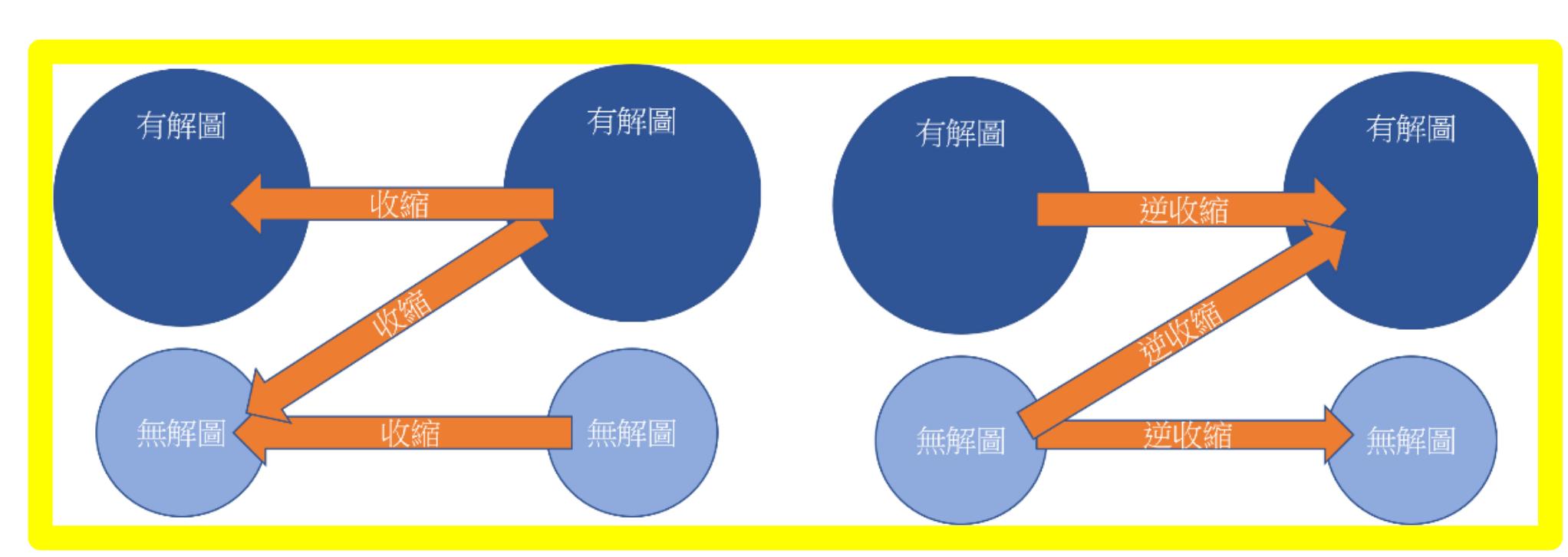
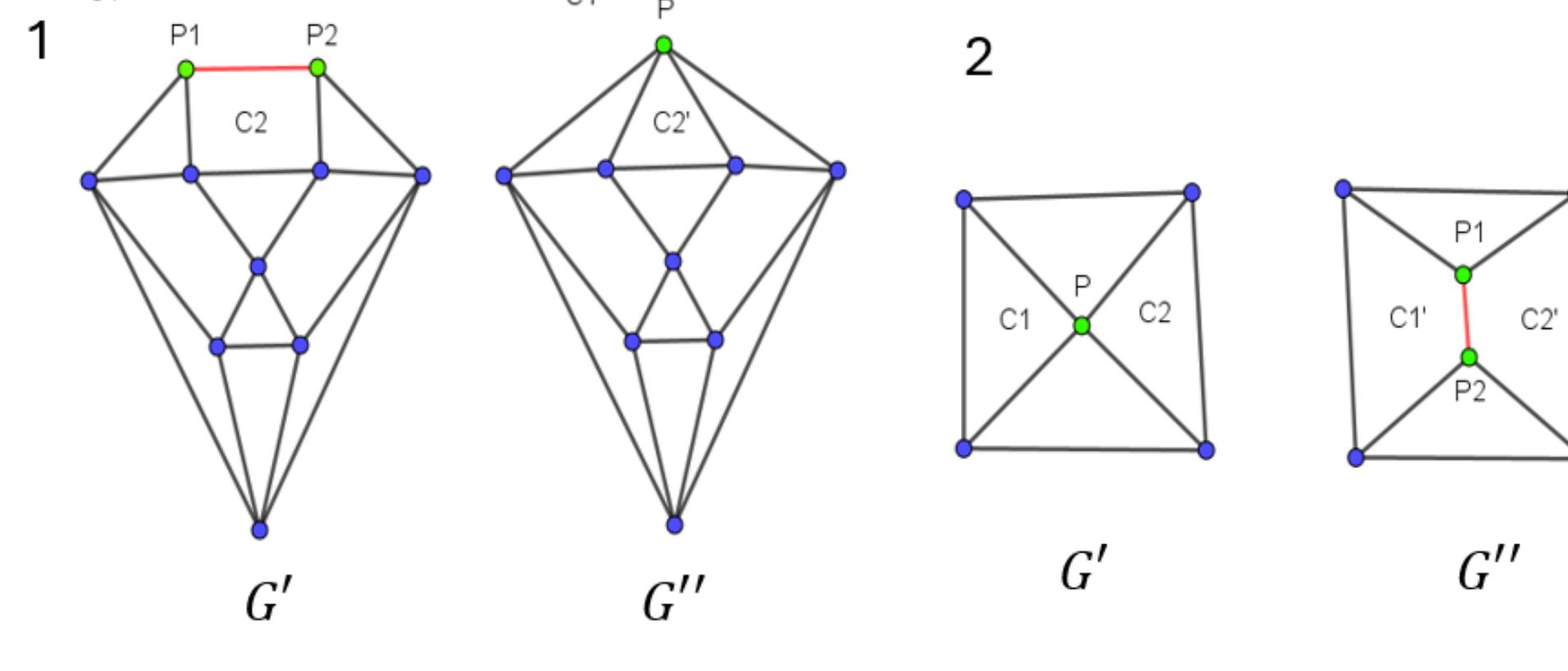
1. 操作：向外延伸，選擇恰與 $V(A)$ 點集合其中一點 V_A 相鄰的點 K 加入。
(記錄新點 K 屬於的平面 C_3, C_4, \dots 於平面集合 $S_1 = \{\}$ 中)
2. 條件：若新增的點 K 滿足 $|S_1 \cap S| > 2$ ，則 K 點不能存在於 $V(A)$ 。
(若 K 點存在於 $V(A)$ ，則將 S_1 的每一元存於 $S = \{C_1, C_2, \dots\}$ 當中)
3. 目標：若平面集合 $S = U$ 宇集，則點集合 $V(A)$ 的導出子圖即為所求。



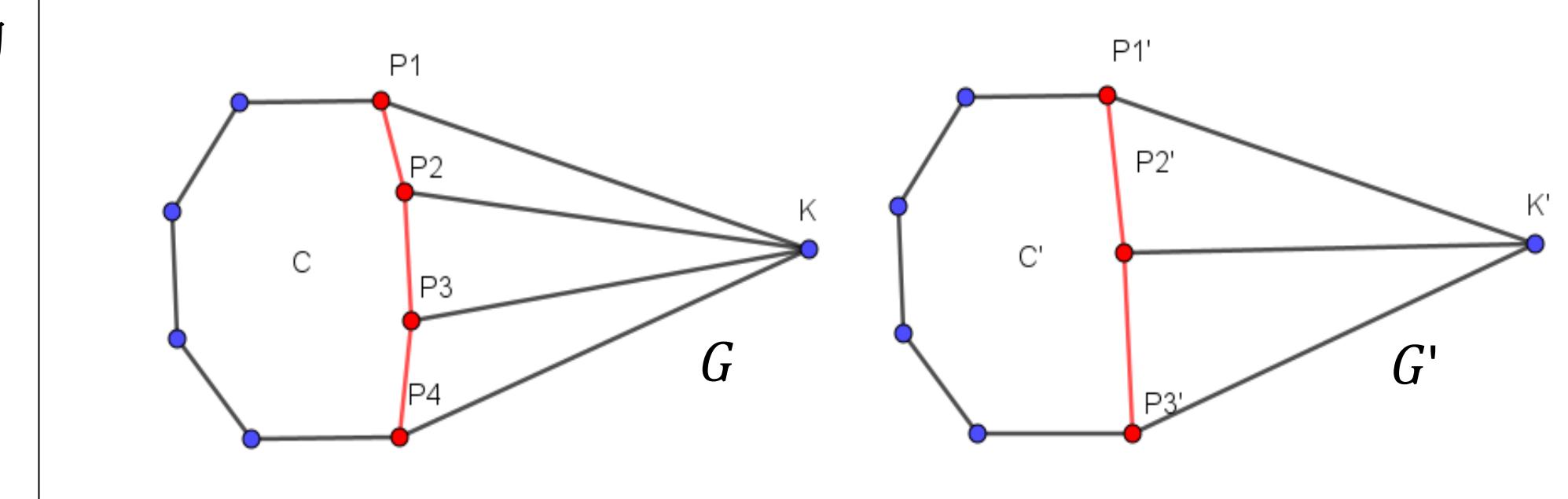
定理二-1：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一邊 P_1P_2 ，收縮後以點 P 取代，稱為圖 G'' ，以圖1為例。若圖 G 無漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為無解圖），則圖 G'' 為無解圖。

定理二-2：令圖 G 對偶後為圖 G' 。則在 G' 上，任取一點 P ，逆收縮後以邊 P_1P_2 取代，稱為圖 G'' ，以圖2為例。

若圖 G 有漢米爾頓迴圈（即圖 G' 為有解圖），則圖 G'' 為有解圖。

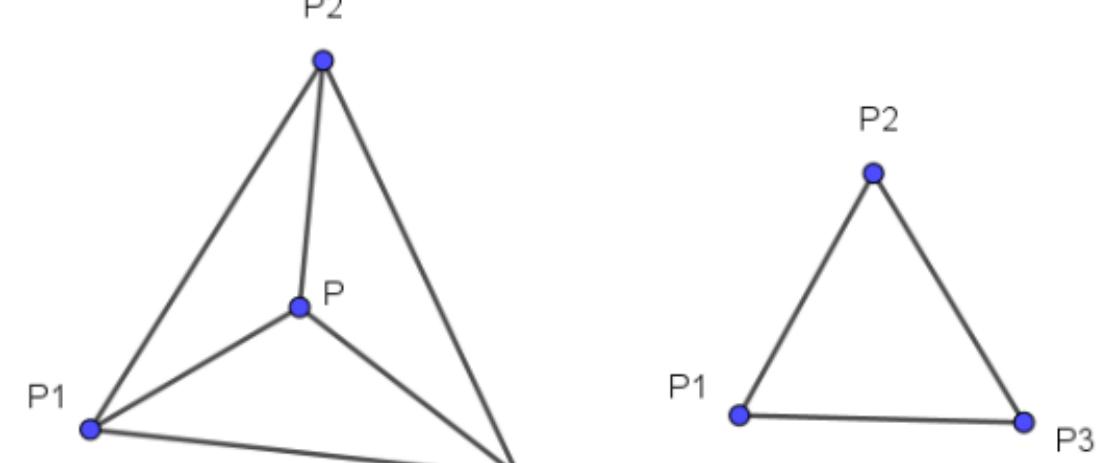


化簡一：對偶圖 G 中，若存在平面 C 上有一條路徑 P （圖中紅線）上的點大於等於四個，且 P 上的所有點皆與 C 外一點 K 相鄰；則可以直接將路徑 $P_1 - \dots - P_n$ 的路徑取代成 $P'_1 - P'_2 - P'_3$ 的路徑，並且 K 與 P'_1, P'_2, P'_3 以僅各自以一條線相連，構成圖 G' 。我們就有若圖 G 為有解圖，則圖 G' 為有解圖；若圖 G 為無解圖，則圖 G' 為無解圖。



直接分析各點

化簡二：若圖 G 中有一區域為 K_4 ，則替換成 K_3 後仍為有解圖或仍為無解圖。



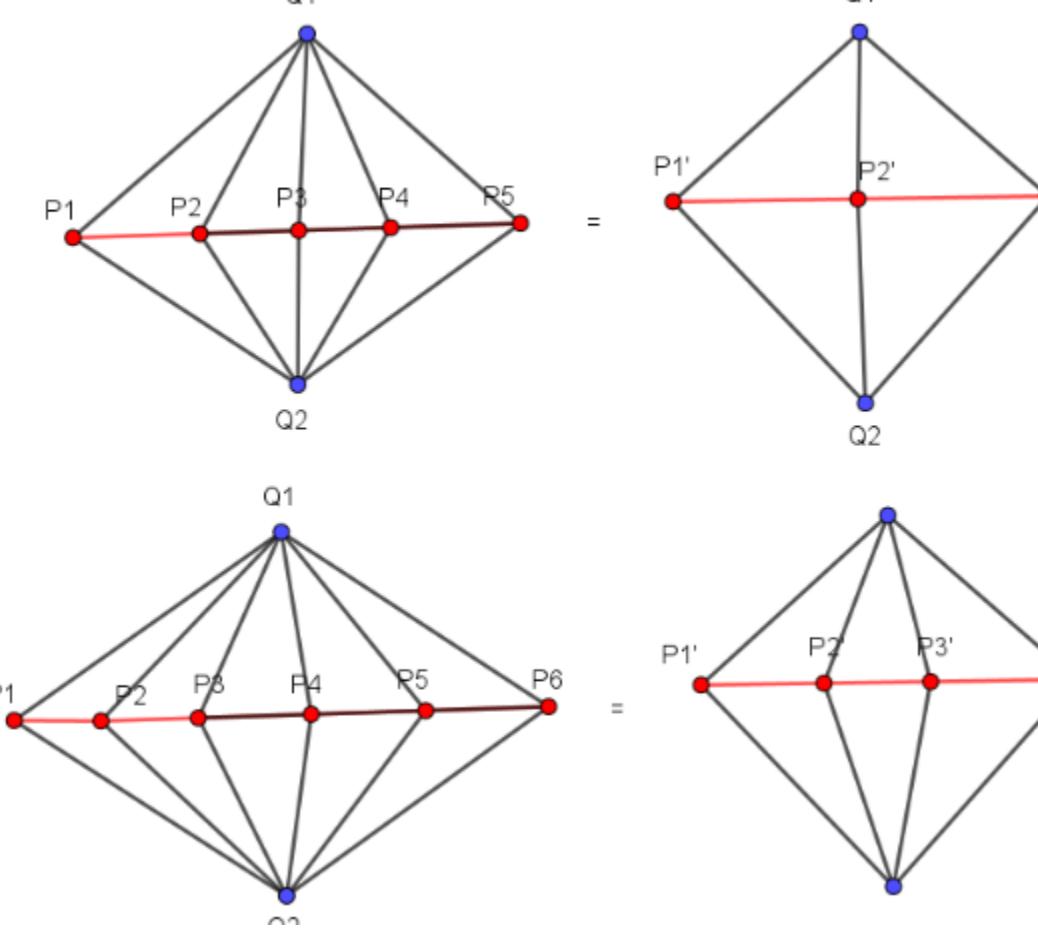
直接分析各點

舉個例子：右圖為定理六&七的分析

狀況 1. 若 Q_1 或 Q_2 皆被包含於 $V(A)$ ，則 $|V(P) \cap V(A)| \leq 1$ ，否則構成迴圈。
 狀況 2. 若僅 Q_1 或 Q_2 被包含於 $V(A)$ ，則為了滿足主定理第二點及第三點，
 $\forall k \in \mathbb{N}$ ，都要有 $P_{2k-1} \in V(A)$ 或 $P_{2k} \in V(A)$ 。
 狀況 3. 若 Q_1 或 Q_2 皆不被包含於 $V(A)$ ，則 $|V(P) \cap V(A)| \geq |V(P)| - 1$ 。
 將以上敘述以 $2n = 4$ 和 $2n - 1 = 3$ 代入會有相同結果，且對子圖的部分影響相同，得證。這裡注意到是 $2n = 4$ 而非 $2n = 2$ ，因為若 $2n = 2$ ，狀況 2 的 P_{2k-1} 不存在。

定理三-4 結果為： P_1 對應到 $P'_1, P_2, \dots, P_{2n-1}$ 對應到 P'_2, P_3, \dots, P_{2n} 對應到 P'_4 。
 定理三-5 結果為： P_1 對應到 P'_1, P_2, \dots, P_{2n} 對應到 P'_2, P_3 對應到 P'_3 。

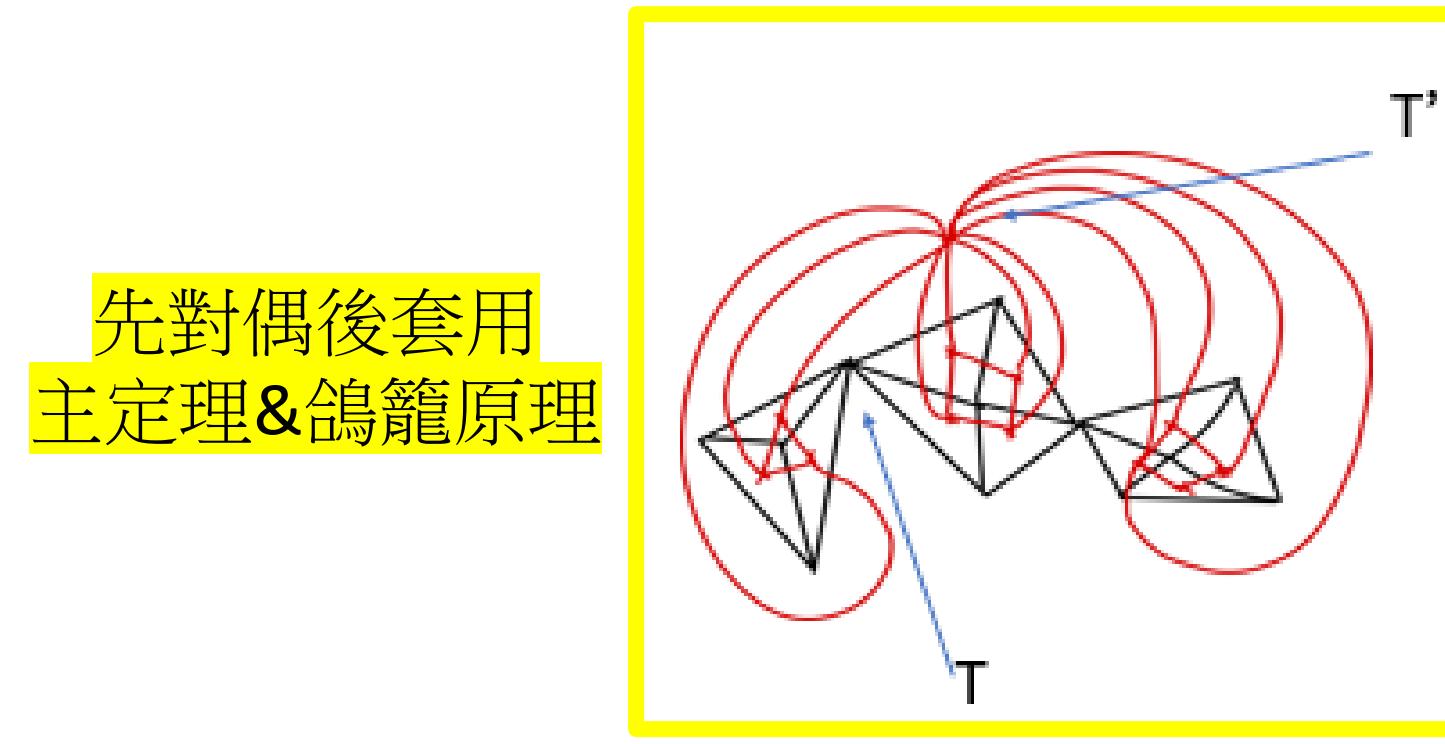
化簡三：若圖 G 中有平面可構成子圖 $K_{1,2n,1}$ ，則替換成 $K_{1,4,1}$ 後仍為有解圖或仍為無解圖。 $(n \in \mathbb{N})$ 紅線稱為路徑 P 。



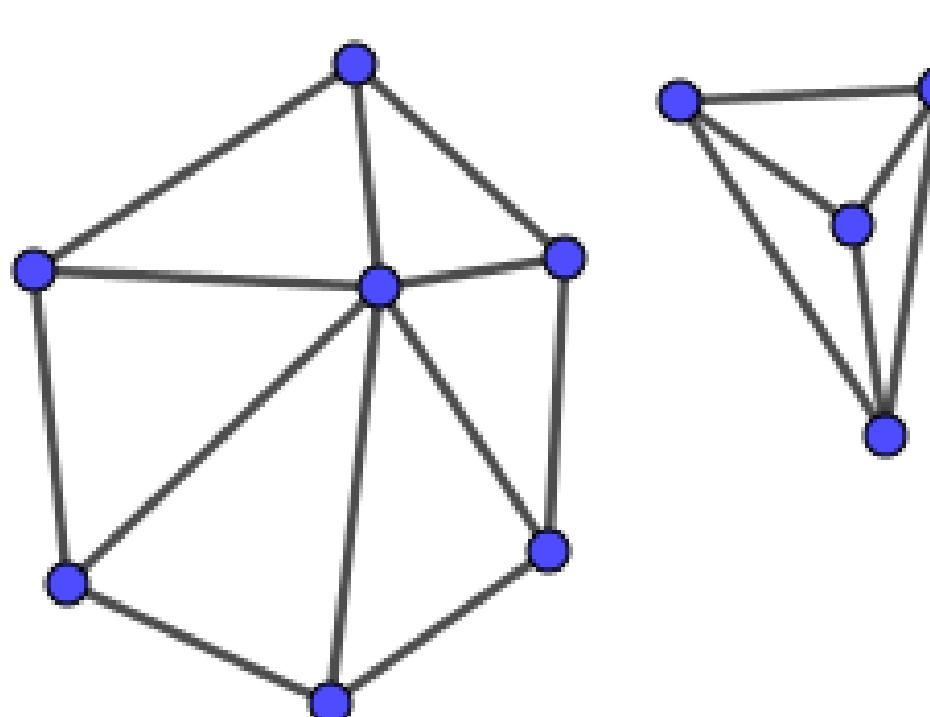
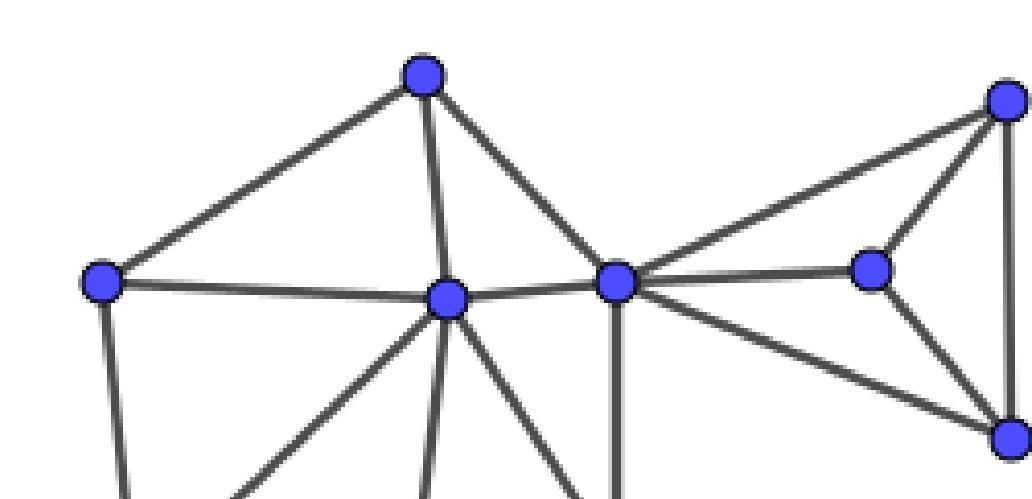
直接分析各點

推論一：若原圖或其對偶圖平面圖存在任意一個平面 C_n ，並且在 C_n 上的 n 個點無法獨立構成漢米爾頓迴圈，則原圖不存在漢米爾頓迴圈。

1. 兩個或以上的圖相接 \Rightarrow 任兩平面組以單點或單線連接

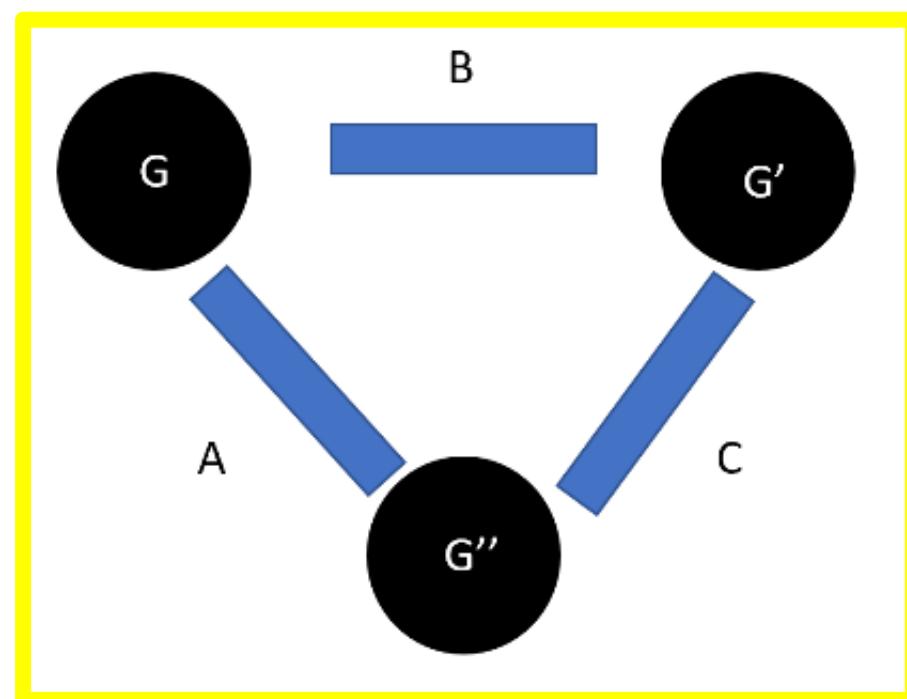
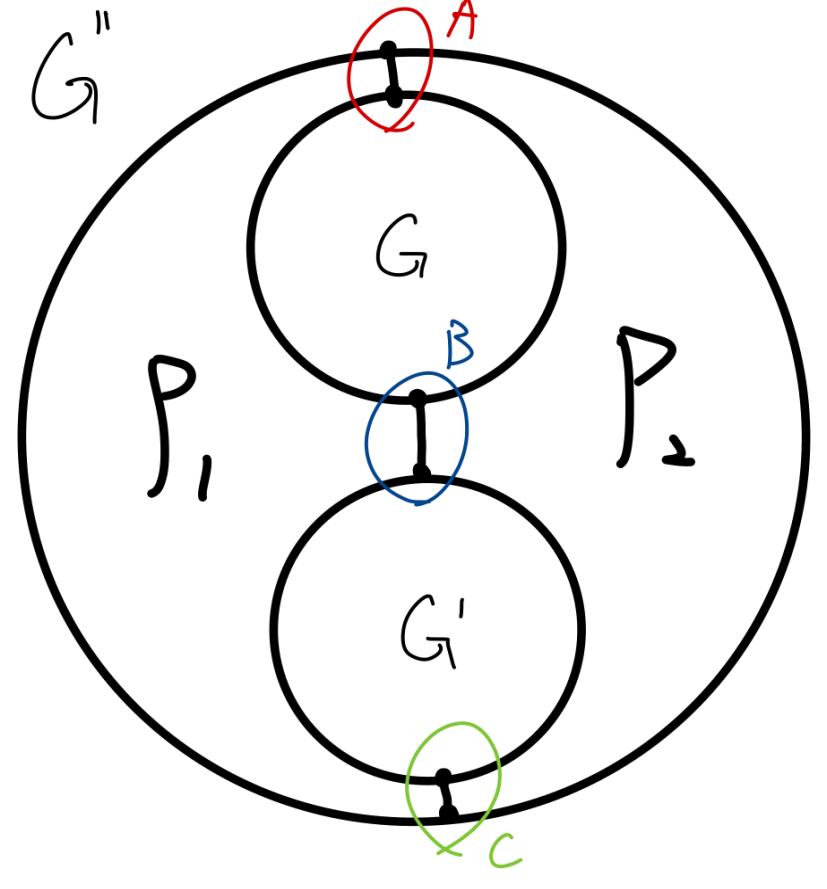


2. 兩個或以上的圖不相接 \Rightarrow 任兩平面組不連接（連通）

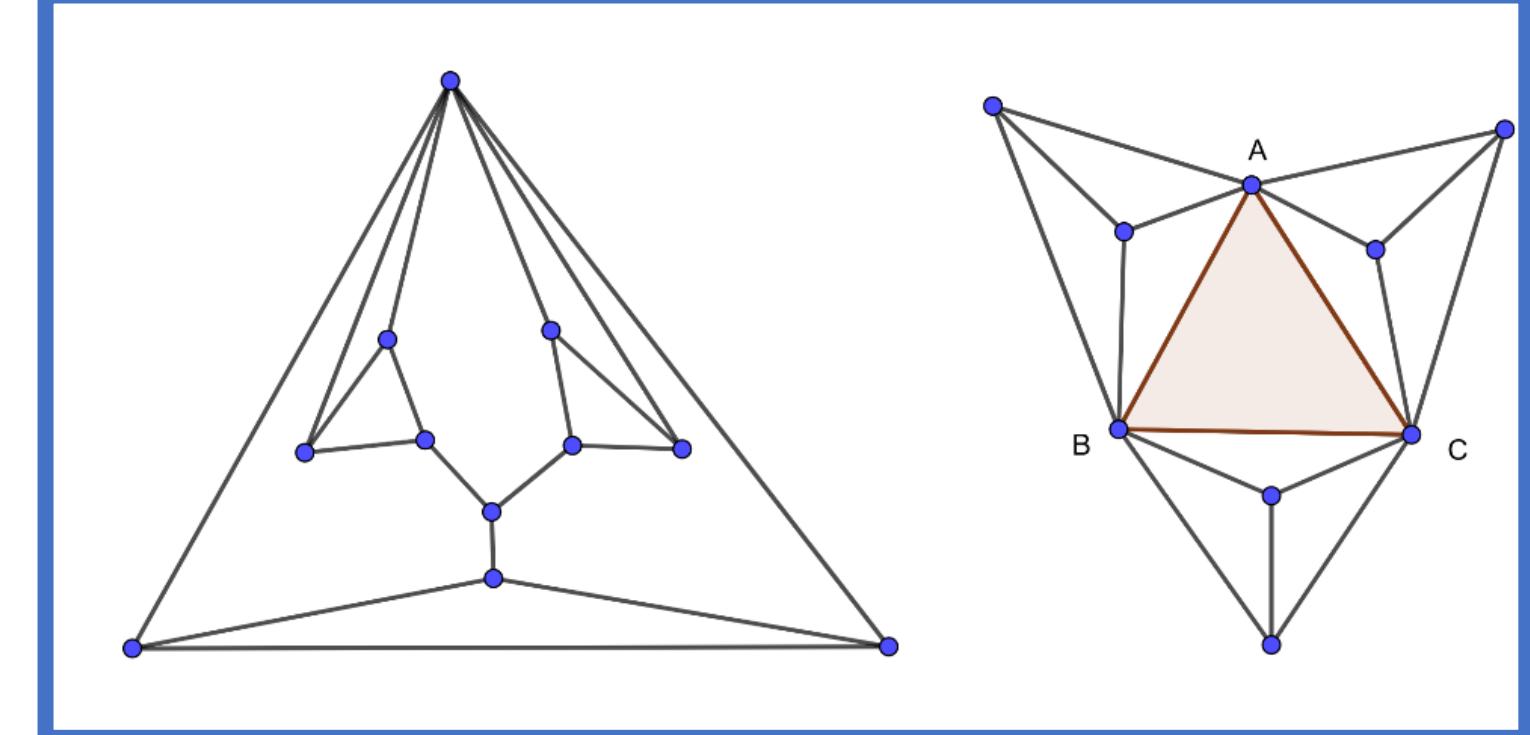


因為此圖不連通
故必定不符合主定理

推論二：若對偶圖存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖，則此對偶圖為無解圖，即原圖不存在漢米爾頓迴圈。

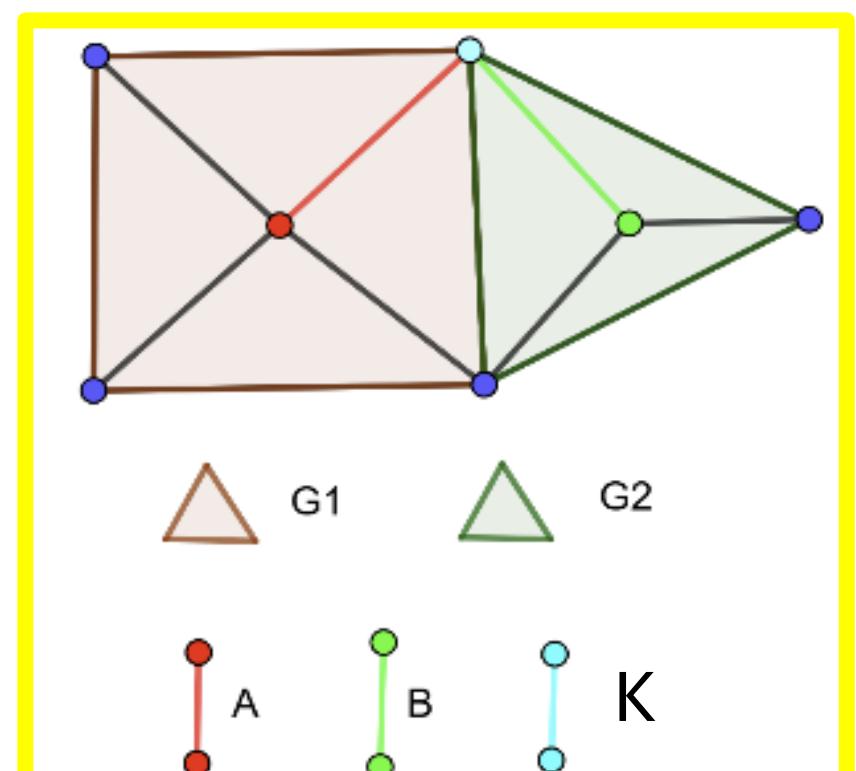


先對偶後套用
主定理&鴿籠原理



舉個例子：左為原圖、右為對偶圖

定理三：假設對偶圖 G 可分為兩連通子圖 G_1, G_2 ，並且 G_1 本身存在樹 A 滿足主定理； G_2 本身存在樹 B 滿足主定理。令 $G_1 \cap G_2$ 的圖為 K ，所有平面 $c \in F(G)$ 構成 $V(c) \cap K \neq \emptyset$ 的平面集合為 C 。若有 $A \cap K = B \cap K$ ，則 $A \cup B$ 在圖 G 滿足主定理。



交集處符合主定理
非交集處也符合主定理

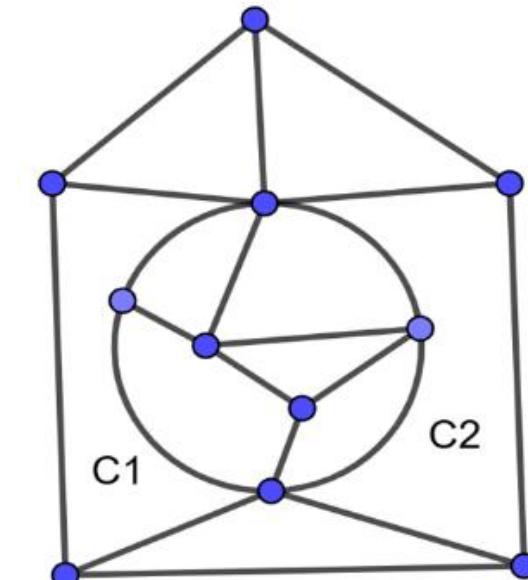
A

B

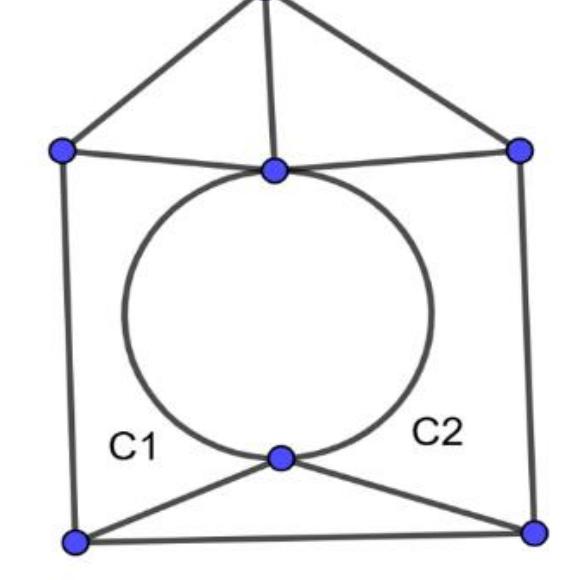
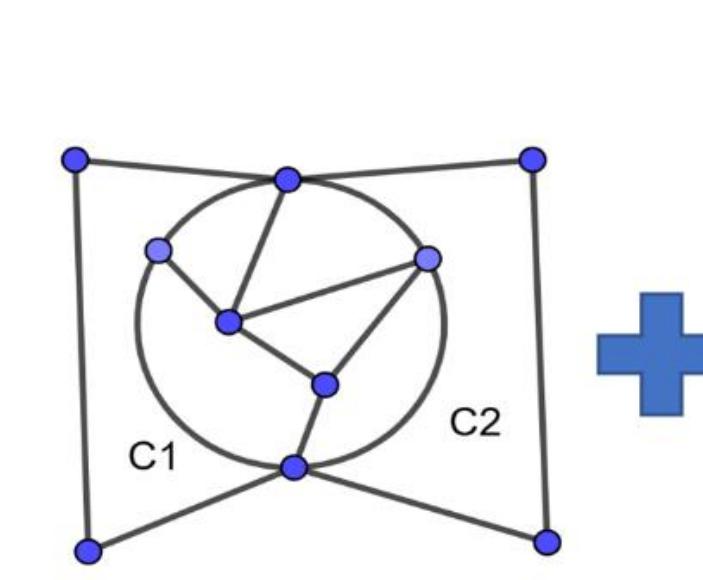
K

定理四：令圖 G 存在兩平面 C_1, C_2 的交集恰為兩組連通圖，並且兩平面分割的內外區域分別為圖 H_1, H_2 。

若且唯若 $C_1 \cup C_2 \cup H_1$ 及 $C_1 \cup C_2 \cup H_2$ 皆為有解圖，則圖 G 為有解圖。

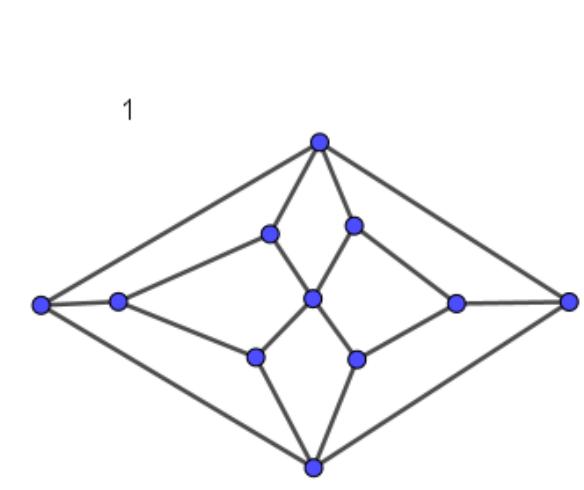


=

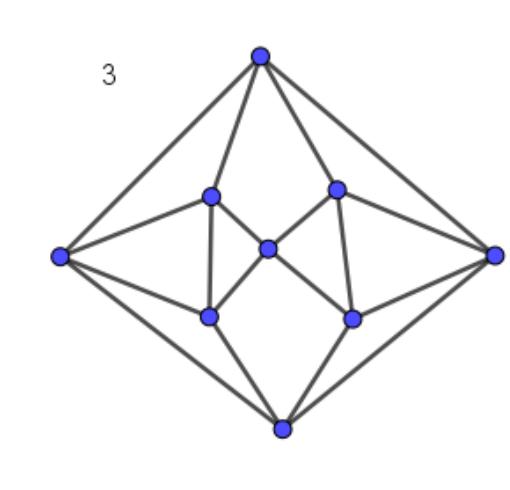


套用定理三

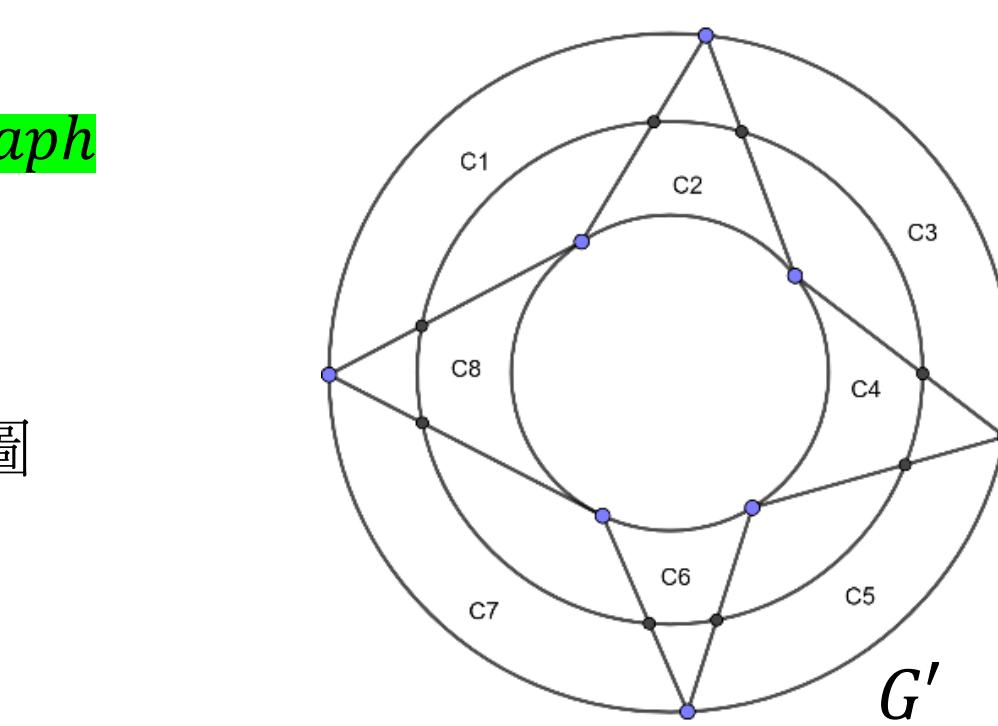
推論三：若圖 G 的對偶圖 G' 存在平面集合 $C' = \{C_1, \dots, C_n\}$ 恰使得 C_1, C_2, C_3 和 C_2, C_3, C_4 和 \dots, C_{n-1}, C_n, C_1 和 C_n, C_1, C_2 內部都有一塊區域，則圖 G 不存漢米爾頓迴圈。圖 G' 為一例子。



圖一為 Herschel Graph
圖二為同構圖
圖三為對偶圖
圖四為的同構圖
猜想圖五為無解圖



左圖為兩個例子



顯然的若要滿足與所有平面有交集(主定理第三點)
則某A樹所有點與平面或平面組數的交集滿足 $|C| = |S|$

計算後得出不合

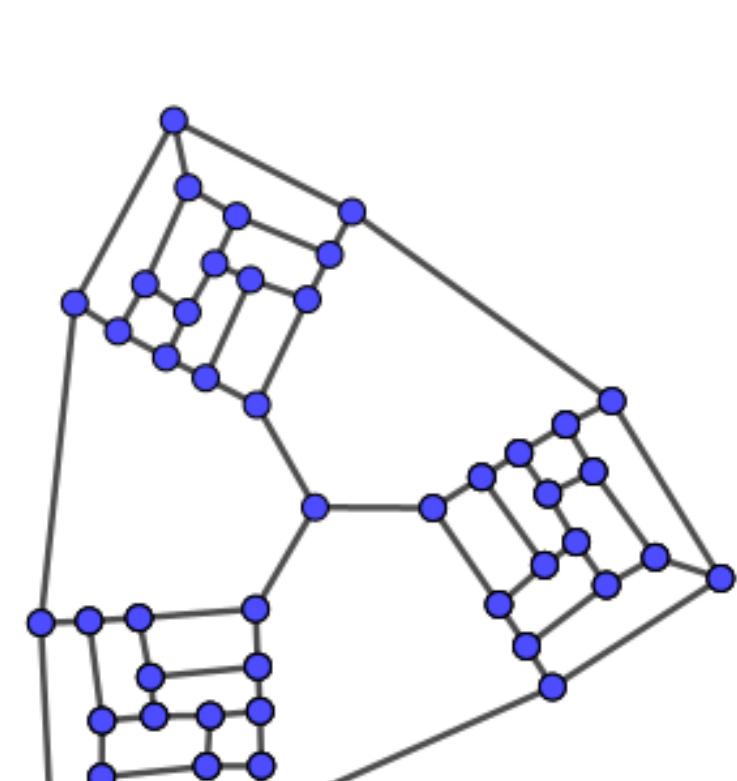
$$\begin{cases} (c_1, s_1) = f_1(0,0) \\ (c_{n+1}, s_{n+1}) = (f_a \cdot f_b')(c_n, s_n) \end{cases} \Rightarrow |C| > |S|$$

因為 $V(A) \cap (L_1) \neq \emptyset$
因為 $V(A) \cap (L_3) \neq \emptyset$

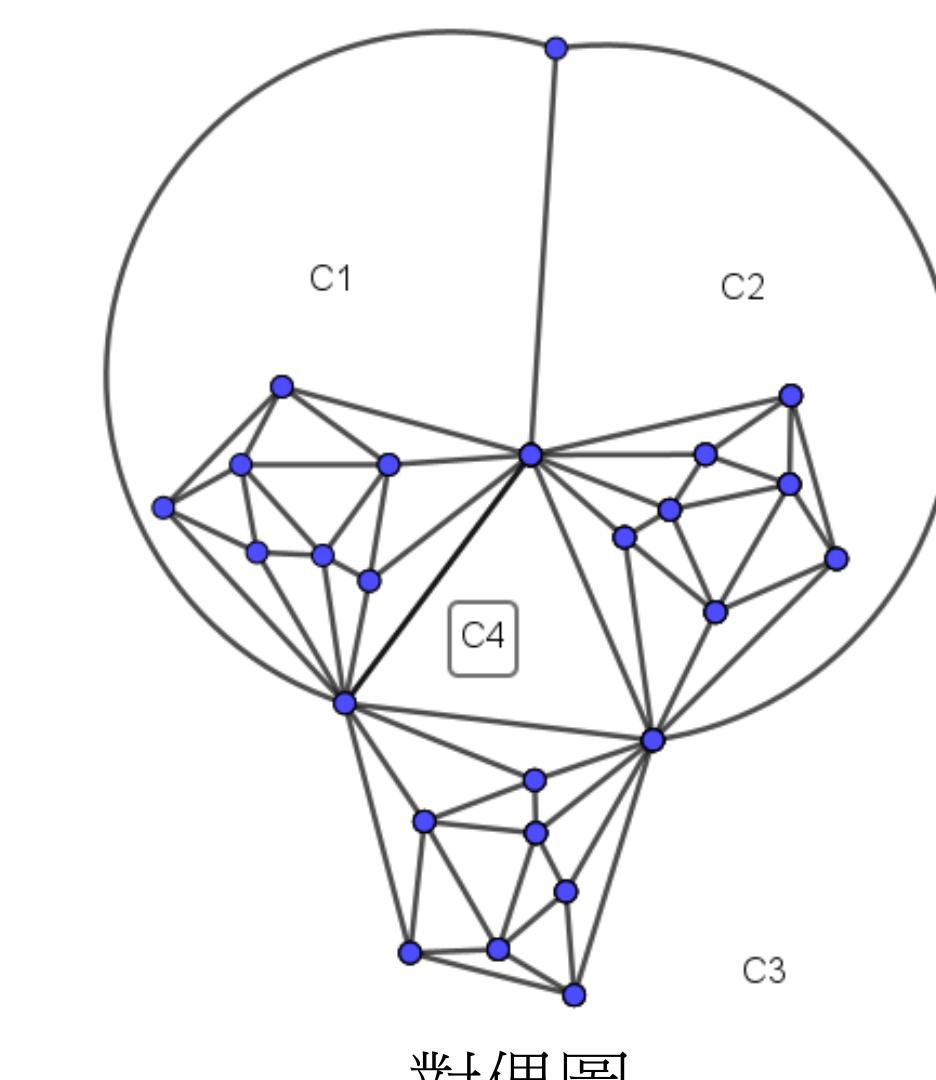
加入的新點位於	C	S
$V_1 \Rightarrow f_1(c, s)$	$c+2$	$s+1$
$V_2 \Rightarrow f_2(c, s)$	$c+2$	$s+2$
$V_3 \Rightarrow f_3(c, s)$	$c+2$	$s+1$

對於新點的交集	C	S
$V_1 - V_1 \Rightarrow f_1'(c, s)$	$c-1$	s
$V_2 - V_2 \Rightarrow f_2'(c, s)$	$c-1$	$s-1$
$V_3 - V_3 \Rightarrow f_3'(c, s)$	$c-1$	s
$V_1 - V_2 \Rightarrow f_4'(c, s)$	$c-1$	$s-1$
$V_2 - V_3 \Rightarrow f_5'(c, s)$	$c-1$	$s-1$

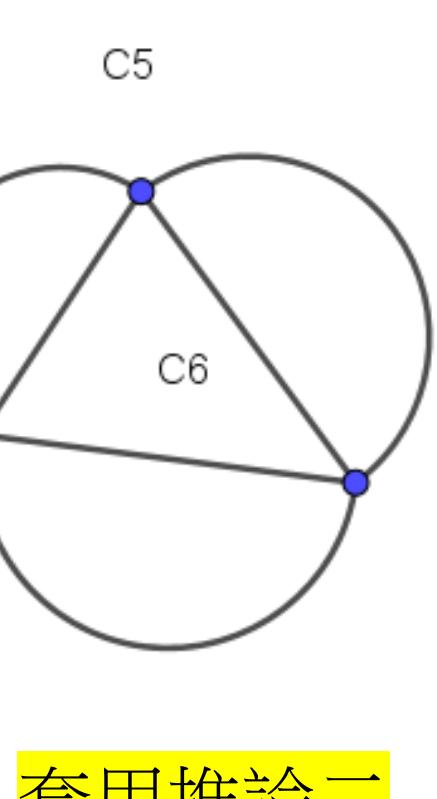
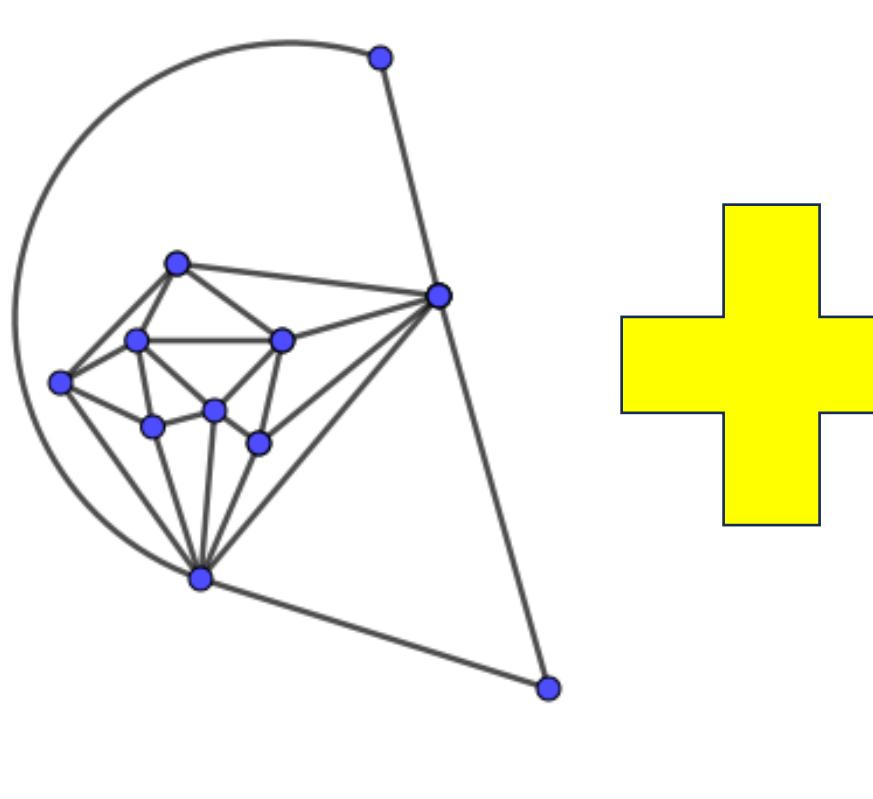
Tutte's Graph



已知其為無漢米爾頓迴圈

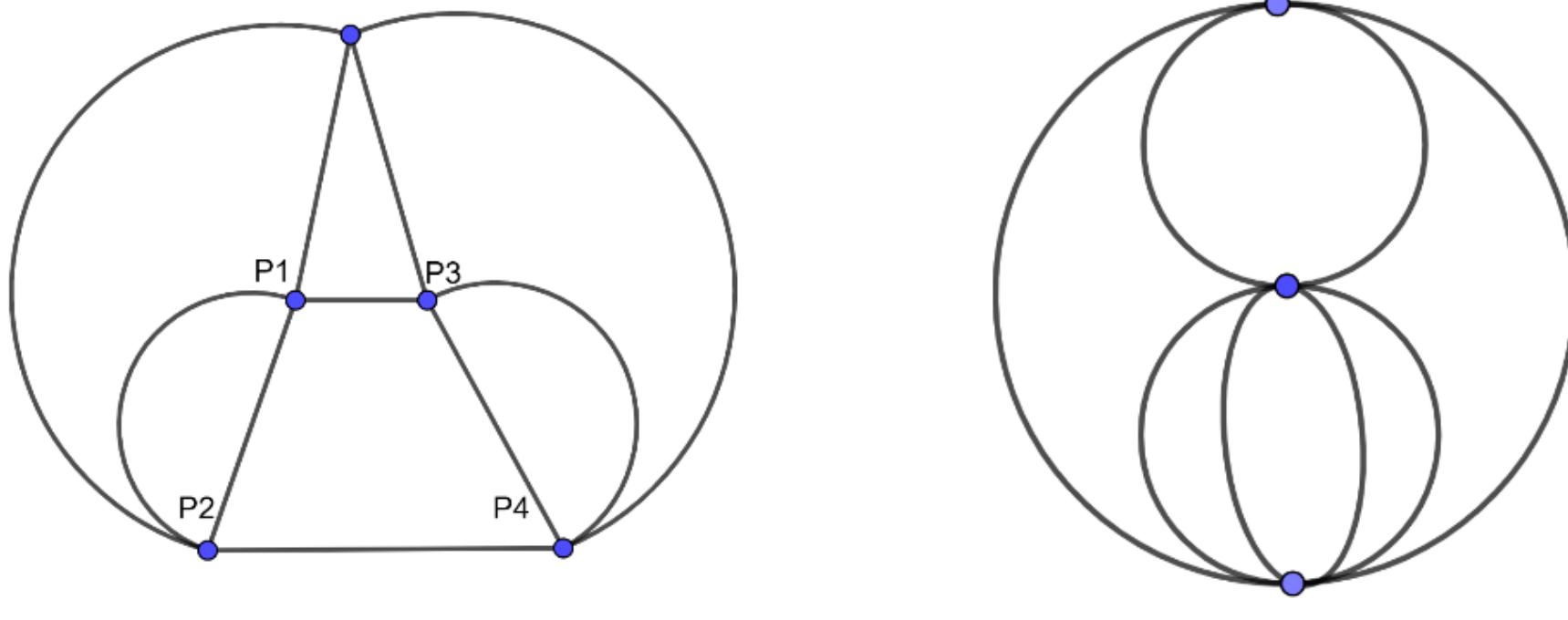


套用定理四



套用推論二

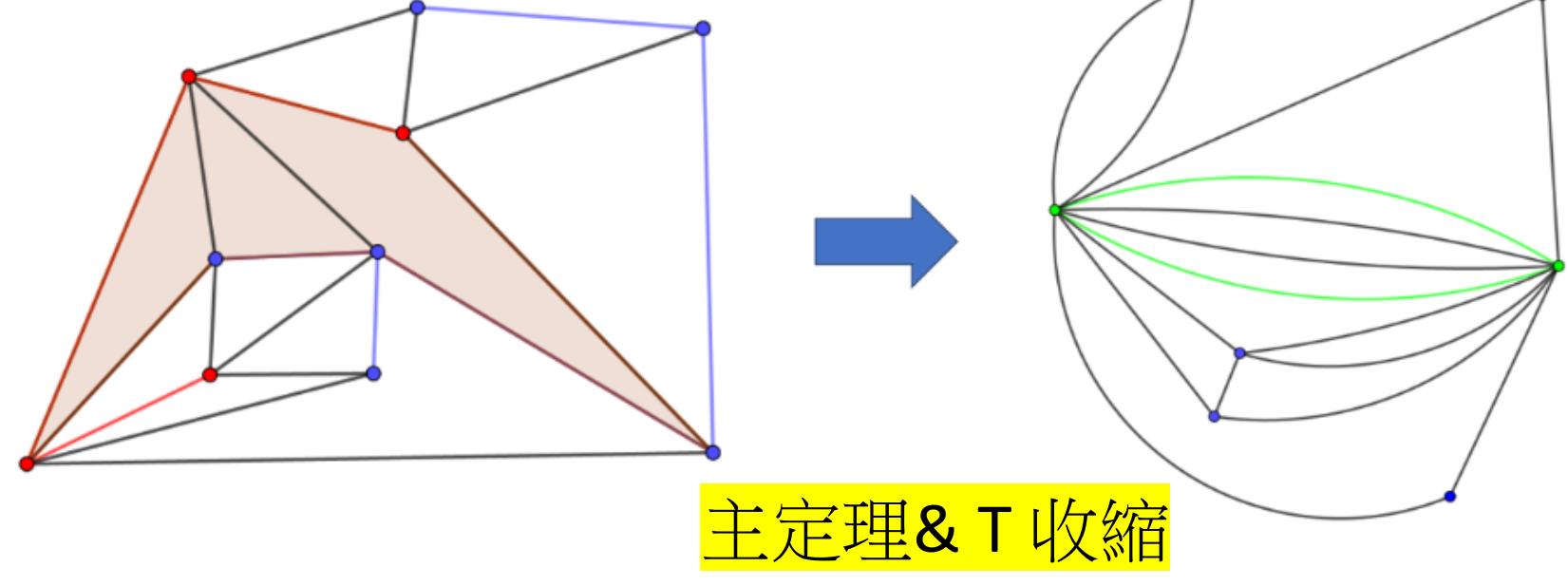
定理五：若對偶圖中有平面 C 存在兩重線 P_1P_2, P_3P_4 ，則 $C - P_1P_2 - P_3P_4$ 構成的互不連通的兩組連通圖收縮後不影響原圖無解或有解性。



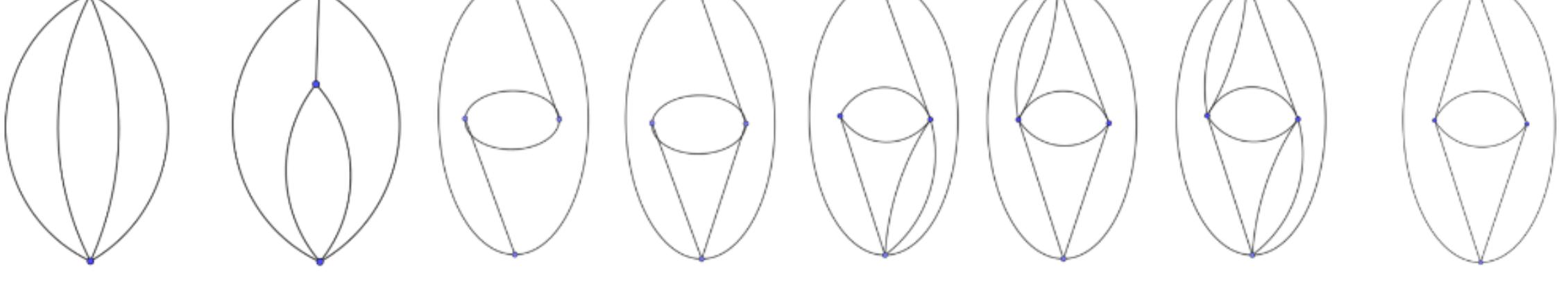
討論 $P_1 \sim P_4$ 的同時存在關係

肆、討論

性質一：任意有解圖 G 中，必存在一或多個迴圈 C ，構成 $A \cap B = C, A \cup B = G$ ，滿足 A, B 存在滿足主定理的 T_A, T_B ，並且 $T_A \cap C = T_B \cap C$ 。



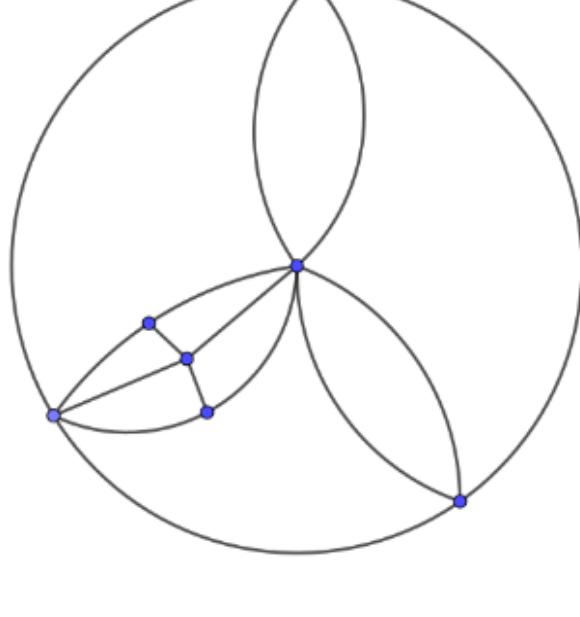
性質二：任意有解圖 G 必定由以下八種子圖套用定理四疊加後，再套用定理二-2逆收縮而得。



有條件的窮舉

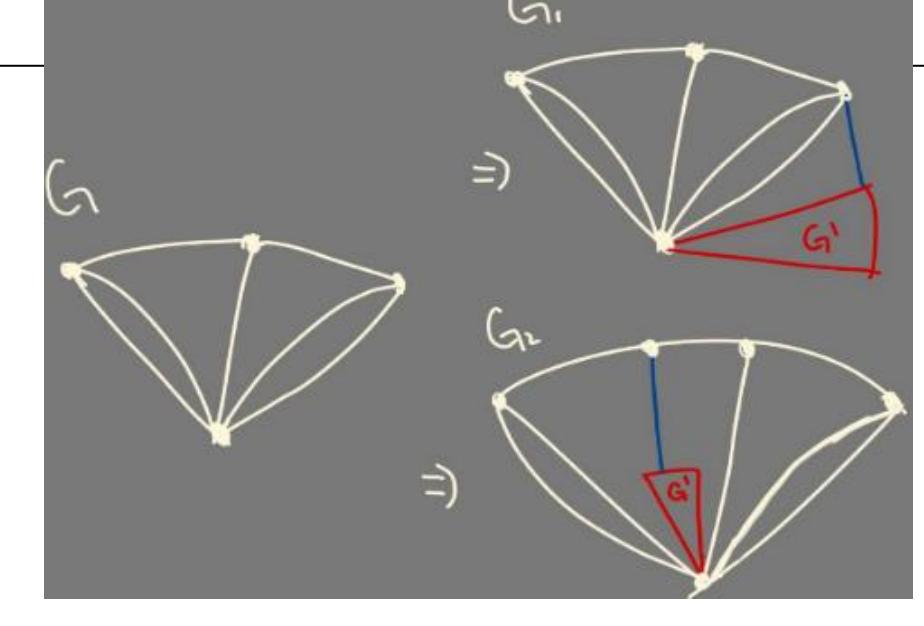
性質三：有解圖 G' 必由某有解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在一點 P 滿足對於任意平面 C 皆有 $P \in V(C)$ 。並且此圖的構造方法如下。 $(G \neq G')$

在進行T收縮時，若未達成目標且不能再繼續操作，即代表此圖有一點 P 其周圍皆為重線。



性質四：若無解圖 G' 不滿足推論一或二，則其必由無解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在點 P 滿足平面集合 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 皆構成 $P \in V(C_n)$ ，對於任一平面 C_a ，皆存在 C_b 與其交集為兩組互不連通的連通圖。 $(G \neq G')$

原敘述經過
主定理後直接得證



伍、結論

共1個已知定理、4+5個化簡定理、4個主定理、以及4個重要性質。

主定理：

主定理：圖 G 對偶後的圖 G' ，存在一個點集合 A ，令其導出子圖為 G'_A 。圖 G 存在漢米爾頓迴圈，若且唯若 1. G'_A is a tree. 2. 對於任意平面 $C \in F'$ ， $C \cap G'_A$ 構成連通圖。3. 對於任意平面 $C \in F'$ ， $V(C) \cap A \neq \emptyset$ 。

推論一：若原圖或其對偶圖平面圖存在任意一個平面 C_n ，並且在 C_n 上的 n 個點無法獨立構成漢米爾頓迴圈，則原圖不存在漢米爾頓迴圈。

推論二：若對偶圖存在兩平面 P_1, P_2 ，其 $P_1 \cap P_2$ 為至少三組互不連通的連通圖，則此對偶圖為無解圖，即原圖不存在漢米爾頓迴圈。

推論三：若圖 G 的對偶圖 G' 存在平面集合 $C' = \{C_1, \dots, C_n\}$ 恰使得 C_1, C_2, C_3 和 C_2, C_3, C_4 和 ... C_{n-1}, C_n, C_1 和 C_n, C_1, C_2 內部都有一塊區域，則圖 G 不存在漢米爾頓迴圈。

有解圖性質：

性質一：任意有解圖 G 中，必存在一或多個迴圈 C ，構成 $A \cap B = C, A \cup B = G$ ，滿足 A, B 存在滿足主定理的 T_A, T_B ，並且 $T_A \cap C = T_B \cap C$ 。

性質二：任意有解圖 G 必定由以下八種子圖套用定理四疊加後，再套用定理二-2逆收縮而得。

性質三：有解圖 G' 必由某有解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存有一點 P 滿足對於任意平面 C 皆有 $P \in V(C)$ 。並且此圖的構造方法如下。 $(G \neq G')$

無解圖性質：

性質四：若無解圖 G' 不滿足推論一或二，則其必由無解圖 G 經逆收縮而得，圖 G 存在點 P 滿足平面集合 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 皆構成 $P \in V(C_n)$ ，對於任一平面 C_a ，皆存在 C_b 與其交集為兩組互不連通的連通圖。 $(G \neq G')$

陸、參考文獻&圖源

- 「Untangle Game」—遊戲中的數學，原文 <https://drive.google.com/file/d/1HPRVVo2YsY1INytkz3jOsJsYTf6pAR/view?usp=drivesdk>
- 對偶圖-維基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_graph
- 圖論-維基百科 [https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%9B%BE_\(%E5%9B%BE%E8%AE%BA\)](https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%9B%BE_(%E5%9B%BE%E8%AE%BA))
- 哈密頓圖-維基百科 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%93%88%E5%AF%86%E9%A1%BF%E5%9B%BE>
- A Non-Hamiltonicity Proof System(NHPS) <https://www.cs.utoronto.ca/~ahertel/WebPageFiles/Papers/NHPS06.pdf>
- 樹-師大圖論演算法筆記 <https://web.ntnu.edu.tw/~algo/Tree.html>
- 演算法-動態規劃DP <https://mycollegenotebook.medium.com/%E6%BC%94%E7%AE%97%E6%B3%95-%E5%8B%95%E6%85%8B%E8%A6%8F%E5%8A%83-dp-1-bf647b23504b>
- Herschel graph-維基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Herschel_graph
- Tutte's Graph-Wolfram Mathworld [Tutte's Graph -- from Wolfram MathWorld](https://mathworld.wolfram.com/TuttesGraph.html)
- e=3v-6的非漢米爾頓圖 [graph theory - Trivial example of a non-Hamiltonian planar triangulation? - Mathematics Stack Exchange](https://math.stackexchange.com/questions/100000/graph-theory-trivial-example-of-a-non-hamiltonian-planar-triangulation)