中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050413

隨機生成數列的長度探討

學校名稱： 臺北市立永春高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉正謙	蔡春風 鄭名芳

關鍵詞： 數列、生成、期望值

摘要

一個籤筒中有編號為$1,2,3,\ldots,n$的n支籤，每抽出一支籤，將其編號寫在紙上，形成一個數列。數列只能向左右兩端添加項，不能從中插入；若無法插入，則操作結束。本研究探討此隨機生成數列的長度期望值。數列依添加項的方向分為「單向」與「雙向」，又依生成原理分為「嚴格遞增減」與「非嚴格遞增減」。透過組合計算與泰勒展開式，本研究成功證明：當n趨近無窮大時，單、雙向數列的長度分別會趨近$e-1$與$\frac{1}{2}(e^2-1)$。此外，本研究針對隨機生成數列的「子列」進行延伸探討，發現了單向子列數與 Eulerian Number 的對應關係，且證明出發現n支籤任意排列時，子列的期望組數為$\frac{n+1}{2}$；即當n趨近無窮大時，單向子列的長度期望值為2。

壹、研究動機

本研究為作者對先前研究的延伸探討（本研究作者，2024）。其動機源自我擲骰子時想到的一套「遊戲規則」。定義投擲第i次的點數為a_i，依照下列規則投擲一顆公正骰子，並紀錄每次點數，形成一數列，稱為「隨機生成數列」。

1. 投擲第一次，得到a_1，寫在紙上。
2. 若某次投擲所得點數比先前各次的點數都大，則將此點數寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若某次投擲所得點數比先前各次的點數都小，則將此點數寫在目前數列的左邊（往左增加一項）。
3. 若某次投擲所得點數無法滿足步驟 2，則此點數無法寫入目前數列的右邊或左邊，此時遊戲結束，目前數列的項數即稱為此數列的「長度」。

現舉一例如下：

1. 投擲第一次，得到$a_1 = 3$。
2. 投擲第二次，得到$a_2 = 5$。由於$5 > 3$，將5寫在目前數列的右邊，即3,5。
3. 投擲第三次，得到$a_3 = 2$。由於$2 < 3,5$，將2寫在目前數列的左邊，即2,3,5。
4. 投擲第四次，得到$a_4 = 6$。由於$6 > 2,3,5$，將6寫在目前數列的右邊，即2,3,5,6。
5. 投擲第五次，得到$a_5 = 3$。由於3並沒有比2,3,5,6都來得大或小，故3無法寫入數列，遊戲結束，此時寫在紙上的數列共有4項，因此其長度為4。

依照上述規則，容易得到以下結論：

性質 1（本研究作者，2024，性質 1）
以骰子生成之雙向隨機嚴格數列的長度最小值為1，最大值為6。

【證明】

只要$a_2 = a_1$，遊戲就會結束，因此隨機生成數列的長度最小值為1。又由於骰子只有6種點數，由鴿籠原理可知a_7必無法寫入數列中，因此隨機生成數列的長度最大值為6，性質 1 得證。

這裡我想到一個問題，隨機生成數列的長度期望值是多少呢？在解決這個問題之前，我又把遊戲規則稍加調整，並以符號表示：

1. 投擲第一次，得到a_1，寫在紙上。
2. 若$a_{i+1} \geq max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若$a_{i+1} \leq \min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的左邊（往左增加一項）。特別地，如果目前數列只有一種數值，且a_{i+1}恰等於此數值，此時既可寫在右邊也可寫在左邊，但這顯然沒差，不影響後續過程與結論。為了完善，規定寫在右邊。
3. 若a_{i+1}無法滿足步驟 2，即$min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\} < a_{i+1} < max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$則$a_{i+1}$無法寫入目前數列的右邊或左邊，此時遊戲結束，數列的長度為i。

現舉一例如下：

1. 投擲第一次，得到$a_1 = 3$。
2. 投擲第二次，得到$a_2 = 3$。由於$3 \geq 3$且$3 \leq 3$，寫在左右都沒差，但依規則將其寫在目前數列的右邊，即$3,3$。
3. 投擲第三次，得到$a_3 = 2$。由於$2 \leq 3,3$，將2寫在目前數列的左邊，即$2,3,3$。
4. 投擲第四次，得到$a_4 = 6$。由於$6 \geq 2,3,3$，將6寫在目前數列的右邊，即$2,3,3,6$。
5. 投擲第五次，得到$a_5 = 2$。由於$2 \leq 2,3,3,6$，將2寫在目前數列的左邊，即$2,2,3,3,6$。
6. 投擲第六次，得到$a_6 = 3$。由於$2 < 3 < 6$，故3無法寫入數列，遊戲結束，此時寫在紙上的數列共有5項，因此其長度為5。

不難發現，這種新規則主要改變了數列遞增減的「嚴格性」。原本的數列生成規則只要求「嚴格遞增」或「嚴格遞減」，但現在放寬為「遞增」或「遞減」。因此可得以下結論：

> 性質 2（本研究作者，2024，性質 2）
> 以骰子生成之雙向隨機非嚴格數列的長度最小值為2，最大值不存在。

【證明】

若$a_{i+1} = a_i$，則a_{i+2}可寫入數列的機率並不會受到影響，因此只有當$a_2 \neq a_1$且$a_1 < a_3 < a_2$（或$a_2 < a_3 < a_1$）時，遊戲才會最快結束，因此隨機生成數列的長度最小值為2。又由於此規則遞增減不需嚴格性，因此只要連續擲出目前數列的最大（或最小）數值，遊戲就能永遠進行下去。舉例來說，在上例2,2,3,3,6中，只要接下來每次都擲出2或6（當然，也可以擲出1，只是擲出1後就不能再擲出2），遊戲就永遠不會結束，因此隨機生成數列可以無限長，它的長度最大值不存在，性質 2 得證。

顯然，隨機生成數列愈長，發生的機率就愈低。直觀上來看，我們仍然可以求其長度的期望值，只是這種情況下更加困難。前面兩種規則中，數列都可以往左右兩端發展，為了簡化問題，我定義了「單向」數列，不失一般性規定其只能往遞增方向發展。此外，針對上述兩種規則中對數列遞增減的嚴格性規範，我又將數列分為「嚴格」與「非嚴格」兩類。以下列表將四種數列各舉一例。

表 1：本研究所探討的四種數列生成範例

類別	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	最終數列	長度
隨機單向嚴格生成數列	3	4	4						3,4	2
隨機雙向嚴格生成數列	3	4	2	4					2,3,4	3
隨機單向非嚴格生成數列	3	4	4	3	6	4			3,3,4,4,6	5
隨機雙向非嚴格生成數列	3	4	2	4	5	2	1	2	1,2,2,3,4,4,5	7

我將上述想法稍加改良，使其更具一般性。如果用擲骰子來生成數列，等於一場籤筒中只有6支籤（每支籤被抽到的機率均等）的抽籤遊戲，本研究希望能將籤數推廣到任意正整數n。此外，抽籤時所考慮的「抽後放回」與「抽後不放回」即等價於「非嚴格遞增減」與「嚴格遞增減」，因為抽後不放回就不可能抽到相同的籤。雖然這樣的定義會導致在抽後不放回的情況下，a_i可寫入數列的機率會與擲骰子時有所不同，但這並不影響問題的本質，所以我採取抽籤的方式來生成數列，並探討數列長度的期望值。

貳、文獻探討

因為本研究的數列是「隨機生成」的，它的項數及出現的數值都不固定，而且要對抽出的數字進行一定程度的重組，因此我觀摩歷屆科展相關的作品，希望能找到有用的線索。關於數列排序的作品中，有一群人針對 Avoid 數列有深入的研究（梅治玄、林雋庭、蘇芃之，2012；郭競友，2015，2016），Avoid 數列是指避免同一物連續出現兩次以上，2012 年這篇研究是探討特殊的數列（Avoid123），而郭競友的研究則是用類巴斯卡三角形、組合數學觀點及生成函數來看 Avoid 數列。先前的研究針對數列排序有不同面向的探討，然而，幾乎沒有研究探討我所想的特定規則的生成數列，因此，我想透過本研究，了解隨機單、雙向嚴格生成數列與非嚴格生成數列的長度的期望值。

參、研究目的

一、探討隨機單向嚴格生成數列的長度期望值。

二、探討隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值。

三、探討隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值。

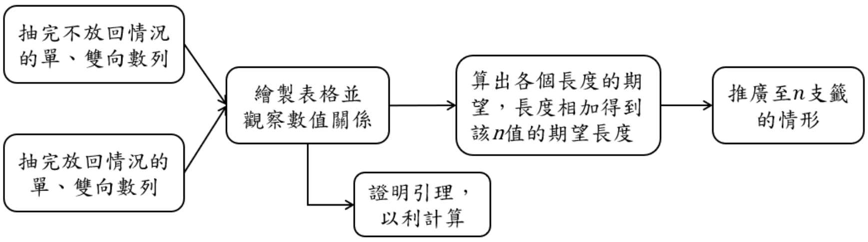
四、探討隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值。

肆、研究設計

一、研究方法與流程

本研究按照下圖 1 的流程進行。

圖 1：研究流程圖



二、名詞定義

1. 總籤數n：所有籤的總數量，是一個正整數。
2. a_i：第i次抽出的籤之編號，因此$1 \leq a_i \leq n$且$a_i \in N$。
3. 隨機單向嚴格生成數列：依照下列遊戲規則所得的數列。

   【規則 1-1】抽第一支籤，得到a_1，寫在紙上。

   【規則 1-2】若$a_{i+1} > max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若$a_{i+1}$無法滿足前述條件，即$a_{i+1} \leq max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則$a_{i+1}$無法寫入目前數列的右邊，此時遊戲結束，數列的長度為i。
4. 隨機雙向嚴格生成數列：依照下列遊戲規則所得的數列。

   【規則 2-1】抽第一支籤，得到a_1，寫在紙上。

   【規則 2-2】若$a_{i+1} > max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若$a_{i+1} < min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的左邊（往左增加一項）。若$a_{i+1}$無法滿足前述條件，即$min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\} \leq a_{i+1} \leq max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$，則$a_{i+1}$無法寫入目前數列的右邊或左邊，此時遊戲結束，數列的長度為i。
5. 隨機單向非嚴格生成數列：依照下列遊戲規則所得的數列。

【規則 3-1】抽第一支籤，得到a_1，寫在紙上。

【規則 3-2】若$a_{i+1} \geq max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若$a_{i+1}$無法滿足前述條件，即$a_{i+1} < max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\}$，則$a_{i+1}$無法寫入目前數列的右邊，此時遊戲結束，數列的長度為i。

6. 隨機雙向非嚴格生成數列：依照下列遊戲規則所得的數列。

【規則 4-1】抽第一支籤，得到a_1，寫在紙上。

【規則 4-2】若$a_{i+1} \geq max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的右邊（往右增加一項）。若$a_{i+1} \leq min\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\}$，則將$a_{i+1}$寫在目前數列的左邊（往左增加一項）。特別地，如果目前數列只有一種數值，且a_{i+1}恰等於此數值，此時既可寫在右邊也可寫在左邊，但這顯然沒差，不影響後續過程與結論。為了完善，規定寫在右邊。若a_{i+1}無法滿足前述條件，即$min\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\} < a_{i+1} < max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i\}$，則$a_{i+1}$無法寫入目前數列的右邊或左邊，此時遊戲結束，數列的長度為i。

7. 抽籤過程$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$：一系列符合遊戲規則的$k$次抽籤過程中，每次所抽出的編號。舉例來說，在隨機雙向嚴格生成數列中，(2,1,5,2)是其中一種抽籤過程，其長度為3。

8. 終止項a_k：在抽籤過程中，使遊戲結束（最後一次抽籤）的編號。在上例中，$a_k = 2$。

9. $B_i = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i\}$：遊戲結束時，寫在紙上的數列。換句話說，將抽籤過程$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$依序重新排列，就可以得到$B_i$。其中$i \leq k$。在上例中，將抽籤過程(2,1,5,2)重新排列，可得$B_3 = \{1,2,5\}$。

10. $|B_i|$：$B_i = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i\}$中的元素個數，即數列的長度。

11. C_b^a：從a個相異數中取出b個的方法數。在本研究中，規定當$a < b$時，$C_b^a = 0$。

12. $\sum_{i=b}^{a} i$：連加符號。在本研究中，規定當$a < b$時，$\sum_{i=b}^{a} i = 0$。

13. $k^{(z)}$：數字k連續出現了z次。

14. $n\left[F_i^{(r)}\right]$：在全部有n支籤的情況下，滿足終止項$a_k = r$、數列長度$|B_i| = i$的所有可能的抽籤過程$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, r)$之種類數。

15. $|G_n|$：在籤筒內有n支籤的情況下的子列個數。

伍、研究結果

本研究為作者對先前研究的延伸探討（本研究作者，2024）。

一、基礎論述

引理 1（本研究作者，2024，引理 1）

將i支籤任意排序，總共有$i!$種排法，其中符合遊戲規則的抽籤方法有2^{i-1}種。

【證明一】

利用符合規則的$(i+1)$支籤中，b_{i+1}寫入$\{b_1,b_2,b_3,\dots,b_i\}$的抽籤過程中，可選擇的位置數，得符合遊戲規則的有$C_1^1\times\left(2^{i-3}+1\right)+\sum_{s=2}^{i-2}C_1^s\times\left(2^{i-2-s}\right)+C_1^{i-1},i\geq 3$種。因為$C_1^m=m\times C_1^1$，$\sum_{s=2}^{i-2}s\times\left(2^{i-2-s}\right)=3\times 2^{i-3}-i$，所以上式$=\left(2^{i-3}\right)-i+3\times 2^{i-3}+i=2^{i-1}$，故符合遊戲規則的$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_i)$有$2^{i-1}$種，引理 1 得證。

【證明二】

為了避免遊戲提前結束，故抽籤過程的a_1、a_2必為連續整數q、p，其中q、p為正整數，q、p的大小不會影響抽籤結果，不失一般性，設$p=q+1$，若抽籤過程出現編號k，且$k<q$，則編號k必會在編號$(k-1)$前出現；若抽籤過程出現編號l，且$l>p$，則編號l必會在編號$(l+1)$前出現。若有i支籤排列，則排列數總和為$2\times\frac{(i-2)!}{(i-2)!}+2\times\frac{(i-2)!}{(i-3)!1!}+2\times\frac{(i-2)!}{(i-4)!2!}+\cdots+2\times\frac{(i-2)!}{(i-2)!}=2\left(C_0^{i-2}+C_1^{i-2}+C_2^{i-2}+\cdots+C_{i-2}^{i-2}\right)2\times 2^{i-2}=2^{i-1}$，故引理 1 得證。

引理 2（本研究作者，2024，引理 2）

單向非嚴格數列中，若$a_k=n-1$，則$n\left[F_i^{(n-1)}\right]=H_{i-1}^n,n\geq 2$。

【推導】

首先，定義重複組合符號$H_k^n = C_k^{n+k-1}$，並考慮終止項$a_k = n-1$。

當$|B_i| = 1$時，數列只有$(n, (n-1))$一種可能，此時$n\left[F_1^{(n-1)}\right] = H_0^n$。

當$|B_i| = 2$時，數列形如$(1, n, (n-1)), (2, n, (n-1)), (3, n, (n-1)), \ldots, ((n), n, (n-1))$，由上可知，為了要使終止項$a_k = n-1$，則$a_{k-1}$必須為$n$。除$a_{k-1}$之外，由於籤抽完放回，所以$a_i$可以使用重複組合，故挑選$a_i$之組合數為$H_1^n$，也就是說，所以$n\left[F_2^{(n-1)}\right] = H_1^n$。

當$|B_i| = 3$時，需考慮$(a_1 = 1)$且$|B_i| = 2$的抽籤過程種類數$+(a_1 = 2)$且$|B_i| = 2$的抽籤過程種類數$+(a_1 = 3)$且$|B_i| = 2$的抽籤過程種類數$+ \cdots + (a_1 = n)$且$|B_i| = 2$的抽籤過程種類數，即除了a_{k-1}之外，a_i之組合數為H_2^n，所以$n\left[F_3^{(n-1)}\right] = H_2^n$。依此類推，可得$n\left[F_i^{(n-1)}\right] = H_{i-1}^n, n \geq 2$。

二、隨機單向嚴格生成數列的長度期望值

表 2 中，第一行代表有多少支籤（也就是總籤數n），第一列代表數列的長度（$|B_i|$），例如：當$n = 3, |B_i| = 2$時，抽籤過程的種類數有 2 種，而(2,3,1)就是其中一種。

表 2：單向嚴格規則下，數列的長度（$|B_i|$）、總籤數（n）與其對應的抽籤過程種類數

n \ $\lvert B_i \rvert$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	3	2	1			

4	12	8	3	1		
5	60	40	15	4	1	
6	2520	1680	630	168	5	1

定理 1

隨機單向嚴格生成數列的長度期望值為：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$$

【證明】

考慮總共n支籤的情況下，我們不討論抽完最後一支籤，而導致遊戲結束的情形，也就是不討論當$|B_i|=n$的情形。若$|B_i|=i<n$，且終止項$a_{i+1}=t$，設在n支籤中，有s支籤的編號小於t，且有$i-s$支籤的編號大於t，其中$i-s\geq 1$，則在抽籤過程$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_i)$中，必定存在至少一個抽出的籤之編號大於t。則$|B_i|=i<n$，且終止項$a_{i+1}=t$的所有抽籤結果種類數為$\sum_{s=0}^{i-1}C_s^{t-1}C_{i-s}^{n-t}$。因此所有$|B_i|=i<n$的抽籤結果種數為$\left(\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1}C_s^{t-1}C_{i-s}^{n-t}\right)\right)\times(n-i-1)!$，而隨機單向嚴格生成數列的長度期望值為$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1}C_s^{t-1}C_{i-s}^{n-t}\right)\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$，其化簡過程如下：

由 Vandermonde's Identity 可知，$\sum_{k=0}^{r}C_k^mC_{r-k}^n=C_r^{m+n}$。（往後不再贅述）

由 Hockey-Stick Identity 可知，$\sum_{i=r}^{n}C_r^i=C_{r+1}^{n+1}$。（往後不再贅述）

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1}C_s^{t-1}C_{i-s}^{n-t}\right)\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}(C_i^{n-1}-C_i^{t-1})\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}\quad\text{(By Vandermonde's Identity)}$$

上式中的$C_i^{n-1}-C_i^{t-1}$代表n支籤中，除了終止項t之外，可從剩下$n-1$支籤中任選i支升成數

列，所以有C_i^{n-1}種方法，但所選的i支籤不能都小於終止項t，所以要扣掉C_i^{t-1}種。

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left((n-1)C_i^{n-1}-C_{i+1}^{n-1}\right)\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}\quad \text{(By Hockey − Stick Identity)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\frac{(n-1)(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!}-\frac{(n-1)!}{(i+1)!\,(n-i-2)!}\right)\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\frac{(n-1)!\left((in-i+n-1)-(n-i-1)\right)}{(i+1)!\,(n-i-1)!}\right)\times\frac{i}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\frac{(n)!\,(i)}{(i+1)!\,(n-i-1)!}\right)\times\frac{i(n-i-1)!}{n!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$$

性質 1（本研究作者，2024，p.17）

單向隨機生成數列的長度不受總籤數影響，也就是「在全部有n支籤的情況下，抽到$|B_i|=i$的機率」和「在全部有$n+1$支籤的情況下，抽到$|B_i|=i$的機率」相同。即：

$$\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1}C_s^{t-1}C_{i-s}^{n-t}\right)\times\frac{1}{\prod_{j=n-i}^{n} j}=\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{i-1}(C_s^{t-1}C_{i-s}^{n+1-t})\right)\times\frac{1}{\prod_{j=n+1-i}^{n+1} j},i<n$$

【證明】

由 Vandermonde's Identity 可知，左式 $=\dfrac{(n-i-1)!}{n!}\sum_{t=1}^{n-1}(C_i^{n-1}-C_i^{t-1})$

$$=\frac{(n-i-1)!}{n!}\left((n-1)\times C_i^{n-1}-C_{i+1}^{n-1}\right)\quad \text{(By Hockey − Stick Identity)}$$

$$=\frac{(n-i-1)!}{n!}\left(\frac{(n-1)!\,(n-1)}{(n-i-1)!\,(i)!}-\frac{(n-1)!}{(n-i-2)!\,(i+1)!}\right)$$

$$=\frac{(n-i-1)!}{n!}\left(\frac{(n-1)!\,(n-1)(i+1)-(n-1)!\,(n-i-1)}{(n-i-1)!\,(i+1)!}\right)=\frac{i}{(i+1)!}$$

由 Vandermonde's Identity 可知，右式 $=\dfrac{(n-i)!}{(n+1)!}\sum_{t=1}^{n}(C_i^{n}-C_i^{t-1})$

$$=\frac{(n-i)!}{(n+1)!}\left(n\times C_i^n-C_{i+1}^n\right)\quad(\text{By Hockey}-\text{Stick Identity})$$

$$=\frac{(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{n!\,n}{(n-i)!\,(i)!}-\frac{n!}{(n-i-1)!\,(i+1)!}\right)$$

$$=\frac{(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{n!\,n(i+1)-n!\,(n-i)}{(n-i)!\,(i+1)!}\right)$$

$$=\frac{(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{n!\,(n+1)(i)}{(n-i)!\,(i+1)!}\right)=\frac{i}{(i+1)!}$$

由於左式=右式，故性質 1 得證。

【說明】

抽到數列長度為i的機率為$\frac{i}{(i+1)!}$，可視為已有$i+1$支籤被取出，讓這$i+1$支籤任意排列有$(i+1)!$。但在這$(i+1)!$的排序中，只有當前i支籤的排序為由小到大且最後一支籤不為這$i+1$支籤中最大的時候，才會形成一數列長度為i，因此其機率為$\frac{i}{(i+1)!}$。這樣即可說明為何抽籤機率與總籤數無關。

性質 2

當n趨近無窮大時，單向嚴格生成數列的長度期望值趨近$e-1$，即：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}\right)=e-1$$

【證明】

我們先以 Ratio Test 證明收斂性，考慮此級數的第$k+1$項與第k項之比值R，即：

$$\lim_{k\to\infty}R=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{(k+1)^2}{(k+2)!}}{\frac{k^2}{(k+1)!}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^2}{k^2(k+2)}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+2k+1}{k^2(k+2)}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(k+2)}\right)+\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{k(k+2)}\right)+\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k^2(k+2)}\right)=0<1$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}=0$，所以單向嚴格生成數列的長度期望值會在$n$趨近無窮大時收斂。透過 Excel 及 Wolfram (2024)，我觀察到它很可能收斂到$e-1$，證明如下。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{(l-1)^2}{l!}\right)\right)\quad\text{（變數代換）}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{l^2-2l+1}{l!}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{l}{(l-1)!}\right)-2\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{1}{(l-1)!}\right)+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{1}{l!}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{l-1+1}{(l-1)!}\right)\right)-2\left(e-\frac{1}{0!}\right)+\left(e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)\quad\text{（由歐拉數定義得知）}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{1}{(l-2)!}\right)+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{1}{(l-1)!}\right)\right)-e$$

$$=e+\left(e-\frac{1}{0!}\right)-e$$

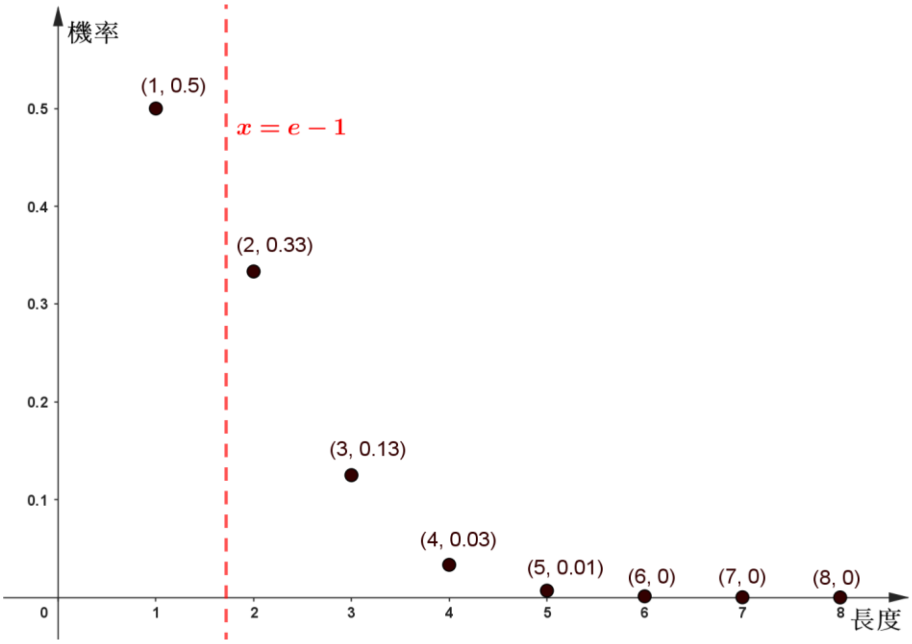
$$=e-1$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)=e-1$$

由上可知，當n趨近無窮大時，雙向嚴格生成數列的長度期望值趨近$e-1$。故性質 2 得證。

由性質 1 和性質 2 可以得知，在這個遊戲中抽到數列長度i的機率會固定，而且當$n \to \infty$，長度期望值為$e-1$。即可劃出當$n \to \infty$時的機率質量函數，如圖 2。

圖 2：當$n \to \infty$時單向嚴格生成數列的機率質量函數和長度期望值



三、隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值

表 3 中，第一行代表以有多少支籤（也就是總籤數n），第一列代表數列的長度（$|B_i|$），例如：當$n=3, |B_i|=2$時，抽籤過程的種類數有 2 種，而(3,1,2)就是其中一種。

表 3：雙向嚴格規則下，數列的長度（$|B_i|$）、總籤數（n）與其對應的抽籤過程種類數

n \ $\lvert B_i \rvert$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	0	2				
3	0	2	4			
4	0	8	8	8		

5	0	40	40	24	16	
6	0	240	240	144	64	32

定理 2

隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值為：

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

【證明】

考慮總共n支籤的情況下，我們不討論抽完最後一支籤，而導致遊戲結束的情形，也就是不討論當$|B_i|=n$的情形。若$|B_i|=i<n$，且終止項$a_{i+1}=t$，$1<t<n$，設在n支籤中，有s支籤的編號小於t，且$i-s$支籤的編號大於t，其中$i-s\geq 1$且 s≥ 1，則在抽籤過程$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_i)$中，必存在至少一個抽出的籤之編號大於t，且必存在至少一個抽出的籤之編號小於t，這並不難想到，因為在遞增的數列中，唯有在抽到第k次籤前，抽到編號比t大的數和比t小的數，才會使得$a_{i+1}=t$時遊戲結束。則$|B_i|=i<n$，且終止項$a_{i+1}=t$的所有抽籤結果種類數為 $\sum_{m=1}^{i-1}(C_m^{t-1}C_{i-m}^{n-t})$ 。因此所有 $|B_i|=i<n$ 的抽籤結果種數為 $\sum_{t=2}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i-1}(C_m^{t-1}C_{i-m}^{n-t})\right)\times 2^{i-1}\times(n-i-1)!$，而隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值為 $\sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i-1}(C_m^{t-1}C_{i-m}^{n-t})\right)\times\frac{i\times 2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$，其化簡過程如下：

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i-1}(C_m^{t-1}C_{i-m}^{n-t})\right)\times\frac{i\times 2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n-1}(C_i^{n-1}-C_i^{n-t}-C_i^{t-1})\times\frac{i\times 2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n}j}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{i=2}^{n-1}\left(\left((n-2)C_i^{n-1}-C_{i+1}^{n-1}-C_{i+1}^{n-1}\right)\times\frac{(n-i-1)!\,i\times 2^{i-1}}{n!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left(\left(\frac{(n-2)(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!} - \frac{2(n-1)!}{(i+1)!\,(n-i-2)!} \right) \times \frac{(n-i-1)!\, i \times 2^{i-1}}{n!} \right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left(\left(\frac{(n-1)!\,\big((i+1)(n-2) - (n-i-1)2\big)}{(i+1)!\,(n-i-1)!} \right) \times \frac{(n-i-1)!\, i \times 2^{i-1}}{n!} \right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left(\left(\frac{(n-1)!\,(in-n)}{(i+1)!} \right) \times \frac{i \times 2^{i-1}}{n!} \right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{i=2}^{n-1} \left(\left(\frac{(i-1)}{(i+1)!} \right) \times \frac{i \times 2^{i-1}}{1} \right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{i(i-1) \times 2^{i-1}}{(i+1)!} \right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

性質 3（本研究作者，2024，p.21）

雙向隨機生成數列的長度不受總籤數影響，也就是「在全部有n支籤的情況下，抽到$|B_i| = i$的機率」和「在全部有$n+1$支籤的情況下，抽到$|B_i| = i$的機率」相同。即：

$$\sum_{t=2}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^{i-1} (C_m^{t-1} C_{i-m}^{n-t}) \right) \times \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n} j} = \sum_{t=2}^{n} \left(\sum_{m=1}^{i-1} (C_m^{t-1} C_{i-m}^{n+1-t}) \right) \times \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n+1-i}^{n+1} j}, i < n$$

【證明】

由 Vandermonde's Identity 可知，左式 $= \dfrac{2^{i-1}(n-i-1)!}{n!} \displaystyle\sum_{t=2}^{n-1} (C_i^{n-1} - C_i^{n-t} - C_i^{t-1})$

$$= \frac{2^{i-1}(n-i-1)!}{n!} \left((n-2)C_i^{n-1} - C_{i+1}^{n-1} - C_{i+1}^{n-1} \right) \text{ (By Hockey} - \text{Stick Identity)}$$

$$= \frac{2^{i-1}(n-i-1)!}{n!} \left(\frac{(n-2)(i+1)(n-1)! - 2(n-1-i)(n-1)!}{(i+1)!\,(n-1-i)!} \right)$$

$$= \frac{2^{i-1}(n-i-1)!}{n!} \left(\frac{n(i-1)(n-1)!}{(i+1)!\,(n-1-i)!} \right) = \frac{(i-1)2^{i-1}}{(i+1)!}$$

由 Vandermonde's Identity 可知，右式 $= \dfrac{2^{i-1}(n-i)!}{(n+1)!} \displaystyle\sum_{t=2}^{n} (C_i^{n} - C_i^{n+1-t} - C_i^{t-1})$

$$= \frac{2^{i-1}(n-i)!}{(n+1)!} \left((n-1)C_i^{n} - C_{i+1}^{n} - C_{i+1}^{n} \right) \text{ (By Hockey} - \text{Stick Identity)}$$

$$=\frac{2^{i-1}(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{(n-1)(i+1)n!-2(n-i)n!}{(i+1)!\,(n-i)!}\right)$$
$$=\frac{2^{i-1}(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{(ni-n+i-1)n!}{(i+1)!\,(n-i)!}\right)$$
$$=\frac{2^{i-1}(n-i)!}{(n+1)!}\left(\frac{(n+1)(i-1)n!}{(i+1)!\,(n-i)!}\right)=\frac{(i-1)2^{i-1}}{(i+1)!}$$

由於左式=右式，故性質 3 得證。

【說明】

抽到數列長度為i的機率為$\frac{(i-1)2^{i-1}}{(i+1)!}$，這可視為已有$i+1$支籤被取出，讓這$i+1$支籤任意排列有$(i+1)!$。但在這$(i+1)!$的排序中，只有當第二支籤到倒數第二支籤的排序為最後可形成數列長度為$i-1$的其中一種且第一支籤不為這$i+1$支籤中最小、最後一支籤不為這$i+1$支籤中最大的時候，才會形成一數列長度為i，因此其機率為$\frac{(i-1)2^{i-1}}{(i+1)!}$。這樣即可說明為何抽籤機率與總籤數無關。

性質 4

當n趨近無窮大時，雙向嚴格生成數列的長度期望值趨近$\frac{1}{2}(e^2-1)$，即：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

【證明】

上式代表雙向嚴格生成數列的長度期望值亦可表為$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$。接著，我們先以 Ratio Test 證明收斂性，考慮此級數的第$k+1$項與第k項之比值R，即：

$$\lim_{k\to\infty}R=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{k(k+1)\times 2^k}{(k+2)!}}{\frac{k(k-1)\times 2^{k-1}}{(k+1)!}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)\times 2}{(k+2)(k-1)}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2(k+2)-2}{(k+2)(k-1)}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{(k-1)} - \frac{2}{(k+2)(k-1)}\right) = 0 < 1$$

又因$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2}{n}\times\ldots\right) = 0$，所以雙向嚴格生成數列的長度期望值當$n$趨近無窮大時收斂。透過 Excel 及 Wolfram (2024)，我觀察到它很可能收斂到$\frac{1}{2}(e^2-1)$，證明如下。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=3}^{n}\left(\frac{(l-2)(l-1)\times 2^{l-2}}{l!}\right)\right) \quad \text{（變數代換）}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=3}^{n}\left(\frac{(l-1+1)\times 2^{l-2}}{(l-1)!}\right) - 3\sum_{l=3}^{n}\left(\frac{2^{l-2}}{(l-1)!}\right) + \sum_{l=3}^{n}\left(\frac{2^{l-1}}{l!}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=3}^{n}\left(\frac{2^{l-2}}{(l-2)!}\right)\right) - \left(e^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!}\right) + \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} - \frac{2^2}{2!}\right) \quad \text{（由歐拉數定義得知）}$$

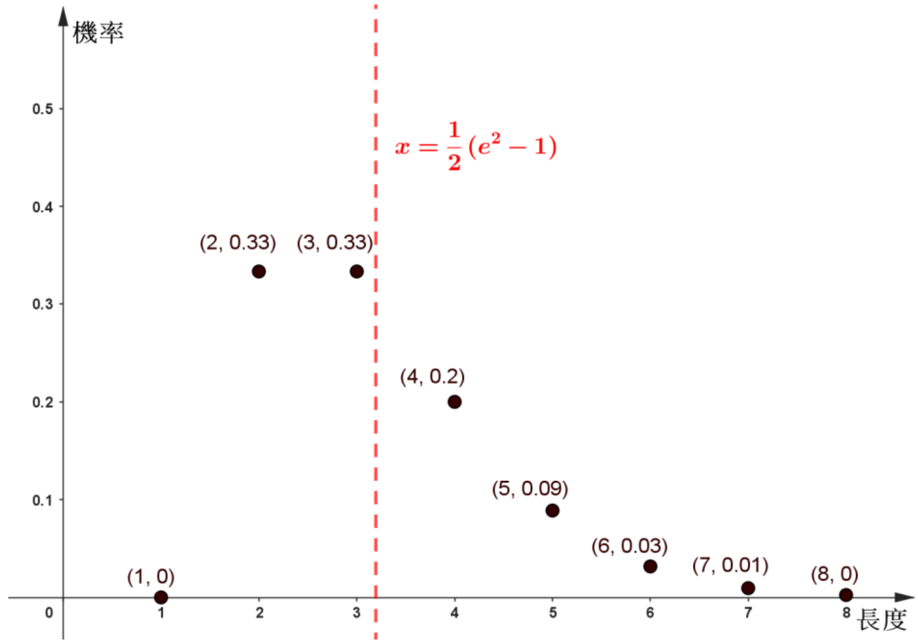
$$= \left(e^2 - \frac{2^0}{0!}\right) - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\therefore \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right) = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

由上可知，當n趨近無窮大時，雙向嚴格生成數列的長度期望值趨近$\frac{1}{2}(e^2-1)$，性質 4 得證。

由性質 3 和性質 4 可以得知，在這個遊戲規則中抽到數列長度i的機率會固定，而且當$n\to\infty$，長度期望值為$\frac{1}{2}(e^2-1)$。即可畫出當$n\to\infty$時的機率質量函數。

圖 3：當$n\to\infty$時雙向嚴格生成數列的機率質量函數和長度期望值



四、隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值

下表 4 與表 5 中，第一列代表以幾號數字終止數列（也就是終止項a_k），第一行代表遊戲結束後。由於$n=1$時為特例，所以暫不討論，我將抽完放回的數列的長度（$|B_i|$）、終止項（a_k）與其對應的抽籤過程種類數列出觀察。

表 4：總共2支籤且抽完放回的情況下，單向數列的$|B_i|$、a_k與其對應的抽籤過程種類數

$|B_i|$ \ a_k	1	2
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
5	5	0
6	6	0
7	7	0

表 5：總共3支籤且抽完放回的情況下，單向數列的$|B_i|$、a_k與其對應的抽籤過程種類數

$|B_i|$ \ a_k	1	2	3
1	2	1	0
2	5	3	0
3	9	6	0
4	14	10	0
5	20	15	0
6	27	21	0
7	35	28	0

引理 2 就是透過觀察表 4 至表 5 所發現，先前已證畢。考慮$a_k = n-2$的生成數列，此時a_{k-1}有兩種情況，一種為$a_{k-1} = n$，另一種為$a_{k-1} = (n-1)$，我發現重複組合的組合數會受到a_{k-1}數值所影響。若$a_{k-1} = n$，由引理 2 可知組合數為H_{i-1}^{n}；若$a_{k-1} = (n-1)$，則其他項a_i必不可能為n，因為當$a_i = n$時，會導致遊戲在我預期出現的結果前結束，所以其重複組合數為H_{i-1}^{n-1}。我也觀察到$n\left[F_i^{(n-2)}\right] = H_{i-1}^{n} + H_{i-1}^{n-1}$，$n\left[F_i^{(n-3)}\right] = H_{i-1}^{n} + H_{i-1}^{n-1} + H_{i-1}^{n-2}$，依此類推，應可用數學歸納法證明$n\left[F_i^{(k)}\right] = \sum_{m=k}^{n-1} H_{i-1}^{m+1}$。

定理 3

隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值為：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} C_{n-2}^{n+i-1}\right)$$

【證明】

因為籤的總數量為n，終止項為t的情況下，抽籤過程有$n\left[F_i^{(t)}\right]=\sum_{m=t}^{n-1}H_{i-1}^{m+1}$種，其中$|B_i|=i$。所以抽到長度為$i$的抽籤過程的機率為$\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}(\sum_{m=t}^{n-1}H_{i-1}^{m+1})$，故隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值為$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}(\sum_{m=t}^{n-1}H_{i-1}^{m+1})\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^2\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}C_{n-2}^{n+i-1}\right)$，其化簡過程如下：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{m=t}^{n-1}H_{i-1}^{m+1}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{m=t}^{n-1}H_{i-1}^{m+1}\right)\right)\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{m=t}^{n-1}C_{i-1}^{m+i-1}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(C_{i-1}^{i-1}+C_{i-1}^{i}+C_{i-1}^{i+1}+\cdots+C_{i-1}^{(i-1)+(t-2)}+C_{i-1}^{(i-1)+(t-1)}+C_{i-1}^{t+i-1}\right.\right.$$
$$+C_{i-1}^{t+i}+C_{i-1}^{t+i+1}+\cdots+C_{i-1}^{n+i-2}-\left(C_{i-1}^{i-1}+C_{i-1}^{i}+C_{i-1}^{i+1}+\cdots+C_{i-1}^{(i-1)+(t-2)}\right.$$
$$\left.\left.\left.+C_{i-1}^{(i-1)+(t-1)}\right)\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(C_{i}^{n+i-1}-C_{i}^{t+i-1}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left((n-1)C_{i}^{n+i-1}-\sum_{t=1}^{n-1}C_{i}^{t+i-1}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left((n-1)C_{i}^{n+i-1}-C_{i+1}^{n+i-1}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{(n-1)(n+i-1)!}{i!\,(n-1)!}-\frac{(n+i-1)!}{(i+1)!\,(n-2)!}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left((n+i-1)!\frac{(n-1)(i+1)-(n-1)}{(i+1)!\,(n-1)!}\right)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left((n+i-1)!\frac{(n-1)i}{(i+1)!\,(n-1)!}\right)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} \left(\frac{(n+i-1)!}{(i+1)!\,(n-2)!} \right) \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} C_{n-2}^{n+i-1} \right)$$

性質 5

當n趨近無窮大時，單向嚴格生成數列的長度期望值趨近$e-1$，即：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} C_{n-2}^{n+i-1} \right) \right) = e - 1$$

【證明】

上式代表單向嚴格生成數列的長度期望值亦可表為$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} C_{n-2}^{n+i-1} \right)$。接著，我們先以 Ratio Test 證明收斂性，考慮此級數的第$j+1$項與第j項之比值R，即：

$$\lim_{j\to\infty} R = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{(j+1)^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2} \left(\frac{(n+j)!}{(j+2)!\,(n-2)!} \right)}{j^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{j+1} \left(\frac{(n+j-1)!}{(j+1)!\,(n-2)!} \right)} \right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{(j+1)^2 \times \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{(n+j)}{(j+2)} \right)}{j^2} \right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{(n+j)(j+1)^2}{nj^2(j+2)} \right) = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{(n+j)(j+1)}{nj^2} \right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{j^2+nj+n+j}{nj^2} \right) = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(n+1)}{nj} + \frac{1}{j^2} \right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{j\to\infty} \left(\frac{n+1}{nj} \right) + \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j^2}$$

$$= \frac{1}{n}$$

當$n \geq 2$時，使得$\lim_{j\to\infty} R < 1$，由 Ratio Test 可知，此時級數收斂。接著，我們證明它收斂到$e-1$。

$$\text{由於原式} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^2}\left(\frac{n\times(n-1)}{2!}\right)+\frac{2^2}{n^3}\left(\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3!}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3^2}{n^4}\left(\frac{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)}{4!}\right)+\cdots\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2!}\left(\frac{(n-1)}{n}\right)+\frac{2^2}{3!}\left(\frac{(n+1)\times(n-1)}{n^2}\right)+\frac{3^2}{4!}\left(\frac{(n+2)\times(n+1)\times(n-1)}{n^3}\right)+\cdots\right)$$

觀察分母的最高次項的次數等於分子的最高次項的次數，且其最高次項係數為1，故原式$=\frac{1^2}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\frac{4^2}{5!}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n!}+\cdots=e-1$，在性質 2 中已證明過，故性質 5 得證。

五、隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值

在隨機雙向非嚴格生成數列的情況下，因為抽籤過程中，可能連續好幾次抽籤皆出現相同編號，例如：$\left(1^{(2)},2,3^{(3)}\right)$。當數字的元素個數不只一個進行排列時，情況較複雜，所以目前尚未有嚴謹結果，未來將持續討論雙向非嚴格生成數列的長度期望值的通解。

猜想 1

當n趨近無窮大時，雙向非嚴格生成數列的長度期望值趨近$\frac{1}{2}(e^2-1)$。

【說明】

因為當n趨近無窮大時，單向嚴格與非嚴格的長度期望值皆會趨近$e-1$，假設數列長度為i的數列種類有A_i種，因為數列為非嚴格生成，可以設隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值為$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}A_i\right)$。我猜測$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}A_i\right)=\frac{1}{2}(e^2-1)$，即$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_1}{n^2}+\frac{2A_2}{n^3}+\frac{3A_3}{n^4}+\cdots\right)$，因此推測需要以$e^2$的泰勒展開式來解決。

陸、討論

除了利用離散的數據計算出自然數e以外，在研究過程中，我想到另一個問題。如果在原本遊戲該終止時繼續抽籤，並持續寫在紙上（完全不理會數列是否停止），則籤筒中有j次籤，這j支籤任意排放將行成$j!$種數列，這$j!$種數列可能形成j個生成數列，即$\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_x\}, \{b_{x+1}, b_{x+2}, b_{x+3}, \dots, b_y\}, \{b_{y+1}, b_{y+2}, b_{y+3}, \dots, b_z\}, \dots, \{b_{z+1}, b_{z+2}, b_{z+3}, \dots, b_j\}$，若這些生成數列中的元素最多只出現一次，則稱上述各生成數列為「子列」。我好奇在單向嚴格和雙向嚴格的規則底下，若籤筒內有j支籤，那麼期望會出現會形成幾組子列。雖然目前尚未深入了解這樣的問題，但我有初步觀察、得出引理並嘗試證明。

（一）隨機單向嚴格生成子列

表 6：單向嚴格規則下，子列的個數$|G_n|$、總籤數n與其對應的抽籤過程方法數

n \ $\lvert G_n \rvert$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

表 7：Eulerian number 的個數k、總數n與其對應的抽籤過程方法數

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
1	1						

2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

由上可知表 6 與表 7 等價。由於 Eulerian number（維基百科，2025）是考慮嚴格上升數，而只要將 Eulerian number 考慮嚴格下降數（與上升數等價），每增加一個下降數，會使單向嚴格子列個數$+1$，而一開始就存在一組子列，因此可得$|G_n| = k + 1$。舉例來說，$(4,3,1,2,5)$中，下降數為$3,1$並加上數字4。所以$(4,3,1,2,5)$為$n = 5, |G_n| = 3$其中的一種可能。

定理 4

隨機單向嚴格子列的組數期望值為：

$$\sum_{|G_n|=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=0}^{|G_n|-1}\left((-1)^i C_i^{n+1}(|G_n| - i)^n\right)\right)\left(\frac{|G_n|}{n!}\right)\right)$$

【證明】

令表格中的數值為$A(|G_n|, n)$，所以可知 Eulerian number explicit formula $A(|G_n|, n) = \sum_{i=0}^{|G_n|-1}\left((-1)^i C_i^{n+1}(|G_n| - i)^n\right)$。所以抽到子列數為$k$的抽籤過程所發生的機率為$\left(\sum_{i=0}^{|G_n|-1}\left((-1)^i C_i^{n+1}(|G_n| - i)^n\right)\right)\left(\frac{1}{n!}\right)$，故隨機單向嚴格子列的組數期望值為$\sum_{|G_n|=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=0}^{|G_n|-1}\left((-1)^i C_i^{n+1}(|G_n| - i)^n\right)\right)\left(\frac{|G_n|}{n!}\right)\right) = \frac{n+1}{2}$。其化簡過程如下：

Eulerian number 的個數期望值為$E(n)$，表中的數值為$B(n,k)$，其中$0 \le k \le n-1$，由Eulerian number 的性質可知$\begin{cases} B(n,k) = (n-k)B(n-1,k-1) + (k+1)B(n-1,k) \\ \sum_{k=0}^{n-1} B(n,k) = n! \\ E(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n!} B(n,k) \end{cases}$。

其中$E(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n!} B(n,k)$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k(n-k)B(n-1,k-1) + k(k+1)B(n-1,k)$$

$$= \frac{n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} kB(n-1,k-1) + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} kB(n-1,k) + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\big(B(n-1,k) - B(n-1,k-1)\big)$$

$$= \frac{n}{n!}\left((n-1)!\,E(n-1) + \sum_{k=0}^{n-1} B(n-1,k-1)\right) + \frac{(n-1)!\,E(n-1)}{n!}$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-2} -(1+2j)B(n-1,j)$$

$$= E(n-1) + 1 + \frac{E(n-1)}{n} - \frac{1}{n!}\left(2(n-1)!\,E(n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} B(n-1,j)\right)$$

$$= E(n-1) + 1 + \frac{E(n-1)}{n} - \frac{2E(n-1)}{n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(n-1)E(n-1)}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore E(n) = \frac{(n-1)E(n-1)}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$\Rightarrow nE(n) = (n-1)E(n-1) + n - 1$$

令$F(n) = nE(n)$

則原式$= F(n) = F(n-1) + n - 1$

$F(1) = 0$

$F(2) = F(1) + 1$

$F(3) = F(2) + 2$

$\vdots$

$F(n) = F(n-1) + n - 1$

將上式累加得$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n-1} F(k) + \frac{n(n-1)}{2}$

$$\Rightarrow F(n) = \frac{n(n-1)}{2} = nE(n)$$

$$\Rightarrow E(n) = \frac{n-1}{2}$$

因為$|G_n| = k + 1$，所以可得隨機單向嚴格子列的組數期望值為$\frac{n+1}{2}$。因此

$\sum_{|G_n|=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=0}^{|G_n|-1} \left((-1)^i C_i^{n+1} (|G_n| - i)^n \right) \right) \left(\frac{|G_n|}{n!} \right) \right) = \frac{n+1}{2}$。故定理 4 得證。

性質 6
當n趨近無窮大時，單向嚴格生成子列的長度期望值趨近2。

【證明】

因為有n支籤且子列的組數期望值為$\frac{n+1}{2}$，所以單向嚴格生成子列的長度期望值為$\frac{2n}{n+1}$。因此可以得到$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$，故性質 6 得證。

（二）隨機雙向嚴格生成子列

表 8：雙向嚴格規則下，子列的個數$|G_n|$、總籤數n與其對應的抽籤過程種類

n \ $\|G_n\|$	1	2	3
1	1		
2	2		
3	4	2	
4	8	16	

5	16	92	12

目前尚未發現表 8 與現存的何種分布有關係，也尚未找到雙向嚴格子列數的組數期望值通解，是未來的目標之一。

柒、結論

一、研究結果

	嚴格遞增減數列	非嚴格遞增減數列
單向數列	$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}$ 當$n\to\infty$，長度期望值為$e-1$	$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^2\times\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}C_{n-2}^{n+i-1}\right)$ 當$n\to\infty$，長度期望值為$e-1$
雙向數列	$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1)\times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right)+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ 當$n\to\infty$，長度期望值為$\frac{1}{2}(e^2-1)$	研究中 猜測當$n\to\infty$，長度期望值為$\frac{1}{2}(e^2-1)$

二、未來展望

（一）探討隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值，將之完成並證明。

（二）針對「子列」及其性質進行更深入的探討。

（三）將各表格的數值以生成函數的方式來表示。

（四）以機率質量函數來觀察各規則的分佈圖形。

（五）增加$n-1$數值形成一個n維上的一點，若為單向嚴格，則當下次抽到的點其每個座標都大於前一個點的座標，即$a_{i-1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)<a_i(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$，加入到集合$B_i$，求集合$B_i$中元素期望值個數。

（六）將「公平的籤」改為「不公平的籤」，即每支籤抽到的機率不同。

捌、參考文獻

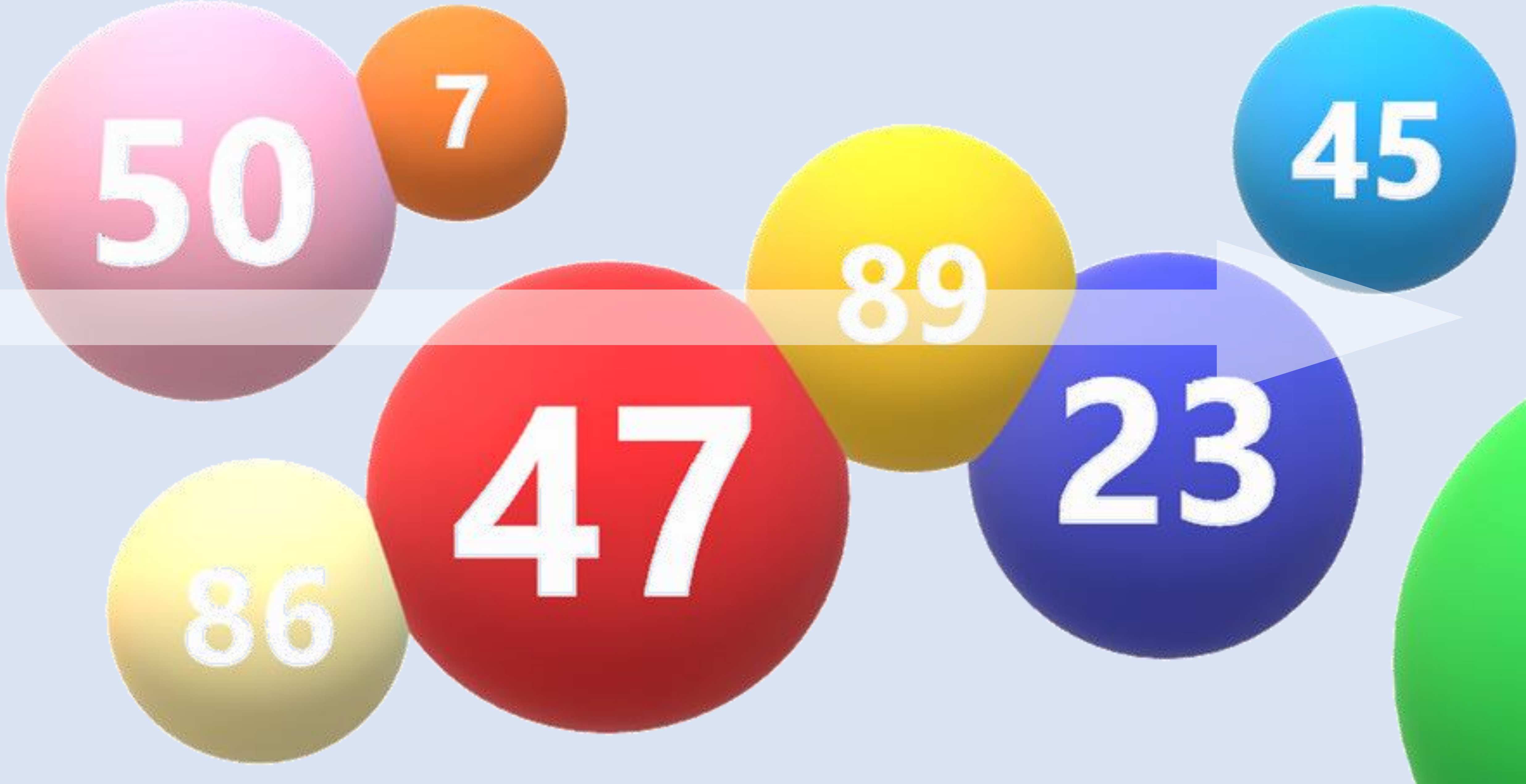
1. Wolfram (2024). Wolfram Alpha: Computational Intelligence. https://www.wolframalpha.com/。
2. 本研究作者（2024）。2025 年臺灣國際科展作品（尚未發表）：雙向隨機生成數列的長度探討。https://twsf.ntsec.gov.tw/Article.aspx?a=35&lang=1。
3. 梅治玄、林雋庭、蘇芃之（2012）。中華民國第 52 屆全國中小學科展作品：Avoid123。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/040402.pdf。
4. 郭競友（2015）。2015 年臺灣國際科學展覽會作品：從 Avoid 數列到類巴斯卡三角形。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2015/pdf/010054.pdf。
5. 郭競友（2016）。2016 年臺灣國際科學展覽會作品：從 A 到 B 再到 C—從組合數學觀點及生成函數來看 Avoid 數列及其多項式組合係數 B。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2016/pdf/010032.pdf。
6. 維基百科（2025）。Eulerian number。https://en.wikipedia.org/wiki。

【評語】050413

本作品討論隨機生成 n 個數字隨機生成遞增或是嚴格遞增數列的長度期望值，作者先以骰子為例觀察並推導出一些規則，進而處理一般的情況。問題分為抽出的數字放回以及不放回兩種情況，作者也考慮了停止條件為抽出的數字介於但不等於之前抽出的任兩個數才停止的情況，並算出執行次數期望值的極限是關於歐拉數 e 的極限值，此作品整體分析過程紮實且有意思。關於雙向數列非嚴格遞增減數列，雖然作者尚未完全解決，但有觀察出極限值。關於嚴格證明的部分確實很難，但可以考慮作關於 n 對應的級數的上界跟下界的估計。整體是紮實有意思的作品。

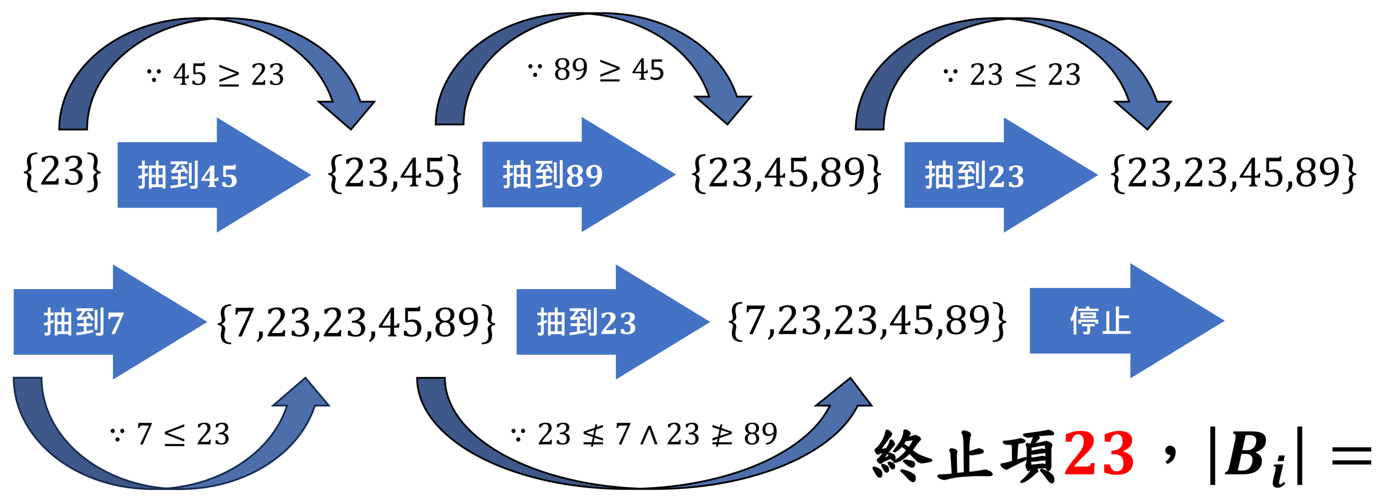
作品海報

隨機生成數列
的長度探討



研究動機

操作步驟



終止項23，$|B_i| = 5$

範例

隨機數列種類	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	最終數列B_i	$\|B_i\|$
單向嚴格	23	45	89	47			23,45,89	3
雙向嚴格	23	45	7	89	47		7,23,45,89	4
單向非嚴格	23	45	45	89	23		23,45,45,89	4
雙向非嚴格	23	45	89	23	7	23	7,23,23,45,89	5

研究目的

1. 探討隨機單向嚴格生成數列的長度期望值。
2. 探討隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值。
3. 探討隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值。
4. 探討隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值。

名詞定義

設全部的籤共有n支，以$n\left[F_i^{(r)}\right]$表示在單向非嚴格的生成規則下，滿足終止項$a_k = r$、數列長度$|B_i| = i$的所有可能的抽籤過程$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, r)$之種類數。

研究結果

基礎論述

【引理1】對於任意一個雙向嚴格數列$|B_i|$（其中$i \le n$），其對應的抽籤過程$\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_i, a_{i+1}\}$有$2^{i-1}$種排法。

【證明】為避免遊戲提前結束，故抽籤過程中a_1、a_2必為B_i中的連續兩項b_j、b_{j+1}，且先後順序可調換。從a_3開始，$b_1, b_2, b_3, \ldots b_{j-1}$的抽取順序皆被唯一決定，且$b_{j+2}, b_{j+3}, b_{j+4}, \ldots b_i$的抽取順序也被唯一決定。故排法數總和為$2 \times \frac{(i-2)!}{(i-2)!} + 2 \times \frac{(i-2)!}{(i-3)!1!} + 2 \times \frac{(i-2)!}{(i-4)!2!} + \cdots + 2 \times \frac{(i-2)!}{(i-2)!} = 2 \times 2^{i-2} = 2^{i-1}$。

【範例】$i = 9$

$$1,2,L,L,L,L,L,L,L = \frac{7!}{0!\,7!} \times 2 \qquad 5,6,S,S,S,S,L,L,L = \frac{7!}{4!\,3!} \times 2$$

$$2,3,S,L,L,L,L,L,L = \frac{7!}{1!\,6!} \times 2 \qquad 6,7,S,S,S,S,S,L,L = \frac{7!}{5!\,2!} \times 2$$

$$3,4,S,S,L,L,L,L,L = \frac{7!}{2!\,5!} \times 2 \qquad 7,8,S,S,S,S,S,S,L = \frac{7!}{6!\,1!} \times 2$$

$$4,5,S,S,S,L,L,L,L = \frac{7!}{3!\,4!} \times 2 \qquad 8,9,S,S,S,S,S,S,S = \frac{7!}{7!\,0!} \times 2$$

【引理2】單向非嚴格數列中，若$a_k = n-1$，則$n\left[F_i^{(n-1)}\right] = H_{i-1}^n, n \ge 2$。

【證明】因終止項為$n-1$，故$a_{k-1} = n$，所以僅需考慮前面$(i-1)$項，此即在n支籤中取$(i-1)$個的重複組合，也就是說$n\left[F_i^{(n-1)}\right] = H_{i-1}^n, n \ge 2$，可用巴斯卡定理及數學歸納法證明。

【範例】$(B_{i-1}, n, (n-1))$

此項一定要是n

隨機單向嚴格生成數列的長度期望值

【性質1】「總籤數為n時$|B_i| = i$的機率」和「總籤數為$n+1$時$|B_i| = i$的機率」相同。即：

$$\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1} C_s^{t-1} C_{i-s}^{n-t}\right) \times \frac{1}{\prod_{j=n-i}^{n} j} = \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{i-1}\left(C_s^{t-1} C_{i-s}^{n+1-t}\right)\right) \times \frac{1}{\prod_{j=n+1-i}^{n+1} j}, i < n$$

【推導】

$$\sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i-1} C_s^{t-1} C_{i-s}^{n-t}\right) \times \frac{1}{\prod_{j=n-i}^{n} j}$$

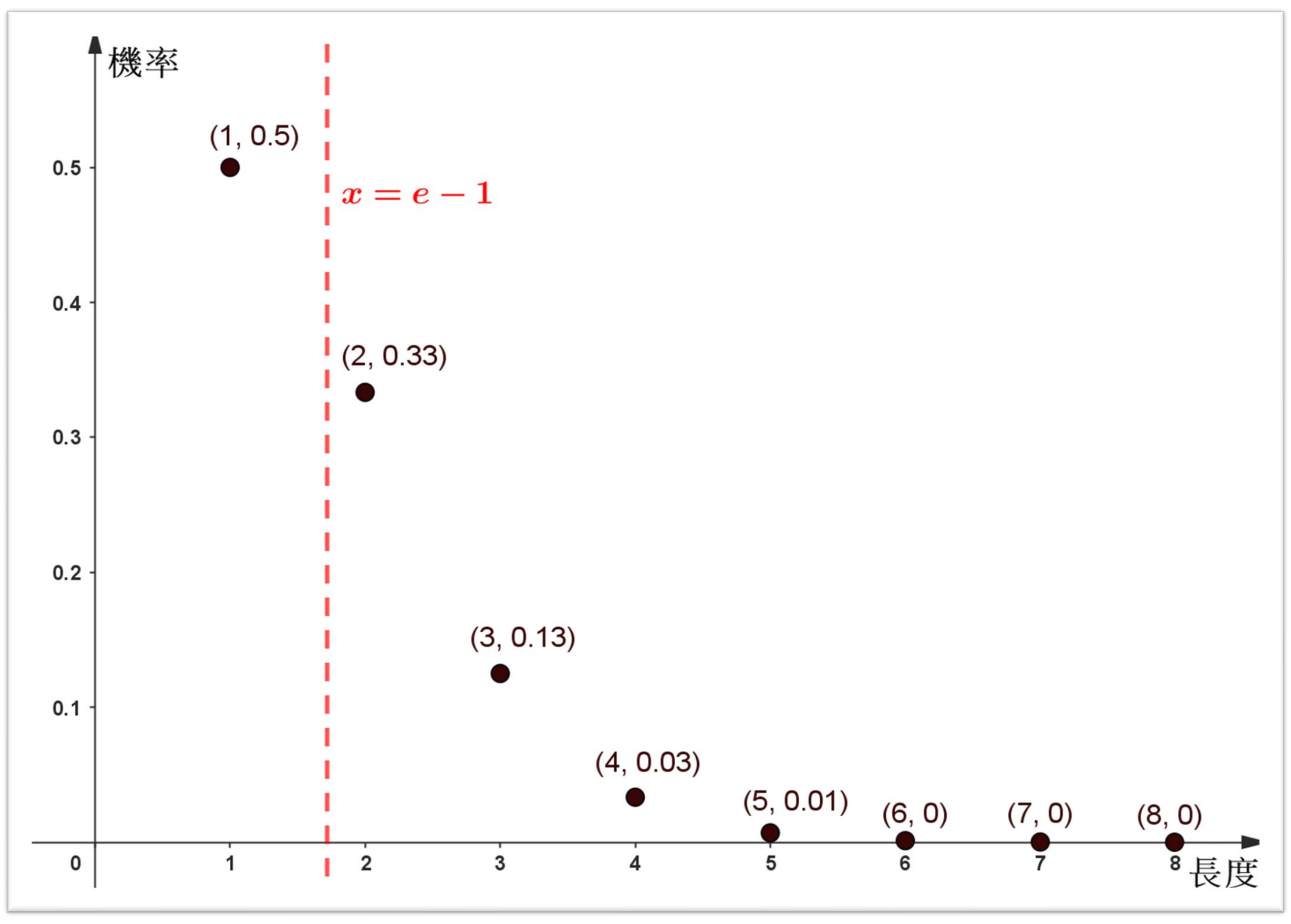
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{i-1}\left(C_i^{n-1} - C_i^{t-1}\right) \times \frac{1}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left((n-1)C_i^{n-1} - C_{i+1}^{n-1}\right) \times \frac{1}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{(i+1)!}\right)$$

By Vandermonde's Identity $\sum_{k=0}^{r} C_k^m C_{r-k}^n = C_r^{m+n}$

By Hockey − Stick Identity $\sum_{i=r}^{n} C_r^i = C_{r+1}^{n+1}$



【定理1】隨機單向嚴格生成數列的長度期望值為

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2}{(i+1)!}\right) + \frac{1}{(n-1)!}$$

【性質2】當n趨近無窮大時，單向嚴格生成數列的長度期望值趨近$e - 1$

隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值

【性質3】當有n支籤時，$|B_i| = i$的機率和當有$n+1$支籤，$|B_i| = i$的機率相同。即：

$$\sum_{t=2}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i-1}\left(C_m^{t-1} C_{i-m}^{n-t}\right)\right) \times \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n} j} = \sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{m=1}^{i-1}\left(C_m^{t-1} C_{i-m}^{n+1-t}\right)\right) \times \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n+1-i}^{n+1} j}, i < n$$

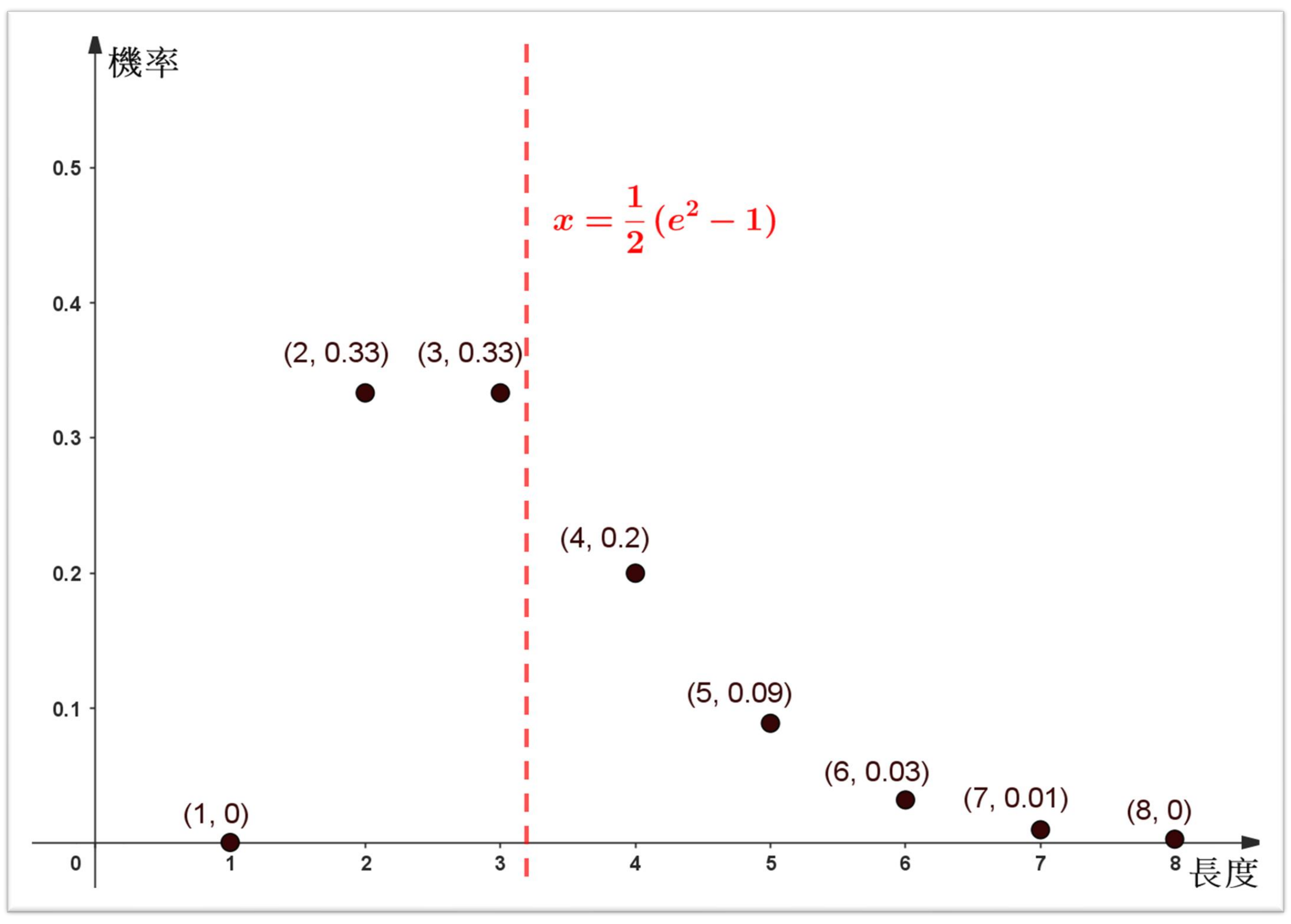
【推導】

$$\sum_{t=2}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i-1}\left(C_m^{t-1} C_{i-m}^{n-t}\right)\right) \times \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n} j}$$

$$= \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n} j} \sum_{t=2}^{n-1}\left(C_i^{n-1} - C_i^{n-t} - C_i^{t-1}\right)$$

$$= \frac{2^{i-1}}{\prod_{j=n-i}^{n} j}\left((n-2)C_i^{n-1} - C_{i+1}^{n-1} - C_{i+1}^{n-1}\right)$$

$$= \frac{(i-1)2^{i-1}}{(i+1)!}$$



【定理2】隨機雙向嚴格生成數列的長度期望值為

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{i(i-1) \times 2^{i-1}}{(i+1)!}\right) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

【性質4】當n趨近無窮大時，雙向嚴格生成數列的長度期望值趨近$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值

由引理2可推廣得$n\left[F_i^{(k)}\right] = \sum_{m=k}^{n-1} H_{i-1}^{m+1}$，故抽到數列長度為$i$的機率為

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} \sum_{t=1}^{n-1}\left(\sum_{m=t}^{n-1} H_{i-1}^{m+1}\right)$$

$$\begin{gathered}
\left(B_{i-1}^{1}, \boxed{n}, k\right) \Rightarrow H_{i-1}^{n} \\
\left(B_{i-1}^{2}, \boxed{(n-1)}, k\right) \Rightarrow H_{i-1}^{n-1} \\
\left(B_{i-1}^{3}, \boxed{(n-2)}, k\right) \Rightarrow H_{i-1}^{n-2} \\
\vdots \\
\left(B_{i-1}^{n-k}, \boxed{(k+1)}, k\right) \Rightarrow H_{i-1}^{k+1}
\end{gathered}$$

一定要有

【定理3】隨機單向非嚴格生成數列的長度期望值為

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1} C_{n-2}^{n+i-1}\right)$$

【性質5】當n趨近無窮大時，單向非嚴格生成數列的長度期望值趨近$e-1$

隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值

由於抽籤過程中，可能連續好幾次抽籤皆出現相同編號，例如：{1,1,2,3,3,3}。這種情況看似與無序整數分拆有關聯，目前尚未有嚴謹結果。研究者目前已透過自行撰寫之程式得到一些數值解，與預期結果相符，目前仍在求取數學解。

討論

若在原本遊戲該終止時繼續抽籤，並持續寫在紙上（不理會數列是否停止），則形同將n支籤任意排列，此時可能形成多組單向嚴格生成數列，稱為「子列」。子列個數與組合學中的Eulerian Number（將1到n進行排列後的「下降數」，即符合$a_i < a_{i+1}$的i的個數加上1）互相對應。

【定理4】隨機單向嚴格子列的組數期望值為：

$$\sum_{|G_n|=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=0}^{|G_n|-1}\left((-1)^i C_i^{n+1}(|G_n|-i)^n\right)\right)\left(\frac{|G_n|}{n!}\right)\right) = \frac{n+1}{2}$$

抽籤過程$\{a_n\}$	子列G_n	子列組數	Eulerian Number	Permutation	個數
{1,2,3}	{1,2,3}	1	0	(3,2,1)	1
{1,3,2}	{1,3}{2}	2	1	(3,1,2)	4
{2,1,3}	{2}{1,3}			(2,3,1)	
{2,3,1}	{2,3}{1}			(2,1,3)	
{3,1,2}	{3}{1,2}			(1,3,2)	
{3,2,1}	{3}{2}{1}	3	2	(1,2,3)	1

未來展望

1. 探討隨機雙向非嚴格生成數列的長度期望值，得到數學解。
2. 針對「子列」及其性質進行更深入的探討。
3. 探討數列長度期望值形式與數列維度的關係。

參考文獻

1. Petersen, T. K. (2013). Two-Sided Eulerian Numbers via Balls in Boxes. *Mathematics Magazine*, *86*(3), 159–176.
2. 李云瑄、洪元甫、徐偉博（2020）。中華民國第60屆全國中小學科展作品：錯中有序-部分錯排列的關係與討論。
3. 梅治玄、林雋庭、蘇芃之（2012）。中華民國第52屆全國中小學科展作品：Avoid123。
4. 郭競友（2015）。2015年臺灣國際科學展覽會作品：從Avoid數列到類巴斯卡三角形。
5. 郭競友（2016）。2016年臺灣國際科學展覽會作品：從A到B再到C—從組合數學觀點及生成函數來看Avoid數列及其多項式組合係數B。

★本研究所有圖表皆由研究者自行繪製。