中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050412

好色之徒—塗色方法研究

學校名稱： 國立新竹科學園區實驗高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 詹明宸 高二 張涵晴 高二 吳杰恩	林怡瑄

關鍵詞： 排列組合、塗色問題、矩陣運算

摘要

本研究以排列組合的矩形表格塗色問題為出發點：「k 種顏色，$m \times n$ 的矩形棋盤方格，將上的每一格塗一個顏色，要求任意相鄰兩格顏色不能相同，共有幾種塗色方法？」首先，從 $1 \times n$、$2 \times n$ 表格開始研究，接著往上延伸至 $3 \times n$。面臨複雜度的增加時，我們提出新的分類方式，考量各種情況，推導出遞迴關係式後，再以矩陣對角化的方式推導出 $3 \times n$ 塗色公式的一般式。在研究 $4 \times n$ 表格的塗色公式時，我們提出以「行」為單位的分類法來推導其塗色方法數公式，再以矩陣的形式呈現。後續透過觀察原有矩形表格分類，延伸探討頭尾相接的環形表格，推導出 $1 \times n$ 和 $2 \times n$ 的環形表格塗色方法數公式。

壹、研究動機

上數學課時，我們發現了一個有趣的排列組合題目：「有一個 2×2 的矩形表格，共有 5 種顏色，每一格都必須塗一種顏色，但是相鄰格子的顏色不能相同，請問共有多少種塗色方法？」對於此題目，我們可以透過窮舉法或逐步討論得出最終塗色方法數，但表格更大時將使推導過程更加複雜。因此，我們也進一步思考在是否存在一個通用的公式，可以直接得出塗色方法數。這個想法引發了我們的好奇，並使我們展開了研究。

貳、研究目的

一、推導 $1 \times n$ 表格和 $2 \times n$ 表格的塗色方法數公式。

二、推導 $3 \times n$ 之塗色方法數遞迴公式及一般式。

三、推導 $4 \times n$ 之塗色方法數遞迴公式。

四、推導環形 $1 \times n$ 及 $2 \times n$ 表格之塗色方法數公式。

參、研究設備及器材

研究工具：紙、筆、電腦、計算機、office 文書處理軟體。

肆、文獻回顧

在文獻[2]中，我們了解到 $1 \times n$ 表格和 $2 \times n$ 表格的塗色方法可以用含有行數 n 和顏色數目 k 的函數表達。而 $3 \times n$ 及列數更多的表格，據文獻[1]所述，文獻中因公式太過繁雜而決定改用演算法計算塗色方法數，不過我們認為文獻[1]中採用的塗色邏輯尚有改善空間，改變方法可以更簡單地求得公式。另外，我們找到的其他有關塗色問題的文獻，大多都是在探討演算法而非研究通式，也沒有人研究過 $3 \times n$ 及列數更多的表格的公式。而在文獻[2]中提及的環形 $1 \times n$ 塗色方法數也引起了我們的興趣，我們也延伸推導出環形 $2 \times n$ 的公式。

伍、研究過程及方法

一、**研究問題**：如圖 1，有 k 種顏色，以及一個 $m \times n$ 的矩形棋盤方格，將棋盤上的每一格塗一個顏色，若要求任意相鄰兩格顏色不能相同，求共有幾種塗色方法？

(其中 m 為列數、n 為行數且 k, m, n 皆為正整數。)

n行

m列

A_1	A_2	A_3	…	A_n
B_1	B_2	B_3	…	B_n
C_1	C_2	C_3	…	C_n
D_1	D_2	D_3	…	D_n
…	…	…	…	…

圖1 (作者群製)

二、$1 \times n$ 表格塗色方法數

定理 1：若有 k 個顏色可選擇，表格大小為 $1 \times n$ (1 為列數、n 為行數)時共有 $k(k-1)^{n-1}$ 種塗色方法。(其中 k 和 n 皆為正整數)

【證明】：將表格由左往右依序塗色，第一格有 k 種顏色可選擇，而往後的每一格只要與左邊格子顏色不同即可，故第二格有 $k-1$ 種顏色可選擇，第三格有 $k-1$ 種顏色可選擇，依此類推，因此整個表格共有 $k(k-1)^{n-1}$ 種塗色方法。

三、$2 \times n$ 表格塗色方法數

定理 2：若有 k 個顏色可選擇，表格大小為 $2 \times n$ (2 為列數、為行數)時共有 $k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$ 種塗色方法。(其中 k 和 n 皆為正整數)

【證明】：設 $n=i$ 時，有 R_i 種塗色方法(i 為正整數)

依序塗第一行、第二行、第三行，…

第一行：將顏色由上塗到下，可得出 $R_1=k(k-1)$。

第二行：可將塗色方法分成兩種情況，分別是 A_2 和 B_1 顏色相同以及 A_2 和 B_1 顏色不同。

A_1	A_2
B_1	B_2

圖 2-1 (作者群製)

第一種：當 A_2 和 B_1 顏色相同時，先塗 A_2，此時有 k 種顏色可選擇，而 B_1 的顏色也和 A_2 相同，再分別塗 A_1,B_2，這兩格都各有 $k-1$ 種顏色可選擇，故這種情況共有 $k(k-1)^2$ 種塗色方法。

第二種：當 A_2 和 B_1 顏色不同時，先塗 A_2，則有 k 種顏色可選擇，再塗 B_2，此時有 $k-1$ 種顏色可選擇，再分別塗 A_1,B_2，這兩格都各有 $k-2$ 種顏色可選擇，故這種情況有 $k(k-1)(k-2)^2$ 種塗色方法。

由上述分類可得：$R_2=k(k-1)^2+k(k-1)(k-2)^2=k(k-1)(k^2-3k+3)$

第三行：考慮新加入兩格(A_3 和 B_3)後方法數的改變，其中有 A_3 和 B_2 顏色相同以及 A_3 和 B_2 顏色不同兩種情況：

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3

圖 2-2 (作者群製)

第一種：當 A_3 和 B_2 顏色相同時，先塗 A_3 再塗 B_3，整個塗色方法數可視為 $R_2(k-1)$，即 $k(k-1)^2(k^2-3k+3)$種

第二種：當 A_3 和 B_2 顏色不同時，先塗 A_3 再塗 B_3，整個塗色方法數可視為 $R_2(k-2)^2$，即 $k(k-1)(k^2-3k+3)(k-2)^2$ 種。

由上述分類可得：

$R_3=k(k-1)^2(k^2-3k+3)+k(k-1)(k^2-3k+3)(k-2)^2=k(k-1)(k^2-3k+3)^2$

觀察 R_1, R_2, R_3 的值，可推得 $R_n=k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$。

四、$3\times n$ 表格塗色方法數

我們使用與 $2\times n$ 類似的邏輯，透過分類討論求得 $3\times n$ 的塗色方法數公式。

證明 $3\times n$ 塗色方法數公式之前，需先依序證明以下四個引理。

A_1	A_2
B_1	B_2
C_1	C_2

圖 3 (作者群製)

(一) **引理 1**：設有 k 個顏色可選擇，在 3×2 的表格塗色問題中：

若 A_2 和 C_2 顏色相同，則有 $k(k-1)(k^3-5k^2+10k-7)$種塗色方法。

若 A_2 和 C_2 顏色不同，則有 $k(k-1)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。

【證明】:

A_2 和 C_2 顏色相同時可分為兩種情況：A_2 和 C_2 和 B_1 的顏色皆相同、A_2 和 C_2 的顏色相同，但和 B_1 不同。

第一種： 當 A_2 和 C_2 和 B_1 的顏色皆相同時，先塗 A_2 和 C_2 和 B_1，再依序塗 A_1 和 C_1 和 B_2，共有 $k(k-1)^3$ 種塗色方法。

第二種： 當 A_2 和 C_2 的顏色相同，但和 B_1 不同時，先塗 A_2 和 C_2 再塗 B_1，再依序塗 A_1 和 C_1 和 B_2，共有 $k(k-1)(k-2)^3$ 種塗色方法。

因此，A_2 和 C_2 相同時總共有 $k(k-1)^3+k(k-1)(k-2)^3$

$=k(k-1)(k^3-5k^2+10k-7)$ 種塗色方法。

而根據之前的定理 2，塗 2×3 的矩形表格總共有 $k(k-1)(k^2-3k+3)^2$ 種塗色方法，因此當 A_2 和 C_2 不同時總共有 $k(k-1)(k^2-3k+3)^2-k(k-1)(k^3-5k^2+10k-7)=k(k-1)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$ 種塗色方法。

(二) **引理 2：** 如圖 4，設有 k 個顏色可選擇，則當表格大小為 3×3 時，共有 $k(k-1)(k^7-11k^6+55k^5-161k^4+298k^3-350k^2+244k-79)$ 種塗色方法

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

圖 4 (作者群製)

【證明】：表格大小為 3×3 時的塗色方法數可根據 A_3,B_2,C_3 這三格的顏色分為五種情況：

第一種： A_3 和 B_2 和 C_3 的顏色皆相同，此時先塗好左邊 3×2 的表格，再分別塗 A_3 和 C_3，最後塗 B_3，共有 $k(k-1)^2(k^2-3k+3)^2$ 種塗色方法。

第二種： A_3 和 B_2 的顏色相同，但和 C_3 不同，此時先塗好左邊 3×2 的表格，再塗 A_3，再塗 C_3，最後塗 B_3，共有 $k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2$ 種塗色方法

第三種： B_2 和 C_3 的顏色相同，但和 A_3 不同，這種情況和第二種情況相似，故也有 $k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2$ 種塗色方法

第四種： A_3 和 C_3 的顏色相同，但和 B_2 不同，這種情況需再細分成兩類情形來討論：第一類是 A_2 和 C_2 顏色相同，第二類是 A_2 和 C_2 顏色不同

第一類： 此時先塗好左邊 3×2 的表格，再塗 C_3 和 A_3，最後塗 B_3，根據引理 1，共有 $k(k-1)(k-2)^2(k^3-5k^2+10k-7)$ 種塗色方法。

第二類： 此時先塗好左邊 3×2 的表格，再塗 C_3 和 A_3，最後塗 B_3，

根據引理 1，共有 $k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種方法。

由上述分類可得：第四種情況共有 $k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)+k(k-1)(k-2)^2(k^3-5k^2+10k-7)$種塗色方法。

第五種：A_3 和 B_2 和 C_3 的顏色皆互不相同，這種情況也需再細分成兩類情形來討論：第一類是 A_2 和 C_2 顏色相同，第二類是 A_2 和 C_2 顏色不同

第一類：此時先塗好左邊 3×2 的表格，再依序塗 C_3 和 A_3 和 B_3，

根據引理 1，共有 $k(k-1)(k-2)(k-3)^2(k^3-5k^2+10k-7)$種方法

第二類：A_2 和 C_2 不同，這種情況需再細分成兩個狀況來討論：第一個是 A_3 和 C_2 顏色相同，第二個是 A_3 和 C_2 顏色不同。

第一個：A_3 和 C_2 顏色相同，此時先塗好左邊 3×2 的表格，再塗 A_3，最後依序塗 C_3 和 B_3，根據引理 1，可以得出共有：

$k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。

第二個：A_3 和 C_2 顏色不同，此時先塗好左邊 3×2 的表格，再塗 A_3，最後依序塗 C_3 和 B_3，根據引理 1，共有：

$k(k-1)(k-3)^3(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。

因此第五種情況共有 $k(k-1)(k-2)(k-3)^2(k^3-5k^2+10k-7)+k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)+k(k-1)(k-3)^3(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法

由上述五種分類可得，其中表格大小為 3×3 時的塗色方法總數就是以上五種分類的方法數加總，化簡後，共有：

$k(k-1)(k^7-11k^6+55k^5-161k^4+298k^3-350k^2+244k-79)$種方法。

(三) **引理 3：**設有 k 個顏色可選擇，在 3×3 的表格塗色問題中

若 A_3 和 C_3 顏色相同，則有 $k^8-11k^7+55k^6-160k^5+291k^4-329k^3+212k^2-59k$ 種塗色方法。

若 A_3 和 C_3 顏色不同，則有

$k^9-13k^8+77k^7-271k^6+619k^5-939k^4+923k^3-535k^2+138k$ 種塗色方法。

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

圖 5 (作者群製)

【證明】：由之前證明引理 2 時的五種分類可得知：

第一種：A_3 和 C_3 顏色相同的塗色方法總數即為證明過程中的第一種以及第四種的情況的塗色方法數加總，總共有 $k(k-1)^2(k^2-3k+3)^2+k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)+k(k-1)(k-2)^2(k^3-5k^2+10k-7)=k^8-11k^7+55k^6-160k^5+291k^4-329k^3+212k^2-59k$ 種塗色方法。

第二種：A_3 和 C_3 顏色不同的塗色方法總數即為證明過程中第二、第三、以及第五種的情況的塗色方法數加總，總共有 $k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2+k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2+k(k-1)(k-2)(k-3)^2(k^3-5k^2+10k-7)+k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)+k(k-1)(k-3)^3(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)=k^9-13k^8+77k^7-271k^6+619k^5-939k^4+923k^3-535k^2+138k$ 種塗色方法。

(四) **引理 4**：如圖 6，當有 k 個顏色可選擇，表格大小為 $3\times n$ (n 為大於 3 的正整數)時，設 $3\times n$ 表格的塗色方法總數為 x_n+y_n，其中 x_n 為 A_n 和 C_n 顏色相同時的塗色方法數，y_n 為 A_n 和 C_n 顏色不同時的塗色方法數，則有以下關係式：

$x_n=(k^2-3k+3)x_{n-1}+(k^2-4k+5)y_{n-1}$

$y_n=(k^3-6k^2+13k-10)x_{n-1}+(k^3-6k^2+14k-13)y_{n-1}$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	…	A_{n-1}	A_n
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	…	B_{n-1}	B_n
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	…	C_{n-1}	C_n

圖6 (作者群製)

將 $3\times n$ 表格的塗色方法總數分爲五種情況：

第一種：A_n 和 B_{n-1} 和 C_n 的顏色皆相同，此時先塗好左邊 $3\times(n-1)$的表格，再塗 A_n 和 C_n，最後塗 B_n，共有$(k-1)(x_{n-1}+y_{n-1})$種塗色方法

第二種：A_n 和 B_{n-1} 的顏色相同，但和 C_n 不同，此時先塗好左邊 $3\times(n-1)$的表格，再塗 A_n，再塗 C_n，最後塗 B_n，共有$(k-2)^2(x_{n-1}+y_{n-1})$種塗色方法

第三種：C_n 和 B_{n-1} 的顏色相同，但和 A_n 不同，這種情況和第二種情況對稱，故塗色方法數和第二種相同，也有$(k-2)^2(x_{n-1}+y_{n-1})$種塗色方法

第四種：C_n 和 A_n 的顏色相同，但和 B_{n-1} 不同，這種情況需再細分成兩類情形來討論：第一類是 A_{n-1} 和 C_{n-1} 顏色相同，第二類是 A_{n-1} 和 C_{n-1} 顏色不同

第一類：此時先塗好左邊 $3\times(n-1)$的方格，再塗 C_n 和 A_n，最後塗 B_n，共有$(k-2)^2x_{n-1}$種塗色方法。

第二類：此時先塗好左邊 $3\times(n-1)$的方格，再塗 C_n 和 A_n，最後塗 B_n，

共有$(k-3)(k-2)y_{n-1}$種塗色方法。

第五種：A_n和B_{n-1}和C_n的顏色皆互不相同，這種情況需再細分成兩類情形來討論：第一類是A_{n-1}和C_{n-1}顏色相同，第二類是A_{n-1}和C_{n-1}顏色不同

第一類：此時先塗好左邊$3\times(n-1)$的方格，再依序塗C_n和A_n和B_n，共有$(k-2)(k-3)^2x_{n-1}$種塗色方法。

第二類：這種情況需再細分成兩個狀況來討論：

第一個是A_n和C_{n-1}顏色相同，第二個是A_n和C_{n-1}顏色不同

第一個：此時先塗好左邊$3\times(n-1)$的方格，再塗A_n，最後依序塗C_n和B_n，共有$(k-2)(k-3)y_{n-1}$種塗色方法。

第二個：此時先塗好左邊$3\times(n-1)$的方格，再塗A_n，最後依序塗C_n和B_n，共有$(k-3)^3y_{n-1}$種塗色方法。

上述的五種情況中，第一和第四種情況的塗色方法數總和即為$3\times n$塗色方法數中，A_n和C_n顏色相同的數量，第二、第三、第五種情況的塗色方法數總和即為$3\times n$塗色方法數中，A_n和C_n顏色不同的數量，故可列出遞迴方程式如下：

$x_n=(k^2-3k+3)x_{n-1}+(k^2-4k+5)y_{n-1}$

$y_n=(k^3-6k^2+13k-10)x_{n-1}+(k^3-6k^2+14k-13)y_{n-1}$

(n為大於3的正整數)

故引理4成立。

最後，整理引理4的遞迴式：

令$a=k^2-3k+3, b=k^2-4k+5, c=k^3-6k^2+13k-10, d=k^3-6k^2+14k-13$

整理得$x_n=ax_{n-1}+by_{n-1}, y_n=cx_{n-1}+dy_{n-1}$

此時可將其寫成矩陣形式，即$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$

故有$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_{n-2}\\y_{n-2}\end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$

為了化簡$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}$，於是我們使用了矩陣對角化的方式。

先解$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$的特徵方程式

令t為此矩陣的特徵值，有$\begin{vmatrix}a-t&b\\c&d-t\end{vmatrix}=0$

$$t=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$$

令 $\lambda_1=\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$,$\lambda_2=\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$

(λ_1,λ_2 即為矩陣的兩個特徵值)

令 v_1,v_2 分別為對應 λ_1,λ_2 的特徵向量，有以下方程式：

$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} v_1=0$,$\begin{pmatrix} a-\lambda_2 & b \\ c & d-\lambda_2 \end{pmatrix} v_2=0$

各取一解 $v_1=\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1-a \end{pmatrix}$,$v_2=\begin{pmatrix} b \\ \lambda_2-a \end{pmatrix}$

根據文獻[3]有$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{n-3} & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^{n-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}$$

故$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{n-3}=\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {\lambda_1}^{n-3} & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^{n-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} b{\lambda_1}^{n-3} & b{\lambda_2}^{n-3} \\ (\lambda_1-a){\lambda_1}^{n-3} & (\lambda_2-a){\lambda_2}^{n-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2-a}{b(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{a-\lambda_1}{b(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} & \frac{-b}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{b}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} \\ \frac{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{(\lambda_2-a)(a-\lambda_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2}^{n-3} & \frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} \end{pmatrix}$$

代回原遞迴式可得

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} & \frac{-b}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{b}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} \\ \frac{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{(\lambda_2-a)(a-\lambda_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2}^{n-3} & \frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}^{n-3}+\frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}^{n-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化簡後可得 $3\times n$ 塗色數量公式即為 $x_n+y_n=$

$$\frac{\lambda_1-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2x_3-ax_3-by_3){\lambda_1}^{n-3}+\frac{\lambda_2-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(-\lambda_1x_3+ax_3+by_3){\lambda_2}^{n-3}$$

其中 $a=k^2-3k+3$, $b=k^2-4k+5$

$x_3=k^8-11k^7+55k^6-160k^5+291k^4-329k^3+212k^2-59k$

$y_3=k^9-13k^8+77k^7-271k^6+619k^5-939k^4+923k^3-535k^2+138k$

$\lambda_1=[k^3-5k^2+11k-10+(k^6-10k^5+43k^4-102k^3+145k^2-124k+56)^{0.5}]/2$

$\lambda_2=[k^3-5k^2+11k-10-(k^6-10k^5+43k^4-102k^3+145k^2-124k+56)^{0.5}]/2$。

定理 3：若有 k 個顏色可選擇，表格大小為 $3 \times n$ (3 為列數、n 為行數，且 $n \geq 3$，其中 k 和 n 皆為正整數)時共有

$$\frac{\lambda_1-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2 x_3 - a x_3 - b y_3){\lambda_1}^{n-3} + \frac{\lambda_2-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(-\lambda_1 x_3 + a x_3 + b y_3){\lambda_2}^{n-3}$$ 種塗色方法。

【證明】：由引理 1、引理 2、引理 3、引理 4 以及上述化簡遞迴式的過程可得證。

五、$4 \times n$ 表格塗色方法數

我們計算一行一行表格加上去時的塗色數的變化情形，並分類討論，找出每種情況下的遞迴關係，最後證明出 $4 \times n$ 表格塗色方法數公式。

(一) **引理 5**：在 $4 \times n$ 表格塗色問題中，可將每一行 ($i \leq n$, i 為正整數)的塗色方法分成以下五種情形：

A_i 與 C_i 顏色相同，且 B_i 與 D_i 顏色相同

A_i 與 C_i 顏色相同，B_i 與 D_i 顏色不同

A_i 與 D_i 顏色相同

A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同

A_i,B_i,C_i,D_i 四個格子的顏色皆互不相同

【證明】：如圖 7，可用二分法依序討論 A_i,B_i,C_i,D_i 四個格子的顏色。

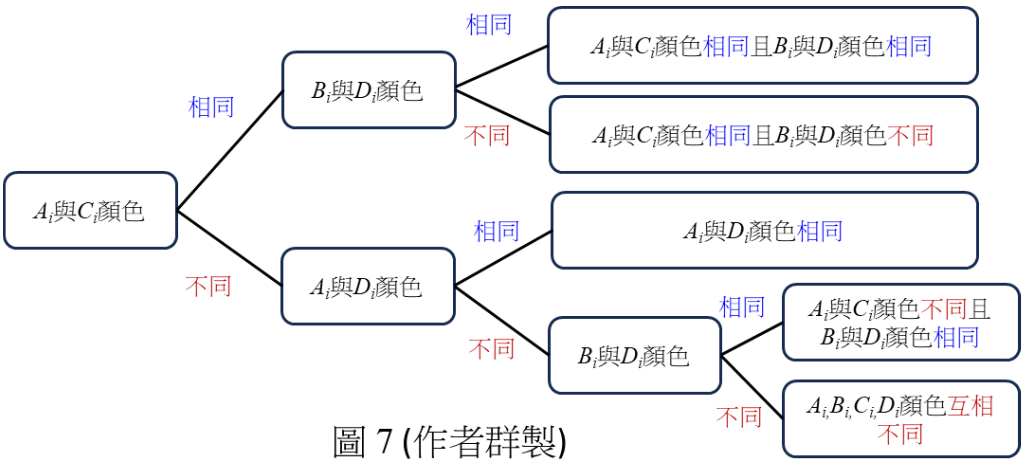

圖 7 (作者群製)

接著，根據引理 5，在塗 $4 \times n$ 表格時，第 i 行可分為 5 種情況，第 $i+1$ 行也可以分為 5 種情況(i 為正整數)，如圖 8 所示，我們將分別討論第 i 行的 5 種情況會使第 $i+1$ 行分別有多少種塗色方法。

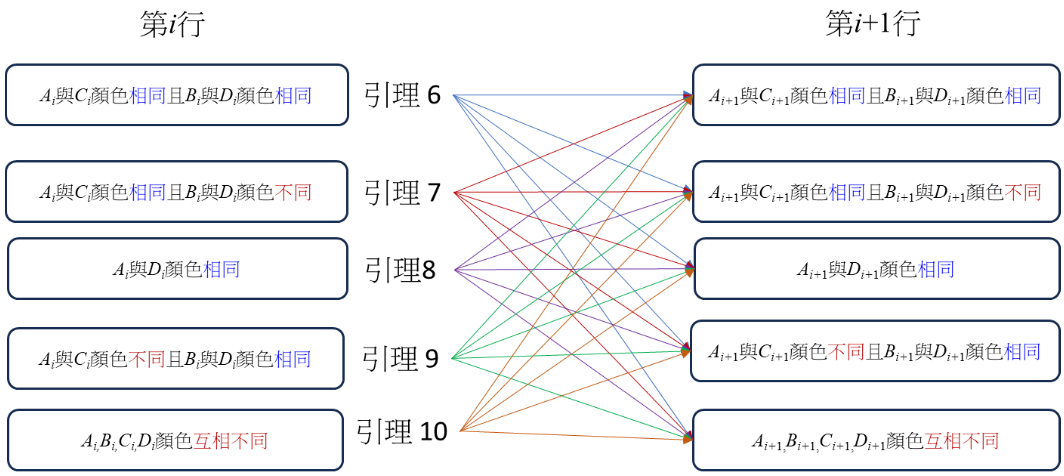

圖 8(作者群製)

A_i	A_{i+1}
B_i	B_{i+1}
C_i	C_{i+1}
D_i	D_{i+1}

圖9-1 (作者群製)
(引理6系列示意圖)

(二) **引理 6.1**：如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同、B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，可視為 2×2 表格的塗色方法，則第 $i+1$ 行總共有 k^2-3k+3 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下兩類：

第一類：B_i 和 A_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-1$ 種塗色方法。

第二類：B_i 和 A_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 k^2-3k+3 種塗色方法。

(三) **引理 6.2**：如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同、B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+13k-10$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下兩類：

第一類：B_i 和 A_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-1)(k-2)$種塗色方法。

第二類：B_i 和 A_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)^2(k-3)$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+13k-10$ 種塗色方法。

(四) **引理 6.3：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同、B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+17k-14$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下兩類：

第一類：C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)(k-3)^2$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+17k-14$ 種塗色方法。

(五) **引理 6.4：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同、B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+13k-10$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 6.2 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+13k-10$ 種塗色方法。

(六) **引理 6.5：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同、B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1}, B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1} 的顏色皆互不相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^4-10k^3+39k^2-70k+48$ 種塗色方法。

【證明】：討論第 $i+1$ 行的四個格子中有多少個格子和第 i 行格子的顏色相同

第一類：若第 $i+1$ 行格子的顏色和第 i 行完全不同。塗色過程為先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)$ 種塗色方法。

第二類：若第 $i+1$ 行中有一個格子的顏色和第 i 行的某個格子相同，其中有 4 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著塗好顏色和第 i 行某格顏色相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行有 $4(k-2)(k-3)(k-4)$ 種塗色方法。

第三類：若第 $i+1$ 行中有一個格子的顏色和第 i 行的某個格子相同，其中有 4 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著塗好顏色和第 i 行某兩格相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。可得第 $i+1$ 行共有 $4(k-2)(k-3)$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^4-10k^3+39k^2-70k+48$ 種塗色方法。

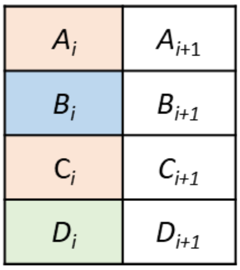

圖 9-2 (作者群製)
(引理7系列示意圖)

(七) **引理 7.1：** 如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同且 B_i 與 D_i 顏色不同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 k^2-4k+5 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下兩類：

第一類： A_i,C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-1$ 種塗色方法。

第二類： A_1 與 C_1 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，但 C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)(k-3)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 k^2-4k+5 種塗色方法。

(八) **引理 7.2：** 如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同且 B_i 與 D_i 顏色不同，且第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下六類：

第一類： B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類： D_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第三類： 當 A_{i+1} 與 B_i、D_i 顏色不同時，B_i 與 D_{i+1} 顏色相同、D_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、C_{i+1}、A_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-3$ 種塗色方法。

第四類： 當 A_{i+1} 與 B_i、D_i 顏色不同時，B_i 與 D_{i+1} 顏色相同、D_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2$ 種塗色方法。

第五類： 當 A_{i+1} 與 B_i、D_i 顏色不同時，B_i 與 D_{i+1} 顏色不同、D_i 與 B_{i+1} 顏色相

同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2$ 種塗色方法

第六類：當 A_{i+1} 與 B_i、D_i 顏色不同時，B_i 與 D_{i+1} 顏色不同、D_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}。此時第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2(k-4)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

(九) **引理 7.3：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同且 B_i 與 D_i 顏色不同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下五類：

第一類：A_i,C_i,B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1} 跟 D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：D_i 與 B_{i+1} 顏色相同且 B_i 與 C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1} 跟 D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-3$ 種塗色方法。

第三類：D_i 與 B_{i+1} 顏色相同，但 B_i 與 C_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1} 跟 D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)^2$ 種塗色方法。

第四類：D_1 與 B_2 顏色不同，但 B_i 與 C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1} 跟 D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)^2$ 種塗色方法。

第五類：D_{i+1} 與 B_{i+1} 顏色不同且 B_i 與 C_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1} 跟 D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)^2(k-4)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

(十) **引理 7.4：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同且 B_i 與 D_i 顏色不同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+18k-16$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下兩類：

第一類：A_i,C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-1)(k-2)$種塗色方法。

第二類：A_i 與 C_i 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，但 C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1} 跟 D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-2)(k-3)^2$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-16$ 種塗色方法。

(十一) **引理 7.5：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色相同且 B_i 與 D_i 顏色不同，第 $i+1$ 行 A_{i+1},

B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1}四個格子的顏色皆互不相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

【證明】：討論第 $i+1$ 行的四個格子中有多少個格子和第 i 行格子的顏色相同

第一類：若第 $i+1$ 行格子的顏色和第 i 行完全不同，塗色過程為先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)$種塗色方法。

第二類：若第 $i+1$ 行中有一個格子的顏色和第 i 行的某個格子相同，其中有 8 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $8(k-3)(k-4)(k-5)$種塗色方法。

第三類：若第 $i+1$ 行中有兩個格子的顏色和第 i 行的某兩個格子相同，其中有 17 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $17(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第四類：若第 $i+1$ 行中有三個格子的顏色和第 i 行的某三個格子相同，其中有 8 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再塗還未塗色的格子，此時第 $i+1$ 行共有 $8(k-3)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

A_i	A_{i+1}
B_i	B_{i+1}
C_i	C_{i+1}
D_i	D_{i+1}

圖 9-3 (作者群製)
(引理8系列示意圖)

(十二) **引理 8.1：**如果第 i 行中 A_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行總共有 k^2-5k+7 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下四類：

第一類：B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同且 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。

第二類：B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同但 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-3$ 種塗色方法。

第三類：C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同但 B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-3$ 種塗色方法。

第四類：B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色不同且 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色不同，先塗好第 i 行，接著依序塗 C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-3)(k-4)$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 k^2-5k+7 種塗色方法。

(十三)　**引理 8.2：**如果第 i 行中 A_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下三類：

第一類：A_i,D_i,B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：A_i,D_i,B_{i+1} 顏色不同且 C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)(k-3)$ 種塗色方法。

第三類：A_i,D_i,B_{i+1} 顏色不同且 C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^3$ 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

(十四)　**引理 8.3：**如果第 i 行中 A_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下六類：

第一類：A_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、C_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：A_i 與 C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 C_{i+1}、B_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $(k-2)^2$ 種塗色方法。

第三類：當 A_i 與 B_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色相同、C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、C_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}。*此時*第 $i+1$ 行共有 $k-3$ 種塗色方法。

第四類：當 A_i 與 B_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色相同、C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 C_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}。*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2$ 種塗色方法。

第五類：當 A_i 與 B_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色不同、C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}、C_{i+1}。*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2$ 種塗色方法。

第六類：當 A_i 與 B_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色不同、C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}。*此時*第 $i+1$ 行共有 $(k-3)^2(k-4)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

(十五) **引理 8.4：**如果第 i 行中 A_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 8.2 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

(十六) **引理 8.5：**如果第 i 行中 A_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 $A_{i+1},B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1}$ 的顏色皆互不相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

【證明】：討論第 $i+1$ 行的四個格子中有多少個格子和第 i 行格子的顏色相同，共可分為以下四類：

第一類：若第 $i+1$ 行格子的顏色和第 i 行完全不同。先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)$種塗色方法。

第二類：若第 $i+1$ 行中有一個格子的顏色和第 i 行的某個格子相同，其中有 8 種變化，塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $8(k-3)(k-4)(k-5)$種塗色方法。

第三類：若第 $i+1$ 行中有兩個格子的顏色和第 i 行的某兩個格子相同，其中有 17 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $17(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第四類：若第 $i+1$ 行中有三個格子的顏色和第 i 行的某三個格子相同，其中有 8 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再塗還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $8(k-3)$種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

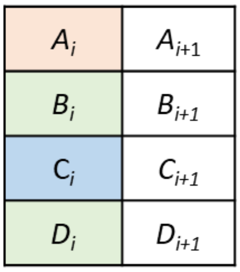

圖 9-4 (作者群製)
(引理9系列示意圖)

(十七)　**引理 9.1：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行總共有 k^2-4k+5 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 7.1 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 k^2-4k+5 種塗色方法。

(十八)　**引理 9.2：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+18k-16$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 7.4 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-16$ 種塗色方法。

(十九)　**引理 9.3：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 D_{i+1} 相同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 7.3 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+18k-17$ 種塗色方法。

(二十)　**引理 9.4：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 7.2 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-6k^2+14k-13$ 種塗色方法。

(二十一) **引理 9.5：**如果第 i 行中 A_i 與 C_i 顏色不同，B_i 與 D_i 顏色相同，第 $i+1$ 行中 $A_{i+1},B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1}$ 的顏色皆互不相同，則第 $i+1$ 行有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

【證明】：此情況和引理 7.5 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^4-10k^3+40k^2-77k+60$ 種塗色方法。

A_i	A_{i+1}
B_i	B_{i+1}
C_i	C_{i+1}
D_i	D_{i+1}

圖 9-5 (作者群製)
(引理10系列示意圖)

(二十二) **引理 10.1**：如果第 i 行中 A_i,B_i,C_i,D_i 的顏色皆互不相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，且 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行總共有 k^2-5k+8 種塗色方法。

【證明】：此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下九類：

第一類：當 A_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。

第二類：當 A_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，D_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。

第三類：當 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。

第四類：當 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，D_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。

第五類：當 A_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 $k-4$ 種塗色方法。

第六類：當 C_i,B_{i+1},D_{i+1} 顏色相同，A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，第 $i+1$ 行有 $k-4$ 種塗色方法。

第七類：當 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 A_i 和 C_i 顏色不同，B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，第 $i+1$ 行有 $k-4$ 種塗色方法。

第八類：當 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 A_i 和 C_i 顏色不同，D_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，第 $i+1$ 行有 $k-4$ 種塗色方法。

第九類：當 B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 A_i 和 C_i 顏色不同，A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同

但與 B_i 和 D_i 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行有$(k-4)(k-5)$種塗色方法。

由以上可得第 $i+1$ 行總共有 k^2-5k+8 種塗色方法。

(二十三) **引理 10.2**：如果第 i 行中 A_i,B_i,C_i,D_i 的顏色皆互不相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色不同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+19k-20$ 種塗色方法。

【證明】: 此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下六類：

第一類：當 B_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：當 D_i,A_{i+1},C_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第三類：當 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同，B_i 與 D_{i+1} 顏色相同，D_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-4$ 種塗色方法。

第四類：當 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同，B_i 與 D_{i+1} 顏色相同，D_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 D_{i+1}、B_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第五類：當 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同，B_i 與 D_{i+1} 顏色不同，D_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第六類：當 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 D_i 顏色不同，B_i 與 D_{i+1} 顏色不同，D_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、D_{i+1}、A_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)^2$ 種塗色方法。

由以上可得第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+19k–20$ 種塗色方法。

(二十四) **引理 10.3**：如果第 i 行中 A_i,B_i,C_i,D_i 的顏色皆互不相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+19k-20$ 種塗色方法。

【證明】: 此時第 $i+1$ 行表格的塗色情形共可分為以下六類：

第一類：當 B_i,A_{i+1},D_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、C_{i+1}、B_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第二類：當 C_i,A_{i+1},D_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，*此時*第 $i+1$ 行共有$(k-2)^2$ 種塗色方法。

第三類：當 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 C_i 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色相同，C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 C_{i+1}、B_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有 $k-4$ 種塗色方法。

第四類：當 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 C_i 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色相同，C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 C_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第五類：當 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 C_i 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色不同，C_i 與 B_{i+1} 顏色相同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 B_{i+1}、A_{i+1}、D_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)$種塗色方法。

第六類：當 A_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同但與 B_i 和 C_i 顏色不同，B_i 與 C_{i+1} 顏色不同，C_i 與 B_{i+1} 顏色不同時，先塗好第 i 行，接著依序塗 A_{i+1}、D_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-3)(k-4)^2$ 種塗色方法。

由以上可得此時第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+19k-20$ 種塗色方法。

(二十五) **引理 10.4：**如果第 i 行中 A_i,B_i,C_i,D_i 的顏色皆互不相同，第 $i+1$ 行中 A_{i+1} 與 C_{i+1} 顏色不同，B_{i+1} 與 D_{i+1} 顏色相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^3-7k^2+19k-20$ 種塗色方法。

【證明】: 此情況和引理 7.2 相似，兩者有同樣的塗色方法數，故可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^3-7k^2+19k-20$ 種塗色方法。

(二十六) **引理 10.5：**如果第 i 行中 A_i,B_i,C_i,D_i 的顏色皆互不相同，第 $i+1$ 行中 $A_{i+1},B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1}$ 的顏色皆互不相同，則第 $i+1$ 行共有 $k^4-10k^3+41k^2-84k+73$ 種塗色方法。

【證明】: 討論第 $i+1$ 行的四個格子中有多少個格子和第 i 行格子的顏色相同

第一類：若第 $i+1$ 行格子的顏色和第 i 行完全不同，先塗好第 i 行，接著依序塗色 A_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}，此時第 $i+1$ 行共有$(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)$種塗色方法。

第二類：若第 $i+1$ 行中有一個格子的顏色和第 i 行的某個格子相同，其中有 12 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $12(k-4)(k-5)(k-6)$種塗色方法。

第三類：若第 $i+1$ 行中有兩個格子的顏色和第 i 行的某兩個格子相同，其中有 42 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，

再由上至下塗完還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $42(k-4)(k-5)$種塗色方法。

第四類：若第 $i+1$ 行中有三個格子的顏色和第 i 行的某三個格子相同，其中有 44 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再塗還未塗色的格子。此時第 $i+1$ 行共有 $44(k-4)$種塗色方法。

第五類：若第 $i+1$ 行中有三個格子的顏色和第 i 行的某三個格子相同，其中有 9 種變化。塗色過程為先塗好第 i 行，接著先塗好顏色和第 i 行相同的格子，再塗還未塗色的格子，這種狀況下第 $i+1$ 行有 1 種塗色方法。此時第 $i+1$ 行共有 9 種塗色方法。

由上述討論可得此時第 $i+1$ 行總共有 $k^4-10k^3+41k^2-84k+73$ 種塗色方法。

由引理 6 到 10 可得出第 i 行和第 $i+1$ 行之間的遞迴關係，以矩陣形式表示，並令其為 M，則 $M=$

$$\begin{pmatrix} k^2-3k+3 & k^2-4k+5 & k^2-5k+7 & k^2-4k+5 & k^2-5k+8 \\ k^3-6k^2+13k-10 & k^3-6k^2+14k-13 & k^3-7k^2+18k-17 & k^3-7k^2+18k-16 & k^3-7k^2+19k-20 \\ k^3-7k^2+17k-14 & k^3-7k^2+18k-17 & k^3-6k^2+14k-13 & k^3-7k^2+18k-17 & k^3-7k^2+19k-20 \\ k^3-6k^2+13k-10 & k^3-7k^2+18k-16 & k^3-7k^2+18k-17 & k^3-6k^2+14k-13 & k^3-7k^2+19k-20 \\ k^4-10k^3+39k^2-70k+48 & k^4-10k^3+40k^2-77k+60 & k^4-10k^3+40k^2-77k+60 & k^4-10k^3+40k^2-77k+60 & k^4-10k^3+41k^2-84k+73 \end{pmatrix}$$

定理 4：在 **$4\times n$ 表格**中以 k 種顏色塗色時的塗色方法總數即為下列矩陣乘開後，矩陣內各個元素之總和。(其中 k 和 n 皆為正整數)

$$M^{n-1}\begin{pmatrix} k(k-1) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2)(k-3) \end{pmatrix}$$

【證明】:

根據引理 5，依序由上往下塗色，可得第一行的塗色方法數如下：

A_1 與 C_1 顏色相同，且 B_1 與 D_1 顏色相同：$k(k-1)$

A_1 與 C_1 顏色相同，B_1 與 D_1 顏色不同：$k(k-1)(k-2)$

A_1 與 D_1 顏色相同：$k(k-1)(k-2)$

A_1 與 C_1 顏色不同，B_1 與 D_1 顏色相同：$k(k-1)(k-2)$

A_1,B_1,C_1,D_1 四個格子的顏色皆互不相同：$k(k-1)(k-2)(k-3)$

由上述塗色方法數以及引理 6.1~10.5 可得證。

六、**$1\times n$ 環形塗色方法數：**

在文獻[2]中有提及 $1\times n$ 環形的塗色方法數公式。但並未提及 $2\times n$ 或更多層的環形塗色方法。在推導 $2\times n$ 的環形塗色方法之前，我們先證明 $1\times n$ 環形的塗色方法數公式

定理 5：我們延伸將表格轉成環形，若將 $1\times n$ 的表格頭尾相接，形成一個環形表格，在每個格子中都塗一種顏色，使所有相鄰格子不同色(此時 A_1 和 A_n 的顏色也要不一樣)，若有 k 種顏色可以選擇(其中 n 和 k 皆為正整數)，則塗色方法數如下：

$n=1$ 時：有 k 種塗色方法

$n>1$ 時：有$(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$種塗色方法

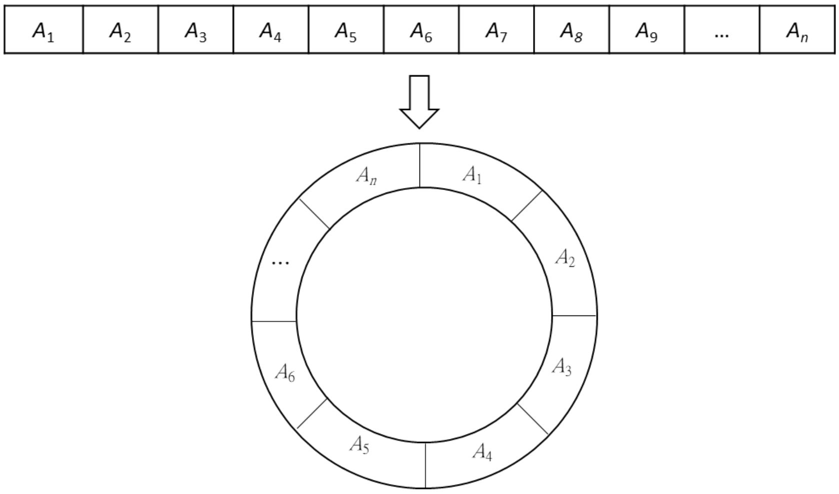

圖 10 (作者群製)

【證明】：設有 n 格時的塗色方法數為 S_n，則易得到：

$S_1=k,\ S_2=k(k-1),\ S_3=k(k-1)(k-2)$

如圖 11，觀察 S_r (r 為大於三的任意正整數)

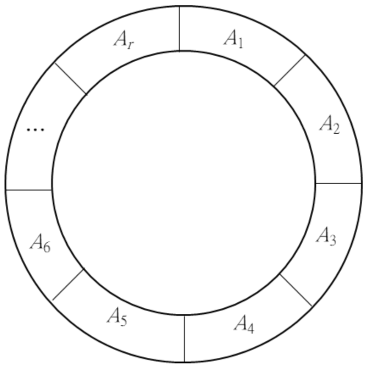

圖 11 (作者群製)

假設 A_1 和 A_r，並無限制必須塗不同顏色，則其塗色方法即為 $1\times r$ 表格之塗色方法，根據定理 1，其共有 $k(k-1)^{r-1}$ 種塗色方法。

在此假設下，若 A_1 和 A_r 顏色相同，則塗 A_1 時，A_r 的顏色也會相同，可將這兩格視為同一格，其塗色方法數即可視為 S_{r-1}。由上述假設可得：$S_r = k(k-1)^{r-1} - S_{r-1}$($r$ 為大於 3 的正整數)，因此有：

$S_r = k(k-1)^{r-1} - S_{r-1} = k(k-1)^{r-1} - 〔k(k-1)^{r-2} - S_{r-2}〕 = k(k-1)^{r-1} - k(k-1)^{r-2} + 〔k(k-1)^{r-3} - S_{r-3}〕 = \ldots$

故當 r 為奇數時：

$S_r = k(k-1)^{r-1} - k(k-1)^{r-2} + k(k-1)^{r-3} \ldots - k(k-1)^3 + S_3 = (k-1)^r - (k-1)^3 + S_3$

$= (k-1)^r - (k-1)$

同理，當 r 為偶數時：

$S_r = k(k-1)^{r-1} - k(k-1)^{r-2} + k(k-1)^{r-3} \ldots + k(k-1)^3 - S_3 = (k-1)^r + (k-1)$

由上述算式整理後可得到 S_n 的塗色公式：

若 $n=1$，則 $S_n = k$，若 $n > 1$，則 $S_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$

七、$\mathbf{2 \times n}$ 環形塗色方法數

推導出 $1 \times n$ 環形的塗色方法數公式後。我們證明了 $2 \times n$ 環形的塗色方法數遞迴式。

定理 6：若將 $\mathbf{2 \times n}$ 的表格頭尾相接，形成一個環形表格，在每個格子中都塗一種顏色，使所有相鄰格子不同色(此時 A_1 和 A_n 的顏色要不一樣，B_1 和 B_n 的顏色也要不一樣)，若有 k 種顏色可以選擇(其中 n 和 k 皆為正整數)，則塗色方法數如下：

設一個七元遞迴式如下：

$a_2 = 0,\ b_2 = 0,\ c_2 = k(k-1)$

$d_2 = k(k-1)(k-2),\ e_2 = k(k-1)(k-2),\ f_2 = 0$

$g_2 = k(k-1)(k-2)(k-3)$

$a_n = c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1} + g_{n-1}$

$b_n = (k-2)c_{n-1} + (k-3)d_{n-1} + (k-2)e_{n-1} + (k-2)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + f_{n-1} + g_{n-1}$

$d_n = (k-2)a_{n-1} + (k-3)b_{n-1} + (k-2)e_{n-1} + (k-2)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$e_n = (k-2)a_{n-1} + (k-2)b_{n-1} + (k-2)d_{n-1} + (k-3)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$f_n = (k-2)b_{n-1} + (k-2)c_{n-1} + (k-2)d_{n-1} + (k-3)e_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$g_n = (k-2)(k-3)a_{n-1} + (k-3)^2 b_{n-1} + (k-2)(k-3)c_{n-1} + (k-3)^2 d_{n-1} + (k-3)^2 e_{n-1}$

$+ (k-3)^2 f_{n-1} + (k^2 - 7k + 13)g_{n-1}$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n + g_n = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)^{n-1}$

$2 \times n$ 表格的塗色方法數為 $c_n + d_n + e_n + g_n$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	…	A_n
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	…	B_n

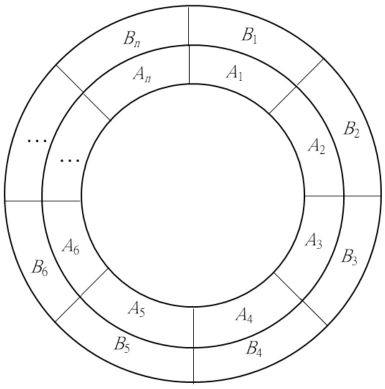

圖 12 (作者群製)

【證明】：先觀察並討論 $2 \times n$ 表格塗色方法：

已知 A_n 的顏色有三種可能，分別是和 A_1 相同；和 B_1 相同；和 A_1,B_1 皆不同，同理，B_n 的顏色也有三種可能，分別是和 A_1 相同；和 B_1 相同；和 A_1,B_1 皆不同，但 A_n 和 B_n 的顏色不能相同，因此可將 $2 \times n$ 表格塗色方法分 7 種情況，並分別假設塗色方法個數：

第一種：若 A_n 和 A_1 的顏色相同，且 B_n 和 B_1 的顏色相同，塗色方法數為 a_n

第二種：若 A_n 和 A_1 的顏色相同，且 B_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，塗色方法數為 b_n

第三種：若 A_n 和 B_1 的顏色相同，且 B_n 和 A_1 的顏色相同，塗色方法數為 c_n

第四種：若 A_n 和 B_1 的顏色相同，且 B_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，塗色方法數為 d_n

第五種：若 A_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，且 B_n 和 A_1 的顏色相同，塗色方法數為 e_n

第六種：若 A_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，且 B_n 和 B_1 的顏色相同，塗色方法數為 f_n

第七種：若 A_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，且 B_n 和 A_1,B_1 的顏色皆不同，塗色方法數為 g_n

(其中 n 為大於 1 的正整數)

設 A_1 的顏色為 a，B_1 的顏色為 b

討論第一種：a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則無法構建出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則無法構建出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗 b 可得出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗 b 可得出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗 b 可得出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則無法構建出 a_n

若前面的 $2 \times (n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗 b 可得出 a_n

因此有 $a_n=c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1}+g_{n-1}$

討論第二種：b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則無法構建出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則無法構建出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 b_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 A_n 塗 a，在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 b_n

因此有 $b_n=(k-2)c_{n-1}+(k-3)d_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

討論第三種：c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗 a 可得出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗 a 可得出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則無法構建出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則無法構建出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則無法構建出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗 a 可得出 c_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗 a 可得出 c_n

因此有 $c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1}$

討論第四種：d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則無法構建出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則無法構建出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 d_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 A_n 塗 b，在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 d_n

因此有 $d_n=(k-2)a_{n-1}+(k-3)b_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

討論第五種：*e_n*

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則無法構建出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則無法構建出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 e_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 e_n

因此有 $e_n=(k-2)a_{n-1}+(k-2)b_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

討論第六種：*f_n*

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則無法構建出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則在 B_n 塗 b，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則在 B_n 塗 b，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則在 B_n 塗 a，在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)可得出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則在 B_n 塗 b，在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則無法構建出 f_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則在 B_n 塗 b，在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 f_n

因此有 $f_n=(k-2)b_{n-1}+(k-2)c_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)e_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

討論第七種：g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 a_{n-1}，則在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)，在 B_n 塗上和 a,b,A_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得出 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 b_{n-1}，則在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)，在 A_n 塗上和 a,b,B_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 c_{n-1}，則在 A_n 塗上和 a,b 皆不同的顏色(共有 $k-2$ 種顏色可選擇)，在 B_n 塗上和 a,b,A_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 d_{n-1}，則在 B_n 塗上和 a,b,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)，在 A_n 塗上和 a,b,B_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 e_{n-1}，則在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)，在 B_n 塗上和 a,b,A_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 f_{n-1}，則在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)，在 B_n 塗上和 a,b,A_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n

若前面的 $2\times(n-1)$格的塗色方法屬於 g_{n-1}，則再細分成兩種情況：

第一種：若 B_{n-1} 和 A_n 的顏色相同：則在 A_n 塗上和 B_{n-1} 相同的顏色，在 B_n 塗上和 a,b,A_n 皆不同的顏色(共有 $k-3$ 種顏色可選擇)可得 g_n。

第二種：若 B_{n-1} 和 A_n 的顏色不同：則在 A_n 塗上和 a,b,A_{n-1},B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-4$ 種顏色可選擇)，在 B_n 塗上和 a,b,A_n,B_{n-1} 皆不同的顏色(共有 $k-4$ 種顏色可選擇)可得 g_n。

因此有 $g_n=(k-2)(k-3)a_{n-1}+(k-3)(k-3)b_{n-1}+(k-2)(k-3)c_{n-1}+(k-3)(k-3)d_{n-1}+(k-3)(k-3)e_{n-1}+(k-3)(k-3)f_{n-1}+〔(k-3)+(k-4)(k-4)〕g_{n-1}=(k-2)(k-3)a_{n-1}+(k-3)^2b_{n-1}+(k-2)(k-3)c_{n-1}+(k-3)^2d_{n-1}+(k-3)^2e_{n-1}+(k-3)^2f_{n-1}+(k^2-7k+13)g_{n-1}$

整理所有遞迴式可得：

$a_n = c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1} + g_{n-1}$

$b_n = (k-2)c_{n-1} + (k-3)d_{n-1} + (k-2)e_{n-1} + (k-2)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + f_{n-1} + g_{n-1}$

$d_n = (k-2)a_{n-1} + (k-3)b_{n-1} + (k-2)e_{n-1} + (k-2)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$e_n = (k-2)a_{n-1} + (k-2)b_{n-1} + (k-2)d_{n-1} + (k-3)f_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$f_n = (k-2)b_{n-1} + (k-2)c_{n-1} + (k-2)d_{n-1} + (k-3)e_{n-1} + (k-3)g_{n-1}$

$g_n = (k-2)(k-3)a_{n-1} + (k-3)^2 b_{n-1} + (k-2)(k-3)c_{n-1} + (k-3)^2 d_{n-1} + (k-3)^2 e_{n-1} +$

$(k-3)^2 f_{n-1} + (k^2-7k+13)g_{n-1}$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n + g_n = k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

從 2 × 2 塗色方法，依序分別在左上，右上，左下，右下塗色，即得到 a_2～g_2 分別為：

$a_2 = 0$

$b_2 = 0$

$c_2 = k(k-1)$

$d_2 = k(k-1)(k-2)$

$e_2 = k(k-1)(k-2)$

$f_2 = 0$

$g_2 = k(k-1)(k-2)(k-3)$

由上述算式可得：

當 $n=1$ 時，環形塗色方式共有 $k(k-1)$種。

當 $n>1$ 時，由前面的遞迴公式可分別得到 $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n$，而 2 × n 環形塗色方式數量即為 2 × n 表格的塗色方法數扣掉所有 A_1 和 A_n 顏色相同及 B_1 和 B_n 顏色相同的情形(即 $a_n + b_n + f_n$)，故 2 × n 環形塗色的方法數為 $c_n + d_n + e_n + g_n$。

陸、研究結果與討論

一、在 1 × n 表格中以 k 種顏色塗色時的塗色方法總數為 $k(k-1)^{n-1}$

二、在 2 × n 表格中以 k 種顏色塗色時的塗色方法總數為 $k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

三、在 3 × n 表格($n≥3$)中以 k 種顏色塗色時的塗色方法總數為

$$\frac{\lambda_1 - a + b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)}(\lambda_2 x_3 - a x_3 - b y_3){\lambda_1}^{n-3} + \frac{\lambda_2 - a + b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)}(a x_3 - \lambda_1 x_3 + b y_3){\lambda_2}^{n-3}$$

四、在 $4 \times n$ 表格中以 k 種顏色塗色時的塗色方法總數即為下列 n 個矩陣乘開後，

矩陣內各個元素之總和

$$M^{n-1}\begin{pmatrix} k(k-1) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2) \\ k(k-1)(k-2)(k-3) \end{pmatrix}$$

五、在 $1 \times n$ 環形表格中以 k 種顏色塗色時的塗色方法數如下：

若 $n=1$，共有 k 種塗色方法

若 $n>1$，共有$(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$種塗色方法

六、在 $2 \times n$ 環形表格中以 k 種顏色塗色時的塗色方法數如下：

當 $n=1$ 時，共有 $k(k-1)$種塗色方法

當 $n>1$ 時，共有 $c_n+d_n+e_n+g_n$ 種塗色方法，其中:

$a_n=c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1}+g_{n-1}$

$b_n=(k-2)c_{n-1}+(k-3)d_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

$c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1}$

$d_n=(k-2)a_{n-1}+(k-3)b_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

$e_n=(k-2)a_{n-1}+(k-2)b_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

$f_n=(k-2)b_{n-1}+(k-2)c_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)e_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

$g_n=(k-2)(k-3)a_{n-1}+(k-3)^2b_{n-1}+(k-2)(k-3)c_{n-1}+(k-3)^2d_{n-1}+(k-3)^2e_{n-1}+$

$(k-3)^2f_{n-1}+(k^2-7k+13)g_{n-1}$

$a_n+b_n+c_n+d_n+e_n+f_n+g_n=k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

$a_2=0$

$b_2=0$

$c_2=k(k-1)$

$d_2=k(k-1)(k-2)$

$e_2=k(k-1)(k-2)$

$f_2=0$

$g_2=k(k-1)(k-2)(k-3)$

柒、未來展望

一、可以進一步研究 $m \times n$ 矩形表格及環形表格的塗色方法數。

二、可以將此問題推廣至三維立體空間。

三、未來可以將矩陣塗色問題的方法和數學通式應用在電路板設計，像是多層電路板或是通道佈線。或是在顯示器設計像素點（pnxel）的顏色排列需避免相鄰像素的顏色干擾等。

捌、參考資料

[1]劉奎佑、郭孟修(西元 2013)。著色問題推廣討論。排列組合小論文，2013

[2]羅驥韡(西元 2009)。舊的塗色問題。龍騰數亦優，10，26-34

[3] Gilbert Strang(2006). Linear Algebra and Its Applications(4th ed.).Cengage.

【評語】050412

本作品研究 m×n 的格子點以 k 種顏色著色的方法數,其中要求相鄰不同色。m=1,2 的情況簡單，且已在文獻中有全面的結果，因此本作品的貢獻在於解出 m=3,4 的情況。然而作者的解法算是相當典型: 先依據幾個特殊的格子點同色與否,直觀的將問題分成很多類，並通過直接計算加總得到解的線性遞迴式，並得到通解。此外，作者把最左欄和最右欄黏合在一起，形成環形格子點，也解出此時 m=1,2 的著色方法數，但此部分的結果同樣也只需經通要直觀分類，即可得到解答，也不是太困難的推廣。整體來說，作者很辛苦地用初等方法試圖 P_n*P_m, C_n*P_m 上的 chromatic polynomials, 硬討論但是沒有辦法給出一般的結果。但是作品說明書之撰寫清楚易懂，實屬難得。

作品海報

好色之徒——涂色方法研究

摘要

本研究以排列組合的矩形表格塗色問題為出發點：「k種顏色，$m\times n$的矩形棋盤方格，將上的每一格塗一個顏色，要求任意相鄰兩格顏色不能相同，共有幾種塗色方法？」首先，從$1\times n$、$2\times n$表格開始研究，接著往上延伸至$3\times n$。面臨複雜度的增加時，我們提出新的分類方式，考量各種情況，推導出遞迴關係式後，再以矩陣對角化的方式推導出$3\times n$塗色公式的一般式。在研究$4\times n$表格的塗色公式時，我們提出以「行」為單位的分類法來推導其塗色方法數公式，再以矩陣的形式呈現。後續透過觀察原有矩形表格分類，延伸探討頭尾相接的環形表格，推導出$1\times n$和$2\times n$的環形表格塗色方法數公式。

壹、研究動機

上數學課時，我們發現了一個有趣的排列組合題目：「有一個2×2的矩形表格，共有5種顏色，每一格都必須塗一種顏色，但是相鄰格子的顏色不能相同，請問共有多少種塗色方法？」對於此題目，我們可以透過窮舉法或逐步討論得出最終塗色方法數，但表格更大時將使推導過程更加複雜。因此，我們也進一步思考在是否存在一個通用的公式，可以直接得出塗色方法數。這個想法引發了我們的好奇，並使我們展開了研究。

貳、研究目的

一、推導$1\times n$表格和$2\times n$表格的塗色方法數公式。
二、推導$3\times n$之塗色方法數遞迴公式及一般式。
三、推導$4\times n$之塗色方法數遞迴公式。
四、推導環形$1\times n$及$2\times n$表格之塗色方法數公式。

參、研究過程與方法

一、研究問題

如圖1，有k種顏色，以及一個$m\times n$的矩形棋盤方格，將棋盤上的每一格塗一個顏色，若要求任兩相鄰兩格顏色不能相同，求共有幾種塗色方法？(其中m為列數、n為行數且k, m, n皆為正整數)

n行

m列

A_1	A_2	A_3	…	A_n
B_1	B_2	B_3	…	B_n
C_1	C_2	C_3	…	C_n
D_1	D_2	D_3	…	D_n
…	…	…	…	…

圖1 (作者群製)

二、$1\times n$表格塗色方法數

定理1：若有k個顏色可選擇，表格大小為$\mathbf{1\times n}$ (1為列數、n為行數)時，共有$k(k-1)^{n-1}$種塗色方法(其中k、n為正整數)

【證明】：將表格由左往右依序塗色，第一格有k種顏色可選擇，而往後的每一格只要與左邊格子顏色不同即可，故第二格有$k-1$種顏色可選擇，第三格有$k-1$種顏色可選擇，依此類推，因此整個表格共有$k(k-1)^{n-1}$種塗色方法

三、$2\times n$表格塗色方法數

定理2：若有k個顏色可選擇，表格大小為$\mathbf{2\times n}$ (2為列數、 n為行數)時共有$k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$種塗色方法(其中k、n為正整數)

【證明】：依序塗第一行、第二行、第三行，…可發現表格為2×1、 2×2、 2×3…時的塗色方法數分別為：
$k(k-1)$、$k(k-1)(k^2-3k+3)$、$k(k-1)(k^2-3k+3)^2$ 、…，故可推得表格為$2\times n$ 時的塗色方法數公式為$k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

四、$3\times n$表格塗色方法數

引理1：設有k個顏色可選擇，在$\mathbf{3\times 2}$的表格塗色問題中：
若A_2和C_2顏色相同，則有$k(k-1)(k^3-5k^2+10k-7)$種塗色方法。
若A_2和C_2顏色不同，則有$k(k-1)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。

A_1	A_2
B_1	B_2
C_1	C_2

圖 2 (作者群製)

【證明】：A_2和C_2顏色相同時可分為兩種情況：
第一種：A_2和C_2和B_1的顏色皆相同，共有$k(k-1)^3$種塗色方法。
第二種：A_2和C_2的顏色相同，但和B_1不同，共有$k(k-1)(k-2)^3$種塗色方法。
因此，A_2和C_2相同時總共有$k(k-1)(k^3-5k^2+10k-7)$種塗色方法。根據定理2，
當A_2和C_2不同時有$k(k-1)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。

引理2：當表格大小為$\mathbf{3\times 3}$時，共有$k(k-1)(k^7-11k^6+55k^5-161k^4+298k^3-350k^2+244k-79)$種塗色方法。

【證明】：表格大小為3×3時的塗色方法數可根據A_3,B_2,C_3這三格的顏色分為五種情況：
第一種：A_3和B_2和C_3的顏色皆相同，共有$k(k-1)^2(k^2-3k+3)^2$種塗色方法。
第二種：A_3和B_2的顏色相同，但和C_3不同，共有$k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2$種塗色方法。
第三種：B_2和C_3的顏色相同，但和A_3不同，共有$k(k-1)(k-2)^2(k^2-3k+3)^2$種塗色方法。
第四種：A_3和C_3的顏色相同，但和B_2不同，這種情況需再細分成兩類情形來討論：
第一類： A_2和C_2顏色相同，共有$k(k-1)(k-2)^2(k^3-5k^2+10k-7)$種塗色方法。
第二類：A_2和C_2顏色不同，共有$k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。
第五種：A_3和B_2和C_3的顏色皆互不相同，這種情況也需再細分成兩類情形來討論：
第一類： A_2和C_2顏色相同，共有$k(k-1)(k-2)(k-3)^2(k^3-5k^2+10k-7)$種方法。
第二類：A_2和C_2顏色不同，這種情況需再細分成兩個狀況來討論：
第一個：A_3和C_2顏色相同，共有$k(k-1)(k-2)(k-3)(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。
第二個：A_3和C_2顏色不同，共有$k(k-1)(k-3)^3(k^4-7k^3+20k^2-28k+16)$種塗色方法。
由上述五種分類可得，其中表格大小為3×3時的塗色方法總數就是以上五種分類的方法數加總，化簡後，共有$k(k-1)(k^7-11k^6+55k^5-161k^4+298k^3-350k^2+244k-79)$種塗色方法。

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

圖 3 (作者群製)

引理3：設有k個顏色可選擇，在$\mathbf{3\times 3}$的表格塗色問題中
若A_3和C_3顏色相同，則有$k^8-11k^7+55k^6-160k^5+291k^4-329k^3+212k^2-59k$種塗色方法。
若A_3和C_3顏色不同，則有$k^9-13k^8+77k^7-271k^6+619k^5-939k^4+923k^3-535k^2+138k$種塗色方法。

【證明】：由引理2的五種分類可得。

引理4：當有k個顏色可選擇，表格大小為$\mathbf{3\times n}$ (n為大於3的正整數)時，設$3\times n$表格的塗色方法總數為x_n+y_n，其中x_n為A_n和C_n顏色相同時的塗色方法數，y_n為A_n和C_n顏色不同時的塗色方法數，則有以下關係式：
$x_n=(k^2-3k+3)x_{n-1}+(k^2-4k+5)y_{n-1}$
$y_n=(k^3-6k^2+13k-10)x_{n-1}+(k^3-6k^2+14k-13)y_{n-1}$

【證明】：

根據引理2的五種分類，可以相同的分類及塗色方式列出遞迴方程式如下：

$x_n=(k^2-3k+3)x_{n-1}+(k^2-4k+5)y_{n-1}$

$y_n=(k^3-6k^2+13k-10)x_{n-1}+(k^3-6k^2+14k-13)y_{n-1}$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	…	A_{n-1}	A_n
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	…	B_{n-1}	B_n
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	…	C_{n-1}	C_n

圖4 (作者群製)

最後，整理引理4的遞迴式：令$a=k^2-3k+3,\ b=k^2-4k+5,\ c=k^3-6k^2+13k-10,\ d=k^3-6k^2+14k-13$

整理得$x_n=ax_{n-1}+by_{n-1}$，$y_n=cx_{n-1}+dy_{n-1}$

此時可將其寫成矩陣形式 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$，即故有 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_{n-2}\\y_{n-2}\end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$

為了化簡$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}$，於是我們使用了矩陣對角化的方式，先解$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$的特徵方程式。

令t為此矩陣的特徵值，有$\begin{vmatrix}a-t&b\\c&d-t\end{vmatrix}=0$，$t=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$，令$\lambda_1=\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$, $\lambda_2=\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$($\lambda_1,\lambda_2$為矩陣特徵值)

令v_1,v_2分別為對應λ_1,λ_2的特徵向量，有以下方程式：$\begin{pmatrix}a-\lambda_1&b\\c&d-\lambda_1\end{pmatrix}v_1=0,\begin{pmatrix}a-\lambda_2&b\\c&d-\lambda_2\end{pmatrix}v_2=0$

各取一解$v_1=\begin{pmatrix}b\\\lambda_1-a\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}b\\\lambda_2-a\end{pmatrix}$，即可列出以下等式：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-3}&0\\0&\lambda_2^{n-3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}\text{故}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-3}=$$

$$\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-3}&0\\0&\lambda_2^{n-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&b\\\lambda_1-a&\lambda_2-a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1^{n-3}+\frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^{n-3} & \frac{-b}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1^{n-3}+\frac{b}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^{n-3}\\ \frac{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\lambda_1^{n-3}+\frac{(\lambda_2-a)(a-\lambda_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\lambda_2^{n-3} & \frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1^{n-3}+\frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^{n-3}\end{pmatrix}$$

代回原遞迴式化簡後可得$3\times n$塗色數量公式即為$x_n+y_n=\frac{\lambda_1-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2x_3-ax_3-by_3)\lambda_1^{n-3}+\frac{\lambda_2-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(-\lambda_1x_3+ax_3+by_3)\lambda_2^{n-3}$，其中$a=k^2-3k+3,\ b=k^2-4k+5$

$x_3=k^8-11k^7+55k^6-160k^5+291k^4-329k^3+212k^2-59k$

$y_3=k^9-13k^8+77k^7-271k^6+619k^5-939k^4+923k^3-535k^2+138k$

$\lambda_1=[k^3-5k^2+11k-10+(k^6-10k^5+43k^4-102k^3+145k^2-124k+56)^{0.5}]/2$

$\lambda_2=[k^3-5k^2+11k-10-(k^6-10k^5+43k^4-102k^3+145k^2-124k+56)^{0.5}]/2$。

定理3：若有k個顏色可選擇，表格大小為$\mathbf{3\times n}$ (3為列數、n為行數，且$n\geq3$，其中k和n皆為正整數)時共有$\frac{\lambda_1-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2x_3-ax_3-by_3)\lambda_1^{n-3}+\frac{\lambda_2-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(-\lambda_1x_3+ax_3+by_3)\lambda_2^{n-3}$種塗色方法。

五、$4\times n$表格塗色方法數

引理5：在$4\times n$表格塗色問題中，可將每一行（$i\leq n$, i為正整數)的塗色方法分成以下五種情形：

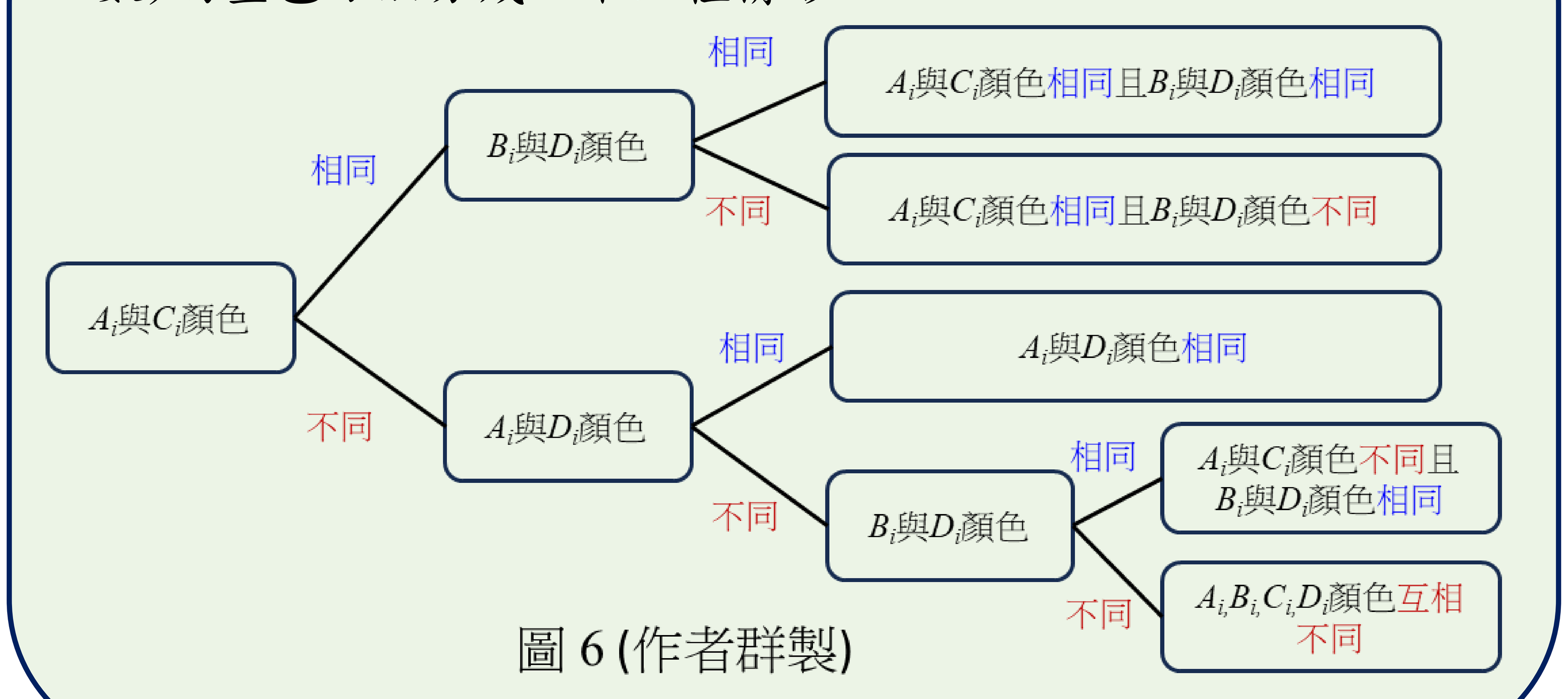

圖 6 (作者群製)

接著，根據引理5，在塗$4\times n$表格時，第i行可分為5種情況，第$i+1$行也可以分為5種情況(i為正整數)，如圖6所示，我們將分別討論第i行的5種情況會使第$i+1$行分別有多少種塗色方法。

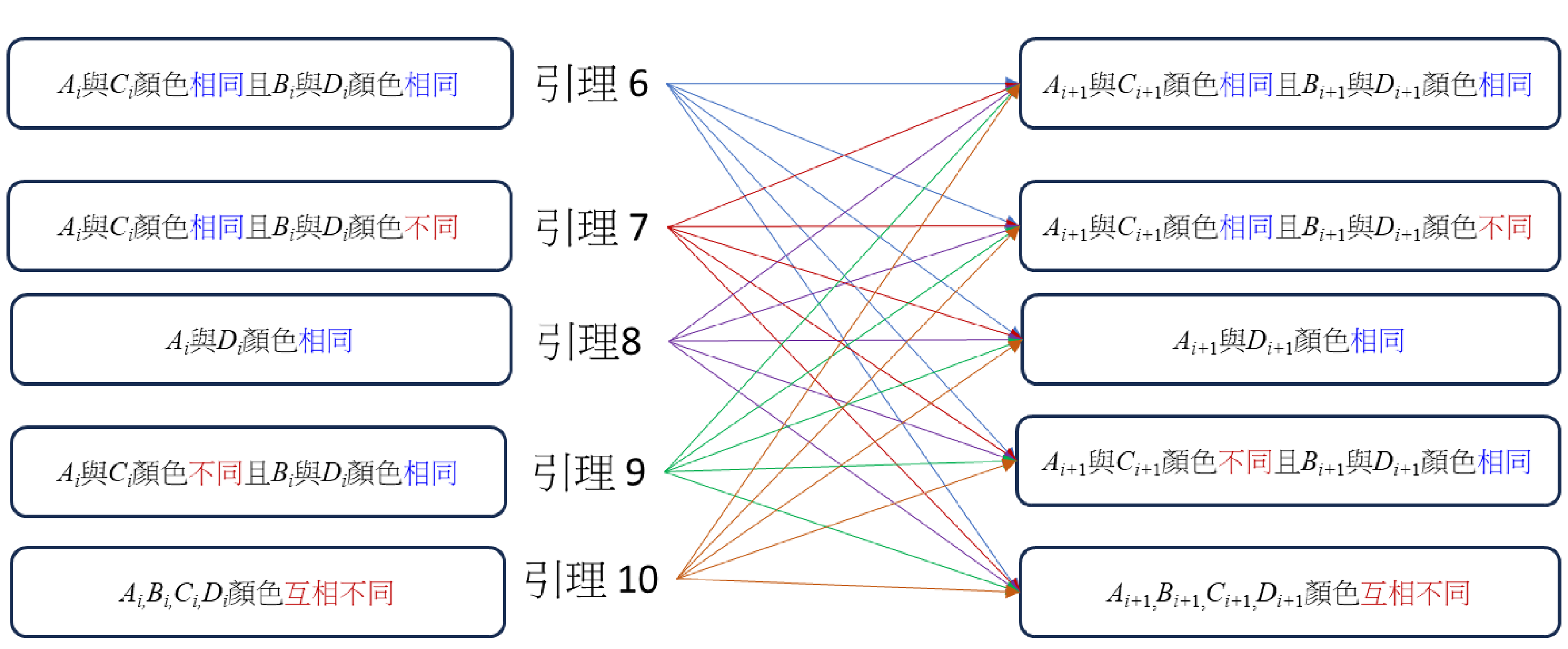

圖 7(作者群製)

在塗$4\times n$表格時，第i-1行可分為5種情況，第i行也可以分為5種情況(i為正整數)，這兩行共可產生25種組合，如表1所示。我們將分別討論第i-1行的5種情況會使第i行分別有多少種塗色方法。將25種情況分別討論過後，我們將結果以表格呈現，如表1所示。

第i行顏色關係 / 第$i+1$行顏色關係	A_i與C_i顏色相同，且B_i與D_i顏色相同	A_i與C_i顏色相同，且B_i與D_i顏色不同	A_i與D_i顏色相同	A_i與C_i顏色不同，B_i與D_i顏色相同	A_i、B_i、C_i、D_i四個格子顏色互不相同
A_{i+1}與C_{i+1}顏色相同，且B_{i+1}與D_{i+1}顏色相同	k^2-3k+3	k^2-4k+5	k^2-5k+7	k^2-4k+5	k^2-5k+8
A_{i+1}與C_{i+1}顏色相同，B_{i+1}與D_{i+1}顏色不同	$k^3-6k^2+13k-10$	$k^3-6k^2+14k-13$	$k^3-7k^2+18k-17$	$k^3-7k^2+18k-16$	$k^3-7k^2+19k-20$
A_{i+1}與D_{i+1}顏色相同	$k^3-7k^2+17k-14$	$k^3-7k^2+18k-17$	$k^3-6k^2+14k-13$	$k^3-7k^2+18k-17$	$k^3-7k^2+19k-20$
A_{i+1}與C_{i+1}顏色不同，B_{i+1}與D_{i+1}顏色相同	$k^3-6k^2+13k-10$	$k^3-7k^2+18k-16$	$k^3-7k^2+18k-17$	$k^3-6k^2+14k-13$	$k^3-7k^2+19k-20$
A_{i+1}、B_{i+1}、C_{i+1}、D_{i+1}四個格子的顏色互不相同	$k^4-10k^3+39k^2-70k+48$	$k^4-10k^3+40k^2-77k+60$	$k^4-10k^3+40k^2-77k+60$	$k^4-10k^3+40k^2-77k+60$	$k^4-10k^3+41k^2-84k+73$

表1(作者群製)

可得出第i行和第$i+1$行之間的遞迴關係，以矩陣形式表示，並令其為M，則$M=$

$$\begin{pmatrix}k^2-3k+3&k^2-4k+5&k^2-5k+7&k^2-4k+5&k^2-5k+8\\k^3-6k^2+13k-10&k^3-6k^2+14k-13&k^3-7k^2+18k-17&k^3-7k^2+18k-16&k^3-7k^2+19k-20\\k^3-7k^2+17k-14&k^3-7k^2+18k-17&k^3-6k^2+14k-13&k^3-7k^2+18k-17&k^3-7k^2+19k-20\\k^3-6k^2+13k-10&k^3-7k^2+18k-16&k^3-7k^2+18k-17&k^3-6k^2+14k-13&k^3-7k^2+19k-20\\k^4-10k^3+39k^2-70k+48&k^4-10k^3+40k^2-77k+60&k^4-10k^3+40k^2-77k+60&k^4-10k^3+40k^2-77k+60&k^4-10k^3+41k^2-84k+73\end{pmatrix}$$

定理4：在$\mathbf{4\times n}$表格中以k種顏色塗色時的塗色方法總數即為下列矩陣乘開後，矩陣內各個元素之總和。(其中 k 和 n 為正整數)

$$M^{n-1}\begin{pmatrix}k(k-1)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)(k-3)\end{pmatrix}$$

A_i	A_{i+1}
B_i	B_{i+1}
C_i	C_{i+1}
D_i	D_{i+1}

圖7(作者群製)

六、$1\times n$環形塗色方法數

定理5：我們延伸將表格轉成環形，若將$\mathbf{1\times n}$的表格頭尾相接，形成一個環形表格，在每個格子中都塗一種顏色，使所有相鄰格子不同色(此時A_1和A_n的顏色也要不一樣)，若有k種顏色可以選擇(其中n和k皆為正整數)，則塗色方法數如下：

$n=1$時：有k種塗色方法，

$n>1$時：有$(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$種塗色方法

【證明】：設有n格時的塗色方法數為S_n，則易得到：$S_1=k, S_2=k(k-1), S_3=k(k-1)(k-2)$，觀察$S_r$($r$為大於三的任意正整數)假設$A_1$和$A_r$，並無限制必須塗不同顏色，則其塗色方法即為$1\times r$表格之塗色方法，根據定理1，共有$k(k-1)^{r-1}$種塗色方法。在此前提下，若$A_1$和$A_r$顏色相同，可將這兩格視為同一格，其塗色方法數即可視為S_{r-1}。

由上述假設可得：$S_r=k(k-1)^{r-1}-S_{r-1}$(r為大於3的正整數)，因此有：

$S_r=k(k-1)^{r-1}-S_{r-1}=k(k-1)^{r-1}-〔k(k-1)^{r-2}-S_{r-2}〕$

$=k(k-1)^{r-1}-k(k-1)^{r-2}+〔k(k-1)^{r-3}-S_{r-3}〕=\ldots$

故當r為奇數時：

$S_r=k(k-1)^{r-1}-k(k-1)^{r-2}+k(k-1)^{r-3}\ldots-k(k-1)^3+S_3$

$=(k-1)^r-(k-1)^3+S_3=(k-1)^r-(k-1)$

同理，當r為偶數時：

$S_r=k(k-1)^{r-1}-k(k-1)^{r-2}+k(k-1)^{r-3}\ldots+k(k-1)^3-S_3=(k-1)^r+(k-1)$，

由上述算式整理後可得到S_n的塗色公式：

若$n=1$，則$S_n=k$，若$n>1$，則$S_n=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$

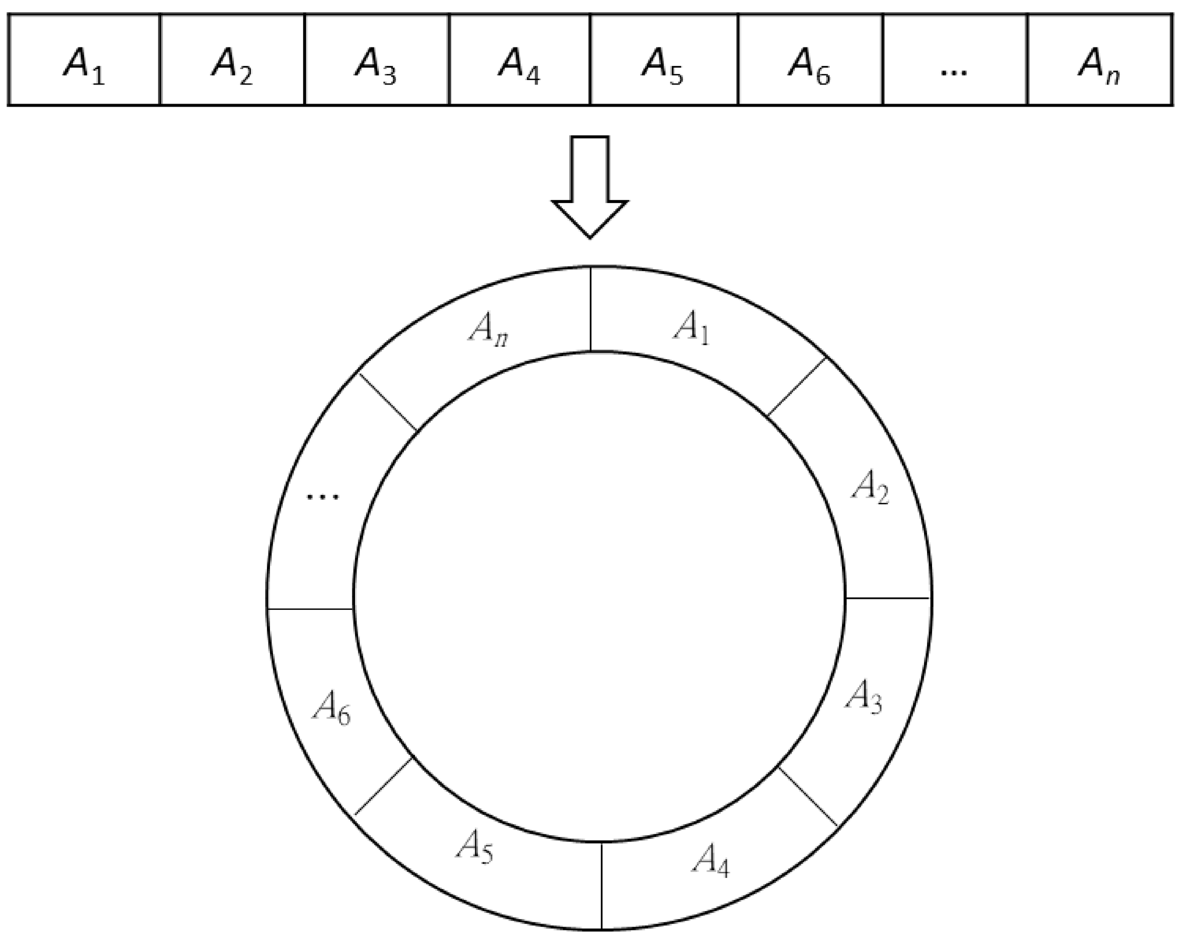

圖 8 (作者群製)

七、$2\times n$環形塗色方法數

定理6：若將**$2\times n$的表格頭尾相接**，形成一個環形表格，在每個格子中都塗一種顏色，使所有相鄰格子不同色(此時A_1和A_n的顏色要不一樣，B_1和B_n的顏色也要不一樣)，若有k種顏色可以選擇(其中n和k皆為正整數)，則塗色方法數如下：

設一個七元遞迴式如下：

$a_2=0, b_2=0, c_2=k(k-1), d_2=k(k-1)(k-2), e_2=k(k-1)(k-2), f_2=0, g_2=k(k-1)(k-2)(k-3)$,

$\boldsymbol{a_n}=c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1}+g_{n-1}$, $\boldsymbol{b_n}=(k-2)c_{n-1}+(k-3)d_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$, $\boldsymbol{c_n}=a_{n-1}+b_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1}$,

$\boldsymbol{d_n}=(k-2)a_{n-1}+(k-3)b_{n-1}+(k-2)e_{n-1}+(k-2)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$, $\boldsymbol{e_n}=(k-2)a_{n-1}+(k-2)b_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)f_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$

$\boldsymbol{f_n}=(k-2)b_{n-1}+(k-2)c_{n-1}+(k-2)d_{n-1}+(k-3)e_{n-1}+(k-3)g_{n-1}$,

$\boldsymbol{g_n}=(k-2)(k-3)a_{n-1}+(k-3)^2b_{n-1}+(k-2)(k-3)c_{n-1}+(k-3)^2d_{n-1}+(k-3)^2e_{n-1}+(k-3)^2f_{n-1}+(k^2-7k+13)g_{n-1}$,

$a_n+b_n+c_n+d_n+e_n+f_n+g_n=k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$，$2\times n$表格的塗色方法數為$c_n+d_n+e_n+g_n$

【證明】：先觀察並討論$2\times n$表格塗色方法：

已知A_n的顏色有三種可能，分別是和A_1相同；和B_1相同；和A_1,B_1皆不同，同理，B_n的顏色也有三種可能，分別是和A_1相同；和B_1相同；和A_1,B_1皆不同，但A_n和B_n的顏色不能相同，因此可將$2\times n$表格塗色方法分7種情況，並分別假設塗色方法個數：

第一種：若A_n和A_1的顏色相同，且B_n和B_1的顏色相同，塗色方法數為a_n

第二種：若A_n和A_1的顏色相同，且B_n和A_1,B_1的顏色皆不同，塗色方法數為b_n

第三種：若A_n和B_1的顏色相同，且B_n和A_1的顏色相同，塗色方法數為c_n

第四種：若A_n和B_1的顏色相同，且B_n和A_1,B_1的顏色皆不同，塗色方法數為d_n

第五種：若A_n和A_1,B_1的顏色皆不同，且B_n和A_1的顏色相同，塗色方法數為e_n

第六種：若A_n和A_1,B_1的顏色皆不同，且B_n和B_1的顏色相同，塗色方法數為f_n

第七種：若A_n和A_1,B_1的顏色皆不同，且B_n和A_1,B_1的顏色皆不同，塗色方法數為g_n

$a_n+b_n+c_n+d_n+e_n+f_n+g_n=k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

2×2塗色方法中，可得到$a_2\sim g_2$為：$a_2=0, b_2=0, c_2=k(k-1), d_2=k(k-1)(k-2)$,

$e_2=k(k-1)(k-2), f_2=0, g_2=k(k-1)(k-2)(k-3)$，由上述可得：

當$n=1$時，環形塗色方式共有$k(k-1)$種。

當$n>1$時，由前面的遞迴公式可分別得到$a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n$，而$2\times n$環形塗色方式數量即為$2\times n$表格的塗色方法數扣掉所有$A_1$和$A_n$顏色相同及$B_1$和$B_n$顏色相同的情形(即$a_n+b_n+f_n$)，故$2\times n$環形塗色的方法數為$c_n+d_n+e_n+g_n$。

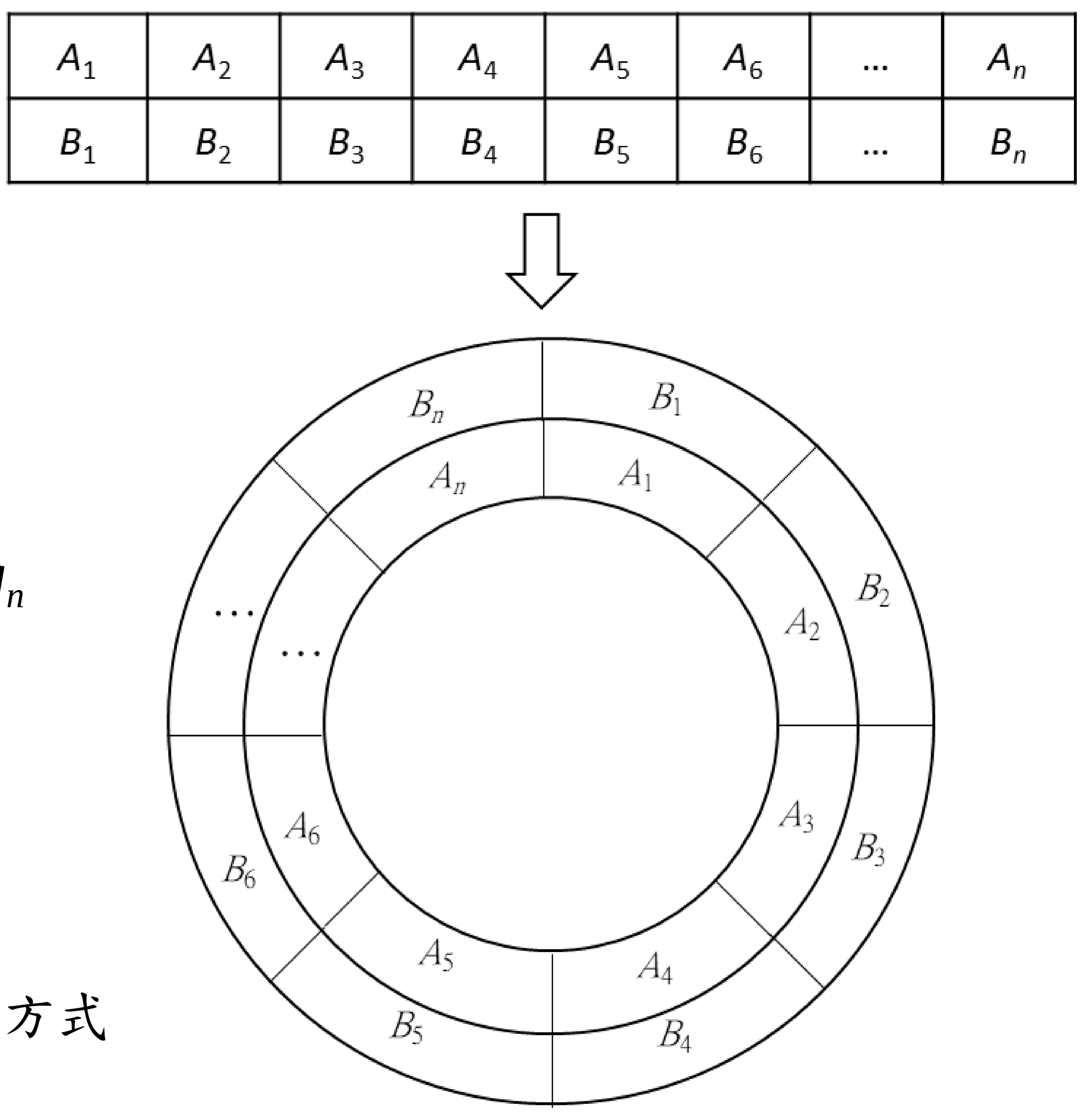

圖 9(作者群製)

肆、研究結果

一、在$1\times n$表格中以k種顏色塗色時的塗色方法總數為$k(k-1)^{n-1}$

二、在$2\times n$表格中以k種顏色塗色時的塗色方法總數為$k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$

三、在$3\times n$表格($n\geq 3$)中以k種顏色塗色時的塗色方法總數為

$$\frac{\lambda_1-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2x_3-ax_3-by_3)\lambda_1^{\,n-3}+\frac{\lambda_2-a+b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(ax_3-\lambda_1x_3+by_3)\lambda_2^{\,n-3}$$

四、在$4\times n$表格中以k種顏色塗色時的塗色方法總數即為下列n個矩陣乘開後，矩陣內各個元素之總和為 $M^{n-1}\begin{pmatrix}k(k-1)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)\\k(k-1)(k-2)(k-3)\end{pmatrix}$

五、在$1\times n$環形表格中以k種顏色塗色時的塗色方法數如下：

若$n=1$，共有k種塗色方法

若$n>1$，共有$(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$種塗色方法

六、在$2\times n$環形表格中以k種顏色塗色時的塗色方法數如下：

當$n=1$時，共有$k(k-1)$種塗色方法

當$n>1$時，共有$c_n+d_n+e_n+g_n$種塗色方法

伍、未來展望

一、可以進一步研究$m\times n$矩形表格及環形表格的塗色方法數。

二、可以將此問題推廣至三維立體空間。

三、未來可以將矩陣塗色問題的方法和數學通式應用在電路板設計，像是多層電路板或是通道佈線。或是在顯示器設計像素點（pixel）的顏色排列需避免相鄰像素的顏色干擾等。

陸、參考資料

[1]劉奎佑、郭孟修(西元2013)。著色問題推廣討論。排列組合小論文，2013

[2]羅驥韡(西元2009)。舊的塗色問題。龍騰數亦優，10，26-34。

[3] Gilbert Strang(2006). Linear Algebra and Its Applications (4th ed.).Cengage.