中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050411

探討翻硬幣問題在不同規則下的完全翻面條件

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳振佑 高二 吳柏辰 高二 賴宥翔	江國宏

關鍵詞：翻硬幣、組合、編碼

摘要

本研究源自2023 IMO Shortlist C1，探討在 m×n 棋盤中以2×2子格進行特定硬幣翻轉，目標為全盤朝上。我們首先證明僅當 m 或 n 為3的倍數時操作才可行，並將規則推廣至任意 k ×k 子格，得出需滿足 3(k−1) 整除 m 或 n 的條件。進一步研究斜排與階梯形翻轉，發現僅特定形式的 m 與 n 可行，對於更一般的 k 與盤面結構，目前僅能歸納推論，缺乏嚴謹證明。本研究驗證不同棋盤與翻轉規則的可行性，並提供多種構造解，未來將拓展至高維棋盤與最小操作次數等議題。

壹、研究動機

在練習2023 IMO Shortlist題目時，我們發現C1的題目很特別，題目為：在$m \times n$方格中，選取任意2×2方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則m、n須滿足甚麼條件。我們解完這題後，認為這題很有趣，於是就將此題延伸看有什麼其他的結果。

貳、研究目的

1.解決原題

2.將原題延伸至選取$k \times k$方格

3.延伸至選取斜排

4.延伸至階梯型

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦

肆、研究過程與方法

原題：在$m \times n$方格中，選取任意2×2方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，m, n需滿足什麼條件

Answer : $3|m \cup 3|n$

可將格子編碼，任意第 i 列第 j 行$[I_{ij}] \equiv i + j - 2(mod3)$

令$T(a)$ 為格子為 a 的硬幣向上的個數

初始狀態$\mathrm{T}(0) \equiv \mathrm{T}(1) \equiv \mathrm{T}(2)(\mathrm{mod}2)$

無論如何選取，一定會選取到0、1、2的格子來翻面

pf：選取方格(i, j)、$(i + 1, j)$、$(i, j + 1)$、$(i + 1, j + 1)$

必選方格(i, j)：令$[I_{ij}] \equiv a(mod3), 0 \le a \le 2, a \in Z$

必選方格$(i + 1, j + 1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a + 2(mod3)$

方格$(i + 1, j)$、$(i, j + 1)$擇一：$[I_{i\ j+1}] \equiv a + 1(mod3)$

$[I_{i+1\ j}] \equiv a + 1(mod3)$

因此必選到 0、1、2 的格子各一格

⇒ 不論如何操作，操作結束後$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$

討論：$i. m \equiv n \equiv 1(mod3)$時，$T(0) - 1 \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$

$ii. m \equiv 1 \wedge n \equiv 2\ (mod3)$或$m \equiv 2 \wedge n \equiv 1\ (mod3)$時，

$T(0) - 1 \equiv T(1) - 1 \equiv T(2)\ (mod2)$

$iii. m \equiv n \equiv 2\ (mod3)$時，$T(0) \equiv T(1) - 1 \equiv T(2)(mod2)$

$iv. m \equiv 0\ (mod3)$或$n \equiv 0\ (mod3)$時，$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)\ (mod2)$

因此只有$iv.$條件有機會是解，實際進行操作後也是如此。

作法：

1.$m \equiv 0\ (mod3)$且n為偶數

可將格子拆成3×2為單位進行以下操作，即可將所有硬幣朝上(硬幣朝下為0，朝上為1)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

2.$m \equiv 0 (mod3)$且n為奇數

先看成$m \times (n-1)$處理，此時$(n-1)$為偶數，因此可用1.的作法讓硬幣全部朝上，再以包含最後一行每3×2為一單位進行以下操作，即可將所有硬幣朝上

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

3.$n \equiv 0\ (mod3)$

作法與$m \equiv 0\ (mod3)$相同

（二）延伸原題規則

1.在$m \times n$方格中，選取任意3×3方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則 m 、n須滿足條件$6|m \cup 6|n$

定理1.1.1: 將格子編號，任意第 i 列第 j 行

令$T_{pq}(a)$為滿足$i \equiv p, j \equiv q(mod2)(p,q \in N0 \le p,q \le 1)$的$[I_{ij}]$，且格子為$a$硬幣向上的個數，若要在執行操作後，使所有硬幣向上，操作過程滿足

$T_{pq}(0) \equiv T_{pq}(1) \equiv T_{pq}(2)(mod2)$ (p,q)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)

pf： 選3×3格子$(2x+p,2y+q),(2x+p,2y+q),(2x+p+2,2y+q),$

$$(2x+p,2y+q+1),(2x+p+1,2y+q+1),(2x+p+2,2y+q+1),$$
$$(2x+p,2y+q+2),(2x+p+1,2y+q+2),(2x+p+2,2y+q+2)$$

必選$(2x+p,2y+q)$

$i \equiv p, j \equiv q(mod2)$

$[I_{ij}] = [(2x+p-1)/2] + [(2y+q-1)/2] \equiv x+y+[(p-1)/2]+[(q-1)/2](mod3)$

必選$(2x+p+2,2y+q+2)$

$i \equiv p \equiv p+2, j \equiv q \equiv q+2(mod2)$

$[I_{ij}] = [(2x+p+1)/2] + [(2y+q+1)/2]$

$\equiv x+y+[(p-1)/2]+[(q-1)/2]+2(mod3)$

方格$(2x+p,2y+q+2),(2x+p+2,2y+q)$擇一

$i \equiv p \equiv p+2, j \equiv q \equiv q+2(mod2)$

$[I_{ij}] \equiv x+y+[(p-1)/2]+[(q-1)/2]+1(mod3)$

$\Rightarrow$ 必翻到格子0,1,2的硬幣各一次，且三格p,q相同

$\Rightarrow$ 若存在操作方法能使硬幣全部向上的條件為假設全部向上(操作結束)時

$T_{pq}(0) \equiv T_{pq}(1) \equiv T_{pq}(2)(mod2)$

定理1.1.2：6|m 或 6|n時滿足$T_{pq}(0) \equiv T_{pq}(1) \equiv T_{pq}(2)(mod2)$，其他餘數的情況不滿足

令$(p0,q0)$為(m,n)模6的餘數$(1 \le p0,q0 \le 5)$

$(p0,q0) =$

$i.(1,1)$：$T_{11}(0)-1 \equiv T_{11}(2)(mod2)$

$ii.(1,2\sim5)$：$T_{10}(2)+1 \equiv T_{10}(0)(mod2)$

$iii.(2\sim5,1\sim2)$：$T_{01}(2)+1 \equiv T_{01}(0)(mod2)$

$iv.(2\sim5,3\sim4)$：$T_{01}(1)-1 \equiv T_{01}((0)(mod\ 2)$

$v.(2\sim5,5)$：$T_{00}(1)-1 \equiv T_{00}(0)(mod\ 2)$

$vi.$ 6|m或6|n時滿足以上條件，選取任意6×1方格

必滿足$T_{p0}(0) \equiv T_{p0}(1) \equiv T_{p0}(2)(mod\ 2)$

或$T_{p1}(0) \equiv T_{p1}(1) \equiv T_{p1}(2)(mod\ 2)$

以上結果鏡射後相同

> 定理 1.1.3：存在作法將1×6或6×1的硬幣全部翻面

作法構造：

1.$m \equiv 0\ (mod\ 6\ )$

將格子用上述的p、q分類

(1) $p=0$、$q=0$

先以每3列、2行為一單位進行以下操作

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & 0\\\hline & & \\\hline 0 & & 0\\\hline & & \\\hline 0 & & 0\\\hline & & \\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 0 & & 1\\\hline & & \\\hline 0 & & 0\\\hline & & \\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline\end{array}$$

若剩下一行，則與相鄰一行每6列為一單位進行以下操作

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 0\\\hline & & \\\hline 1 & & 0\\\hline & & \\\hline 1 & & 0\\\hline & & \\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 0\\\hline & & \\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 0 & & 0\\\hline & & \\\hline 1 & & 0\\\hline & & \\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline 1 & & 1\\\hline & & \\\hline\end{array}$$

(2)其他p,q分類作法與上述相同

2.$n \equiv 0\ (mod\ 6)$

作法與$m\ \equiv\ 0\ (mod\ 6)$相同

2. 在$m \times n$方格中，選取任意$k \times k$方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則 m、n須滿足條件$3(k-1)|m \cup 3(k-1)|n$

定理1.2.1：將格子編號成

$[I_{ij}] \equiv [(i-k+2)/(k-1)]\ +\ [(j-k+2)/(k-1)]\ (mod\ 3)$

令$Tpq(a)$為滿足$i \equiv p, j \equiv q\ (mod\ (k-1))\ (p,q \in N\ 0 \leq p,q \leq (k-1))$的$[I_{ij}]$，且格子為$a$硬幣向上的個數，若要在執行操作後，使所有硬幣向上，操作過程需要滿足

$Tpq(0) \equiv Tpq(1) \equiv Tpq(2)(mod\ 2)\ (p,q) = (0,0),(0,1),(1,0),..,(k-2,k-2)$

在未執行任何操作前$Tpq(0) \equiv Tpq(1) \equiv Tpq(2)(mod2)$

無論選取哪些格子，操作必會使格子為0,1,2的格子各翻一次，且三個格子之p,q相同

pf： 選$k \times k$格子

$$\big((k-1)x+p,(k-1)y+q\big),$$

$$\big((k-1)x+p+1,(k-1)y+q\big),$$

$$\big((k-1)x+p,(k-1)y+q+1\big),\ldots,\big((k-1)x+p+(k-1),(k-1)y+q+(k-1)\big)$$

必選$\big((k-1)x+p,(k-1)y+q\big)$

$$i \equiv p, j \equiv q\ \big(mod(k-1)\big)$$

$$[I_{ij}] = \Big[\big((k-1)x+p-(k-2)\big)/(k-1)\Big] + \Big[\big((k-1)y+q-(k-2)\big)/(k-1)\Big]$$

$$\equiv x+y+\big[(p+1)/(k-1)\big]+\big[(q+1)/(k-1)\big]-2(mod3)$$

必選$\big((k-1)x+p+(k-1),(k-1)y+q+(k-1)\big)$

$$i \equiv p \equiv p+(k-1), j \equiv q \equiv q+(k-1)(mod\ (k-1))$$

$$[I_{ij}] = [((k-1)x+p+1)/(k-1)] + [((k-1)y+q+1)/(k-1)]$$

$$\equiv x+y+[(p+1)/(k-1)]+[(q+1)/(k-1)](mod\ 3)$$

方格$\big((k-1)x+p,(k-1)y+q+(k-1)\big),\big((k-1)x+p+(k-1),(k-1)y+q\big)$ 擇一

$i \equiv p \equiv p + (k-1), j \equiv q \equiv q + (k-1)(mod\ (k-1))$

$[I_{ij}] \equiv x + y + [(p+1)/(k-1)] + [(q+1)/(k-1)] - 1(mod\ 3)$

⇒ 必翻到格子0,1,2的硬幣各一次，且三格p, q相同

⇒ 若存在操作方法能使硬幣全部向上的條件為假設全部向上(操作結束)時

$Tpq(0) \equiv Tpq(1) \equiv Tpq(2)\ (mod2)$

定理1.2.2：$3(k-1)\|m$ 或 $3(k-1)\|n$時滿足以上條件，其他餘數的情況則否

pf：令(p_0,q_0)為(m,n)模3(k-1)的餘數$\left(1 \le p0, q0 \le 3\left(k-1\right)-1\right)$

$\left(p_0, q_0\right) =$

$i.\left(1{\sim}\left(k-2\right), 1{\sim}\left(k-2\right)\right)$：$T_{11}\left(0\right) - 1 \equiv T_{11}\left(2\right)\left(mod2\right)$

$ii.\left(1{\sim}\left(k-2\right), \left(k-1\right){\sim}\left(3\left(k-1\right)-1\right)\right)$：$T_{10}\left(2\right) + 1 \equiv T_{10}\left(0\right)\left(mod2\right)$

$iv.\left(k-1{\sim}3\left(k-1\right)-1, k{\sim}2\left(k-1\right)\right)$：$T_{01}\left(1\right) - 1 \equiv T_{01}\left(0\right)\left(mod2\right)$

$v.\left(k-1{\sim}3\left(k-1\right)-1, \left(2\left(k-1\right)+1\right){\sim}\left(3\left(k-1\right)-1\right)\right)$：$T_{00}\left(1\right) - 1 \equiv T_{00}\left(0\right)\left(mod2\right)$

$vi.3\left(k-1\right)\middle|m$或$3\left(k-1\right)\middle|n$時滿足以上條件，選取任意3(k-1)×1方格

必滿足

$T_{p0}\left(0\right) \equiv T_{p0}\left(1\right) \equiv T_{p0}\left(2\right)\left(mod2\right)$

$T_{p1}\left(0\right) \equiv T_{p1}\left(1\right) \equiv T_{p\,1}\left(2\right)\left(mod2\right)$

…

$T_{p\,k-2}\left(0\right) \equiv T_{p\,k-2}\left(1\right) \equiv T_{p\,k-2}\left(2\right)\left(mod2\right)$

以上結果鏡射後相同

定理1.2.3：存在作法使$3(k-1) \times 1$ 的硬幣翻面

作法構造：

1.$m \equiv 0\left(mod3(k-1)\right)$

將格子用上述的p、q分類，並以$A(i,j)$表示翻(i,j)、$(i+k,j)$、$(i+k,j+k)$的硬幣，$B(i,j)$表示翻(i,j)、$(i,j+k)$、$(i+k,j+k)$的硬幣

(1) $p=0$、$q=0$

每3列、2行一組由左往右進行操作$A(1,1)$、$B(1,2)$

若剩下最後一行，則與左邊一行每3列操作$A(1,1)$、$B(1,1)$、$A(1,2)$

(2)其他p,q分類作法與上述相同

2.$n \equiv 0 \left(mod\ 3(k-1)\right)$

作法與$m \equiv 0\left(mod3(k-1)\right)$相同

（三）選取斜排

在$m \times n$方格中，選取任意$k \times k$方格，過第一列第一行的對角線必翻，第k列與第1行或者第1列與第k行，以上任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則m
、n須滿足甚麼條件?

1.$k=3$ ，只有$8 \times n$(n為偶數)的情況存在操作方式可以將硬幣全部翻面向上

定理2.1.1：將格子編碼成

$$[I_{ij}] \equiv [\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-3](mod4)$$

令$T(a)$ 為格子為 a 的硬幣向上的個數

初始狀態：$T(0) \equiv T(1) \equiv\ T(2) \equiv T(3)\ (mod2)$

無論選取哪些格子，操作必會使格子為0、1、2、3的格子各翻一次

pf：選取3×3格子

$$(i,j)、(i,j+1)、(i,j+2)、$$
$$(i+1,j)、(i+1,j+1)、(i+1,j+2)、$$
$$(i+2,j)、(i+2,j+1)、(i,j+2)$$

必選方格(i,j)：令 $[I_{ij}] \equiv a \ (mod\ 4), 0 \le a \le 3, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a+3\ (mod\ 4)$

必選方格$(i+2,j+2)$：$[I_{i+2\ j+2}] \equiv a+6\ (mod\ 4) \equiv a+2\ (mod\ 4)$

方格$(i+2,j)$、$(i,j+2)$擇一：$[I_{i\ j+2}] \equiv a+1\ (mod\ 4)$

$$[I_{i+2\ j}] \equiv a+5\ (mod\ 4) \equiv a+1\ (mod\ 4)$$

⇒ 必翻到格子0、1、2、3的硬幣各一次

⇒ 不論如何操作，操作結束後$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) (mod 2)$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) (mod 2)$

編碼後的表格如下圖所示，我們發現它會每8列或8行循環，因此我們只需考慮8×8以內的情形。透過窮舉我們發現符合條件的方格只有$8\times 2n(n \ge 2)$和4×4。為了更好討論，由於操作皆是隔一個格子進行，我們可將格子再分成$i-j \equiv p(mod 2)(p = 0 or 1)$，同理，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T_P(0) \equiv T_P(1) \equiv T_P(2) \equiv T_P(3) (mod 2)$

0	0	1	1	2	2	3	3
2	3	3	0	0	1	1	2
1	1	2	2	3	3	0	0
3	0	0	1	1	2	2	3
2	2	3	3	0	0	1	1
0	1	1	2	2	3	3	0
3	3	0	0	1	1	2	2
1	2	2	3	3	0	0	1

性質2.1.2：將格子再分成 $i - j \equiv p(mod2)$ $(p = 0\ or\ 1)$，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T_P(0) \equiv T_P(1) \equiv T_P(2) \equiv T_P(3)(mod2)$

以下考慮4×4的情形

根據性質2.1.2，可分成兩個p進行討論，顯然$p = 1$時透過兩次操作讓硬幣皆朝上，所以我們只要考慮p=0的情形，如左下圖所示(空格中0代表硬幣朝下，1代表朝上)，經過兩次操作後得到右下圖，這個情形雖然滿足以上條件，但我們經過嘗試後發現無法解開，因此我們考慮調整一下格子的編碼來解釋這種情形。

0		0	
	0		0
0		0	
	0		0

⇒

1		1	
	1		0
0		1	
	0		0

⇒

1		1	
	0		1
0		0	
	0		1

定理2.1.3：調整格子編號，任意第 i 列第 j 行 ，

$i' \equiv i(mod2), [I_{ij}] \equiv [\frac{5}{1}i + \frac{1}{2}j - 3](mod4) + 4i'$

令$T(a)$為格子為 a 的硬幣向上的個數

初始狀態：$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4) \equiv T(5) \equiv T(6) \equiv T(7)\ (mod\ 2)$

pf：選取3×3格子

(i,j)、$(i,j+1)$、$(i,j+2)$、(i,j)、$(i+1,j+1)$、$(i+1,j+2)$、$(i+2,j)$、$(i+2,j+1)$、$(i,j+2)$

若$i \equiv 0(mod4)$

必選方格(i,j)：令$[I_{ij}] \equiv a(mod4), 0 \le a \le 3, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a + 3(mod4) + 4$

必選方格$(i+2,j+2)$：$[I_{i+2\ j+2}] \equiv a + 6(mod4) \equiv a + 2(mod4)$

方格$(i+2,j)$、$(i,j+2)$擇一：$\left[I_{i\ j+2}\right] \equiv a+1(mod4)$

$$\left[I_{i+2\ j}\right] \equiv a+5(mod4) \equiv a+1(mod4)$$

若 $i\ \equiv\ 1\ (mod\ 4)$

必選方格(i,j)：令$[I_{ij}] \equiv a(mod\ 4)+4\ \ 0 \leq a \leq 3, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$\left[I_{i+1\ j+1}\right] \equiv a+3(mod4)$

必選方格$(i+2,j+2)$：$\left[I_{i+2\ j+2}\right] \equiv a+6(mod4)+4 \equiv a+2(mod4)+4$

方格$(i+2,j)$、$(i,j+2)$擇一：$\left[I_{i\ j+2}\right] \equiv a+1(mod4)+4$

$$\left[I_{i+2j}\right] \equiv a+5(mod4)+4 \equiv a+1(mod4)+4$$

因此必選到0 or 4、1 or 5、2 or 6、3 or 7的格子各一格

⇒ 不論如何操作，操作結束後

$$T(0)+T(4) \equiv T(1)+T(5) \equiv T(2)+T(6) \equiv T(3)+T(7)(mod\ 2)$$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足

$$T(0)+T(4) \equiv T(1)+T(5) \equiv T(2)+T(6) \equiv T(3)+T(7)(mod\ 2)$$

我們使用調整編碼時發現每一次操作都會翻到固定編號組合的硬幣，可以做進一步討論，因此先找出有哪些組合

若 $i \equiv 0(mod2)$，翻到0、1、2、7四格，將此3×3選取範圍向下平移$2L$格後$(L=1,2,3)$

必選方格$(i+2L,j)$：令$[I_{ij}] \equiv a+L(mod4), 0 \leq a \leq 3, a \in Z$

必選方格$(i+1+2L,j+1)$：$\left[I_{i+1\ j+1}\right] \equiv a+6+L(mod4)+4$

必選方格$(i+4,j+2)$：$\left[I_{i+2\ j+2}\right] \equiv a+7(mod4) \equiv a+2+L(mod4)$

方格$(i+4,j)$、$(i+2,j+2)$擇一：$\left[I_{i\ j+2}\right] \equiv a+1+L(mod4)$

$$\left[I_{i+2\ j}\right] \equiv a+5+L(mod4)$$

可以出另外三組(1234),(0235),(0136)

i ≡ 1 (mod 2) 用同樣的方式可找出(0567),(1467),(2457),(3456)

因此，我們發現一次操作只會動到八種組合的編碼，分別是(0127)、(0136)、(0235)、(1234)、(0567)、(1467)、(2457)、(3456)。於是我們可以列出一個八元一次方程式分別對應0~7的7個正整數的情形

$$\vec{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\vec{a_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\vec{a_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\vec{a_4}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\vec{a_5}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\vec{a_6}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\vec{a_7}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\vec{a_8}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

引理 2.1.4：對於多元一次聯立方程式，可以使用列運算求解

(1)現在考慮4×4的情形

	0	
0		0
	0	

要使上面的硬幣全部翻面

以其中一組(0356)為例(o表示奇數，e表示偶數)(其他情況可平移)

定理 2.1.5：4×4盤面不存在翻面組合使所有硬幣翻面，等同於不存在實數解滿足這個方程

$$\sum_{k=1}^{8} x_k \vec{a_k} = \begin{pmatrix}e\\o\\o\\e\\o\\e\\e\\o\end{pmatrix}$$

pf：根據性質2.1.4，使用列運算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & o \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & o \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & o \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & o \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & o \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & o \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & o \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & o \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & o \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 & o \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & o \end{bmatrix}$$

第四列和第五列前八行的奇偶性相同，但最後一行不相同，此方程無解

平移後結果相同

(2)考慮8 $\times n$

定理2.1.6：8 $\times n$(n為奇數)盤面 不存在翻面組合使所有硬幣翻面，8 $\times n$(n為偶數)盤面存在

i. 8 $\times n$(n為奇數)

$$\begin{pmatrix} e \\ o \\ o \\ e \\ o \\ e \\ e \\ o \end{pmatrix} + \vec{a_5} + \vec{a_8} = \begin{pmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} e \\ o \\ o \\ e \\ o \\ e \\ e \\ o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

和44等價，同樣無法滿足方程，無解

ii. 8 $\times n$(n為偶數)

$$\begin{pmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \end{pmatrix} + \vec{a_5} + \vec{a_6} + \vec{a_7} + \vec{a_8} = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\\o \end{pmatrix} + \vec{a_1} + \vec{a_8} = \begin{pmatrix} e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\\e \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\\o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\\e \end{pmatrix}$$

只有$8 \times n$(n為偶數)的情況存在操作方式可以將硬幣全部翻面向上

定理2.1.7：存在作法使$8 \times n$(n為偶數)的硬幣全部翻面

作法：操作時可將不同的p各自處理，將每一組由左邊將硬幣翻轉至朝上到右邊即可。

2.$k = 4$

> 定理2.2.1：我們先將格子編碼成
>
> $[I_{ij}] \equiv [\frac{11}{3}i + \frac{1}{3}j - 4](mod5)$
>
> 令 T(a) 為格子為 a 的硬幣向上的個數
>
> 初始狀態：$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)(mod2)$
>
> 無論選取哪些格子，操作必會使格子為0、1、2、3、4的格子各翻一次

pf：選取4×4格子

(i,j)、$(i,j+1)$、$(i,j+2)$、$(i,j+3)$、

$(i+1,j)$、$(i+1,j+1)$、$(i+1,j+2)$、$(i+1,j+3)$、

$(i+2,j)$、$(i+2,j+1)$、$(i+2,j+2)$、$(i+2,j+3)$、

$(i+3,j)$、$(i+3,j+1)$、$(i+3,j+2)$、$(i+3,j+3)$

必選方格(i,j)：令$[I_{ij}] \equiv a(mod5), 0 \le a \le 3, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a+4(mod5)$

必選方格$(i+2, j+2)$：$\left[I_{i+2\ j+2}\right] \equiv a+8(mod5) \equiv a+3(mod5)$

必選方格$(i+3, j+3)$：$\left[I_{i+3\ j+3}\right] \equiv a+12 \equiv a+2(mod5)$

方格$(i+3, j)$、$(i, j+3)$擇一：$\left[I_{i\ j+3}\right] \equiv a+1(mod5)$

$$\left[I_{i+3\ j}\right] \equiv a+11(mod5) \equiv a+1(mod5)$$

⇒ 必翻到格子0、1、2、3的硬幣各一次

⇒ 不論如何操作，操作結束後 $T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)(mod2)$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 $T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)(mod2)$

> 性質2.2.2：可將格子再分成$i-j \equiv p(mod2)(p=0,1,2)$，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 $T_p(0) \equiv T_p(1) \equiv T_p(2) \equiv T_p(3) \equiv T_p(4)(mod2)$

編碼後的表格如下圖所示，我們發現它會每15列或15行循環，因此我們只需考慮15×15以內的情形。透過窮舉我們發現符合條件的方格只有$15 \times n(n \in N)$。為了更好討論，根據性質2.2.2，可將格子分成3個區塊討論

0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	4	4	4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2	2	3	3	3	4	4	4	0	0	0	1	1	1	2
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
3	3	4	4	4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3
2	2	2	3	3	3	4	4	4	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	0	0
4	4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
3	3	3	4	4	4	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	0
4	4	4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	3	3	3	4	4	4	0	0	0	1	1	1	2	2
1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	0	0	0	1

為了解決$15 \times n$的情況中哪些無解，我們調整格子編號。

定理2.2.3：調整格子編號任意第 i 列第 j 行，令$i' \equiv i(mod3)$，

$[I_{ij}] \equiv [\frac{11}{3}i + \frac{1}{3}j - 4](mod5) + 5 \times i'$

(0,5,10),(1,6,11),(2,7,12),(3,8,13),(4,9,14)

每次必翻到上面每一組中的其中一個數字

不論如何操作，操作結束後

$T(0) + T(5) + T(10) \equiv T(1) + T(6) + T(11) \equiv T(2) + T(7) + T(12)$

$\equiv T(3) + T(8) + T(13) \equiv T(4) + T(9) + T(14)(mod2)$

若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足

$T(0) + T(5) + T(10) \equiv T(1) + T(6) + T(11) \equiv T(2) + T(7) + T(12)$

$\equiv T(3) + T(8) + T(13) \equiv T(4) + T(9) + T(14)(mod2)$

pf : 同定理2.1.3

假設翻面的方格為$(i,j),(i+1,j+1),(i+2,j+2),(i+3,j+3),(i+3,j)(i,j+3)$

若$i \equiv 0(mod3)$，翻到五格，將此4×4選取範圍向下平移$3 \times L$格後(L=1,2,3,4)

必選方格$(i+3L,j)$： 令$[I_{ij}] \equiv a + L(mod\ 5), 0 \leq a \leq 4, a \in Z$

必選方格$(i+1+3L,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a + L + 4(mod5) + 5$

必選方格$(i+2+3L,j+2)$：$[I_{i+2\ j+2}] \equiv a + L + 3(mod5) + 10$

必選方格$(i+3+3L,j+3)$：$[I_{i+3\ j+3}] \equiv a + L + 2(mod5)$

方格$(i+3+3L,j)$、$(i+3L,j+3)$擇一：$[I_{i\ j+2}] \equiv a + 1 + L(mod4)$

$[I_{i+2\ j}] \equiv a + 1 + L(mod4)$

可以找出五組(0,9,13,2,1),(1,5,14,3,2),(2,6,10,4,3),(3,7,11,0,4),(4,8,12,1,0)

我們找出以下規律：列出第一項分別為0,1,2,3,4五個數列，並按照順序排列，之後再將第四項+5，第三項+10，就可以列出上述五組

(0,1,2,3,4),(1,2,3,4,0),(2,3,4,0,1),(3,4,0,1,2),(4,0,1,2,3)

⇒(0,1,2,13,9),(1,2,3,14,5),(2,3,4,10,6),(3,4,0,11,7),(4,0,1,12,8)

用這個規律找出 $i\ \equiv 1,2\ (mod\ 3)$的組合，若前面三項為i ˊ，則最後一項為i ˊ+1(mod 3)，第四項為i ˊ+2(mod 3)，需要列出後調整

(5,6,7,3,14),(6,7,8,4,10),(7,8,9,0,11),(8,9,5,1,12),(9,5,6,2,13)

(10,11,12,8,4),(11,12,13,9,0),(12,13,14,5,1),(13,14,10,6,2),(14,10,11,7,3)

同樣找線性組合無解

因使0~14各翻面一次必成立，因此在所有$15\times n$的情況中，我們只討論15×1和15×2，並且針對$p=0$做計算，其他值的結果相同

(1)15×1

定理2.2.4：15×1盤面 不存在翻面組合使所有硬幣翻面

$$\sum_{k=1}^{15} x_k \vec{a_k} = \begin{pmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix} \Big\} 15$$

$$
\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0\\
0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0\\
1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0\\
0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

第八列中前15項為0但最右邊為1，表示此方程無解

(矩陣裡的所有值均為模2的餘數)

(2) 15×2

定理2.2.5：在15×2 使所有硬幣翻面

$$
\sum_{k=1}^{15} x_k \vec{a_k} = \left.\begin{pmatrix} o \\ \vdots \\ o \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}\right\} 15
$$

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0\\
0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0\\
1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0\\
0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

第八列中前15項為0但最右邊為1，表示此方程無解

(矩陣裡的所有值均為模2的餘數)

定理2.2.6：

存在作法使$15\times 3n(n\geq 2)$的硬幣全部翻面

作法：操作時可將不同的p各自處理，將每一組由左邊將硬幣翻轉至上到右邊即可。

3.$k>4$

定理2.3.1

我們先將格子編碼成 $[I_{ij}]\equiv[\dfrac{k(k-1)-1}{k-1}i+\dfrac{1}{k-1}j-k](mod(k+1))$

令$T(a)$ 為格子為 a 的硬幣向上的個數

初始狀態：$T(0) \equiv T(1) \equiv \cdots \equiv T(k)(mod2)$

無論選取哪些格子，操作必會使格子為$0 \sim k$的格子各翻一次

pf：選取$k \times k$方格

$$(i,j),(i,j+1),\ldots.,(i,j+k-1)$$
$$(i+1,j),(i+1,j+1),\ldots.,(i+1,j+k-1)$$
$$\ldots.$$
$$(i+k-1,j),(i+k-1,j+1),\ldots.,(i+k-1,j+k-1)$$

必選方格(i,j)：令$[I_{ij}] \equiv a\left(mod(k+1)\right), 0 \leq a \leq k, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$\left[I_{i+1\ j+1}\right] \equiv a+k\left(mod(k+1)\right)$

每往右下一格，因ij的值各加一，$[I_{ij}]$的值加k，模$(k+1)$後變成-1，因此$(i+2,j+2)$~$(i+k-1,j+k-1)$這些方格的值分別為$a+k-1$~$a+2$

方格$(i+k-1,j)$、$(i,j+k-1)$擇一：

$\left[I_{i\ j+k-1}\right] \equiv a+1\left(mod(k+1)\right)$

$\left[I_{i+k-1\ j}\right] \equiv a+k(k-1)-1\left(mod(k+1)\right) \equiv a+(-1)(-2)-1 \equiv a+1\left(mod(k+1)\right)$

⇒ 必翻到格子0、1、2⋯k的硬幣各一次

⇒ 不論如何操作，操作結束後$T(0) \equiv T(1) \equiv \cdots \equiv T(k)(mod2)$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv \cdots \equiv T(k)(mod2)$

為了更好討論，由於操作皆是隔$k-2$個格子進行，我們可將格子再分成

$i-j \equiv p\left(mod(k-2)\right)(p=0,1,2,\ldots,k-2)$，同理，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足

$Tp(0) \equiv Tp(1) \equiv \cdots . \equiv Tp(k)(mod2)$

性質2.3.2

我們透過討論每一個m得到下面這條通式，可以求出$m\times n$的棋盤中組別p數字編號為a的格子數有多少，再拿來確認是否同餘，其中$p\equiv j-i\left(mod(k-2)\right)$

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\left[\frac{n-(1+a(k-1)+kt+p)}{k^2-1}\right]+\left[\frac{p+a(k-1)+kt}{k^2-1}\right]+1\right)$$

經由計算後發現k為奇數時$\left(k^2-1\right)\times n$及$\frac{\left(k^2-1\right)}{2}\times\frac{\left(k^2-1\right)}{2}$的情況無法證明無解；k為偶數時只有$\left(k^2-1\right)\times n$，為了解決這些情況中哪些無解，我們調整格子編號，任意第 i 列第 j 行

令$i'\equiv i\left(mod(k-1)\right)$，　$[I_{ij}]\equiv[\frac{k(k-1)-1}{k-1}i+\frac{1}{k-1}j-k](mod(k+1))+(k+1)\times i'$

$$\left(0,k+1,2(k+1),\dots,(k-2)(k+1)\right)$$

$$\left(1,1+(k+1),\dots,1+(k-2)(k+1)\right)$$

$$\dots$$

$$\left(k,\dots,k+(k-2)(k+1)\right)$$

同一組數字中，在原始編碼的值相同，因此每次必翻到上面每一組中的其中一個數字，接下來就要定義不同的向量，並證明無解，為了使運算簡潔，我們使用了另外一種整理方式，將調整後的盤面$\left(k^2-1\right)\times\left(k^2-1\right)$中$i=j$的斜排數字順序定為每一個向量的列，從左上角的開始選取每一次往右、下一格，直到紀錄完$\left(k^2-1\right)$組的奇偶情形，再繼續進行高斯消去法

以$k=6$為例：

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

相較由小到大的排序方式，這一種排序更容易看出規律，第一行中，k個1連續排列，對應斜排的前6個數字，而剩下的1利用同餘求出位置，每k-1個就會回到同一組(0,1,....,k-1)，又因為斜排是倒序(0,k-1,k-2,...,2)，每次會+2，找出2×p≡1(mod k-1)顯然當$p=\frac{k}{2}$的時候是最小正整數解，我們可以找出剩餘1的位置為接下$\frac{k}{2}$(k-1)前一行的結果向下平移一格。將等號右邊的結果放在第k行，開始計算。我們發現10以下的結果都可以用程式證明無解，推論更大的數字可以，但目前想不到方法證明，奇數也是相同的情況。

作法：操作時可將不同的p各自處理，將每一組由左邊將硬幣翻轉至上到右邊即可。

(四) 在$m\times n$中，選取$k\times k$方格，過第一列第一行的對角線為分界線，選取其上或其下(含對角線)的全部硬幣翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則m、n須滿足甚麼條件?

1. k=3

定理3.1.1：可將格子編碼，任意第 i 列第 j 行 $[I_{ij}]\equiv i+j-2\ (mod\ 3)$
令 $T(a)$ 為格子為 a 的硬幣向上的個數
初始狀態 $T(0)\equiv T(1)\equiv T(2)\ (mod\ 2)$
無論如何選取，一定會選取到0、1、2的格子來翻面

pf：選取方格(i,j)、$(i+2,j)$、$(i,j+2)$、$(i+2,j+2)$

必選方格(i,j)：令$[I_{ij}]\equiv a(mod3),0\le a\le 2,a\in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}]\equiv a+2(mod3)$

必選方格$(i+2,j+2)$：$[I_{i+2\ j+2}]\equiv a+4(mod3)\equiv a+1(mod3)$

分成選取上三角或下三角

(1)選取上三角

選取方格$(i,j+1)$：$[I_{i\ j+1}]\equiv a+1(mod3)$

選取方格$(i, j+2)$：$\left[I_{i\ j+2}\right] \equiv a+2(mod3),$

選取方格$(i+1, j+2)$：$\left[I_{i+1\ j+2}\right] \equiv a+3(mod3) \equiv a(mod3)$

(2)選取下三角

選取方格$(i+1, j)$：$\left[I_{i+1\ j}\right] \equiv a+1(mod3)$

選取方格$(i+2, j)$：$\left[I_{i+2\ j}\right] \equiv a+2(mod3)$

選取方格$(i+2, j+1)$：$\left[I_{i+2\ j+1}\right] \equiv a+3(mod3) \equiv a(mod3)$

因此必選到 0、1、2 的格子各一格

$\Rightarrow$ 不論如何操作，操作結束後$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$

$\Rightarrow$ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$

此編碼條件與原題相同，因此只有m≡0 (mod3)或 n≡0 (mod3)時有機會是解，但我們實際操作後發現，只有行列一個是3的倍數一個是4的倍數才能使得全部硬幣朝上，因此我們又採用其他編碼試圖證明。

我們將格子另外編碼成

0	1	2	3
1	2	1	2
2	1	0	3
3	2	3	2

為一單元向右及向下重複(稱為延伸編碼)，可用窮舉法證明不論如何操作，操作結束後 $T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)\ (mod\ 2)$，因此若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2)(mod2)$。又每$4 \times 4$一循環，經窮舉後我們發現滿足條件的方格只有$4\ \times n\ (n \geq\ 3)$

經過上述兩種編碼及討論，我們發現滿足條件的方格有3×4或$12\times n\ (n\geq3)$為單位的方格，經過實際操作後我們發現，$12\times n$也做得出來。

定理3.1.2：存在作法將3×4和$12\times n\ (n\geq3)$ 的硬幣全部翻面

作法：

1. 3×4：可由一個下三角和一個上三角左右或上下拼接而成。

2. $12\times n$：

(1) $n\equiv 0\ (mod\ 3)$：

為3x4為單位的方格，可由 3×4 為單位拼接而成。

(2) $n\equiv 1\ (mod\ 3)$：

先以12x3為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)12×1，再選取上面三排(或三列)的12×3的硬幣翻面，最後會剩下12×4，其為3×4為單位的方格，可由3×4為單位拼接而成。

(3) $n\equiv 2\ (mod\ 3)$：

先以12×3為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)12×2，再選取上面三排(或三列)的12×4的硬幣翻面，最後會剩下12×6，其為3×4為單位的方格，可由3×4為單位拼接而成。

2. $k=4$

定理3.2.1：可將格子編碼，任意第 i 列第 j 行 $[I_{ij}]\equiv i+j-2\ \ (mod\ 5)$
令 $T(a)$ 為格子為 a 的硬幣向上的個數
初始狀態 $T(0)\equiv T(1)\equiv T(2)\equiv T(3)\equiv T(4)\ (mod\ 2)$
無論如何選取，一定會選取到0、1、2、3、4的格子來翻面

pf：選取方格(i,j)、$(i+3,j)$、$(i,j+3)$、$(i+3,j+3)$

必選方格(i,j)：令 $[I_{ij}] \equiv a\ (mod\ 5), 0 \leq a \leq 4, a \in Z$

必選方格$(i+1,j+1)$：$[I_{i+1\ j+1}] \equiv a+2\ (mod\ 5)$

必選方格$(i+2,j+2)$：$[I_{i+2\ j+2}] \equiv a+4 (mod\ 5)$

必選方格$(i+3,j+3)$：$[I_{i+3\ j+3}] \equiv a+6 (mod\ 5) \equiv a+1 (mod\ 5)$

分成選取上三角或下三角

1.選取上三角

選取方格$(i,j+1)$：$[I_{i\ j+1}] \equiv a+1\ (mod\ 5)$

選取方格$(i,j+2)$：$[I_{i\ j+2}] \equiv a+2\ (mod\ 5)$

選取方格$(i,j+3)$：$[I_{i\ j+3}] \equiv a+3\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+1,j+2)$：$[I_{i+1\ j+2}] \equiv a+3\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+1,j+3)$：$[I_{i+1\ j+3}] \equiv a+4\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+2,j+3)$：$[I_{i+2\ j+3}] \equiv a+5\ (mod\ 5) \equiv a\ (mod\ 5)$

2.選取下三角

選取方格$(i+1,j)$：$[I_{i+1\ \ j}] \equiv a+1\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+2,j)$：$[I_{i+2\ \ j}] \equiv a+2\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+3,j)$：$[I_{i+3\ \ j}] \equiv a+3\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+2,j+1)$：$[I_{i+2\ j+1}] \equiv a+3\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+3,j+1)$：$[I_{i+3\ \ j+1}] \equiv a+4\ (mod\ 5)$

選取方格$(i+3, j+2)$：$[I_{i+3\ j+2}] \equiv a+5 \pmod 5 \equiv a \pmod 5$

因此必選到 0、1、2 的格子各一格

⇒ 不論如何操作，操作結束後 $T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4) \pmod 2$

⇒ 若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 $T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4) \pmod 2$

> 定理3.2.2：只有當$m \equiv 0 \pmod 5$ 或 $n \equiv 0 \pmod 5$ 時，能滿足條件

pf：$i.\, m \equiv n \equiv 1 \pmod 5$ 時，$T(0)-1 \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4) \pmod 2$

$ii.\, m \equiv 1 \wedge n \equiv 2 \pmod 5$ 或 $m \equiv 2 \wedge n \equiv 1 \pmod 5$ 時，

$T(0)-1 \equiv T(1)-1 \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4) \pmod 2$

$iii.\, m \equiv 1 \wedge n \equiv 3 \pmod 5$ 或 $m \equiv 3 \wedge n \equiv 1 \pmod 5$ 時，

$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3)-1 \equiv T(4)-1 \pmod 2$

$iv.\, m \equiv 1 \wedge n \equiv 4 \pmod 5$ 或 $m \equiv 4 \wedge n \equiv 1 \pmod 5$ 時，

$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)-1 \pmod 2$

$v.\, m \equiv n \equiv 2 \pmod 5$ 時，$T(0)-1 \equiv T(1) \equiv T(2)-1 \equiv T(3) \equiv T(4) \pmod 5$

$vi.\, m \equiv 2 \wedge n \equiv 3 \pmod 5$ 或 $m \equiv 3 \wedge n \equiv 2 \pmod 5$ 時，

$T(0)-1 \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3)-1 \equiv T(4) \pmod 2$

$vii.\, m \equiv 2 \wedge n \equiv 4 \pmod 5$ 或 $m \equiv 4 \wedge n \equiv 2 \pmod 5$ 時，

$T(0)-1 \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)-1 \pmod 2$

$viii.\, m \equiv n \equiv 3 \pmod 5$ 時，

$T(0) \equiv T(1)-1 \equiv T(2) \equiv T(3)-1 \equiv T(4) \pmod 2$

$ix. m \equiv 3 \wedge n \equiv 4\ (mod\ 5)$ 或 $m \equiv 4 \wedge n \equiv 3\ (mod\ 5)$ 時，

$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) - 1 \equiv T(3) - 1 \equiv T(4)\ (mod\ 2)$

$x. m \equiv n \equiv 4\ (mod\ 5)$ 時，$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) - 1 \equiv T(4)\ (mod\ 2)$

$xi. m \equiv 0\ (mod\ 5)$ 或 $n \equiv 0\ (mod\ 5)$ 時，

$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)\ \ (mod\ 2)$

因此只有xi.條件有機會是解，但我們實際操作後發現，只有行列一個是4的倍數一個是5的倍數才能使得全部硬幣朝上，因此我們又採用其他編碼試圖證明。

將格子另外編碼成與k=3的延伸編碼相同，可用窮舉法證明不論如何操作，操作結束後

$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)\ \ (mod\ 2)$，因此若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) \equiv T(3) \equiv T(4)\ \ (mod\ 2)$。又每$4 \times 4$一循環，經窮舉後我們發現滿足條件的方格只有$4 \times n\ (n \geq 4)$經上述兩種編碼及討論，我們發現滿足條件的方格有$4 \times 5$或$20 \times n (n \geq 4)$為單位的方格，經過實際操作後我們發現，$20 \times n$也做得出來。

定理3.2.3：存在作法將4×5或$20 \times n\ (n \geq 4)$ 的硬幣全部翻面

作法：

1. 4×5：可由一個下三角和一個上三角左右或上下拼接而成。

2. $20 \times n$：

(1) $n \equiv 0\ (\text{mod } 4)$：

為4×5為單位的方格，可由4×5為單位拼接而成。

(2) $n \equiv 1\ (\text{mod } 4)$：

先以20×4為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)20×1，再選取上面三排(或三列)的20×4的硬幣翻面，最後會剩下20×5，其為4×5為單位的方格，可由4×5為單位拼接而成。

(3) n ≡ 2 (mod 4)：

先以20 × 4為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)20 × 2，再選取上面八排(或八列)的20 × 8的硬幣翻面，最後會剩下20 × 10，其為4 × 5為單位的方格，可由4 × 5為單位拼接而成

(4) n ≡ 3 (mod 4)：

先以20 × 4為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)20 × 3，再選取上面五排(或五列)的20 × 5的硬幣翻面，最後會剩下20 × 8，其為4 × 5為單位的方格，可由4 × 5為單位拼接而成。

3. $k > 4$

性質3.3.1：藉由上述歸納，我們可以知道其解必有以 $k\ \times (k+1)$或$k(k+1)\ \times\ n\ (n \geq k)$為單位的方格，不排除還有其他解的可能性。

定理3.3.2：存在作法將$k\ \times (k+1)$或$k(k+1)\ \times\ n\ (n \geq k)$ 的硬幣全部翻面

作法：

1.$k \times \left(k+1\right)$：可由一個下三角和一個上三角左右或上下拼接而成。

2.$\left(k+1\right) \times n$：假設$n \equiv c(modk)$，且$c < k$。 先以$k\left(k+1\right) \times k$為單位拼接，會剩下

$k\left(k+1\right) \times c$。因為$(k, k+1) = 1|c$，由貝祖定理，必存在整數$a, b$使得
$ak + b\left(k+1\right) = c$，即必可用$k\left(k+1\right) \times k$及$k\left(k+1\right) \times \left(k+1\right)$組合出$k\left(k+1\right) \times c$。

伍、研究結果與討論

(1)滿足原題2023 $IMO\ shortlist\ C1$的解為 $3|m$ 或 $3|n$

(2)將原題延伸至k的解為 $3(k-1)|m$ 或 $3(k-1)|n$

(3)選取斜排規則的解 ，$k = 3$時為8x2n(可鏡射)，k=4為15×3n，任意k尚無嚴謹證明，藉由討論小的偶數，推論為$(k^2-1) \times kn$法

(4)階梯形規則的解，$k=3$時為3×4或$12\times n$ (可鏡射)，k=4時為4×5或$20\times n$(可鏡射)，任意k可作出$k\times(k+1)$及$k\left(k+1\right)\times n$，但不排除有其他可能解。

陸、未來展望

(1)探討三維的情況

(2)探討最小翻硬幣次數使棋盤所有硬幣翻面

(3)研究目的(三)中任意k情形的多元同餘方程式無法找到合適的方法證明無解

柒、參考資料

(1)2023 IMO shortlist C1

(2)高中數學課本第四冊(泰宇版)

(3)https://matrixcalc.org/zh-TW/ 矩陣計算機

註：本作品中的所有圖表均由作者本人製作。

【評語】050411

本作品研究動機來自一題數奧題目：在 m×n 方格中，選取任意 2×2 方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，可以在操作數次後全部硬幣朝上若且唯若 m 或 n 整除 3。作者接著將問題推廣成選取任意 k×k 的方格，其中 k 為定值，用解原問題相同的手法證明可以讓全部硬幣朝上若且唯若 m 或 n 整除 3(k-1)。但此部分的推廣對於題目數學結構沒有產生太大變化。接著作者把規則改成兩種不同的版本，都是對角線上的硬幣必翻面，兩版本分別是最左下和最右上則任取其中之一翻面，以及左下的下三角或右上的上三角中的全部硬幣都翻面。但是這兩種新的規則又讓題目變得太難，使得作者依靠窮舉與歸納，只能直接計算出 k=3,4 這兩種特例。建議作者可以參考一些代數的方法，發展出不同的解題技巧。

作品海報

探討翻硬幣問題在不同規則下的完全翻面條件

壹、研究動機

在練習2023 IMO Shortlist題目時，我們發現C1的題目很特別，題目為：在方格中，選取任意方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則須滿足甚麼條件。我們解完這題後，認為這題很有趣，於是就將此題延伸看有什麼其他的結果。

貳、研究目的

1. 解決原題
2. 將原題延伸至選取方格
3. 延伸至選取斜排
4. 延伸至階梯型

参、研究設備與器材

紙、筆、電腦

肆、研究過程與方法

一、原題題目：(2023 IMO Shortlist C1)

在方格中，選取任意方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，需滿足什麼條件

解答：

可將格子編碼,任意第i列第j行[I_{ij}]≡i+j−2(mod3)

令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數

初始狀態T(0)≡T(1)≡T(2)(mod2)

無論如何選取，一定會選取到0、1、2的格子來翻面

我們討論m,n模3的同餘情形，發現只有m或n為3的倍數時有機會是解，實際進行操作後也是如此。

二、延伸原題規則

(一)在方格中，選取任意3x3方格，左上及右下的硬幣必翻面，左下和右上則任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則須滿足什麼條件

定理1.1.1:將格子編號,任意第i列第j行[I_{ij}]≡[(i-1)/2]+[(j-1)/2](mod3)

令Tpq(a)為滿足i≡p, j≡q(mod2)(p,q∈N0≤p,q≤1)的[I_{ij}],且格子為a硬幣向上的個數,若要在執行操作後,使所有硬幣向上,操作過程滿足
Tpq(0)≡Tpq(1)≡Tpq(2)(mod2),(p,q)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)

pf:選3x3格子(2x+p,2y+q),(2x+p,2y+q),(2x+p+2,2y+q),(2x+p,2y+q+1),(2x+p+1,2y+q+1),(2x+p+2,2y+q+1),(2x+p,2y+q+2),
(2x+p+1,2y+q+2),(2x+p+2,2y+q+2)

必選(2x+p,2y+q) i≡p, j≡q(mod2),[I_{ij}]=[(2x+p−1)/2]+[(2y+q−1)/2]≡x+y+[(p−1)/2]+[(q−1)/2](mod3)

必選(2x+p+2,2y+q+2) ,i≡p≡p+2, j≡q≡q+2(mod2),[I_{ij}]=[(2x+p+1)/2]+[(2y+q+1)/2]≡x+y+[(p−1)/2]+[(q−1)/2]+2(mod3)

方格(2x+p,2y+q+2),(2x+p+2,2y+q)擇一 ,i≡p≡p+2, j≡q≡q+2(mod2),[I_{ij}]≡x+y+[(p−1)/2]+[(q−1)/2]+1(mod3)

⇒必翻到格子0,1,2的硬幣各一次,且三格p,q相同

⇒若存在操作方法能使硬幣全部向上的條件為假設全部向上(操作結束)時Tpq(0)≡Tpq(1)≡Tpq(2)(mod2)

定理1.1.2：6|m或6|n時滿足Tpq(0)≡Tpq(1)≡Tpq(2)(mod2)，其他餘數的情況不滿足

令(p0,q0)為(m,n)模6的餘數(1≤p0,q0≤5),(p0,q0)=

i.(1,1):T_{11}(0)−1≡T_{11}(2)(mod2)　ii.(1,2~5):T_{10}(2)+1≡T_{10}(0)(mod2) iii.(2~5,1~2):T_{01}(2)+1≡T_{01}(0)(mod2)

iv.(2~5,3~4):T_{01}(1)−1≡T_{01}(0)(mod2) v.(2~5,5):T_{00}(1)−1≡T_{00}(0)(mod2) vi.6|m或6|n時滿足以上條件,選取任意6x1方格

必滿足T_{p0}(0)≡T_{p0}(1)≡T_{p0}(2)(mod2)或T_{p1}(0)≡T_{p1}(1)≡T_{p1}(2)(mod2)　以上結果鏡射後相同

定理1.1.3:存在作法將nx6或6xn(n≥3)的硬幣全部翻面

1. m≡0(mod6)　　2. n≡0(mod6)

將格子用上述的p、q分類　　作法與m≡0(mod6)相同

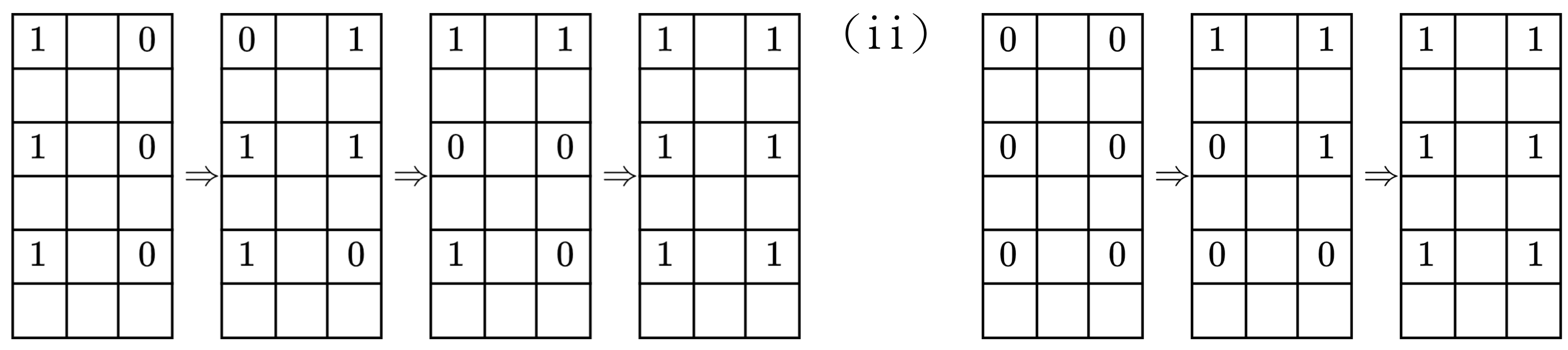
(1)p=0、q=0

先以每3列、2行為一單位進行(i)操作

若剩下一行，則與相鄰一行每6列為一單位進行(ii)操作

(2)其他p,q分類作法與上述相同

(i) (ii)



(二)在mxn方格中,選取任意kxk方格,左上及右下的硬幣必翻面,左下和右上則任取其中之一翻面,操作數次後,欲使得全部硬幣朝上,則m、n須滿足條件
3(k-1)|m∪3(k-1)|n

定理1.2.1:將格子編號，任意第i列第j行[I_{ij}]≡[(i-k+2)/(k−1)]+[(j-k+2)/(k−1)](mod 3)

令Tpq(a)為滿足i≡p, j≡q (mod(k−1))，(p,q∈N，0≤ p,q ≤(k−1))的[I_{ij}]，

且格子為a硬幣向上的個數，若要在執行操作後，使所有硬幣向上,操作過程需要滿足

Tpq(0)≡Tpq(1)≡Tpq(2)(mod 2)，(p,q)=(0,0),(0,1),(1,0),..,(k−2,k−2)

pf:選kxk格子((k−1)x+p,(k−1)y+q),((k−1)x+p+1,(k−1)y+q),((k−1)x+p(k−1)y+q+1),....,((k−1)x+p+(k−1),(k−1)y+q+(k−1))

必選((k−1)x+p,(k−1)y+q, i≡p, j≡q(mod(k−1)),

[I_{ij}]=[((k−1)x+p−(k−2))/(k−1)]+[((k−1)y+q−(k−2))/(k−1)]≡x+y+[(p+1)/(k−1)]+[(q+1)/(k−1)]−2(mod3)

必選((k−1)x+p+(k−1),(k−1)y+q+(k−1)), i≡p≡p+(k−1), j≡q≡q+(k−1)(mod(k−1)),

[I_{ij}]=[((k−1)x+p+1)/(k−1)]+[((k−1)y+q+1)/(k−1)]≡x+y+[(p+1)/(k−1)]+[(q+1)/(k−1)](mod3)

方格((k−1)x+p,(k−1)y+q+(k−1)),((k−1)x+p+(k−1),(k−1)y+q)擇一

i≡p≡p+(k−1), j≡q≡q+(k−1)(mod(k−1)),[I_{ij}]≡x+y+[(p+1)/(k−1)]+[(q+1)/(k−1)]−1(mod3)

⇒必翻到格子0,1,2的硬幣各一次,且三格p,q相同⇒若存在操作方法能使硬幣全部向上的條件為假設全部向上(操作結束)時
Tpq(0)≡Tpq(1)≡Tpq(2)(mod2)

定理1.2.2:3(k−1)|m或3(k−1)|n時滿足以上條件,其他餘數的情況則否

pf:令(p0,q0)為(m,n)模3(k−1)的餘數(1≤p0,q0≤3(k−1)−1),(p0,q0)=

i.(1~(k−2),1~(k−2)):T_{11}(0)−1≡T_{11}(2)(mod2) ii.(1~(k−2),(k−1)~(3(k−1)−1)):T_{10}(2)+1≡T_{10}(0)(mod2)

iii.(k−1~3(k−1)−1,1~(k−1)):T_{01}(2)+1≡T_{01}(0)(mod2) iv.(k−1~3(k−1)−1,k~2(k−1)):T_{01}(1)−1≡T_{01}(0)(mod2)

v.(k−1~3(k−1)−1,(2(k−1)+1)~(3(k−1)−1)):T_{00}(1)−1≡T_{00}(0)(mod2)

vi.3(k−1)|m或3(k−1)|n時滿足以上條件,選取任意3(k-1)x1方格

必滿足T_{p0}(0)≡T_{p0}(1)≡T_{p0}(2)(mod2),T_{p1}(0)≡T_{p1}(1)≡T_{p1}(2)(mod2),....,$T_{p\,k-2}$(0)≡$T_{p\,k-2}$(1)≡$T_{p\,k-2}$(2)(mod2)

以上結果鏡射後相同

定理1.2.3:存在作法使3(k-1)x1的硬幣翻面

1. m≡0(mod3(k-1))

將格子用上述的p、q分類，並以A(i, j)表示翻(i, j)、(i+k, j)、(i+k, j+k)的硬幣，B(i, j)表示翻(i, j)、(i, j+k)、(i+k, j+k)的硬幣

(1) p=0、q=0

每3列、2行一組由左往右進行操作A(1, 1)、B(1, 2)

若剩下最後一行，則與左邊一行每3列操作A(1, 1)、B(1, 1)、A(1, 2)

(2)其他p, q分類作法與上述相同

2. n≡0 (mod3(k-1))

作法與m≡0 (mod3(k-1))相同

三、在mxn方格中，選取任意kxk方格，過第一列第一行的對角線必翻，第k列與第1行或者第1列與第k行，以上任取其中之一翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則m、n須滿足甚麼條件?

1. k=3，只有8xn(n為偶數)的情況存在操作方式可以將硬幣全部翻面向上

定理2.1.1:我們先將格子編碼成$[I_{ij}]=[\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-3]$(mod4)，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，初始狀態：T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)，無論選取哪些格子，操作必會使格子為0、1、2、3的格子各翻一次

pf：選取3x3格子

(i, j)、(i, j+1)、(i, j+2)、 (i, j)、(i+1, j+1)、(i+1, j+2)、(i+2, j)、(i+2, j+1)、(i, j+2)

必選方格(i, j)：令 $[I_{ij}]$≡a(mod4), 0≤a≤3, a∈Z 必選方格(i+2, j+2)：$[I_{i+2j+2}]$≡a+6(mod4)≡a+2(mod4)

必選方格(i+1, j+1)：$[I_{i+1j+1}]$≡a+3 (mod 4)

方格(i+2, j)、(i, j+2)擇一：$[I_{ij+2}]$≡a+1(mod4)、$[I_{i+2j}]$≡a+5(mod 4)≡a+1(mod4)

⇒必翻到格子0、1、2、3的硬幣各一次

⇒不論如何操作，操作結束後 T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)

⇒若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)

編碼後的表格如右圖所示，我們發現它會每8列或8行循環，因此我們只需考慮8x8以內的情形。

透過窮舉我們發現符合條件的方格只有8x2n(n≥2)和4x4。為了更好討論，由於操作皆是隔一個格子進行，

我們可將格子再分成 i-j≡p(mod2)(p=0or1)，同理，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 Tp(0)≡Tp(1)≡Tp(2)≡Tp(3)(mod2)

0	0	1	1	2	2	3	3
2	3	3	0	0	1	1	2
1	1	2	2	3	3	0	0
3	0	0	1	1	2	2	3
2	2	3	3	0	0	1	1
0	1	1	2	2	3	3	0
3	3	0	0	1	1	2	2
1	2	2	3	3	0	0	1

性質2.1.2:將格子再分成i-j≡p(mod2)(p=0or1)，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足Tp(0)≡Tp(1)≡Tp(2)≡Tp(3)(mod 2)

以下考慮4x4的情形

根據性質2.1.2，可分成兩個p進行討論，顯然p =1時透過兩次操作讓硬幣皆朝上，所以我們只要考慮p=0的情形，如左下圖所示(空格中0代表硬幣朝下，1代表朝上)，經過兩次操作後得到下圖，這個情形雖然滿足以上條件，但我們經過嘗試後發現無法解開，因此我們考慮調整一下格子的編碼來解釋這種情形。

0		0	
	0		0
0		0	
	0		0

⇒

1		1	
	1		0
0		1	
	0		0

⇒

1		1	
	0		1
0		0	
	0		1

定理2.1.3:調整格子編號，任意第i列第j行，i´≡i(mod 2)，$[I_{ij}]\equiv[\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-3]$(mod4)+4i´，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，初始狀態:T(0)+T(4)≡T(1)+T(5)≡T(2)+T(6)≡T(3)+T(7)(mod 2)，無論如何選取，一定會選取到0or4、1or5、2or6、3or7的格子來翻面

pf：選取3x3格子(i, j)、(i, j+1)、(i, j+2)、 (i, j)、(i+1, j+1)、(i+1, j+2)、(i+2, j)、(i+2, j+1)、(i, j+2)

若 i≡0 (mod 4)

必選方格(i, j)：令$[I_{ij}]$≡a(mod4), 0≤a≤3, a∈Z、必選方格(i+1, j+1)：$[I_{i+1j+1}]$≡a+3(mod4)+4、必選方格(i+2, j+2)：$[I_{i+2j+2}]$≡a+6≡a+2(mod4)

方格(i+2, j)、(i, j+2)擇一：$[I_{i+2j}]$≡a+1(mod 4)、$[I_{ij+2}]$≡a+5≡a+1(mod 4)

若i≡1(mod 4)

必選方格(i, j)：令$[I_{ij}]$≡a (mod 4)+4, 0≤a≤3, a∈Z、必選方格(i+1, j+1)：$[I_{i+1j+1}]$≡a+3(mod4)、

必選方格(i+2, j+2)：$[I_{i+2j+2}]$≡a+6(mod4)≡a+2(mod4) +4

方格(i+2, j)、(i, j+2)擇一：$[I_{ij+2}]$≡a+1(mod4)+4、$[I_{i+2j}]$≡a+5(mod4)+4≡a+1(mod4)+4

因此必選到0or4、1or5、2or6、3or7的格子各一格

⇒不論如何操作，操作結束後T(0)+T(4)≡T(1)+T(5)≡T(2)+T(6)≡T(3)+T(7) (mod2)

⇒若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足 T(0)+T(4)≡T(1)+T(5)≡T(2)+T(6)≡T(3)+T(7) (mod2)

我們使用調整編碼時發現每一次操作都會翻到固定編號組合的硬幣，可以做進一步討論，因此先找出有哪些組合

若i≡0(mod2)，翻到0、1、2、7四格，將此3x3選取範圍向下平移2L格後(L=1, 2, 3)

必選方格(i+2L, j):令$[I_{ij}]$≡a+L(mod4)，0 ≤ a ≤ 3, a∈Z、必選方格(i+1+2L, j+1):$[I_{i+1\ j+1}]$≡a+6+L(mod4)、

必選方格(i+4, j+2):$[I_{i+4\ j+2}]$≡a+7(mod4)≡a+2+L(mod4)

方格(i, j+2)、(i+2, j)擇一:$[I_{ij+2}]$≡a+1+ L(mod4)、$[I_{i+2j}]$≡a+5+L(mod4)

可以出另外三組(1234)，(0235)，(0136)

i≡1 (mod 2)用同樣的方式可找出(0567)，(1467)，(2457)，(3456)，因此，我們發現一次操作只會動到八種組合的編碼，分別是(0127)、(0136)、(0235)、(1234)、(0567)、(1467)、(2457)、(3456)。於是我們可以列出一個八元一次方程式分別對應0~7的7個正整數的情形。

引理 2.1.4:對於多元一次聯立方程式，可以使用列運算求解

(1)現在考慮4x4的情形，要使的硬幣全部翻面(如右圖)，以其中一組(0356)為例(o表示奇數，e表示偶數)(其他情況可平移)

	0	
0		0
	0	

定理2.1.5:4x4盤面不存在翻面組合使所有硬幣翻面，等同於不存在實數解滿足這個方程

pf：根據性質2.1.4，使用列運算(如右圖)，

第四列和第五列前八行的奇偶性相同，但最後一行不相同，此方程無解平移後結果相同

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&1&0&0&e\\1&1&0&1&0&0&1&0&o\\1&1&1&0&0&0&0&1&o\\0&1&1&1&1&0&0&0&e\\0&1&0&0&1&0&1&1&o\\0&0&1&0&1&1&0&1&e\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\1&0&0&0&0&1&1&1&o\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&1&0&0&e\\0&-1&1&0&0&1&-1&0&o\\0&-1&0&1&0&1&0&-1&o\\0&1&1&1&1&0&0&0&e\\0&1&0&0&1&0&1&1&o\\0&0&1&0&1&1&0&1&e\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\0&0&1&1&0&0&-1&-1&o\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&1&0&0&e\\0&-1&1&0&0&1&-1&0&o\\0&0&1&-1&0&0&-1&1&e\\0&0&2&1&1&1&-1&0&o\\0&0&1&0&1&1&0&1&e\\0&0&1&0&1&1&0&1&e\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\0&0&1&1&0&0&-1&-1&o\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&1&0&0&e\\0&-1&1&0&0&1&-1&0&o\\0&0&1&-1&0&0&-1&1&e\\0&0&0&3&1&1&1&-2&o\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\0&0&0&1&1&1&1&0&e\\0&0&0&2&0&0&0&-2&o\end{bmatrix}$$

(2)考慮8xn

定理2.1.6：8xn(n為奇數)盤面不存在翻面組合使所有硬幣翻面，8xn(n為偶數)盤面存在

pf:和4x4等價，同樣無法滿足方程，無解

(3)考慮8xn(n為偶數)

如右圖，只有8xn(n為偶數)的情況存在操作方式可以將硬幣全部翻面向上

$$\begin{pmatrix}o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\end{pmatrix}+\vec{a_1}+\vec{a_8}=\begin{pmatrix}e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\\o\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\\e\end{pmatrix}$$

定理2.1.7:存在作法使8xn(n為偶數)的硬幣全部翻面

2. k=4

定理2.2.1:我們先將格子編碼成$[I_{ij}]\equiv[\frac{11}{3}i+\frac{1}{3}j-4]$(mod 5)，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，

初始狀態:T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)≡T(4)(mod2)，無論選取哪些格子，操作必會使格子為0、1、2、3、4的格子各翻一次

pf:證法與k=3相同

性質2.2.2:可將格子再分成i-j≡p(mod3)(p=0, 1, 2)，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足Tp(0)≡Tp(1)≡Tp(2)≡Tp(3)≡Tp(4)(mod2)

根據性質2.2.2，可將格子分成3個區塊討論，我們發現它會每15列或15行循環，因此我們只需考慮15x15以內的情形。透過窮舉我們發現符合條件的方格只有15xn(n ≥ 2)。

定理2.2.3:調整格子編號任意第i列第j行，令i´≡i(mod3)、$[I_{ij}]\equiv[\frac{11}{3}i+\frac{1}{3}j-4]$(mod 5)+5i´，(0, 5, 10)，(1, 6, 11)，(2, 7, 12)，(3, 8, 13)，(4, 9, 14)每次必翻到左邊每一組中的其中一個數字⇒不論如何操作，操作結束後T(0)+T(5)+T(10)≡T(1)+T(6)+T(11)≡T(2)+T(7)+T(12)≡T(3)+T(8)+T(13)≡T(4)+T(9)+T(14)(mod2)

⇒若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足T(0)+T(5)+T(10)≡T(1)+T(6)+T(11)≡T(2)+T(7)+T(12)≡T(3)+T(8)+T(13)≡T(4)+T(9)+T(14)(mod2)

pf:同定理2.1.3，用同k=3的方式討論後，我們找出了所有翻面組合

(0, 1, 2, 13, 9)，(1, 2, 3, 14, 5)，(2, 3, 4, 10, 6)，(3, 4, 0, 11, 7)，(4, 0, 1, 12, 8)，(5, 6, 7, 3, 14)，(6, 7, 8, 4, 10)，(7, 8, 9, 0, 11)，(8, 9, 5, 1, 12)，(9, 5, 6, 2, 13)，(10, 11, 12, 8, 4)，

(11, 12, 13, 9, 0)，(12, 13, 14, 5, 1)，(13, 14, 10, 6, 2)，(14, 10, 11, 7, 3)，同樣找線性組合無解。

定理2.2.4、2.2.5:15x1、15x2盤面 不存在翻面組合使所有硬幣翻面

pf:用程式進行列運算輔助計算後發現第八列中前15項為0但最右邊為1，表示此方程無解。

定理2.2.6:存在作法使15x3n(n ≥ 2)的硬幣全部翻面

作法：操作時可將不同的p各自處理，將每一組由左邊將硬幣翻轉至上到右邊即可。

定理2.3.1:我們先將格子編碼成$[I_{ij}]\equiv[\frac{k(k-1)-1}{k-1}i+\frac{1}{k-1}j-k](\mathrm{mod}(k+1))$，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，

初始狀態:T(0)≡T(1)≡⋯≡T(k)(mod2)，無論選取哪些格子,操作必會使格子為0~k的格子各翻一次

性質2.3.2:我們透過討論每一個m得到下面這條通式,可以求出特定mxn的棋盤中組別p數字編號為a的格子數有多少,再拿來確認是否同餘,其中p≡j-i(mod(k-2))

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\left[\frac{n-(1+a(k-1)+kt+p)}{k^2-1}\right]+\left[\frac{p+a(k-1)+kt}{k^2-1}\right]+1\right)$$

我們透過歸納特定mxn棋盤的結果，經由程式計算後發現k為奇數時(k^2-1)xn及$(k^2-1)/2$x$(k^2-1)/2$的情況無法證明無解

k為偶數時只(k^2-1)xn

為了解決這些情況中哪些無解

我們調整格子編號，任意第i列第j行，令$i'\equiv i(\mathrm{mod}(k-1))$,$[I_{ij}]\equiv[\frac{k(k-1)-1}{k-1}i+\frac{1}{k-1}j-k](\mathrm{mod}(k+1))+(k+1)\times i'$

(0,k+1,2(k+1),....,(k-2)(k+1)),(1,1+(k+1),⋯.,1+(k-2)(k+1)),(k,....,k+(k-2)(k+1))

同一組數字中，在原始編碼的值相同，因此每次必翻到上面每一組中的其中一個數字，接下來就要定義不同的向量，並證明無解，為了使運算簡潔，我們使用了另外一種整理方式，將調整後的盤面$(k^2-1)\times(k^2-1)$中i=j的斜排數字順序定為每一個向量的列，從左上角的開始選取每一次往右、下一格，直到紀錄完(k^2-1)組的奇偶情形，再繼續進行高斯消去法，我們發現10以下的結果都可以用程式證明無解，推論更大的數字可以但目前想不到方法證明，奇數也是相同的情況。

作法：操作時可將不同的p各自處理，將每一組由左邊將硬幣翻轉至上到右邊即可。

(三)在mxn中，選取kxk方格，過第一列第一行的對角線為分界線，選取其上或其下(含對角線)的硬幣翻面，操作數次後，欲使得全部硬幣朝上，則m、n須滿足甚麼條件?

1.k=3

定理3.1.1:可將格子編碼，任意第i列第j行$[I_{ij}]\equiv i+j-2(\mathrm{mod}3)$，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，
初始狀態T(0)≡T(1)≡T(2)(mod2)，無論如何選取，一定會選取到0、1、2的格子來翻面

選取方格(i,j)、(i+2,j)、(i,j+2)、(i+2,j+2)，必選方格(i,j)：令$[I_{ij}]\equiv a(\mathrm{mod}3)$0≤a≤2,a∈Z、
必選方格(i+1,j+1)：$[I_{i+1\,j+1}]\equiv a+2(\mathrm{mod}3)$、必選方格(i+2,j+2)：$[I_{i+2\,j+2}]\equiv a+4(\mathrm{mod}3)a+1(\mathrm{mod}3)$
分成選取上三角或下三角
(1)選取上三角
選取方格(i,j+1)：$[I_{i\,j+1}]\equiv a+1(\mathrm{mod}3)$、選取方格(i,j+2)：$[I_{i\,j+2}]\equiv a+2(\mathrm{mod}3)$、
選取方格(i+1,j+2)：$[I_{i+1\,j+2}]\equiv a+3(\mathrm{mod}3)\equiv a(\mathrm{mod}3)$
(2)選取下三角
選取方格(i+1,j)：$[I_{i+1\,j}]\equiv a+1(\mathrm{mod}3)$、選取方格(i+2,j)：$[I_{i+2\,j}]\equiv a+2(\mathrm{mod}3)$、
選取方格(i+2,j+1)：$[I_{i+2\,j+1}]\equiv a+3(\mathrm{mod}3)\equiv a(\mathrm{mod}3)$，因此必選到0、1、2的格子各一格
不論如何操作，操作結束後T(0)≡T(1)≡T(2)(mod2)，若要全部硬幣朝上，則朝上時需滿足T(0)≡T(1)≡T(2)(mod2)
i.m≡n≡1(mod3)時，T(0)-1≡T(1)≡T(2)(mod2)
ii.m≡1∧n≡2(mod3)或m≡2∧n≡1(mod3)時，T(0)-1≡T(1)-1≡T(2)(mod2)
iii.m≡n≡2(mod3)時，T(0)≡T(1)-1≡T(2)(mod2)
iv.m≡0(mod3)或n≡0(mod3)時，T(0)≡T(1)≡T(2)(mod2)
因此只有iv.條件有機會是解，但我們實際操作後發現，只有行列一個是3的倍數一個是4的倍數才能使得全部硬幣朝上，因此我們又採用其他編碼試圖證明。

將格子另外編碼成如右圖，為一單元向右及向下重複，可用窮舉法證明不論如何操作，
操作結束後T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)，因此若要全部硬幣朝上，
則朝上時需滿足T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)。
又每4x4一循環，經窮舉後我們發現滿足條件的方格只有4xn(n≥3)經過上述兩種編碼及討論，
我們發現滿足條件的方格有3x4或12xn(n≥3)為單位的方格，經過實際操作後我們發現，12xn也做得出來。

0	1	2	3
1	2	1	2
2	1	0	3
3	2	3	2

作法：

1.3x4：可由一個下三角和一個上三角左右或上下拼接而成。

2.12xn：

(1)n≡0(mod3)：為3x4為單位的方格，可由3x4為單位拼接而成。

(2)n≡1(mod3)：先以12x3為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)12x1，再選取上面三排(或三列)的12x3的硬幣翻面，最後會剩下12x4，其為3x4為單位的方格，可由3x4為單位拼接而成。

(3)n≡2(mod3)：先以12x3為單位拼接，會剩下最後一排(或一列)12x2，再選取上面三排(或三列)的12x4的硬幣翻面，最後會剩下12x6，其為3x4為單位的方格，可由3x4為單位拼接而成。

2.k=4

定理3.2.1:可將格子編碼,任意第i列第j行$[I_{ij}]\equiv i+j-2(\mathrm{mod}5)$，令T(a)為格子為a的硬幣向上的個數，

初始狀態T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)≡T(4)(mod2)，無論如何選取，一定會選取到0、1、2、3、4的格子來翻面

pf:證法與k=3相同

定理3.2.2:只有當m≡0(mod5)或n≡0(mod5)時,能滿足條件

pf:證法與k=3相同

因此只有m≡0(mod5)或n≡0(mod5)時有機會是解,但我們實際操作後發現,只有行列一個是4的倍數一個是5的倍數才能使得全部硬幣朝上,因此我們又採用其他編碼試圖證明。

將格子另外編碼成與k=3的延伸編碼相同,可用窮舉法證明不論如何操作,操作結束後T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2),因此若要全部硬幣朝上,則朝上時需滿足T(0)≡T(1)≡T(2)≡T(3)(mod2)。

又每4x4一循環,經窮舉後我們發現滿足條件的方格只有4xn(n≥4)經上述兩種編碼及討論,我們發現滿足條件的方格有4x5或20xn(n≥4)為單位的方格,經過實際操作後我們發現,20xn也做得出來。

定理3.2.3:存在作法將4x5或20xn(n≥4)的硬幣全部翻面

作法:與k=3作法同理

3.k>4

性質3.3.1:藉由上述歸納,我們可以知道其解必有以kx(k+1)或k(k+1)xn(n≥k)為單位的方格,不排除還有其他解的可能性

定理3.3.2:存在作法將kx(k+1)或k(k+1)xn(n≥k)的硬幣全部翻面

作法:

1.kx(k+1):可由一個下三角和一個上三角左右或上下拼接而成。

2.(k+1)xn:假設n≡c(modk),且c<k。先以k(k+1)xk為單位拼接,會剩下k(k+1)xc。因為(k,k+1)=1|c,由貝祖定理,必存在整數a,b使ak+b(k+1)=c,即必可用k(k+1)xk及k(k+1)x(k+1)組合出k(k+1)xc。

伍、研究結果與討論

(1)滿足原題2023IMOshortlistC1的解為3|m或3|n

(2)將原題延伸至k的解為3(k-1)|m或3(k-1)|n

(3)選取斜排規則的解,k=3時為8x2n(可鏡射),k=4為15x3n,任意k尚無嚴謹證明,藉由討論小的偶數,推論為(k^2-1)xkn

(4)階梯形規則的解,k=3時為3x4或12xn(可鏡射),k=4時為4x5或20xn(可鏡射),任意k可作出kx(k+1)及k(k+1)xn,但不排除有其他可能解。

陸、未來展望

(1)探討三維的情況
(2)探討最小翻硬幣次數使棋盤所有硬幣翻面
(3)研究目的(三)中任意k情形的多元同餘方程式無法找到合適的方法證明無解

柒、參考資料

(1)2023IMOshortlistC1
(2)高中數學課本第四冊(泰宇版)
(3)https://matrixcalc.org/zh-TW/矩陣計算機