

# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

團隊合作獎

050409

「正」「和」我意——正  $2n$  邊形頂點連線性質研究

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：  高二 石濬瑋  高二 趙唯辰  高二 鍾豪澤	指導老師：  陳銘欽
---	------------------

關鍵詞：正多邊形、面積和、線段平方和

## 摘要

本研究的原題目是在網路上看到證明兩正六邊形頂點連線所形成的長度平方和相等的關係，這份研究將此題推廣到了所有正  $2n$  邊形上，而後又推廣到了面積，探討了面積多次方和的關係，最後我們又發現了這些性質在  $pn$  邊形上也都成立。

研究中利用了架設坐標系來表示圖形，再利用各種方法簡化算式。文中的證明多用到三角函數的性質以及轉化為複數的表示法以得出結論。

文中最終證明出對於兩個正  $pn$  邊形，他們的頂點連線所劃分的區域分組後可形成次方和相等，以及這些連線分組後具有偶數和相等的性質。

## 壹、研究動機

我們曾在網路上見到一個題目：正六邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  內部有另一正六邊形  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ，試證明  $\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 + \overline{A_5B_5}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{A_4B_4}^2 + \overline{A_6B_6}^2$ 。之後我們又發現這個性質在正  $2n$  邊形上都成立。在查找文獻時，我們發現了 51 屆科展得獎作品(論正  $2n$  邊形與一點決定的三角形面積比)，討論了正  $2n$  邊形內部一點與頂點連線劃分的三角形面積和具有相等的關係，於是我們便好奇是否在內部一點換成內部一正  $2n$  邊形時也能成立。利用了 GeoGebra 可以發現這個性質似乎是成立的，於是我們便開始探討這個性質的證明，甚至到更多次方和。在多次嘗試之後，我們還發現這樣的性質在  $pn$  邊形上可能也可以成立

## 貳、研究目的

- 一、證明在兩正  $2n$  邊形時線段分組後的平方和是否相等。
- 二、證明在兩正  $2n$  邊形時面積分組後的和是否相等。
- 三、討論第二點中的情形在多次方下是否成立，以及成立條件。
- 四、證明第一點的性質可以推廣至偶數次方。
- 五、證明上述性質在  $pn$  邊形也能成立。

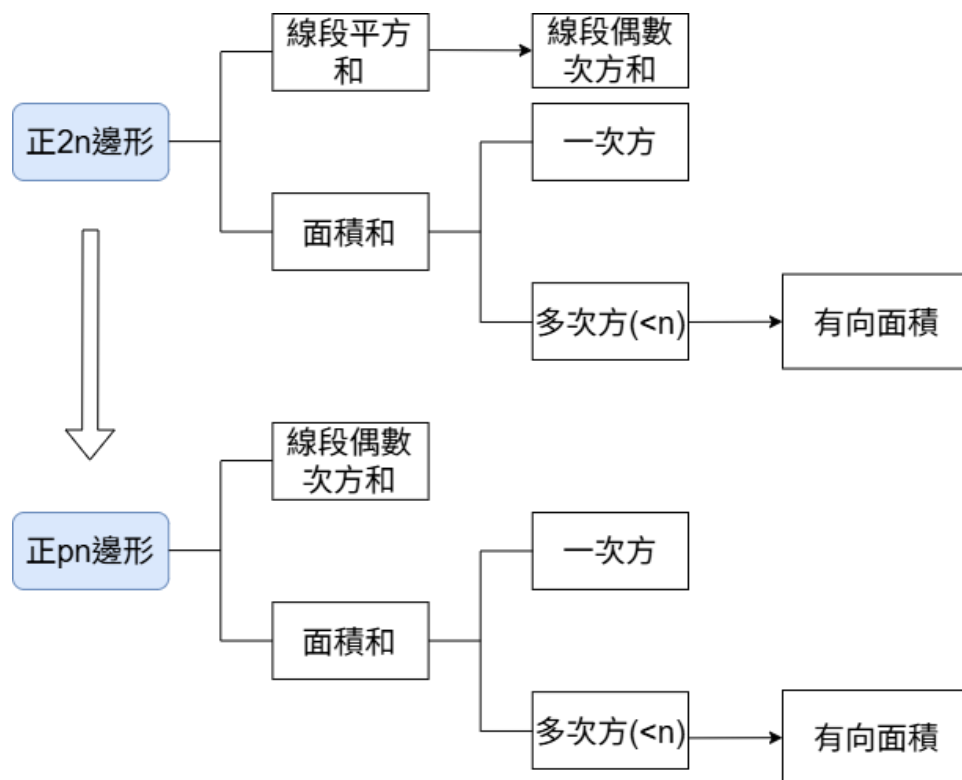


圖 2-1(作者自繪)

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、數學繪圖軟體 GeoGebra、Desmos

## 肆、研究過程及方法

一、正  $2n$  邊形頂點連線長度平方的關係：

(一) 引理：

$$\text{引理一：} \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

(證明)

將極座標  $(1, \frac{2i\pi}{n})$  表示為  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) (如圖 4-1 為  $n = 6$  之情形)，則

$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$  可圍成一個正  $n$  邊形 (如圖 2)，即  $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = 0$ 。

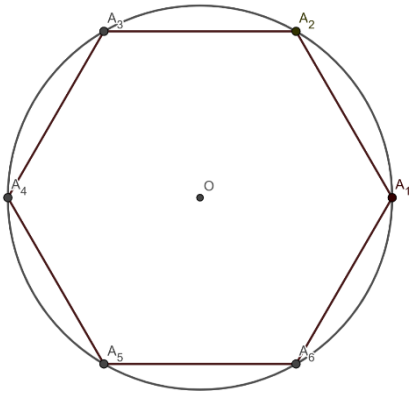


圖 4-1(作者自繪)

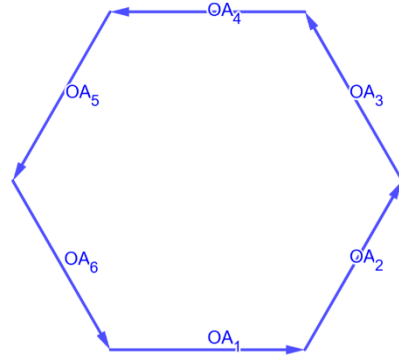


圖 4-2(作者自繪)

$$\text{將 } \overrightarrow{OA_i} \text{ 表示為 } \hat{i} \times \cos \frac{2i\pi}{n} + \hat{j} \times \sin \frac{2i\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{i} \times \sum_{i=1}^n \cos \frac{2i\pi}{n} + \hat{j} \times \sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \cos \frac{2i\pi}{n} = \sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n} = 0$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = 0$$

(二) 說明：

平面上，於任意兩正  $2n$  邊形中 ( $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ )，將各個頂點互相連接，最終得到兩組交錯排列的線段，兩組線段長度的平方和會相等。

例如在圖 4-3 中 ( $n = 3$  之情形)，兩組線段分別為  $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ ，

在此情況中  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ 。

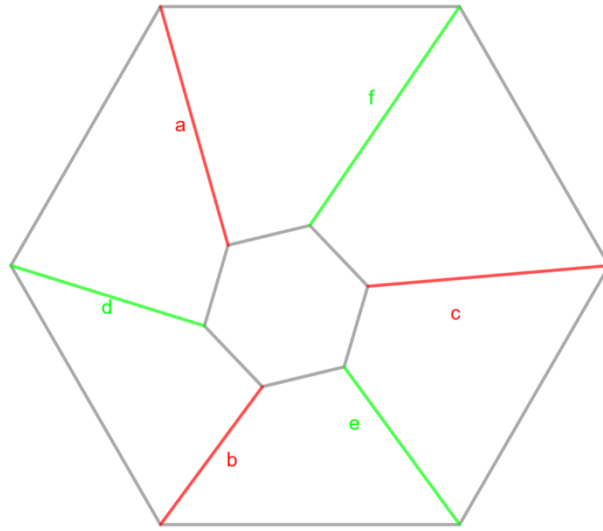


圖 4-3(作者自繪)

(三) 證明：

作兩正  $2n$  邊形（如圖 4-4 為  $n = 3$  之情形），頂點分別為  $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$  和  $\{B_1, B_2, \dots, B_{2n}\}$ ，兩正  $2n$  邊形之外接圓圓心分別為  $A(0, 0), B(p, q)$  半徑分別為  $R_A, R_B$ ， $\overline{AA_1}$  和  $\overline{BB_1}$  之夾角為  $\theta$ 。

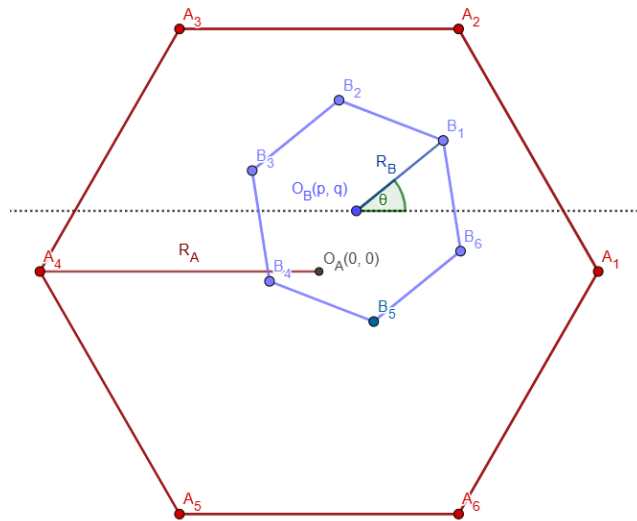


圖 4-4(作者自繪)

令 $A_k$ 座標為  $(R_A \cos(\frac{k\pi}{n}), R_A \sin(\frac{k\pi}{n}))$  ,

$B_k$ 座標為  $(p + R_B \cos(\frac{k\pi}{n} + \theta), q + R_B \sin(\frac{k\pi}{n} + \theta))$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$  。

$$\Rightarrow \overline{A_k B_k}^2 = \Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 = R_A^2 + R_B^2 + p^2 + q^2 + 2[pR_B \cos(\frac{k\pi}{n} + \theta) + qR_B \sin(\frac{k\pi}{n} + \theta) - pR_A \cos(\frac{k\pi}{n} + \theta) - qR_A \sin(\frac{k\pi}{n} + \theta) - R_A R_B \cos \frac{k\pi}{n} \cos(\frac{k\pi}{n} + \theta) - R_A R_B \sin \frac{k\pi}{n} \sin(\frac{k\pi}{n} + \theta)]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)} B_{(2i-1)}}^2 = n(R_A^2 + R_B^2 + p^2 + q^2) + 2D, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} D &= pR_B \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{2i\pi}{n} + \theta)] + qR_B \sum_{i=1}^n [\sin(\frac{2i\pi}{n} + \theta)] \\ &\quad - pR_A \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{2i\pi}{n})] - qR_A \sum_{i=1}^n [\sin(\frac{2i\pi}{n})] - R_A R_B \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{2i\pi}{n}) \cos(\frac{2i\pi}{n} + \theta) \\ &\quad + \sin(\frac{2i\pi}{n}) \sin(\frac{2i\pi}{n} + \theta)] \end{aligned}$$

由引理一可得

$$D = -R_A R_B \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{2i\pi}{n}) \cos(\frac{2i\pi}{n} + \theta) + \sin(\frac{2i\pi}{n}) \sin(\frac{2i\pi}{n} + \theta)]$$

$$\text{又 } \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{2i\pi}{n}) \cos(\frac{2i\pi}{n} + \theta) + \sin(\frac{2i\pi}{n}) \sin(\frac{2i\pi}{n} + \theta)]$$

$$= \sum_{i=1}^n [\cos^2(\frac{2i\pi}{n}) \cos \theta - \cos(\frac{2i\pi}{n}) \sin(\frac{2i\pi}{n}) \sin \theta + \sin^2(\frac{2i\pi}{n}) \cos \theta + \sin(\frac{2i\pi}{n}) \cos(\frac{2i\pi}{n}) \sin \theta]$$

$$= \sum_{i=1}^n [\cos \theta (\cos^2(\frac{2i\pi}{n}) + \sin^2(\frac{2i\pi}{n}))] = n \cos \theta$$

$$\Rightarrow D = -n \cos \theta \cdot R_A \cdot R_B$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)} B_{(2i-1)}}^2 = n(R_A^2 + R_B^2 + p^2 + q^2 - 2 \cos \theta \cdot R_A \cdot R_B)$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^n \overline{A_{2i} B_{2i}}^2 = n(R_A^2 + R_B^2 + p^2 + q^2 - 2 \cos \theta \cdot R_A \cdot R_B)$$

$\Rightarrow$  對所有  $n \in N - \{1\}$  , 平面上任兩個正  $2n$  邊形滿足以下等式 :

$$\sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)} B_{(2i-1)}}^2 = \sum_{i=1}^n \overline{A_{2i} B_{2i}}^2, \text{ 故得證。}$$

二、正  $2n$  邊形頂點連線後，所形成區域面積的關係：

(一) 引理：

引理二(吳佳鴻, 蔡雯詠[1], p.3)：

在 51 屆科展(論正  $2n$  邊形與一點決定的三角形面積比)中提到了在正  $2n$  邊形

$A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  內部任取一點  $P$  與頂點相連後，證明得

$$\begin{aligned} & \triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2k-1}A_{2k}P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P \\ &= \triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2k}A_{2k+1}P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P \end{aligned}$$

以下節錄自該作品說明書提到的證明方法

(證明)

假設正  $2n$  邊形邊長  $a$ ， $\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2k-1}A_{2k}P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P = S_1$

$$\triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2k}A_{2k+1}P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P = S_2$$

如圖 4-5 延長  $\overline{A_1A_2}$  交  $\overline{A_2A_3}$  於  $B_1$ ， $\overline{A_3A_4}$  交  $\overline{A_5A_6}$  於

$B_3$ ，.....， $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$  交  $\overline{A_1A_2}$  於  $B_{2n-1}$ 。可得  $B_1B_3\dots B_{2n-1}$

是正  $n$  邊形且假設邊長為  $b$ ，令  $a = qb$ ，則

$S_1 = qS_{B_1B_3\dots B_{2n-1}}$ 。同理可得  $S_2 = qS_{B_2B_4\dots B_{2n}}$ ，故得證。

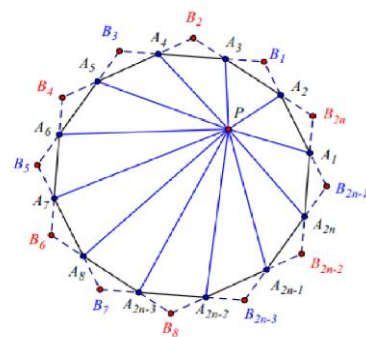


圖 4-5(吳佳鴻, 蔡雯詠[1], p.3)

(二) 說明：

一小正  $2n$  邊形位於一大正  $2n$  邊形的內部( $n \in N - 1$ )，並將各個頂點互相連接，會得到兩組交錯排列且不和小正  $2n$  邊形重疊的四邊形，各有  $n$  個，而這兩組四邊形的面積和會相等。如圖 4-6 中的紅色區塊面積會等於綠色區塊面積。為方便表示，以下都以正六邊形的圖來示意正  $2n$  邊形

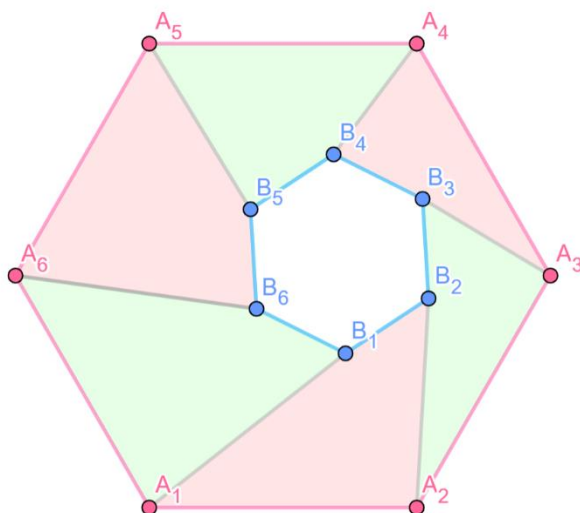


圖 4-6(作者自繪)

(三) 證明：

這個問題其實可以簡化為引理二中提到的情形，作對角線

$\overline{B_1A_2}, \overline{B_2A_3}, \dots, \overline{B_kA_{k+1}}, \dots, \overline{B_{2n}A_1}$  使每個由頂點連線劃分出的四邊形被分為圖 4-7 中淺色與深色兩部分

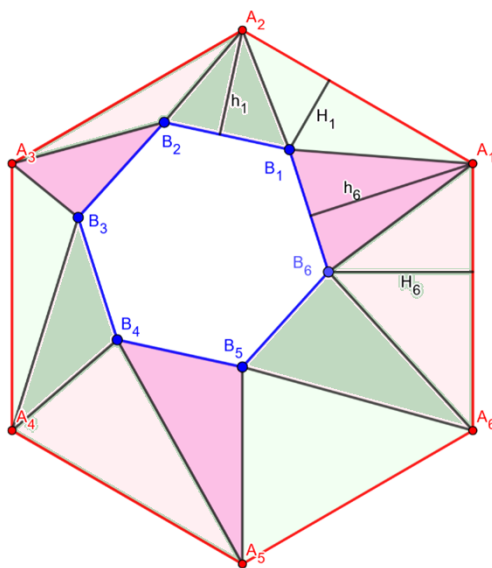


圖 4-7(作者自繪)



此時要證明

$$S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_3B_3B_4A_4} + \dots + S_{A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k} + \dots + S_{A_{2n-1}B_{2n-1}B_{2n}A_{2n}} = S_{A_2B_2B_3A_3} + S_{A_4B_4B_5A_5} + \dots + S_{A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}} + \dots + S_{A_{2n}B_{2n}B_1A_1}$$

意即證明以下兩式

$$S_{A_1B_1A_2} + S_{A_3B_3A_4} + \dots + S_{A_{k-1}B_{k-1}A_k} + \dots + S_{A_{2n-1}B_{2n-1}A_{2n}} = S_{A_2B_2A_3} + S_{A_4B_4A_5} + \dots + S_{A_kB_kA_{k+1}} + \dots + S_{A_{2n}B_{2n}A_1}$$

$$S_{B_1A_2B_2} + S_{B_3A_4B_4} + \dots + S_{B_{k-1}A_kB_k} + \dots + S_{B_{2n-1}A_{2n}B_{2n}} = S_{B_2A_3B_3} + S_{B_4A_5B_5} + \dots + S_{B_kA_{k+1}B_{k+1}} + \dots + S_{B_{2n}A_1B_1}$$

以上兩式在之後分別簡稱為淺色組以及深色組

首先證明淺色組的等式：將左式中每個三角形的底邊

$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{k-1}A_k}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}})$  平移至與正  $2n$  邊形  $B_1B_2\dots B_{2n}$  之頂點上如圖，令平

移後的線段為  $\overline{A'_1A'_2}, \overline{A'_3A'_4}, \dots, \overline{A'_{k-1}A'_k}, \dots, \overline{A'_{2n-1}A'_{2n}}$ ，取一點  $O$  與正  $2n$  邊形之各頂點等距

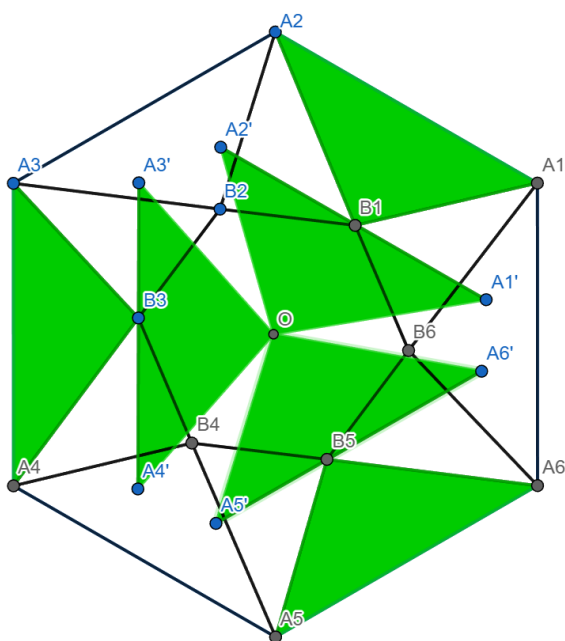


圖 4-8(作者自繪)

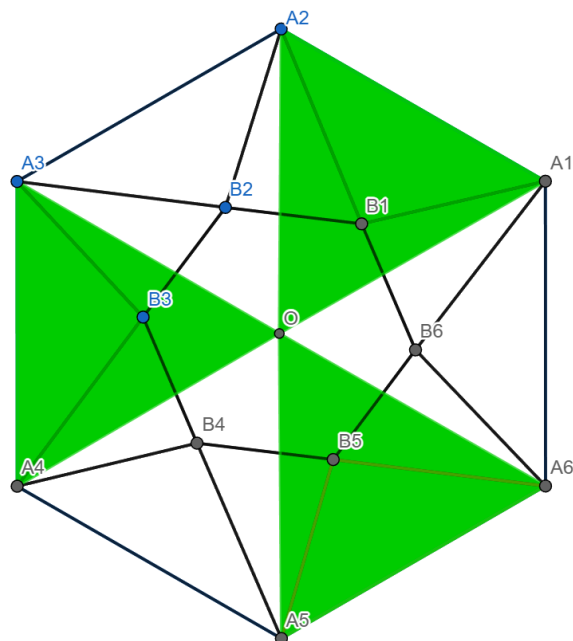


圖 4-9(作者自繪)

令  $\overline{OB_1} = h$ ， $\overline{A_1A_2} = a$ ，作  $\triangle A'_1A'_2O, \triangle A'_3A'_4O, \dots, \triangle A'_{2k-1}A'_{2k}O, \dots, \triangle A'_{2n-1}A'_{2n}O$ ，

$d(P, L)$  表示一點  $P$  到直線  $L$  的距離

$$\text{可知 } S_{A_{k-1}B_{k-1}A_k} + S_{A_{k-1}OA'_k} = \frac{1}{2}a \times d(B_{k-1}, \overline{A_{k-1}A_k}) + \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(d(B_{k-1}, \overline{A_{k-1}A_k}) + h) = S_{A_{k-1}A_kO}$$

意即圖 4-8 的綠色部分面積與圖 4-9 相等。由引理得知：

$$\begin{aligned}
S_{A_1A_2O} + S_{A_3A_4O} + \dots + S_{A_{k-1}A_kO} + \dots + S_{A_{2n-1}A_{2n}O} &= S_{A_2A_3O} + S_{A_4A_5O} + \dots + S_{A_kA_{k+1}O} + \dots + S_{A_{2n}A_1O} \\
\Rightarrow S_{A_1A_2O} + S_{A_3A_4O} + \dots + S_{A_{k-1}A_kO} + \dots + S_{A_{2n-1}A_{2n}O} - n \cdot \frac{1}{2}ah &= S_{A_2A_3O} + S_{A_4A_5O} + \dots + S_{A_kA_{k+1}O} + \dots + S_{A_{2n}A_1O} - n \cdot \frac{1}{2}ah \\
\Rightarrow S_{A_1B_1A_2} + S_{A_3B_3A_4} + \dots + S_{A_{k-1}B_{k-1}A_k} + \dots + S_{A_{2n-1}B_{2n-1}A_{2n}} &= S_{A_2B_2A_3} + S_{A_4B_4A_5} + \dots + S_{A_kB_kA_{k+1}} + \dots + S_{A_{2n}B_{2n}A_1}
\end{aligned}$$

故得證。

同理，深色組也式是類似的作法：作

$\triangle B_1B_2O, \triangle B_3B_4O, \dots, \triangle B_{2k-1}B_{2k}O, \dots, \triangle B_{2n-1}B_{2n}O$ ，平移 $\overline{B_1B_2}$ 至 $A_2$ ，平移 $\overline{B_2B_3}$ 至 $A_3 \dots$ 平移 $\overline{B_kB_{k+1}}$ 至 $A_{k+1}$ ，平移 $\overline{B_{2n}B_1}$ 至 $A_1$ ，延長各平移後的邊使他們之間都有交點後可得到一個等角 $2n$ 邊形如圖 4-11，令其為 $2n$ 邊形 $C_1C_2 \dots C_{2n}$ ，在其各邊上作與正 $2n$ 邊形邊長等長的線段 $\overline{B'_1B'_2}, \overline{B'_3B'_4}, \dots, \overline{B'_{k-1}B'_k}, \dots, \overline{B'_{2n-1}B'_{2n}}$

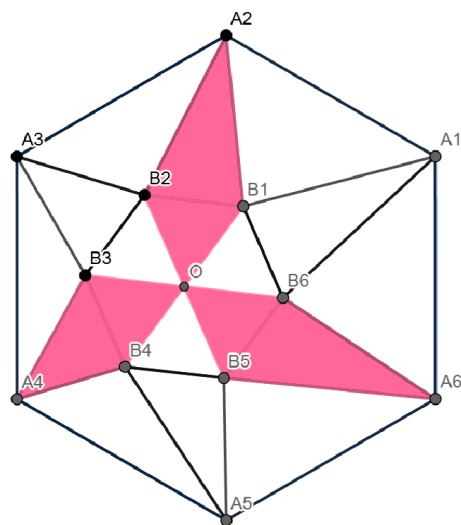


圖 4-10(作者自繪)

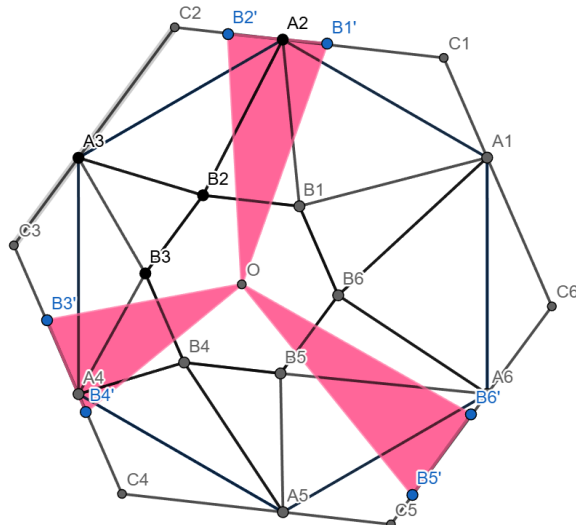


圖 4-11(作者自繪)

作出 $\triangle B'_1B'_2O, \triangle B'_3B'_4O, \dots, \triangle B'_{2k-1}B'_{2k}O, \dots, \triangle B'_{2n-1}B'_{2n}O$ ，令 $\overline{B_1B_2} = b$ ，與淺色組相同，可以得到圖 4-10 中粉紅色區塊的面積與圖 4-11 中粉紅色區塊面積相同，在引理二中提到的等式兩邊同除底邊長（正 $2n$ 邊形邊長）之後可以得到對正 $2n$ 邊形 $C_1C_2 \dots C_{2n}$ 內部一點 $O$ 有 $d(O, \overline{C_1C_2}) + d(O, \overline{C_3C_4}) + \dots + d(O, \overline{C_{k-1}C_k}) + \dots + d(O, \overline{C_{2n-1}C_{2n}}) = d(O, \overline{C_2C_3}) + d(O, \overline{C_4C_5}) + \dots + d(O, \overline{C_kC_{k+1}}) + \dots + d(O, \overline{C_{2n}C_1})$ 所以要證明

$$S_{B_1A_2B_2} + S_{B_3A_4B_4} + \dots + S_{B_{k-1}A_kB_k} + \dots + S_{B_{2n-1}A_{2n}B_{2n}} = S_{B_2A_3B_3} + S_{B_4A_5B_5} + \dots + S_{B_kA_{k+1}B_{k+1}} + \dots + S_{B_{2n}A_1B_1}$$

$$\text{即 } S_{B_1B_2O} + S_{B_3B_4O} + \dots + S_{B_{k-1}B_kO} + \dots + S_{B_{2n-1}B_{2n}O} - n \cdot \frac{1}{2}bh = S_{B_2B_3O} + S_{B_4B_5O} + \dots + S_{B_kB_{k+1}O} + \dots + S_{B_{2n}B_1O} - n \cdot \frac{1}{2}bh$$

必須先證明圖 4-11 的等角  $2n$  邊形是正  $2n$  邊形才可套用引理。

證明：

因為  $\triangle A_1A_2C_1 \cong \triangle A_2A_3C_2 \cong \dots \cong \triangle A_{2n}A_1C_{2n}$ ，所以可以得到  $\overline{C_1A_2} + \overline{A_2C_2} = \overline{C_2A_3} +$

$\overline{A_3C_3} = \dots = \overline{C_{2n}A_1} + \overline{A_1C_1}$ ，故等角  $2n$  邊形  $C_1C_2 \dots C_{2n}$  亦等邊，是正  $2n$  邊形，故得證。

三、正  $2n$  邊形頂點連線後，所形成區域面積之多次方和的關係：

(一) 引理：

引理三：

$$\sum_{t=1}^n \cos^j \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cos^{p-j} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi + \theta \right) = \sum_{t=1}^n \cos^j \left( \frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cos^{p-j} \left( \frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi + \theta \right)$$

$$(n > p \geq j \geq 0 \wedge j, p, n \in \mathbb{Z})$$

(證明)

$$\text{左式中, } \cos^{p-j} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi + \theta \right) = \left( \cos \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cos \theta - \sin \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \sin \theta \right)^{p-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-j} C_k^{p-j} (-1)^{p-j-k} \left( \cos^k \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{p-j-k} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \cos^k \theta \cdot \sin^{p-j-k} \theta \right)$$

$$\Rightarrow \text{左式} = \sum_{t=1}^n \left( \sum_{k=0}^{p-j} (C_k^{p-j} (-1)^{p-j-k} \cdot \cos^k \theta \cdot \sin^{p-j-k} \theta \cdot (\cos^k \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{p-k} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right))) \right)$$

同理右式

$$= \sum_{t=1}^n \left( \sum_{k=0}^{p-j} (C_k^{p-j} C_{p-j-k}^{p-j} \cdot \cos^k \theta \cdot \sin^{p-j-k} \theta \cdot (\cos^k \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{p-k} \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right))) \right)$$

$\Rightarrow$  原式可化簡為證明：

$$\sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{p-k} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) = \sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{p-k} \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right), (0 \leq j \leq p \leq n)$$

$$\text{由歐拉公式 } e^{ix} = \cos x + i \sin x \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\Rightarrow \cos^j\left(\frac{2k\pi}{2} + \varphi\right) = \left(\frac{e^{i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)} + e^{-i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}}{2}\right)^j, \sin^j\left(\frac{2k\pi}{2} + \varphi\right) = \left(\frac{e^{i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)} - e^{-i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}}{2}\right)^j$$

$$\text{令 } z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}, \overline{z_k} = e^{-i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{e^{i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)} + e^{-i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}}{2} \right)^j \cdot \left( \frac{e^{i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)} - e^{-i(\frac{2k\pi}{2} + \varphi)}}{2} \right)^{p-j} \right] = \frac{1}{2^p \cdot i^{p-j}} \cdot \sum_{k=1}^n [(z_k + \overline{z_k})^j \cdot (z_k - \overline{z_k})^{p-j}]$$

以二項式定理展開：

$$(z_k + \overline{z_k})^j = \sum_{a=0}^j (C_a^j \cdot z_k^a \cdot \overline{z_k}^{j-a}) \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(z_k - \overline{z_k})^j = \sum_{b=0}^{p-j} (C_b^{p-j} \cdot (-1)^b \cdot z_k^b \cdot \overline{z_k}^{p-j-b}) \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} = \sum_{a=0}^j \left[ \sum_{b=0}^{p-j} (C_a^j \cdot C_b^{p-j} \cdot (-1)^b \cdot z_k^{a+b} \cdot \overline{z_k}^{p-a-b}) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{a=0}^j \left[ \sum_{b=0}^{p-j} \left[ C_a^j \cdot C_b^{p-j} \cdot (-1)^b \cdot \left[ e^{i(\frac{2k\pi}{n} + \varphi)} \right]^{(2a+2b-p)} \right] \right] \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{a=0}^j \left[ \sum_{b=0}^{p-j} (C_a^j \cdot C_b^{p-j} \cdot (-1)^b \cdot e^{i\varphi(2a+2b-p)} \cdot e^{i(\frac{2k\pi}{n})(2a+2b-p)}) \right] \right]$$

$$\Rightarrow \text{證明 } \sum_{k=1}^n [e^{i(\frac{2k\pi}{n})(2a+2b-p)}] = \sum_{k=1}^n [e^{i(\frac{(2k-1)\pi}{n})(2a+2b-p)}]$$

左右二式皆為等比級數，令兩式之首項分別為  $a_1, \overline{a}_1$ ，公比分別為  $r, \overline{r}$

$$\text{則 } a_1 = r = \overline{r} = e^{i(\frac{2\pi}{n})(2a+2b-p)}, \overline{a}_1 = e^{i(\frac{\pi}{n})(2a+2b-p)}$$

分兩種情況討論：

1.  $r = 1$ ：即  $2a + 2b - p = 0$  ( $\because |2a + 2b - p| < n$ )，此時左式=右式= $n$ 。
2.  $r \neq 1$ ：即  $2a + 2b - p \neq 0$ ， $r^n = \overline{r}^n = e^{i2\pi(2a+2b-p)} = 1$ ，

$$\text{左式} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = 0, \text{右式} = \frac{\overline{a}_1(1-\overline{r}^n)}{1-\overline{r}} = 0$$

1.2.中，左式皆與右式相等，故得證。

(二) 說明：

一小正  $2n$  邊形位於一大正  $2n$  邊形的內部( $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ )，並將各個頂點互相連接，會得到兩組交錯排列且不和小正  $2n$  邊形重疊的四邊形，各有  $n$  個，而這兩組四邊形的面積  $p$  次方和( $p < n$ )會相等。

例如在圖 4-7 中( $n = 3$  之情形)，將兩組四邊形分別以淺色與深色表示。

則所有淺色四邊形面積的  $p$  次方和等於所有深色四邊形面積的  $p$  次方和( $p = 1, 2$ )。

(三) 證明：

作兩正  $2n$  邊形  $A, B$ ，兩正  $2n$  邊形之外接圓圓心分別為  $(0, 0), (a, b)$ ，圓心至多邊形各邊的距離分別為  $R_A, R_B$ ， $A$  和  $B$  之相位角差為  $\theta$  (如圖 12 為  $n = 3$  之情形)。將各頂點連線後形成  $2n$  個四邊形，接著把這些四邊形分割成兩三角形，分別以大  $2n$  邊形與小  $2n$  邊形的邊為底，三角形的高有兩組，分別為  $\{H_1, H_2, \dots, H_{2n}\}, \{h_1, h_2, \dots, h_{2n}\}$  (如圖 4-13 為  $n = 3$  之情形，圖中以淺色、深色代表兩組三角形並以不同色系代表兩組四邊形)。

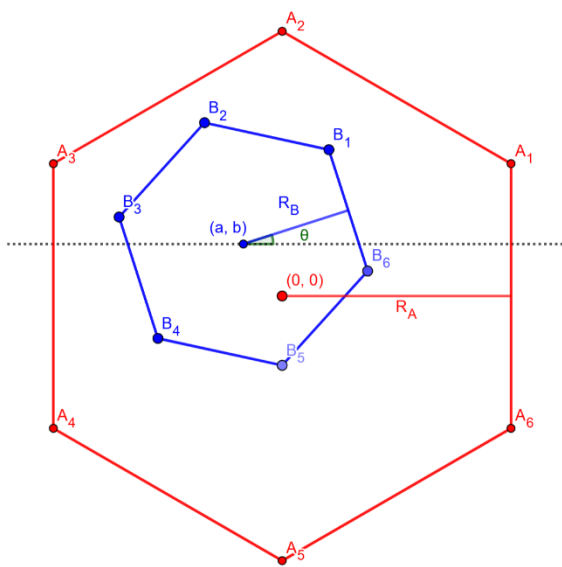


圖 4-12(作者自繪)

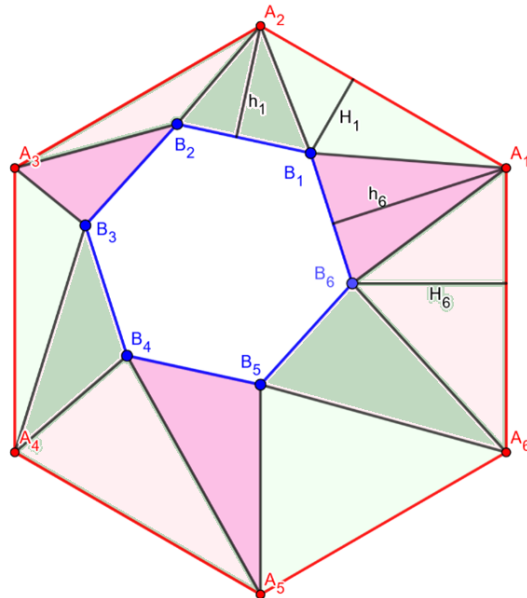


圖 4-13(作者自繪)

在  $B$  外側作一與  $A$  平行之正  $2n$  邊形  $A'$  (如圖 4-14)，令其中心至邊的距離為  $R_A'$ ，則可推得  $H_i = R_A - R_A' - \left(a \cdot \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) + b \cdot \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right)\right) \dots\dots ①$ ；

同理在 $A$  外側作一與 $B$  平行之正  $2n$  邊形（如圖 4-15），另其中心至邊的距離為

$R_B'$ ，則可推得 $h_i = R_B' - R_B - \left(a \cdot \cos\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) + b \cdot \sin\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right)\right) \dots\dots\dots \textcircled{2}$ 。

令 $A$  之邊長為 $L$ 、 $B$  之邊長為 $l$ ，則第 $i$  塊四邊形區域的面積為 $\frac{L \cdot H_i + l \cdot h_i}{2}$ 。

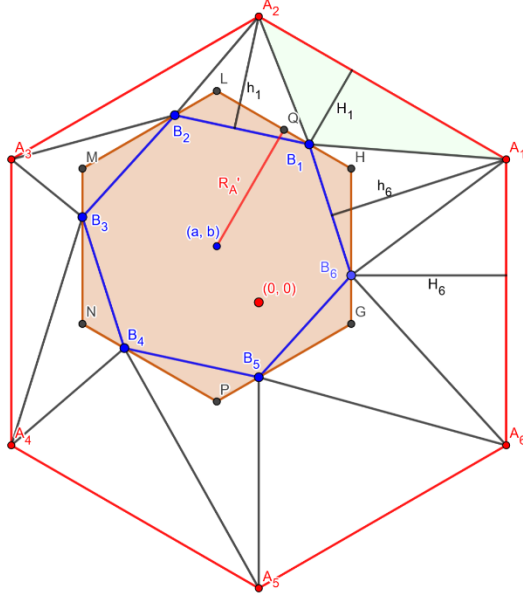


圖 4-14(作者自繪)

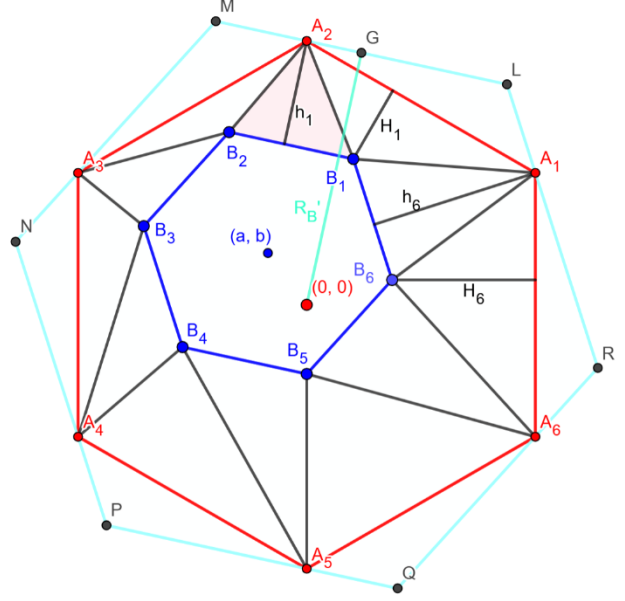


圖 4-15(作者自繪)

$$\Rightarrow \text{證明：} \sum_{i=1}^n \left( \frac{L \cdot H_{2i} + l \cdot h_{2i}}{2} \right)^p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{L \cdot H_{2i-1} + l \cdot h_{2i-1}}{2} \right)^p \quad (p < n)$$

$$\text{即證} \sum_{i=1}^n (L \cdot H_{2i} + l \cdot h_{2i})^p = \sum_{i=1}^n (L \cdot H_{2i-1} + l \cdot h_{2i-1})^p :$$

$$\text{左式以二項式定理展開，即得} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=0}^p (C_j^p \cdot (L \cdot H_{2i})^j (l \cdot h_{2i})^{p-j}) \right) \circ \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

令 $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $a = k \cos \varphi$ ， $b = k \sin \varphi$ ，然後將①②代入③：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^p \left[ C_j^p \cdot L^j \cdot l^{p-j} \cdot \left[ R_A - R_A' - k \cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi\right) \right]^j \cdot \left[ R_B' - R_B - k \cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi + \theta\right) \right]^{p-j} \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k \cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi\right))^j (-k \cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi + \theta\right))^{p-j} \right] \right] \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k)^p \cdot (\cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi\right))^j (\cos\left(\frac{2i\pi}{n} - \varphi + \theta\right))^{p-j} \right] \right] \right] \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k)^p \sum_{i=1}^n (\cos(\frac{2i\pi}{n} - \varphi))^j (\cos(\frac{2i\pi}{n} - \varphi + \theta))^{p-j} \right] \right] \right]$$

同理右式

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k)^p \cdot (\cos(\frac{(2i-1)\pi}{n} - \varphi))^j (\cos(\frac{(2i-1)\pi}{n} - \varphi + \theta))^{p-j} \right] \right] \right] \right]$$

$$= \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k)^p \sum_{i=1}^n (\cos(\frac{(2i-1)\pi}{n} - \varphi))^j (\cos(\frac{(2i-1)\pi}{n} - \varphi + \theta))^{p-j} \right] \right] \right]$$

$$\because n > p \geq j \geq 0 \wedge n, p, j \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  由引理三知右式

$$= \sum_{j=0}^p \left[ \sum_{x=0}^j \left[ \sum_{y=0}^{p-j} \left[ C_j^p \cdot C_x^j \cdot C_y^{p-j} \cdot L^j \cdot (R_A - R_A')^x (R_B' - R_B)^y \cdot (-k)^p \sum_{i=1}^n (\cos(\frac{2i\pi}{n} - \varphi))^j (\cos(\frac{2i\pi}{n} - \varphi + \theta))^{p-j} \right] \right] \right]$$

=左式

故得證。

#### 四、延伸

引理四：

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ \cos^a \left( \frac{2j\pi}{n} + \theta \right) \cos^b \left( \frac{2j\pi}{n} + \phi \right) \sin^c \left( \frac{2j\pi}{n} + \theta \right) \sin^d \left( \frac{2j\pi}{n} + \phi \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \cos^a \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} + \theta \right) \cos^b \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} + \phi \right) \sin^c \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} + \theta \right) \sin^d \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} + \phi \right) \right\} \end{aligned}$$

(證明)

$$\text{左式} = \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \cos \theta - \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \sin \theta \right]^a \left[ \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \cos \phi - \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \sin \phi \right]^b \right.$$

$$\left. \left[ \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \cos \theta + \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \sin \theta \right]^c \left[ \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \cos \phi + \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \sin \phi \right]^d \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{A=0}^a \sum_{B=0}^b \sum_{C=0}^c \sum_{D=0}^d \left\{ C_A^a C_B^b C_C^c C_D^d (-1)^{A+B} \cos^{a+c-A-C} \theta \bullet \cos^{b+d-B-D} \phi \bullet \sin^{A+C} \theta \bullet \sin^{B+D} \phi \right.$$

$$\left. \bullet \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \bullet \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \right\}$$

同理右式

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{A=0}^a \sum_{B=0}^b \sum_{C=0}^c \sum_{D=0}^d \{ C_A^a C_B^b C_C^c C_D^d (-1)^{A+B} \cos^{a+c-A-C} \theta \cdot \cos^{b+d-B-D} \phi \cdot \sin^{A+C} \theta \cdot \sin^{B+D} \phi \\
&\quad \cdot \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} \right) \cdot \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} \right) \} \\
&\Rightarrow Pf : \forall a, b, c, d, A, B, C, D \in \mathbb{N} + \{0\}, p, j, k, n \in \mathbb{N}, k < p \\
&\sum_{j=1}^n \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \cdot \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} \right) \cdot \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn} \right) \\
\text{左式} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{e^{i(\frac{2j\pi}{n})} + e^{-i(\frac{2j\pi}{n})}}{2} \right)^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{e^{i(\frac{2j\pi}{n})} - e^{-i(\frac{2j\pi}{n})}}{2i} \right)^{c+d+A+B-C-D} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{(a+b-A-B+C+D)} \sum_{\beta=0}^{(c+d+A+B-C-D)} \left\{ \frac{C_\alpha^{a+b-A-B+C+D} C_\beta^{c+d+A+B-C-D} (-1)^\beta e^{i(\frac{2j\pi}{n})(a+b+c+d-\alpha-\beta)} e^{-i(\frac{2j\pi}{n})(\alpha+\beta)}}{2^{a+b+c+d} i^{c+d+A+B-C-D}} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{(a+b-A-B+C+D)} \sum_{\beta=0}^{(c+d+A+B-C-D)} \left\{ \frac{C_\alpha^{a+b-A-B+C+D} C_\beta^{c+d+A+B-C-D} (-1)^\beta e^{i(\frac{2j\pi}{n})(a+b+c+d-2\alpha-2\beta)}}{2^{a+b+c+d} i^{c+d+A+B-C-D}} \right\}
\end{aligned}$$

同理右式

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{(a+b-A-B+C+D)} \sum_{\beta=0}^{(c+d+A+B-C-D)} \left\{ \frac{C_\alpha^{a+b-A-B+C+D} C_\beta^{c+d+A+B-C-D} (-1)^\beta e^{i(\frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn})(a+b+c+d-2\alpha-2\beta)}}{2^{a+b+c+d} i^{c+d+A+B-C-D}} \right\} \\
&\because \text{當 } n \nmid a+b+c+d-2\alpha-2\beta, \\
&\sum_{j=1}^n e^{i(\frac{2j\pi}{n})(a+b+c+d-2\alpha-2\beta)} = \sum_{j=1}^n e^{i(\frac{2j\pi}{n} - \frac{2k\pi}{pn})(a+b+c+d-2\alpha-2\beta)} = \begin{cases} n(a+b+c+d-2\alpha-2\beta=0) \\ 0(a+b+c+d-2\alpha-2\beta \neq 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

$\therefore a+b+c+d < n$  時等式成立，故得證。

(一) 長度平方和性質的延伸

線段平方和中，我們有發現三維空間的正  $2n$  邊形也具有相同的性質，用架設坐標系也有辦法證明。

(1)說明：

在三維空間中存在任意兩正  $2n$  邊形 ( $n \in \mathbb{N}, n > 2$ )，將各個頂點互相連接，最終得到兩組交錯排列的線段，兩組線段長度的平方和會相等。



例如圖 4-16 中為  $n = 3$  的情況，其中紅色線段與藍色線段的平方和會相等。

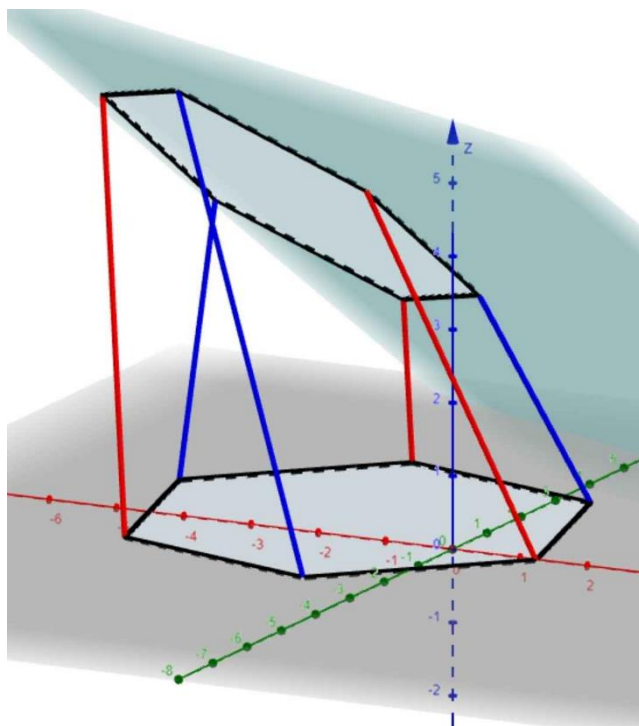


圖 4-16(作者自繪)

(2)引理：

引理五：

$$\sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{2i}{n}\pi\right) = \sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{2i-1}{n}\pi\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{2i}{n}\pi\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{2i-1}{n}\pi\right) = \frac{n}{2}$$

( $n > 2$ )

(證明)

$$\text{由積化和差得 } \sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{4i\pi}{n}\right) + \sum_{i=1}^n \cos 0 \right]$$

$$\text{又由引理一可推得當 } n > 2, \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{4i\pi}{n}\right) = 0, \text{ 故上式} = \frac{n}{2}$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2},$$

故得證。

引理六：

$$\sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = 0$$

(證明)

$$\text{由積化和差得 } \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\sin\left(\frac{4i\pi}{n}\right) + \sin 0] ,$$

$$\text{由引理一推得 } \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{4i\pi}{n}\right) = 0 , \text{ 故上式} = 0$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = 0 , \text{ 故得證。}$$

(3) 證明：

作兩正  $2n$  邊形  $A, B$ ，兩多邊形之外接圓圓心分別為  $(0, 0, 0), (a, b, c)$ ，半徑分別為  $R, r$ ，頂點分別為  $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$  和  $\{B_1, B_2, \dots, B_{2n}\}$ 。

$$\text{先令 } A_k \left( R \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), R \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \right), B_k \left( a + r \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), b + r \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), c \right)$$

(即兩多邊形皆與  $x-y$  平面平行)

接著令  $A$  繞  $x$  軸轉  $\theta$ ，繞  $y$  軸轉  $\varphi$ ，繞  $z$  軸轉  $\gamma$ ，

則旋轉後

$$A'_k \left( R \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) + R \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (-\cos \theta \sin \gamma) \right.$$

$$\left. , R \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot (\cos \varphi \sin \gamma + \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma) + R \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (\cos \theta \cos \gamma) \right.$$

$$\left. , R \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (-\cos \theta \sin \varphi) + R \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin \theta \right)$$

$$\overline{A'_k B_k}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$\Delta x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot [R(\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) - r] - \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot R \cos \theta \sin \gamma - a$$

$$\Delta y = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot R(\cos \varphi \sin \gamma - \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma) + \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (R \cos \theta \cos \gamma - r) - b$$

$$\Delta z = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot (-R \cos \theta \sin \varphi) + \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot R \sin \theta - c$$

$$\text{令 } D = \frac{k\pi}{n}, \text{ 則}$$

$$\begin{aligned} \Delta x^2 = & \cos^2 D \cdot R^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \gamma) + \cos^2 D \cdot r^2 - 2 \cos^2 D \\ & \cdot Rr (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) + \sin^2 D \cdot R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \gamma \\ & + 2 \sin D \cos D \cdot R^2 (\cos \theta \sin \theta \sin \varphi \sin^2 \gamma - \cos \theta \cos \varphi \cos \gamma \sin \gamma) \\ & - 2 \sin D \cdot aR \cos \theta \sin \gamma + 2 \cos D \cdot aR (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) \\ & + 2 \sin D \cos D \cdot Rr \cos \theta \sin \gamma - 2 \cos^2 D \\ & \cdot R^2 \cos \varphi \cos \gamma \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma - 2 \cos D \cdot ar + a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y^2 = & \cos^2 D \cdot R^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \gamma + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma) + 2 \cos^2 D \\ & \cdot R^2 \cos \varphi \cos \gamma \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma - 2 \cos D \\ & \cdot bR (\cos \varphi \sin \gamma + \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma) + \sin^2 D \cdot R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 D \\ & \cdot Rr \cos \theta \cos \gamma + \sin D \cdot r^2 + 2 \sin D \cos D \\ & \cdot R^2 (\cos \theta \cos \varphi \cos \gamma \sin \gamma + \cos \theta \cos^2 \gamma \sin \theta \sin \varphi) - 2 \sin D \cos D \\ & \cdot Rr (\cos \varphi \sin \gamma + \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma) - 2 \sin D \cdot bR \cos \theta \cos \gamma + 2 \sin D \cdot r \\ & + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z^2 = & \cos^2 D \cdot R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 D \cdot R^2 \sin^2 \theta - 2 \sin D \cos D \cdot R^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\ & + 2 \cos D \cdot cR \cos \theta \sin \varphi - 2 \sin D \cdot cR \sin \theta + c^2 \end{aligned}$$

經過化簡後可得

$$\begin{aligned} \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 &= R^2 \cdot (\cos^2 D + \sin^2 D) - 2 \cos^2 D \cdot Rr (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) \\ &- 2 \sin^2 D \cdot Rr \cos \theta \cos \gamma + 2 \sin D \cos D \\ &\cdot Rr (\cos \theta \sin \gamma - \cos \varphi \sin \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma) \\ &+ \sin D (r^2 + 2r - 2bR \cos \theta \cos \gamma - 2cR \sin \theta) \\ &+ \cos D (2aR (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) - 2ar + 2cR \cos \theta \sin \varphi) \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \overline{A_{2i} B_{2i}}^2 = \sum_{i=1}^n \overline{A_{2i-1} B_{2i-1}}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left[ R^2 + \cos^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cdot r^2 - 2 \cos^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cdot Rr (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cdot Rr \cos \theta \cos \gamma + a^2 + b^2 + c^2 \right] \\
&= n \left[ R^2 + \frac{1}{2} r^2 - Rr (\cos \varphi \cos \gamma + \cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma) + a^2 + b^2 + c^2 \right]
\end{aligned}$$

故得證，但過程繁雜，是否有更佳證明方法可再探討。

## (二) $pn$ 邊形及有號面積

這些性質除了在正  $2n$  邊形中，於正  $pn$  邊形中也能成立 ( $p \geq 2, p \in \mathbb{Z}$ )。

在圖 4-17 中， $p=3, n=3$ ，此時紅色線段的平方和=藍色=綠色。

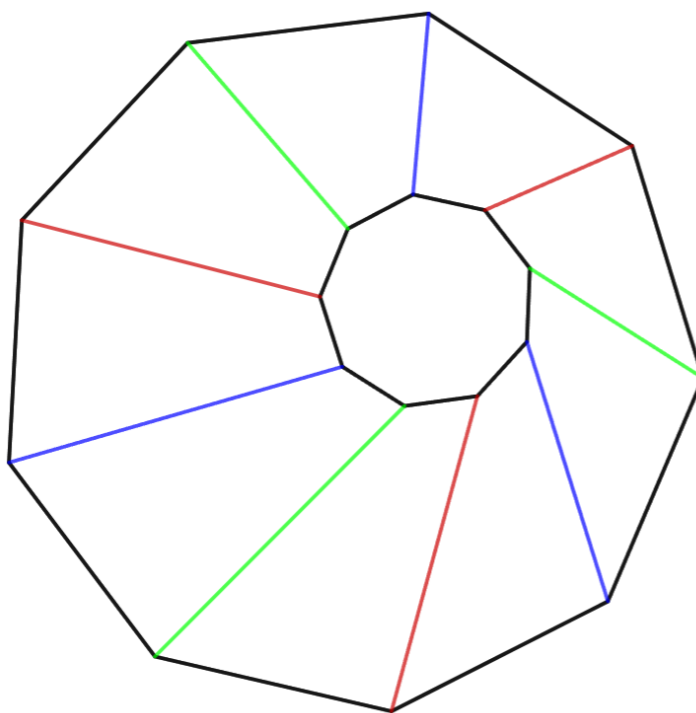


圖 4-17(作者自繪)

在圖 4-18 中，粉紅色區域面積的  $k$  次方和=綠色=藍色 ( $k < n, k \in N$ )。

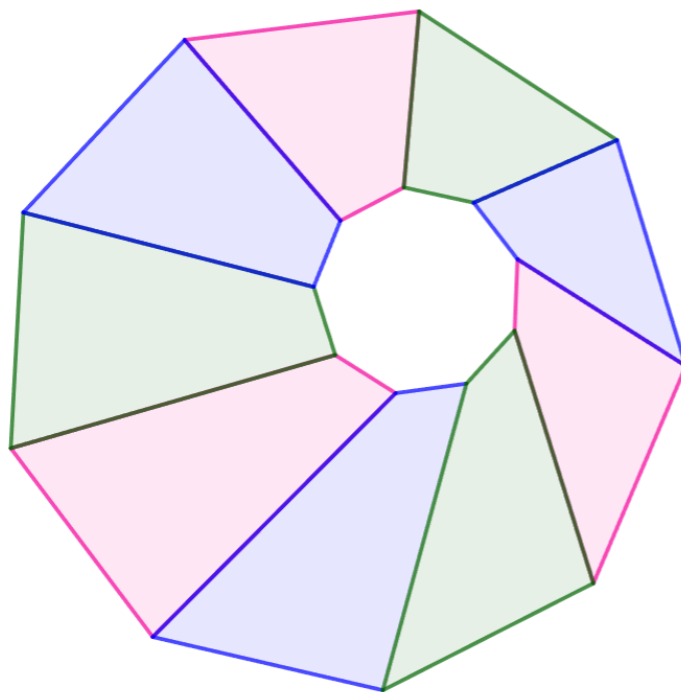


圖 4-18(作者自繪)

此外，前述性質並未探討當正  $2n$  邊形  $B_1B_2 \dots B_{2n}$  與正  $2n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  有相交亦或是在其外部時的情況：因為在這些情況中，頂點形成的區域將不只是凸四邊形，無法以「分割成兩個三角形」的方式探討。

不過我們後來發現可以使用測量師公式計算出有號面積，使用這種方式在  $pn$  邊形中也能滿足研究中的性質，包括面積和與面積多次方和。

以下是  $pn$  邊形中，有關有號面積多次方和的證明：

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} r \cos(\frac{2i\pi}{pn}) & r \cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) & x_0 + R \cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) & x_0 + R \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) & r \cos(\frac{2i\pi}{pn}) \\ r \sin(\frac{2i\pi}{pn}) & r \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) & y_0 + R \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) & y_0 + R \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) & r \sin(\frac{2i\pi}{pn}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{ r^2 [\cos(\frac{2i\pi}{pn}) \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) - \cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) \sin(\frac{2i\pi}{pn})] \\
&\quad - R^2 [\cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) - \cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta)] \\
&\quad + Rr [\cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) + \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \sin(\frac{2i\pi}{pn}) \\
&\quad - \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) \cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) - \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \cos(\frac{2i\pi}{pn})] \\
&\quad + x_0 R [\sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) - \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta)] + x_0 r [\sin(\frac{2i\pi}{pn}) - \sin(\frac{2(i+1)\pi}{pn})] \\
&\quad + y_0 R [\cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn} + \theta) - \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta)] + y_0 r [\cos(\frac{2(i+1)\pi}{pn}) - \cos(\frac{2i\pi}{pn})] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{ r^2 \sin(\frac{2\pi}{pn}) - R^2 \sin(\frac{2\pi}{pn}) + 0 \\
&\quad - 2x_0 R [\cos(\frac{(2i+1)\pi}{pn} + \theta) \sin(\frac{\pi}{pn})] - 2x_0 r [\cos(\frac{(2i+1)\pi}{pn}) \sin(\frac{\pi}{pn})] \\
&\quad - 2y_0 R [\sin(\frac{(2i+1)\pi}{pn} + \theta) \sin(\frac{\pi}{pn})] - 2y_0 r [\sin(\frac{(2i+1)\pi}{pn}) \sin(\frac{\pi}{pn})] \}
\end{aligned}$$

我們令  $r^2 \sin(\frac{2\pi}{pn}) - R^2 \sin(\frac{2\pi}{pn}) + 0 = 2A$ ，則第  $p$  塊+第  $2p$  塊+...+第  $pn$  塊區域面積

的  $k$  次方和

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \{ A - \sin \frac{\pi}{pn} [x_0 R \cos(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} + \theta) + x_0 r \cos(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn}) \\
&\quad + y_0 R \sin(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} + \theta) + y_0 r \sin(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn})] \}^k \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^k \sum_{b=0}^a \sum_{c=0}^{a-b} \sum_{d=0}^{a-b-c} \{ C_a^k C_b^a C_c^{a-b} C_d^{a-b-c} [A^{k-a} \sin^a(\frac{\pi}{pn}) (-1)^a (x_0)^{b+c} (y_0)^{a-b-c} (R)^{b+d} (r)^{a-b-d} \\
&\quad \cdot (\cos^b(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} + \theta) \cos^c(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn}) \sin^d(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} + \theta) \sin^{a-b-c-d}(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn})] \}
\end{aligned}$$

第  $p-t$  塊+第  $2p-t$  塊+...+第  $pn-t$  塊區域面積的  $k$  次方和

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^k \sum_{b=0}^a \sum_{c=0}^{a-b} \sum_{d=0}^{a-b-c} \{C_a^k C_b^a C_c^{a-b} C_d^{a-b-c} [A^{k-a} \sin^a(\frac{\pi}{pn}) (-1)^a (x_0)^{b+c} (y_0)^{a-b-c} (R)^{b+d} (r)^{a-b-d} \\ \cdot (\cos^b(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta) \cos^c(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn}) \\ \sin^d(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta) \sin^{a-b-c-d}(\frac{2i\pi}{n} + \frac{\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn})]\}$$

由引理四得  $p$  組面積多次方和相等，故得證。

### (三) $pn$ 邊形中，線段長度偶數多次方的性質

有關研究中長度平方的性質探討，我們發現除了長度平方外，長度的偶數次方和也都能成立，最大可到  $2(n-1)$  次方時成立。

(1)說明：

平面上，於任意兩正  $pn$  邊形中( $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ )，將各個頂點互相連接，最終得到  $p$  組交錯排列的線段，兩組線段長度的  $k$  次方和會相等。

$$(k \leq 2(n-1))$$

(2)證明：

作兩正  $pn$  邊形，令其外接圓半徑分別為  $r$  與  $R$ ，圓心分別為  $(0,0)$  與  $(x_0, y_0)$ ，偏差角為  $\theta$ ，頂點分別為  $\{A_1, A_2, \dots, A_i\}, \{B_1, B_2, \dots, B_i\}$

$$\text{則 } A_i(r\cos(\frac{2i\pi}{pn}), r\sin(\frac{2i\pi}{pn})), B_i(x_0 + R\cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta), y_0 + R\sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta))$$

$$\Rightarrow Pf : \sum_{i=1}^n \sqrt{[r\cos(\frac{2i\pi}{n}) - x_0 - R\cos(\frac{2i\pi}{n} + \theta)]^2 + [r\sin(\frac{2i\pi}{n}) - y_0 - R\sin(\frac{2i\pi}{n} + \theta)]^2}^k \\ = \sum_{i=1}^n \sqrt{[r\cos(\frac{2i\pi}{n} - \frac{2t\pi}{pn}) - x_0 - R\cos(\frac{2i\pi}{n} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta)]^2 + [r\sin(\frac{2i\pi}{n} - \frac{2t\pi}{pn}) - y_0 - R\sin(\frac{2i\pi}{n} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta)]^2}^k$$

,  $t = 1, 2, \dots, p-1$

$$\begin{aligned}
\text{左式} = & \sum_{i=1}^n \left\{ [r^2 \cos^2(\frac{2i\pi}{pn}) + x_0^2 + R^2 \cos^2(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) - 2rx_0 \cos(\frac{2i\pi}{pn}) \right. \\
& - 2rR \cos(\frac{2i\pi}{pn}) \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) + 2x_0 R \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta)] \\
& + [r^2 \sin^2(\frac{2i\pi}{pn}) + x_0^2 + R^2 \sin^2(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) - 2rx_0 \sin(\frac{2i\pi}{pn}) \\
& \left. - 2rR \sin(\frac{2i\pi}{pn}) \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) + 2x_0 R \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta)] \right\}^{\frac{k}{2}}
\end{aligned}$$

由引理整理後得此式

$$\begin{aligned}
= & \sum_{i=1}^n \left\{ A - 2rx_0 \cos(\frac{2i\pi}{pn}) + 2x_0 R \cos(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \right. \\
& \left. - 2ry_0 \sin(\frac{2i\pi}{pn}) + 2y_0 R \sin(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \right\}^{\frac{k}{2}}
\end{aligned}$$

其中  $A = r^2 + R^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2rR \cos \theta$ 。

令  $k = 2h$ ，則

$$\begin{aligned}
= & \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^h \sum_{b=0}^{(h-a)} \sum_{c=0}^{(h-a-b)} \sum_{d=0}^{(h-a-b-c)} \{ 2^{h-a} (-1)^{b+d} A^a x_0^{b+c} y_0^{h-a-b-c} r^{b+d} R^{h-a-b-d} \\
& \cdot \cos^b(\frac{2i\pi}{pn}) \cos^c(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \cdot \sin^d(\frac{2i\pi}{pn}) \sin^{h-a-b-c-d}(\frac{2i\pi}{pn} + \theta) \}
\end{aligned}$$

同理右式

$$\begin{aligned}
= & \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^h \sum_{b=0}^{(h-a)} \sum_{c=0}^{(h-a-b)} \sum_{d=0}^{(h-a-b-c)} \{ 2^{h-a} (-1)^{b+d} A^a x_0^{b+c} y_0^{h-a-b-c} r^{b+d} R^{h-a-b-d} \\
& \cdot \cos^b(\frac{2i\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn}) \cos^c(\frac{2i\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta) \cdot \sin^d(\frac{2i\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn}) \sin^{h-a-b-c-d}(\frac{2i\pi}{pn} - \frac{2t\pi}{pn} + \theta) \}
\end{aligned}$$

由引理四可得左式=右式，等式成立，故得證。



## 伍、研究結果

一、利用了座標化證明出了兩個正  $2n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{2n}$ 、 $B_1B_2 \dots B_{2n}$  的對應頂點連線中，具有著

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 + \dots + \overline{A_{k-1}B_{k-1}}^2 + \dots + \overline{A_{2n-1}B_{2n-1}}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{A_4B_4}^2 + \dots + \overline{A_kB_k}^2 + \dots + \overline{A_{2n}B_{2n}}^2$$

$$= n(R_A^2 + R_B^2 + p^2 + q^2 - 2\cos\theta \cdot R_A \cdot R_B)$$

，其中  $B(p, q)$  是正  $2n$  邊形  $B_1B_2 \dots B_{2n}$  外接圓的圓心， $A(0, 0)$  是正  $2n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  外接圓的圓心， $\theta$  是  $\overline{AA_1}$  與  $\overline{BB_1}$  的夾角。

二、當正  $2n$  邊形  $B_1B_2 \dots B_{2n}$  位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  的內部時，將其對應的頂點連線後，可以

$$\text{證明 } S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_3B_3B_4A_4} + \dots + S_{A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k} + \dots + S_{A_{2n-1}B_{2n-1}B_{2n}A_{2n}} = S_{A_2B_2B_3A_3} +$$

$$S_{A_4B_4B_5A_5} + \dots + S_{A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}} + \dots + S_{A_{2n}B_{2n}B_1A_1}$$

三、第二點的結果可以擴展至  $p$  次方，意即  $S_{A_1B_1B_2A_2}^p + S_{A_3B_3B_4A_4}^p + \dots + S_{A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k}^p + \dots +$

$$S_{A_{2n-1}B_{2n-1}B_{2n}A_{2n}}^p = S_{A_2B_2B_3A_3}^p + S_{A_4B_4B_5A_5}^p + \dots + S_{A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}}^p + \dots + S_{A_{2n}B_{2n}B_1A_1}^p, \text{ 其中}$$

$$p \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

四、以上三點性質皆可套用至  $pn$  邊形， $p$  為分組數。

五、面積的性質中，在兩正多邊形不互相在內部的情況中，只要以有號面積來表示各區面積，性質便可成立。

## 陸、討論

一、研究中遇到的問題：

首先是關於線段長平方和，我們並沒有找到關於本題作法與討論的資料，也許會有比座標化更快速的方法。

而後在研究面積時，因為有了歷屆科展研究(即研究過程與方法中第二點的引理所述)的先例，我們試圖尋找正  $2n$  邊形內部另一個正  $2n$  邊形是否能看作內部一個點的放大，但這似乎是難以執行的，因為正  $2n$  邊形所形成的頂點連線會出現四邊形的區域而不是三角形，多次嘗試後才找到把四邊形區域拆分為兩個三角形而簡化問題的方法。可惜的是這樣的方法在多次方中難以執行，因為展開後的項數非常多且不易化簡與計算，所以我們回到架設座標的作法，雖然算式依然繁雜，但使用複數來表示後就能化簡。

## 二、發展：

(一) 引理三中，我們知道當  $0 \leq j \leq p < n \wedge j, p, n \in \mathbb{Z}$  時，

$$\sum_{t=1}^n \cos^j\left(\frac{2t\pi}{n} - \varphi\right) \cdot \sin^{p-j}\left(\frac{2t\pi}{n} - \varphi\right) = \sum_{t=1}^n \cos^j\left(\frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi\right) \cdot \sin^{p-j}\left(\frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi\right)$$

於 Desmos 中繪製

$$y = \sum_{t=1}^{[x]} \cos^j\left(\frac{2t\pi}{[x]} - \varphi\right) \cdot \sin^{p-j}\left(\frac{2t\pi}{[x]} - \varphi\right) - \sum_{t=1}^{[x]} \cos^j\left(\frac{(2t-1)\pi}{[x]} - \varphi\right) \cdot \sin^{p-j}\left(\frac{(2t-1)\pi}{[x]} - \varphi\right)$$
 之圖形，分

別令  $p$  為奇數和偶數兩種情況討論：

1.  $p$  為奇數：

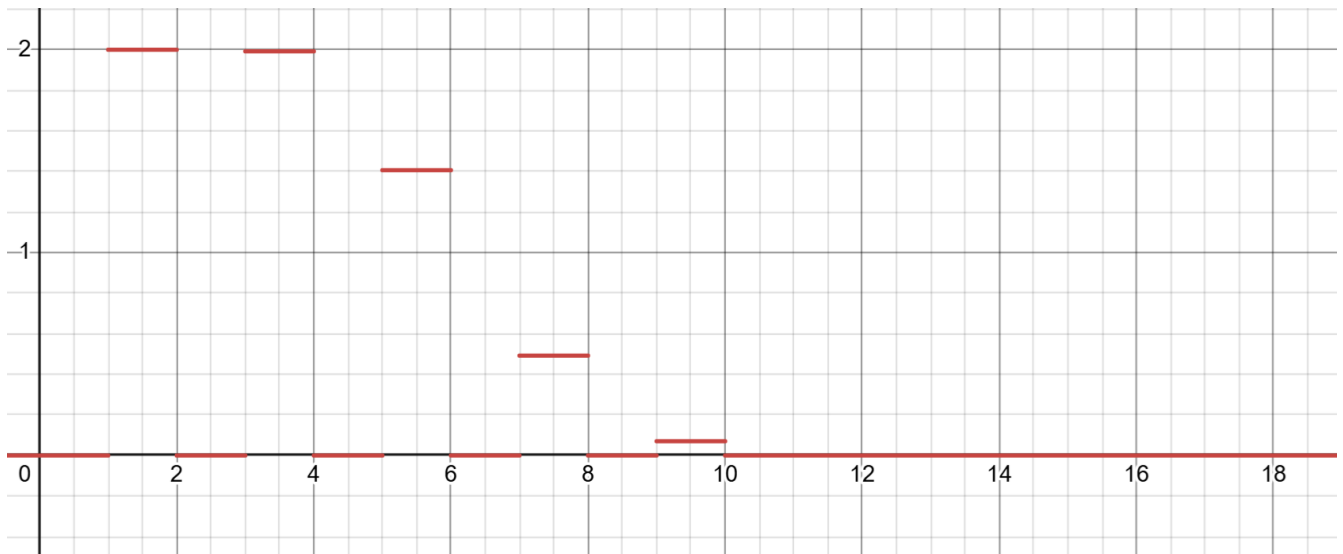


圖 4-19(作者自繪)

圖 4-19 中  $p=9, j=9, \varphi=0$ ，由上圖可知引理三成立之條件不僅限於

$0 \leq j \leq p < n \wedge j, p, n \in \mathbb{Z}$ ，而在  $p > n \wedge p \neq n \pmod{2}$  時也會成立。

除此之外還能觀察到此情況中  $p > n$  且  $p$  為定值時，對所有  $n \equiv p \pmod{2}$ ，此函數值呈嚴格遞減，此時改變  $\varphi$  的值，這些點會產生週期性的變化，並且上圖的值及為其端點。

經過一段時間的測試後又發現幾種特殊情形：

(1)  $p$  為奇數、 $j$  為偶數， $\varphi$  為  $\pi$  的整數倍時， $y=0$  恆成立。

(2)  $p, j$  皆為奇數， $\varphi - \frac{\pi}{2}$  為  $\pi$  的整數倍時， $y=0$  恆成立。

2.  $p$  為偶數：

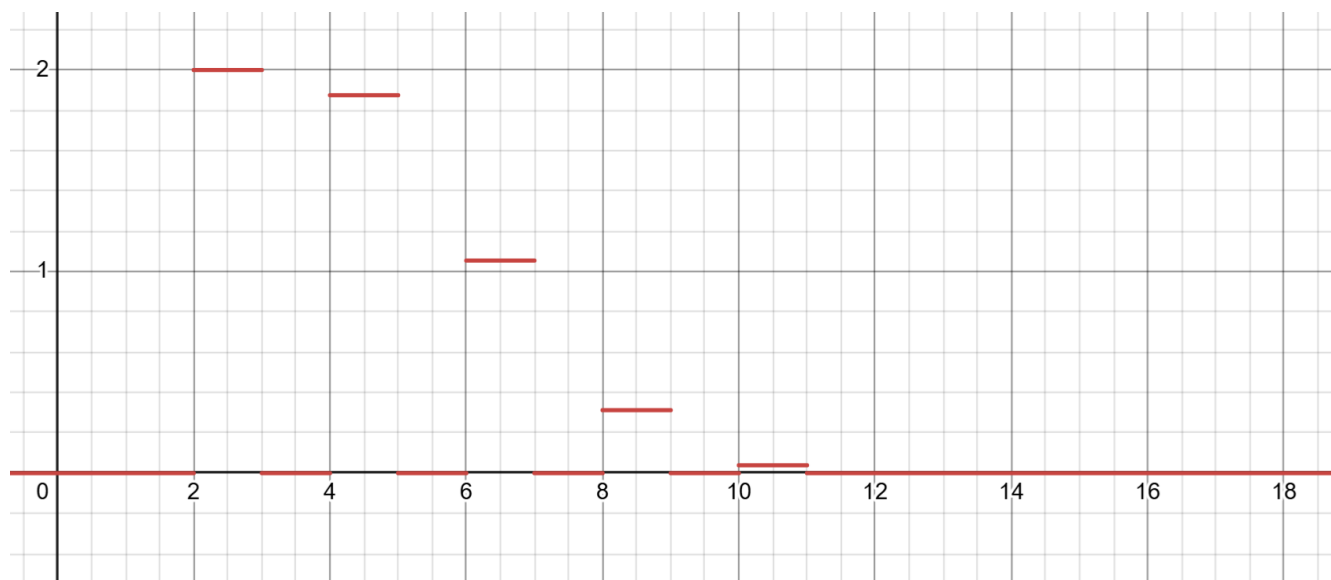


圖 4-20(作者自繪)

圖 4-20 中  $p=10, j=10, \varphi=0$ ，與奇數之情況相同，可知引理三於

$p > n \wedge p \neq n(\bmod 2)$  時也會成立。

偶數情況中也存在特殊情形：

(1)  $p$  為偶數、 $j$  為奇數， $\varphi$  為  $\frac{\pi}{2}$  的整數倍時， $y=0$  恆成立。

以上性質僅為觀察函數圖形得出之結論，如何證明有待討論。

(二) 研究結果第一點中可以發現兩組長度平方和的值跟餘弦定理的形式有類似之處，在  $A, B$  座標相同的情況下所求即是  $n$  倍的  $\overline{A_1B_1}$  長度，可以從圖 4 看出直接用餘弦定理算出。但當  $A, B$  座標不同時，圖形就沒辦法再看出與餘弦定理有直接的關係，其中的關聯有待討論。

## 柒、參考資料

[1] 吳佳鴻, 蔡雯詠. 論正  $2n$  邊形與一點決定的三角形面積比. 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書, 040420.

[2] Vreken, D. (2024, April 3). *Given Two Regular Hexagons, Prove:  $A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$* . Facebook.

## 【評語】 050409

本作品由以下問題出發：將兩相似的正  $2n$  邊形的頂點依序編號，並將相同編號的點連成線段，則編號為奇數的線段平方和等於編號為偶數的線段平方和。接著作者將平方和改成  $k$  次方和 ( $k < n$  是偶數)，並將正  $2n$  邊形改成正  $pn$  邊形。此外，作者也將線段長改成由線段圍成的區域面積，也有相對應的結論。整體而言，本作品的證明採直接計算，雖然套用一些三角函數相關引理來簡化，但計算過程仍然十分複雜，惟整體作品相當完整。若能從複雜的算式中，找出其幾何意義，或者利用對稱多項式的性質，設法簡化計算過程，則作品會變得比較簡潔。

作品海報

# 「正」 「和」 我意— 正 $2n$ 邊形頂點連線性質研究



# 前言

我們曾在網路上見到一個題目：正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 內部有另一正六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ，證明 $\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 + \overline{A_5B_5}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{A_4B_4}^2 + \overline{A_6B_6}^2$ （如圖1）。之後我們又發現上述性質在正 $2n$ 邊形上都成立（見定理一）。查找文獻時，我們發現了第51屆科展得獎作品（論正 $2n$ 邊形與一點決定的三角形面積比），討論了正 $2n$ 邊形內部一點與頂點連線劃分的三角形面積和具有相等的關係（如圖2），所以我們便好奇是否在內部一點換成內部一正 $2n$ 邊形時也能成立。並嘗試推廣到其他正多邊形。

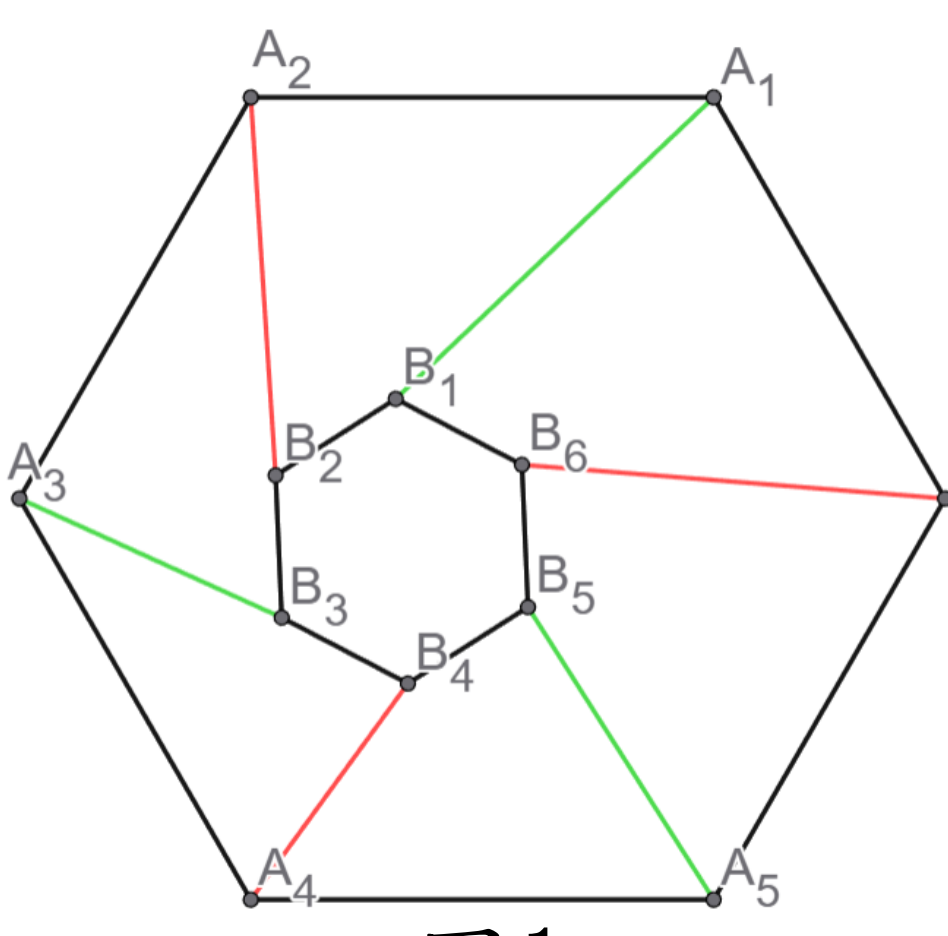


圖1 (作者自繪)

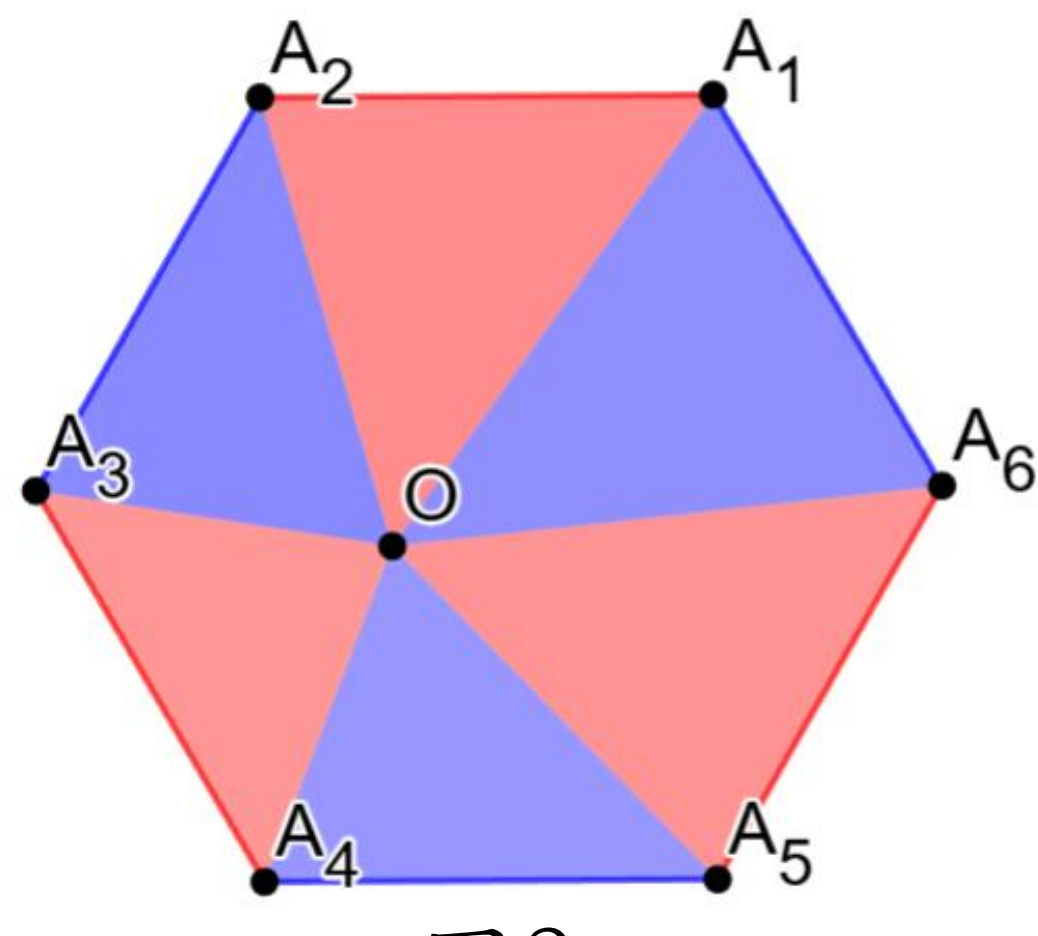


圖2 (作者自繪)

## 研究目的

- 一、證明在兩正 $2n$ 邊形中，對應頂點連成的線段以順序的奇偶分兩組後，線段長的平方和相等。
- 二、證明在兩正 $2n$ 邊形中，對應頂點連線形成的面積以同樣方法分兩組後的和相等。
- 三、討論第二點中的情形在多次方下是否成立，以及成立條件。
- 四、證明第一點的性質可以推廣至偶數次方。
- 五、證明一到四點的性質在 $mn$ 邊形上也能成立，其中 $m$ 是分組的組數。 $(m \in \mathbb{N} - \{1\})$

## 研究過程及方法

引理一：
$$\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2i\pi}{n} + \theta\right) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

**證明：**令將極座標  $\left(1, \frac{2i\pi}{n}\right)$  表示為  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，則  $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$  可以圍成一個正 $n$ 邊形。  
即  $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = 0$  令  $\hat{u}, \hat{v}$  分別為直角坐標系中  $x, y$  軸的單位向量，則  $\overrightarrow{OA_i} = \cos \frac{2i\pi}{n} \times \hat{u} + \sin \frac{2i\pi}{n} \times \hat{v}$   
由  $\sum_{i=1}^n \cos \frac{2i\pi}{n} \times \hat{u} + \sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n} \times \hat{v} = 0$  可得  $\sum_{i=1}^n \cos \frac{2i\pi}{n} = \sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n} = 0$

定理一：在同一平面上取任意兩正 $2n$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_{2n}$ 與 $B_1B_2 \dots B_{2n}$ ，則 
$$\sum_{i=1}^n \overline{A_{2i}B_{2i}}^2 = \sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)}B_{(2i-1)}}^2$$

**例：**圖3為 $n = 4$ 的情況， $\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 + \overline{A_5B_5}^2 + \overline{A_7B_7}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{A_4B_4}^2 + \overline{A_6B_6}^2 + \overline{A_8B_8}^2$   
**證明：**令正 $2n$ 邊形之外接圓圓心分別為 $A(0, 0)$ ， $B(x_0, y_0)$ 半徑分別為 $R_A, R_B$ ，  
 $\overline{AA_1}$ 和 $\overline{BB_1}$ 之夾角為 $\theta$ 。令 $A_k$ 座標為  $\left(R_A \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), R_A \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$   
 $B_k$ 座標為  $\left(x_0 + R_B \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right), y_0 + R_B \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)\right)$   
以引理一化簡後得  $\sum_{i=1}^n \overline{A_{2i}B_{2i}}^2 = n(R_A^2 + R_B^2 + x_0^2 + y_0^2) - 2n \cos \theta \cdot R_A \cdot R_B$   
，同理可證  $\sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)}B_{(2i-1)}}^2 = n(R_A^2 + R_B^2 + x_0^2 + y_0^2) - 2n \cos \theta \cdot R_A \cdot R_B$

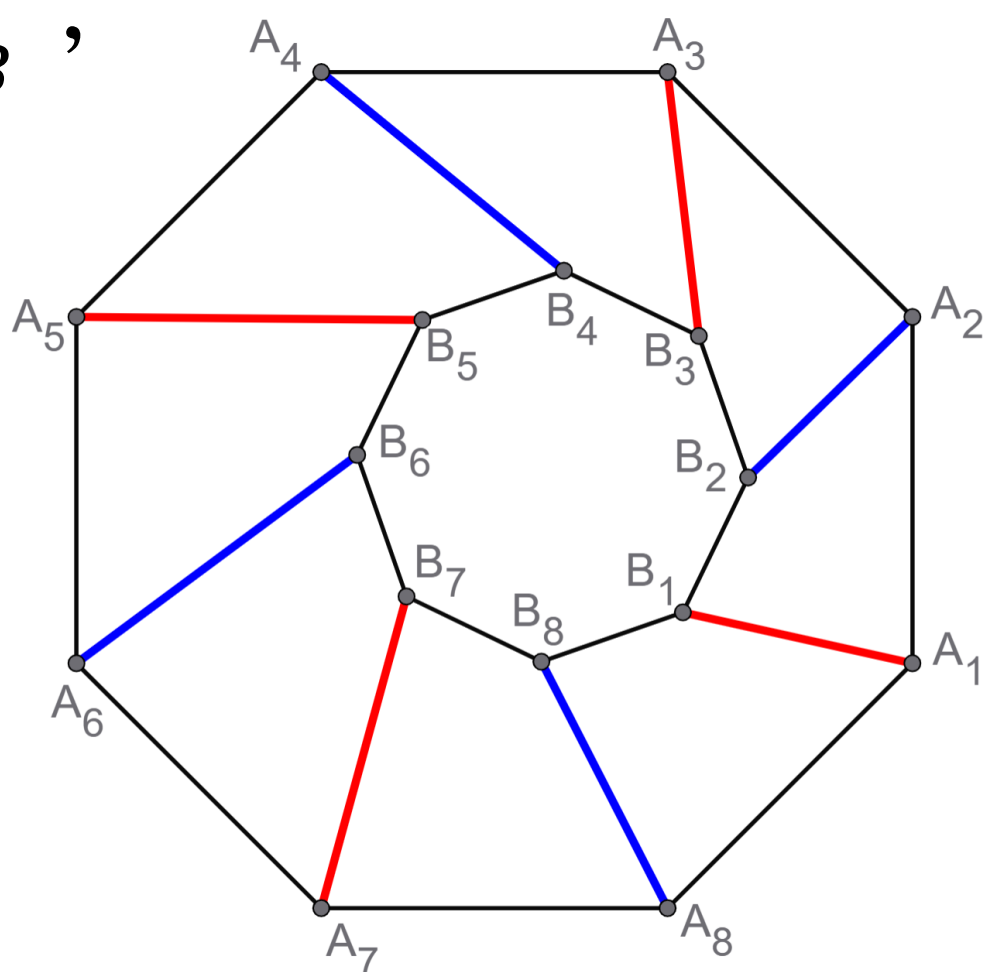


圖3 (作者自繪)

引理二：
$$\sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}, (n > 2)$$

**證明：**由積化和差得  $\sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{4i\pi}{n}\right) + \sum_{i=1}^n \cos 0 \right]$ ，由引理一可推得在 $n > 2$ 時  
 $\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{4i\pi}{n}\right) = 0$ ，故上式的值為 $\frac{n}{2}$ 。同理  $\sum_{i=1}^n \cos^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$

定理二：在空間中取任意兩正 $2n$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_{2n}$ 與 $B_1B_2 \dots B_{2n}$ ，則 
$$\sum_{i=1}^n \overline{A_{2i}B_{2i}}^2 = \sum_{i=1}^n \overline{A_{(2i-1)}B_{(2i-1)}}^2$$

**例：**右圖是 $n = 3$ 的情況，紅色與藍色線段長度平方和相等。  
**證明：**與定理一類似，兩正 $2n$ 邊形，外接圓圓心分別為 $A(0, 0, 0)$ ， $B(x_0, y_0, z_0)$ ，半徑分別為 $R_A, R_B$ 。  
令 $A_k \left(R \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), R \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0\right)$ ， $B_k \left(a + r \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), b + r \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), c\right)$   
接著讓A繞 $x$ 軸旋轉 $\theta$ ，再繞 $y$ 軸旋轉 $\varphi$ ，再繞 $z$ 軸旋轉 $\gamma$ 。利用點座標列出線段的長度，會得到和定理一類似的情形，利用引理二可化簡。

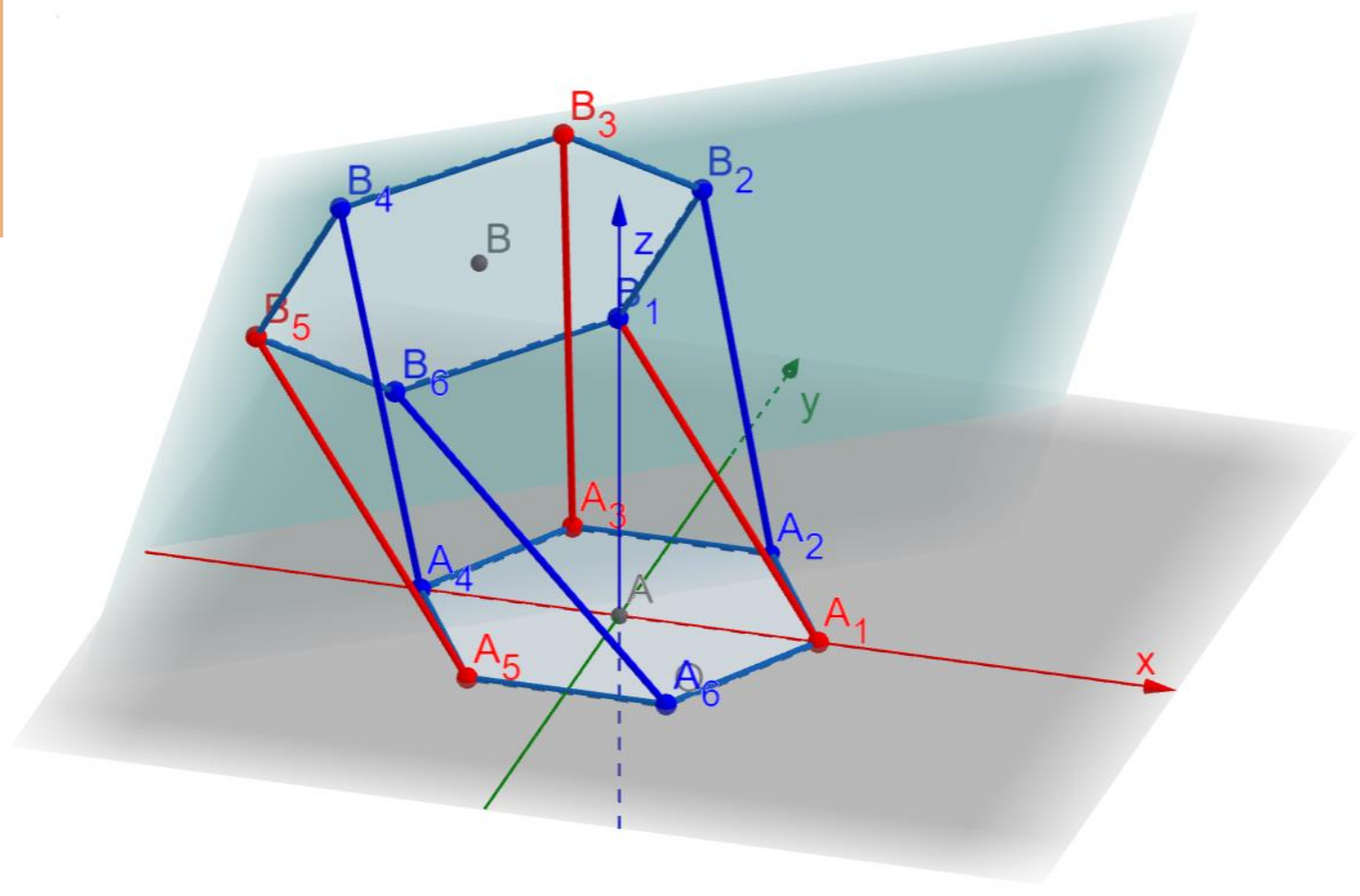


圖4 (作者自繪)



引理三:於正 $2n$ 邊形內部任取一點 $P$ (如圖5), 則  $\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P = \triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P$ 。

**證明：**假設正 $2n$ 邊形邊長為 $a$ ,  $\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2k-1}A_{2k}P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P = S_1$ ,  
 $\triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2k}A_{2k+1}P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P = S_2$ 。  
 延長 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 $B_1$ , 延長 $\overline{A_2A_3}$ 交 $\overline{A_4A_5}$ 於 $B_2$ ,  $\dots\dots$ , 延長 $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 $B_{2n-1}$ ,  
 延長 $\overline{A_{2n}A_1}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 $B_{2n}$ , 可得 $B_1B_3\dots B_{2n-1}$ 和 $B_2B_4\dots B_{2n}$ 皆為正 $n$ 邊形且邊長等長。  
 令此二正 $n$ 邊形邊長為 $b$ , 則 $S_1 = B_1B_3\dots B_{2n-1} \cdot \frac{a}{b}$ , 同理  $S_2 = B_2B_4\dots B_{2n} \cdot \frac{a}{b}$ , 故得證。

**定理三：**平面上兩正 $2n$ 邊形 $A, B$ , 其中 $B$ 在 $A$ 的內部，  
 則 $S_{A_1A_2B_2B_1} + S_{A_3A_4B_4B_3} + \dots + S_{A_{2n-1}A_{2n}B_{2n}B_{2n-1}} = S_{A_2A_3B_3B_2} + S_{A_4A_5B_5B_4} + \dots + S_{A_{2n}A_1B_1B_{2n}}$ 。

**舉例：**右圖6為 $n = 4$ 的情況，其中 $S_{A_1A_2B_2B_1} + S_{A_3A_4B_4B_3} + S_{A_5A_6B_6B_5} + S_{A_7A_8B_8B_7}$   
 $= S_{A_2A_3B_3B_2} + S_{A_4A_5B_5B_4} + S_{A_6A_7B_7B_6} + S_{A_8A_1B_1B_8}$ 。

**證明：**作對角線將每個四邊形分為右圖中深色與淺色兩種區塊（如圖7）。  
 首先證明淺色組的等式：將淺粉色三角形的底邊 $(\overline{A_1A_2}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}})$ 平移至與正 $2n$ 邊形 $B$ 之頂點上（如圖8-1），令平移後的線段為 $\overline{A'_1A'_2}, \overline{A'_3A'_4}, \dots, \overline{A'_{2n-1}A'_{2n}}$ ，在 $B$ 內任取一點 $O$ ，則 $S_{A_{k-1}B_{k-1}A_k} + S_{A'_{k-1}OA'_k} = S_{A_{k-1}A_kO}$ ，意即圖8-1、圖8-2中的淺色區域面積相等，而深色組也是類似的作法，最後可得圖9-1、圖9-2的深色區域面積也會相等，故得證。

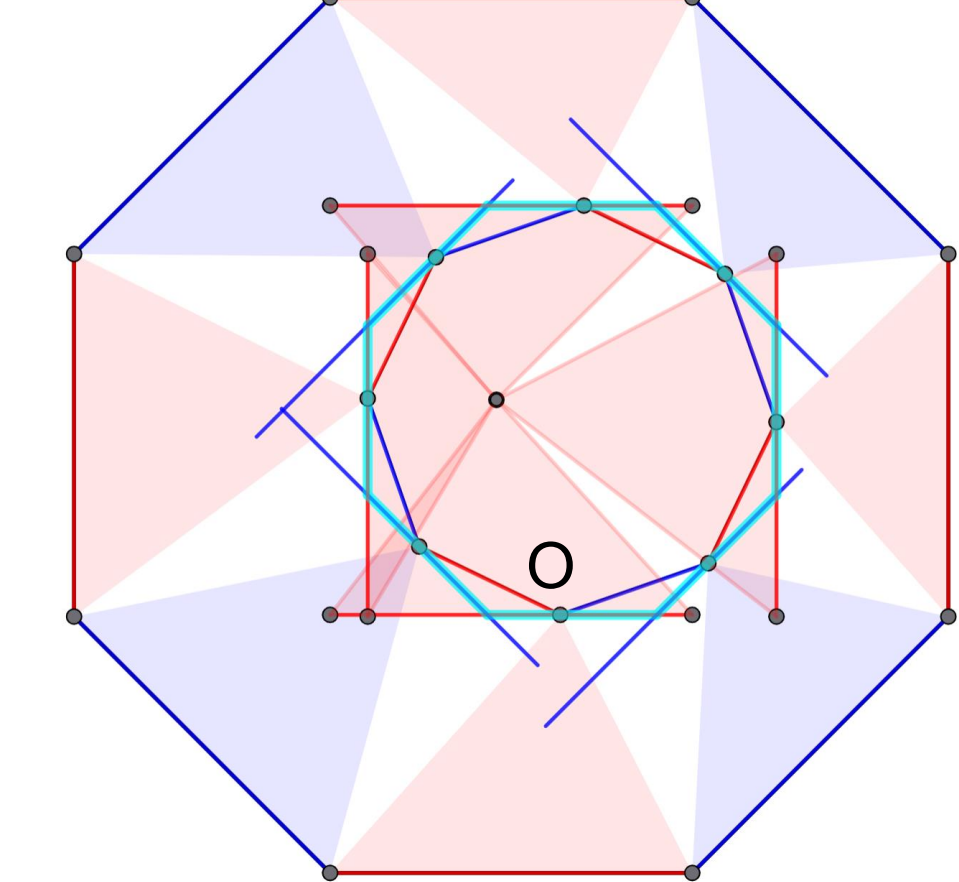


圖8-1 (作者自繪)

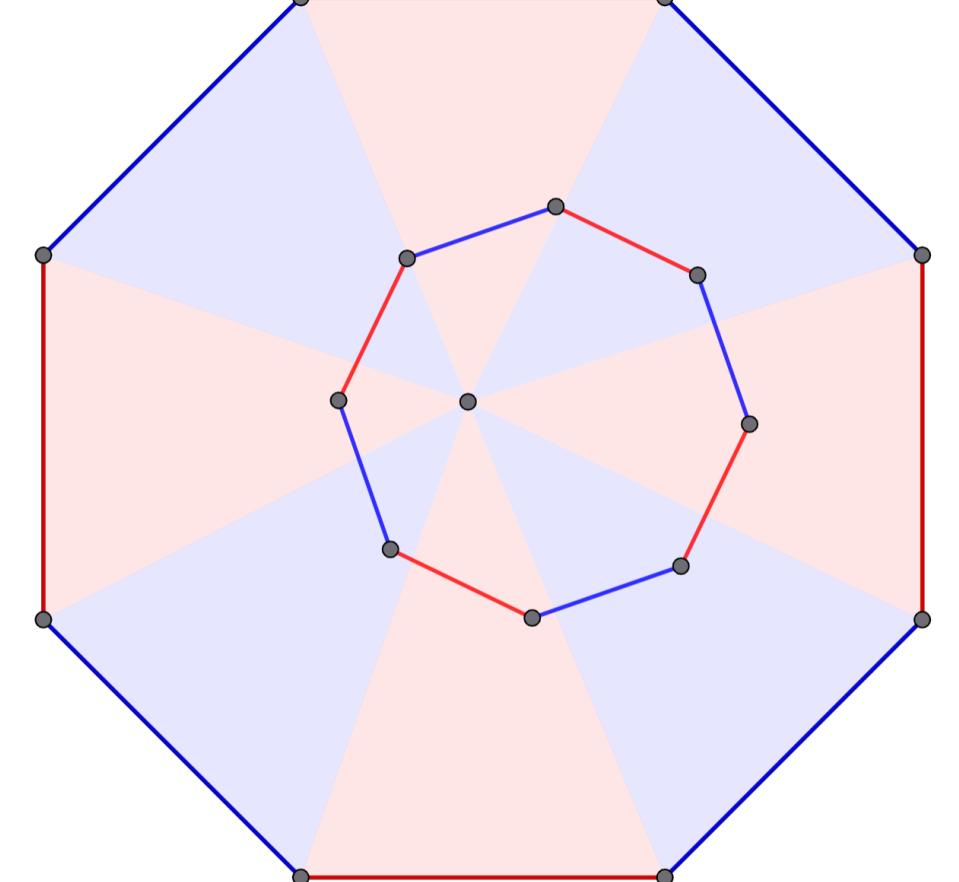


圖8-2 (作者自繪)

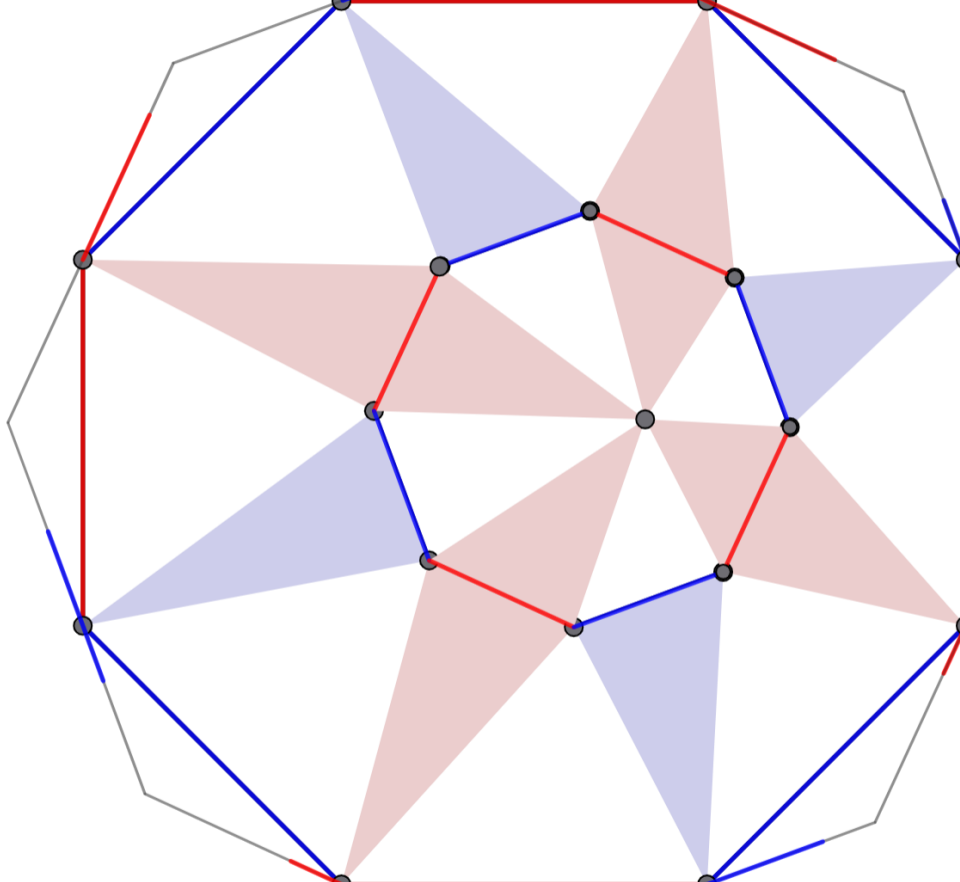


圖9-1 (作者自繪)

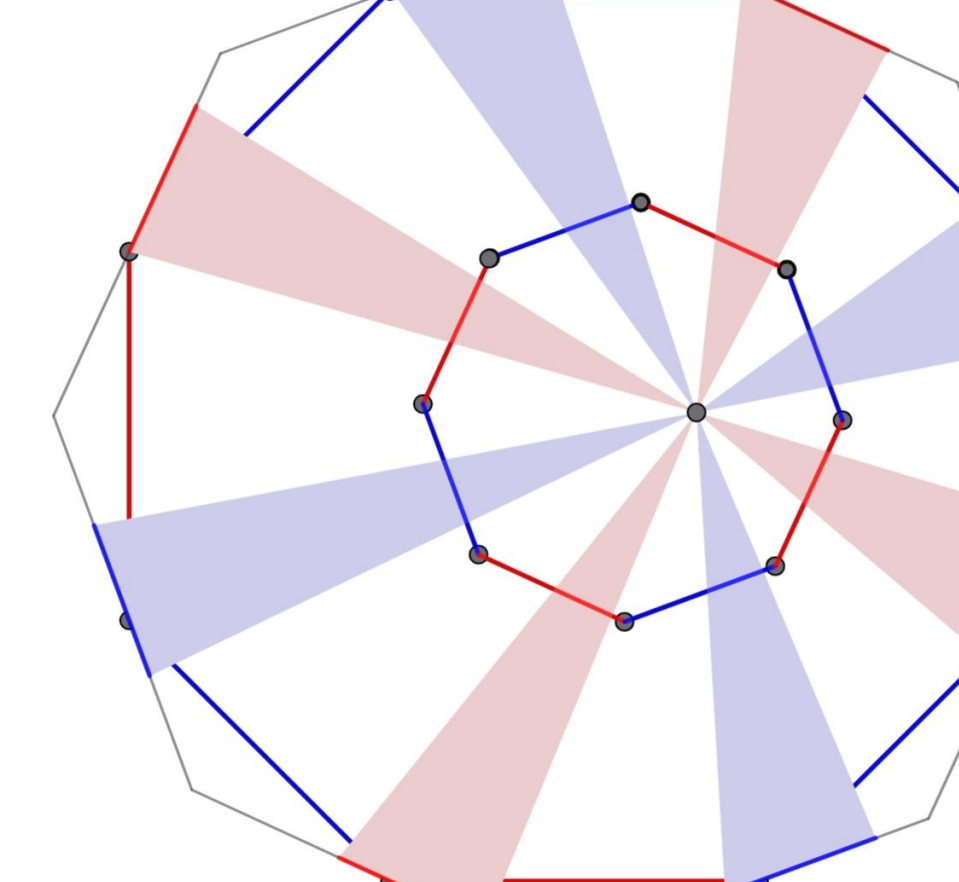


圖9-2 (作者自繪)

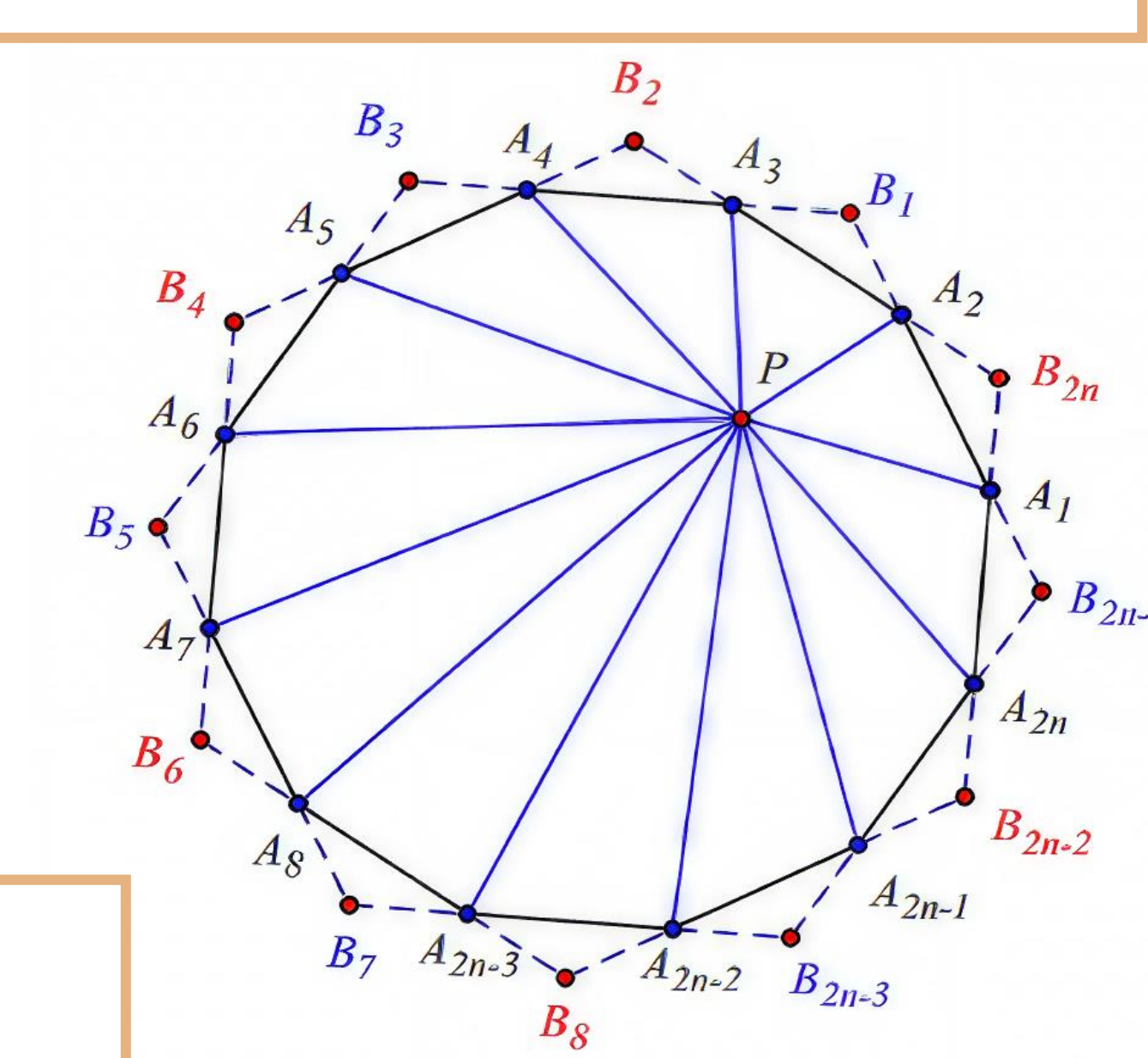


圖5 (吳佳鴻、蔡雯詠[1])

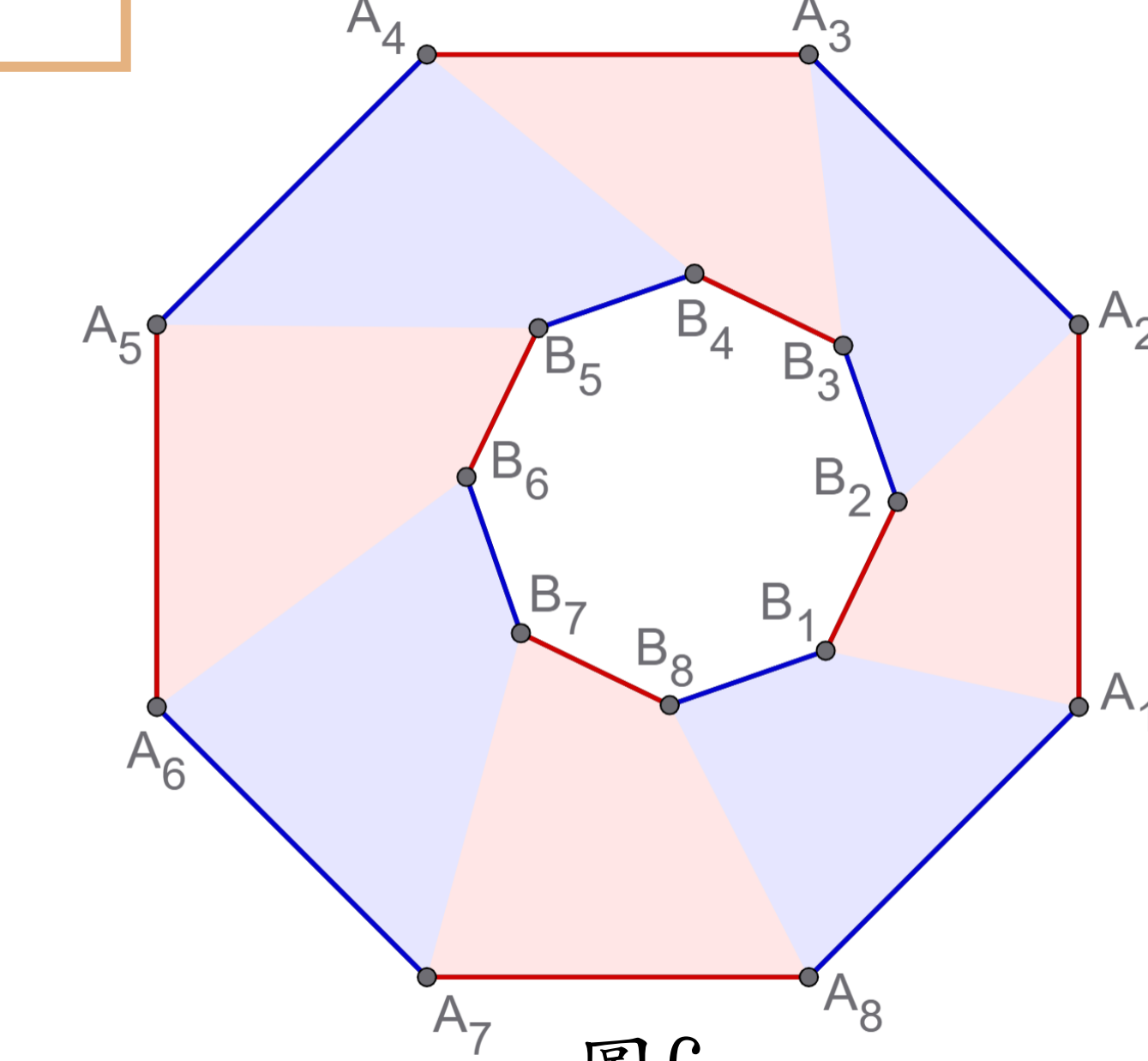


圖6 (作者自繪)

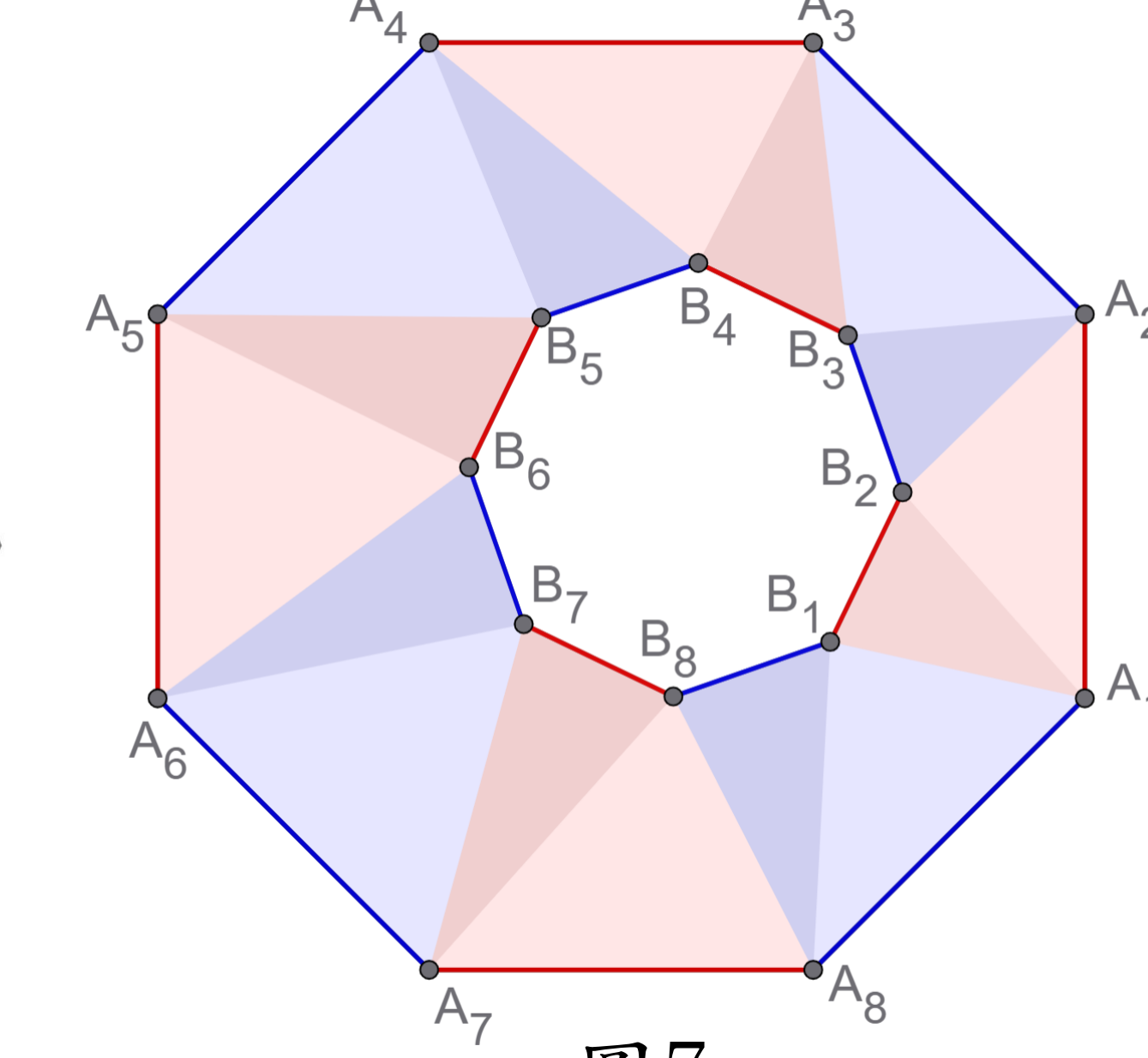


圖7 (作者自繪)

引理四： $\sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cos^{j-k} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi + \theta \right) = \sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cos^{j-k} \left( \frac{(2t-1)\pi}{n} - \varphi + \theta \right), (n > j \geq k \geq 0 \wedge n, j, k \in \mathbb{Z})$

**證明：**原式可化簡為證明等式  $\sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{j-k} \left( \frac{2t\pi}{n} - \varphi \right) = \sum_{t=1}^n \cos^k \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cdot \sin^{j-k} \left( \frac{2(t-1)\pi}{n} - \varphi \right), (n > j \geq k \geq 0),$

再以歐拉公式及二項式定理展開後又可再將與 $n$ 無關的常數項刪去，

化簡為證明  $\sum_{t=1}^n \left\{ e^{i \left( \frac{2t\pi}{n} \right) (2a+2b-p)} \right\} = \sum_{t=1}^n \left\{ e^{i \left( \frac{(2t-1)\pi}{n} \right) (2a+2b-p)} \right\} (a < k, b < j-k)$ ，最後經討論即可得兩式和相等，故得證。

**定理四：**平面上兩正 $2n$ 邊形 $A, B$ ，其中 $B$ 在 $A$ 的內部， $(p \leq n-1)$   
 則 $(S_{A_1A_2B_2B_1})^p + (S_{A_3A_4B_4B_3})^p + \dots + (S_{A_{2n-1}A_{2n}B_{2n}B_{2n-1}})^p = (S_{A_2A_3B_3B_2})^p + (S_{A_4A_5B_5B_4})^p + \dots + (S_{A_{2n}A_1B_1B_{2n}})^p$ 。

**舉例：**圖6為 $n = 4$ 的情況，其中 $(S_{A_1A_2B_2B_1})^p + (S_{A_3A_4B_4B_3})^p + (S_{A_5A_6B_6B_5})^p + (S_{A_7A_8B_8B_7})^p = (S_{A_2A_3B_3B_2})^p + (S_{A_4A_5B_5B_4})^p + (S_{A_6A_7B_7B_6})^p + (S_{A_8A_1B_1B_8})^p$ 。

**證明：**兩正 $2n$ 邊形 $A, B$ ，其中 $B$ 在 $A$ 的內部，另外接圓圓心分別為 $(0, 0), (x_0, y_0)$ , 邊長分別為 $L, l$ , 圓心至各邊的垂直距離分別為 $R_A, R_B$ ,  $\overline{AA_1}$ 和 $\overline{BB_1}$ 之夾角為 $\theta$ 。把這些四邊形分割成兩三角形，分別以 $A$ 與 $B$ 的邊為底，三角形的高有兩組，分別為 $\{H_1, H_2, \dots, H_{2n}\}, \{h_1, h_2, \dots, h_{2n}\}$ （如圖10）。  
 在 $B$ 外側作一與 $A$ 平行之正 $2n$ 邊形 $A'$ ，令其中心至各邊的距離為 $R'_A$ ，同理創造 $R'_B$ ；  
 其中不難推得 $H_i = R_A - R'_A - \left( a \cdot \cos \left( \frac{2i\pi}{n} \right) + b \cdot \sin \left( \frac{2i\pi}{n} \right) \right), h_i = R'_B - R_B - \left( a \cdot \cos \left( \frac{2i\pi}{n} + \theta \right) + b \cdot \sin \left( \frac{2i\pi}{n} + \theta \right) \right)$ 。將面積以這些符號表示，即證明等式：

$$\sum_{i=1}^n (L \cdot H_{2i} + l \cdot h_{2i})^p = \sum_{i=1}^n (L \cdot H_{2i-1} + l \cdot h_{2i-1})^p$$

將此式以二項式定理展開後適當刪去常數項，最後在大量化簡下配合引理即得出兩組面積多次方的值相等，故得證。

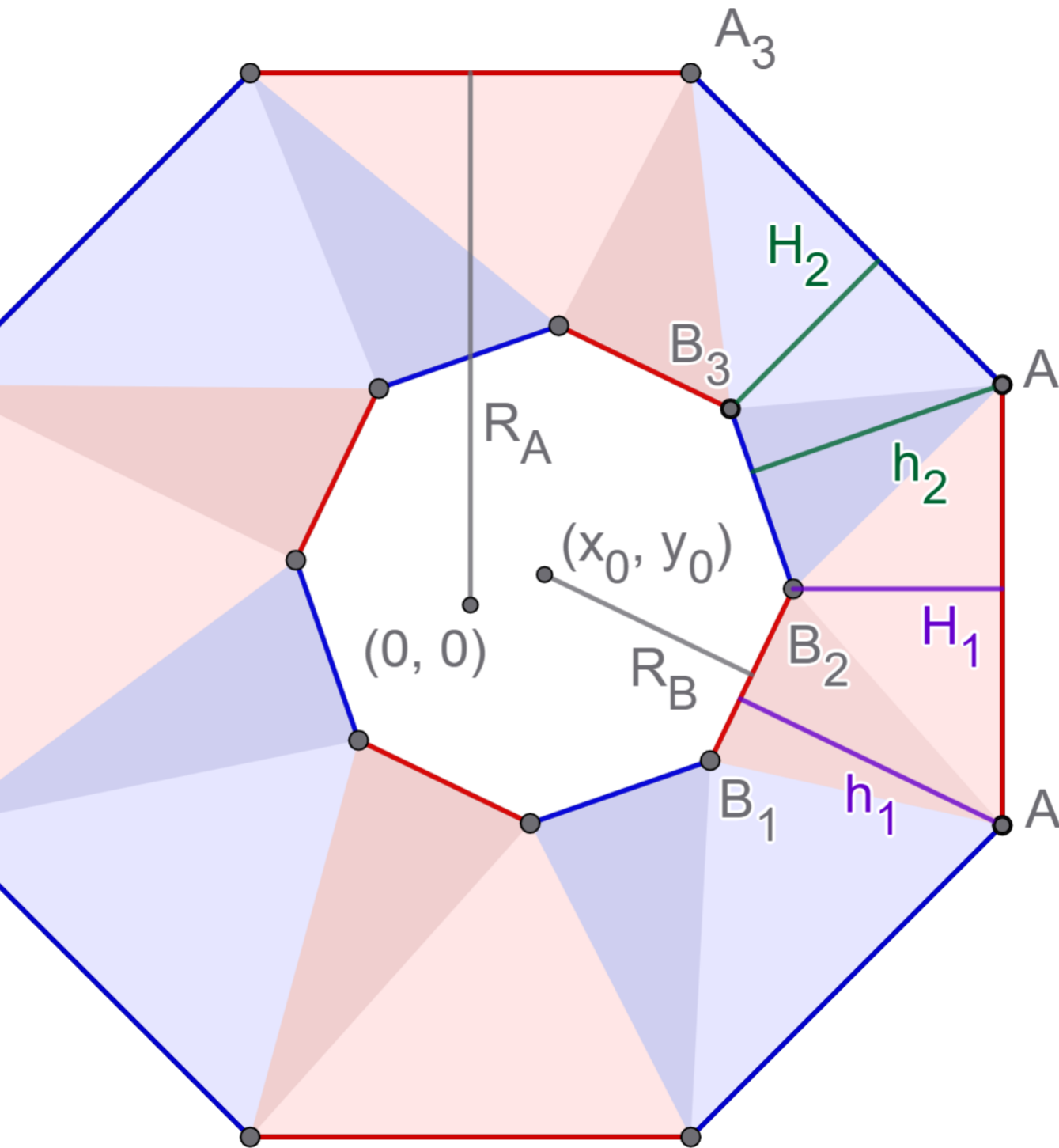


圖10 (作者自繪)



引理五：
$$\sum_{i=1}^n \left\{ \cos^a \left( \frac{2i\pi}{n} + \theta \right) \cos^b \left( \frac{2i\pi}{n} + \phi \right) \sin^c \left( \frac{2i\pi}{n} + \theta \right) \sin^d \left( \frac{2i\pi}{n} + \phi \right) \right\} \quad (k, m, n \in \mathbb{N}; n > 1)$$
$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \cos^a \left( \frac{2i\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} + \theta \right) \cos^b \left( \frac{2i\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} + \phi \right) \sin^c \left( \frac{2i\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} + \theta \right) \sin^d \left( \frac{2i\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} + \phi \right) \right\} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{N} + \{0\}; a + b + c + d < n)$$

證明：由積化和差得左式

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{A=0}^a \sum_{B=0}^b \sum_{C=0}^c \sum_{D=0}^d \left\{ C_A^a C_B^b C_C^c C_D^d (-1)^{A+B} \bullet \cos^{a+c-A-C} \theta \bullet \cos^{b+d-B-D} \phi \bullet \sin^{A+C} \theta \bullet \sin^{B+D} \phi \bullet \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \bullet \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2j\pi}{n} \right) \right\}$$

對右式進行相同的展開後，此證明即被化簡為

$$Pf: \forall a, b, c, d, A, B, C, D \in \mathbb{N} + \{0\}; t, k, m, n \in \mathbb{N}; k < m$$

$$\sum_{t=1}^n \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2t\pi}{n} \right) \bullet \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2t\pi}{n} \right) = \sum_{t=1}^n \cos^{a+b-A-B+C+D} \left( \frac{2t\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} \right) \bullet \sin^{c+d+A+B-C-D} \left( \frac{2t\pi}{n} - \frac{2k\pi}{mn} \right)$$

接著以歐拉公式代入並整理後可得左右兩式相等。

系理一：定理一、定理三、定理四在正多邊形被分成 $m$ 組時依然成立，即 $mn$ 邊形。 $(m \geq 3, m \in \mathbb{N})$

例：右兩圖為正九邊形，即 $m = 3, n = 3$ 。  
左圖中連線形成 $m$ 組線段，其平方和相等。  
右圖中連線形成 $m$ 組區域，其面積和及面積多次方和相等。  
**證明**：與原定理證明方式相同，差別只在於其中所用的引理將全部更為套用引理五。

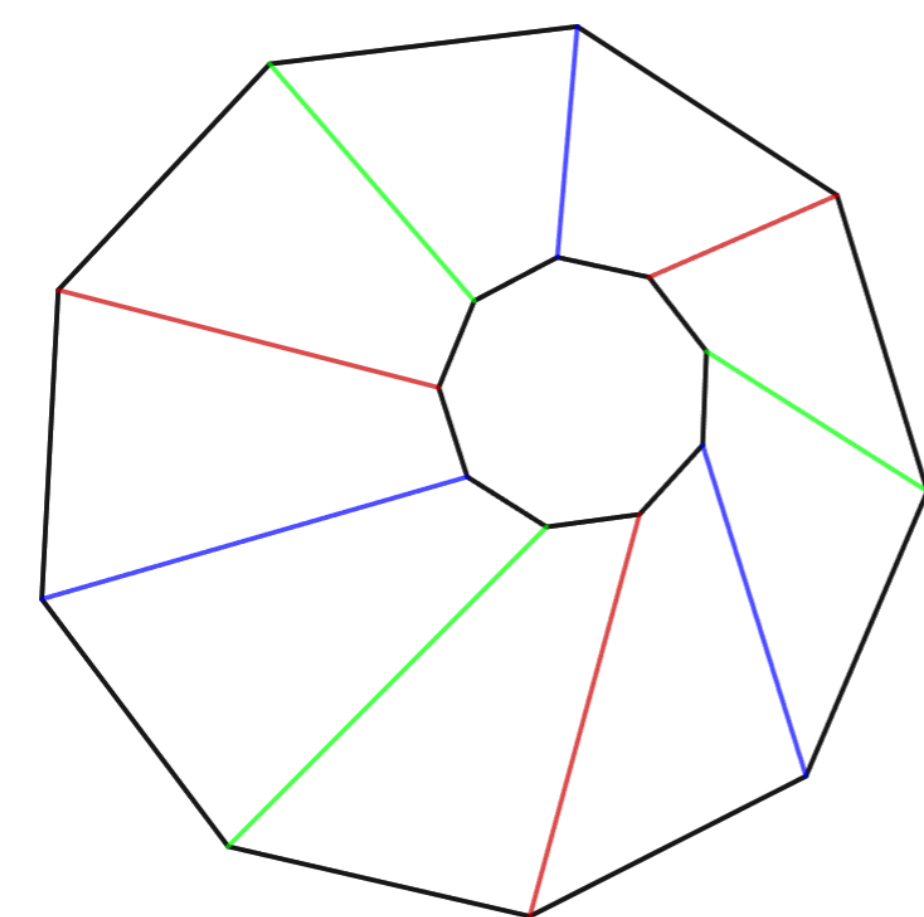


圖11 (作者自繪)

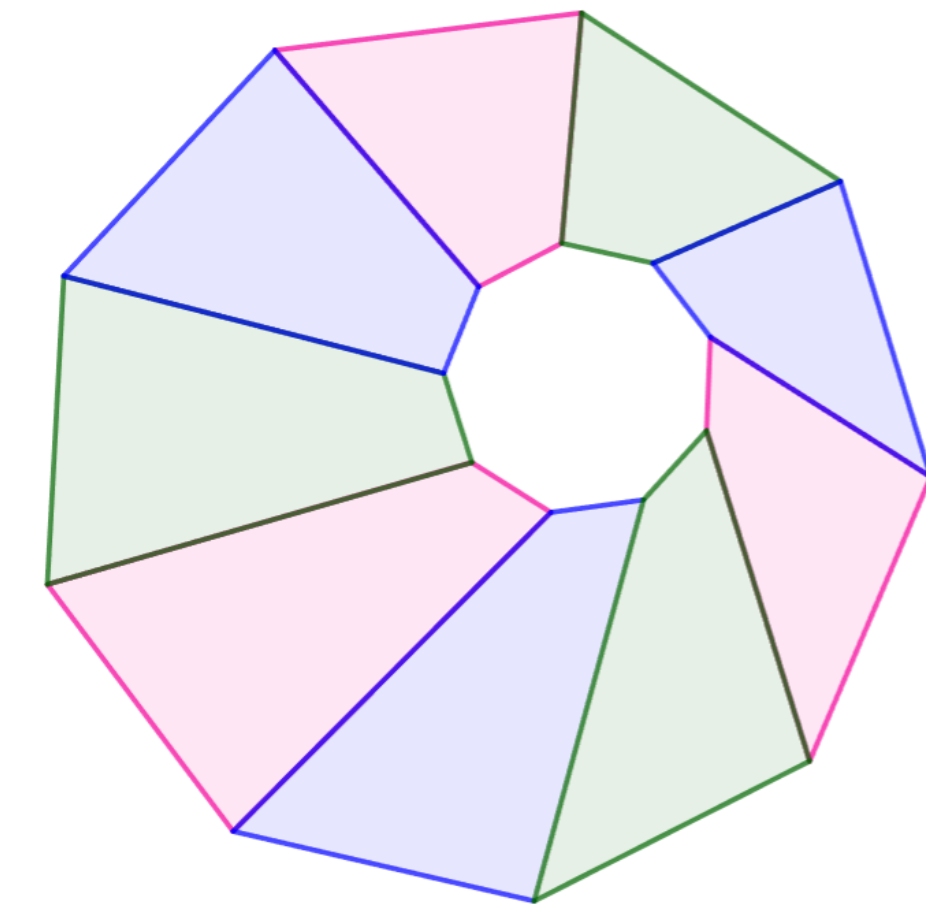


圖12 (作者自繪)

系理二：平面上任取兩正 $mn$ 邊形 $A, B$ ，則
$$\sum_{i=1}^n \left( S_{A_{2i-1}A_{2i}B_{2i}A_{2i-1}} \right)^p = \sum_{i=1}^n \left( S_{A_{2i}A_{2i+1}B_{2i+1}A_{2i}} \right)^p, (p \leq n-1)$$

**說明**：在關於面積的定理中使用的證明方法無法解決圖14中的狀況，採用測量師公式計算有向面積可解決此問題。  
**證明**：將該區域的各個頂點座標寫入測量師公式中，即可求出其有向面積。各頂點座標與前述定理中相同，則第 $m - k$ 塊 $+2m - k$ 塊 $+\cdots$ 第 $mn - k$ 塊區域面積的 $p$ 次方和由引理五得 $m$ 組面積多次方和相等，故得證。

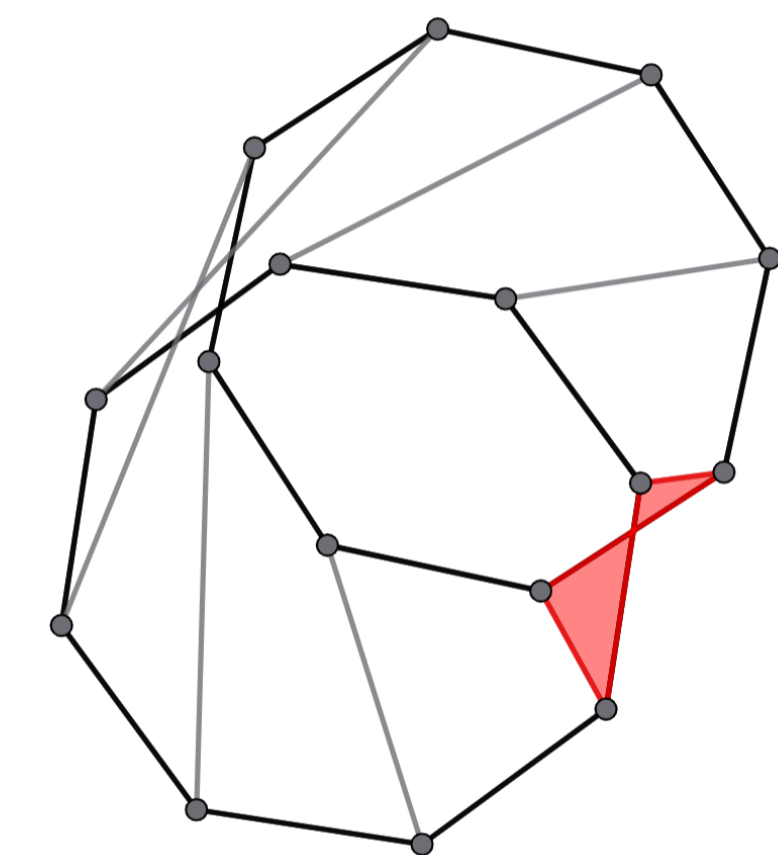


圖13 (作者自繪)

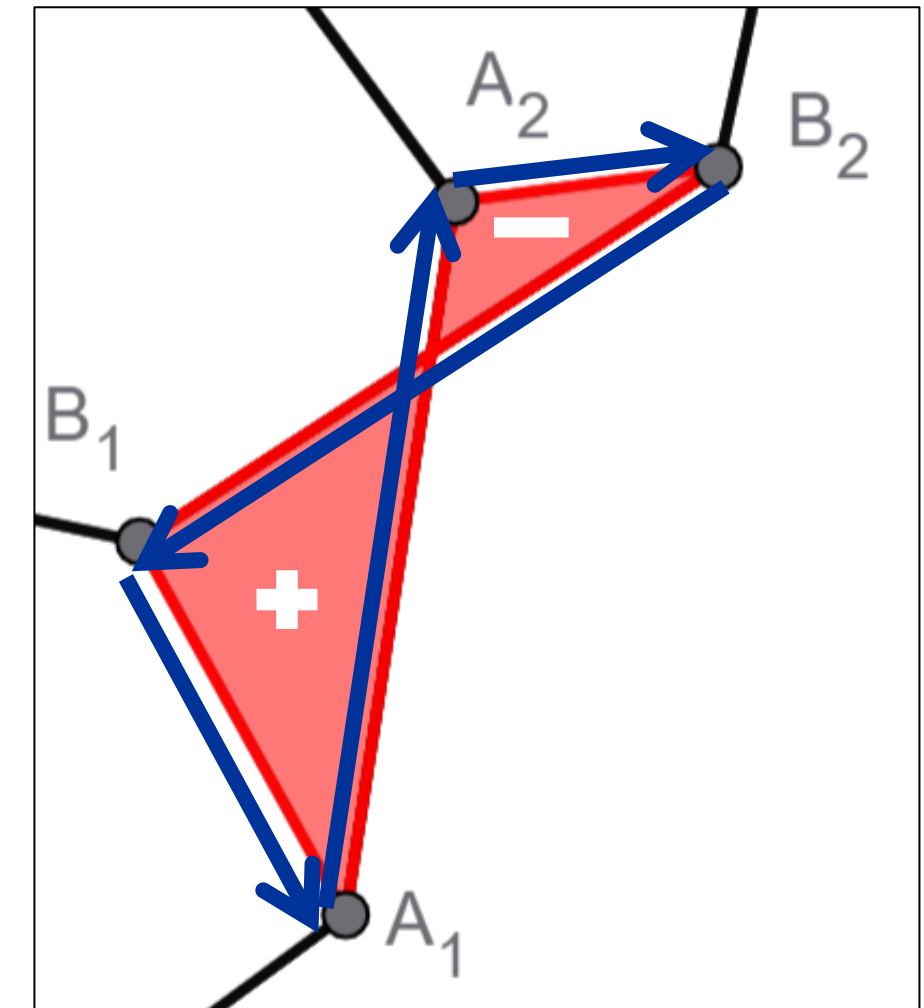


圖14 (作者自繪)

系理三：本研究中討論線段的定理（定理一與系理一）中，除了線段長度平方和，線段長度的偶數多次方和也會相等，最高可達 $2(n - 1)$ 次方。

**證明**：各頂點座標與前述定理中相同，則將線段長度寫出後再乘上偶數多次方，配合引理五可得證。

## 結論

- 一、平面上兩正 $mn$ 邊形的對應頂點依序連線， $m$ 組線段長平方和相等。
- 二、平面上兩正 $mn$ 邊形對應的頂點依序連線， $m$ 組區域面積和相等。
- 三、空間中兩正 $2n$ 邊形對應頂點依序連線， $2$ 組線段長平方和相等。
- 四、第一點的結果可以擴展至小於等於 $2(n - 1)$ 的偶數次方。
- 五、第二點的結果可以擴展至 $1 \sim n - 1$ 次方。

## 討論與未來展望

以上的研究都是依頂點順序相連，而我們認為改變頂點連接的規則也可能具有探討的價值。

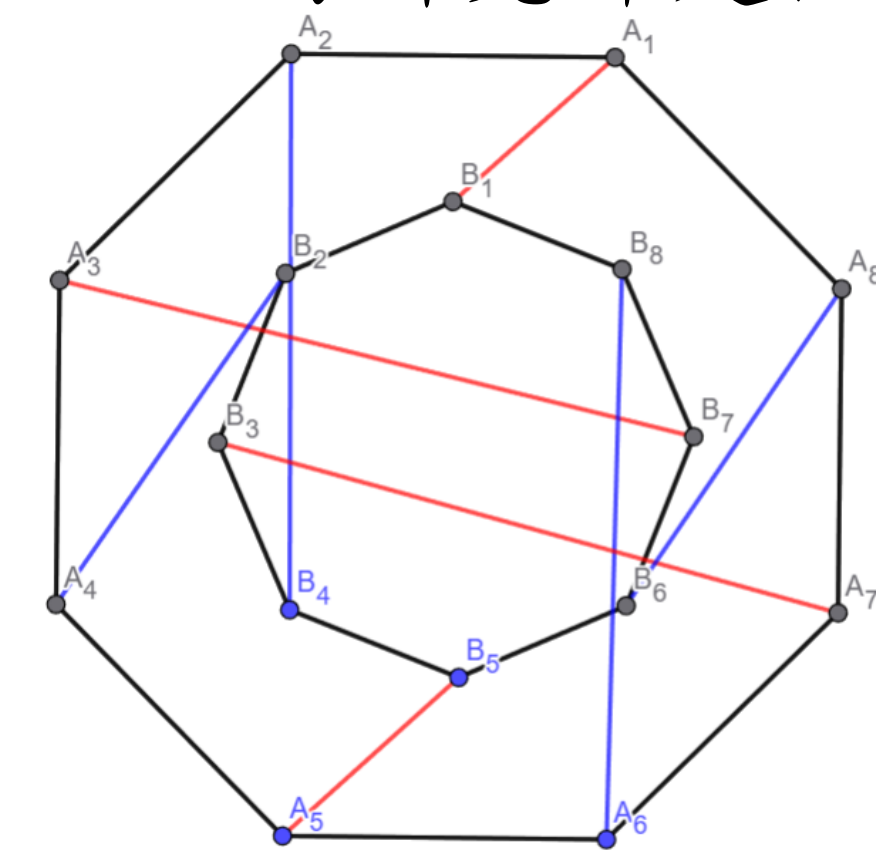


圖15 (作者自繪)

以上的性質中 $A_i$ 對應 $B_i$ ，皆為 $i$ 每次固定 $+1$ 的情形，而我們認為將條件改成每次跳過多個點是一值得研究的情況。

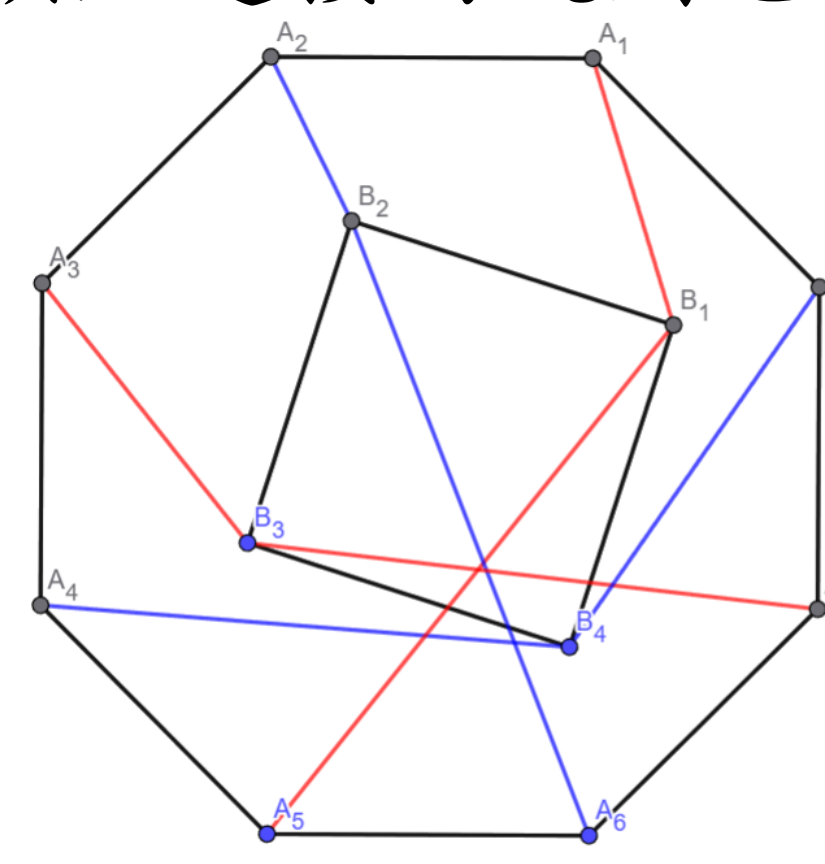


圖16 (作者自繪)

當兩個多邊形的邊數不一定要相等，在兩個多邊形頂點上可形成兩多邊形邊長長度最小公倍數個線段。

## 參考資料

[1] 吳佳鴻， 蔡雯詠. 論正 $2n$ 邊形與一點決定的三角形面積比. 中華民國第51屆中小學科學展覽會 作品說明書, 040420.  
[2] Vreken, D. (2024, April 3). Given Two Regular Hexagons, Prove:  $A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$ . Facebook.