中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050408

漢行無阻，蜿蜒曲折

學校名稱：　臺北市立大同高級中學

作者：	指導老師：
高二　蔡宇俊	陳盈穎
高二　張宸濬	李承修
高二　郭恩豪	

關鍵詞：　矩形方格、漢米爾頓路徑、動態規劃

摘要

從國立臺灣科學教育館《科學研習期刊》的一道題目中，我們開始研究矩形方格的路徑問題，透過對路徑的分類整理，由簡入繁循序漸進，讓我們有撥雲見日之感。

我們從最少轉折數及其路徑著手，延伸到最多轉折數；從利用樹狀圖討論所有漢米爾頓路徑，到運用螺旋(轉 90 度)或迴轉策略(轉 180 度)，透過其轉彎次數與轉折數的關聯，推得各個矩形方格的最多轉折數之路徑，並找出最多轉折數的公式。接著，我們分析矩形方格中有缺一塊的最多轉折數，利用路徑趨勢的轉角處與起終點，找出缺塊位置的最多轉折數與未缺塊的差異。

最後，我們試圖解出所有轉折數及其代表路徑，並整理其路徑間的關聯性，但其繁雜度又更高了，期許未來能一一解開這些問題。

壹、 前言

一、研究動機

在國立臺灣科學教育館《科學研習期刊》第 62 卷第 3 期，**森棚教官的數學題—蜿蜒曲折**，題目如下：

將 12 個單位小正方形組成一個3×4的矩形 若要畫一條轉折次數最少的折線通過 12 個小正方形的中心各一次，轉折次數最少是多少？ 若要畫一條轉折次數最多的折線通過 12 個小正方形的中心各一次，轉折次數最多是多少？ 有哪些可能的轉折次數？

首先，我們將數個小正方形組成的矩形稱為**矩形方格**，並設定連接方格中心的方式為水平或鉛直的線段。我們發現轉折數最少的路徑十分簡單就能找出；反觀轉折數最多的路徑相較複雜，所有可能轉折數亦然，這引發了我們的好奇心。我們將從邊長較小的矩形方格著手，從窮舉的路徑圖中，觀察其路徑中易於延伸討論的代表路徑，再從各種矩形方格的代表路徑之間的關聯性，分析其規律性，探討不同矩形方格之路徑間的關係。

二、　圖片來源說明

本研究中所有圖片皆由作者以 GeoGebra、Word、PowerPoint、Excel 軟體自行繪製。

三、　研究目的

(一)　找出矩形方格的最少轉折數之路徑及其公式

(二)　找出矩形方格的最多轉折數之路徑及其公式

(三)　找出有缺一塊的矩形方格之最多轉折數

四、　文獻回顧

(一)　圖論

1. 圖(*graph*)是由端點(*vertex*)組成的集合和邊(*edge*)所組成的集合，*V* 稱為 *G* 的頂點集合(*vertex*)，*E* 稱為 *G* 的邊集合(*edge*)，通常用 $G=(V,E)$表示。
2. 給一個圖 $G = (V,E)$，通過圖中的每一頂點且只通過一次的路徑稱為漢米爾頓路徑(*Hamilton Path*)。通過圖中的每一頂點且只通過一次，且要求必須再回到起始頂點的迴路，則稱為漢米爾頓迴路(*Hamilton Circuit*)。

(二)　矩形方格中有不可以完成漢米爾頓路徑的起始點

我們研究問題的所有路徑皆為漢米爾頓路徑。文獻《經理來了！─談一筆劃問題》中提到矩形方格有著不可以完成漢米爾頓路徑的起始點。

為了方便說明，我們在這裡將矩形方格以西洋棋盤黑白相間的方式，將白色方格中心的點以 A 表示，黑色方格中心的點以 B 表示，如**圖 1-1** 與**圖 1-2**。

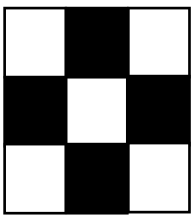


圖 1-1

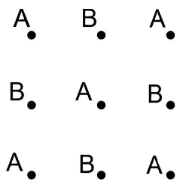


圖 1-2

可觀察到，A 的四周皆為 B，而 B 的四周皆為 A。在連接每一個中心點時，通過 A 的下一個點必為 B，而通過 B 的下一個點必為 A。**圖 1-2** 中，若以最上排的點

B 為起始點，其路徑為 B→A→B→A→B→A→B→A ，將剩下一個 A，無法完成漢米爾頓路徑，如**圖 1-3**。另外，若以 A 為起始點，分為由頂點開始或中心點開始，例如**圖 1-4** 與**圖 1-5**，其路徑為 A→B→A→B→A→B→A→B→A。

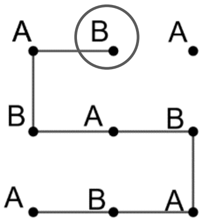


圖 1-3

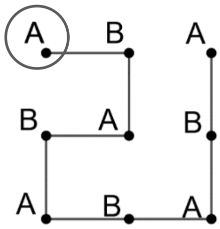


圖 1-4

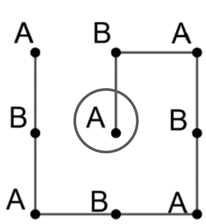


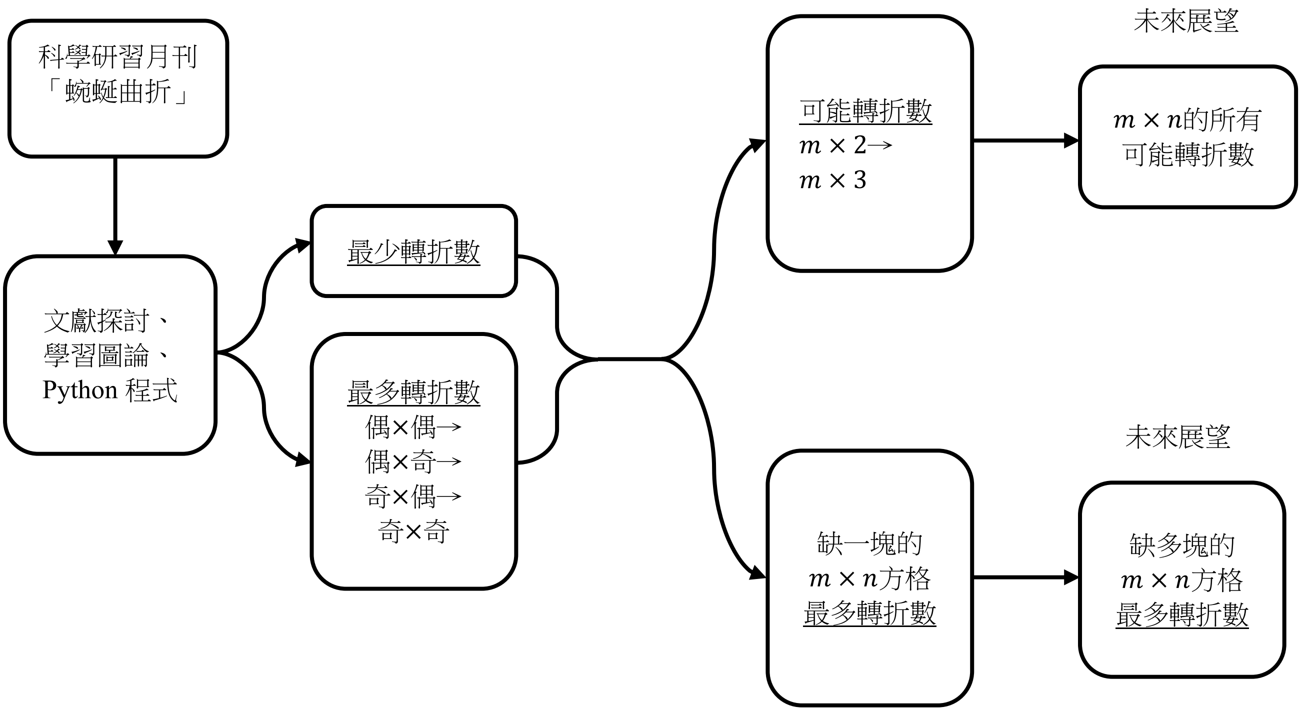
圖 1-5

貳、 研究設備及器材

研究筆記本、文書處理軟體：word、ppt、數學繪圖軟體：GeoGebra、程式：python

參、 研究過程及方法

研究架構圖



Definition 1 矩形方格的小正方形中心點表示方式

首先，將矩形方格$m \times n$中，每一塊小正方形的中心點以數對(i, j)表示，其中i表示此中心點位於第i列、j表示此中心點位於第j行。如**圖 2-1** 所示：

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(1, j)$	$\cdots$	$(1, n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$\cdots$	$(2, j)$	$\cdots$	$(2, n)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\cdots$	$(3, j)$	$\cdots$	$(3, n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$(i,1)$	$(i,2)$	$(i,3)$	$\cdots$	(i, j)	$\cdots$	(i, n)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$(m,1)$	$(m,2)$	$(m,3)$	$\cdots$	(m, j)	$\cdots$	(m, n)

圖 2-1

不失一般性，在討論路徑起始點(i, j)時，僅需討論$1 \le i \le \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$、$1 \le j \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$的情形。

Definition 2 定義轉折/轉彎的兩種形式：迴轉或螺旋

矩形方格$m \times n$，當路徑走到底時，必定要轉折/轉彎(趨勢)，定義兩種轉折/轉彎策略：

(1) 螺旋策略：轉$90°$的轉折/轉彎，如**圖 2-2**。

以轉$90°$完成路徑的策略，稱為螺旋策略。

(2) 迴轉策略：轉$180°$的轉折/轉彎，如**圖 2-3**。

以轉$180°$完成路徑的策略，稱為迴轉策略。

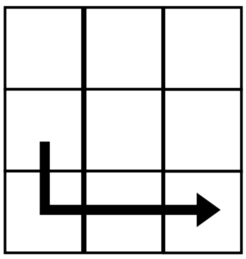


圖 2-2

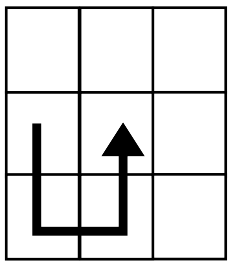


圖 2-3

Definition 3 定義函數及矩形方格擺放方式

矩形方格 $m \times n$	$L(m,n)$	路徑的最少轉折數（*Least*）
	$M(m,n)$	路徑的最多轉折數（*Most*）
	$L_R(m,n)$	螺旋策略的最少轉折數
	$M_R(m,n)$	螺旋策略的最多轉折數
	$L_U(m,n)$	迴轉策略的最少轉折數
	$M_U(m,n)$	迴轉策略的最多轉折數
	$M_{(i,j)}(m,n)$	有缺塊(i,j)的最多轉折數

矩形方格$m \times n$經過旋轉$90°$即為$n \times m$，上述函數在矩形方格$m \times n$、$n \times m$的函數值是相同的，例如 $L(m,n) = L(n,m)$、$M(m,n) = M(n,m)$。

矩形方格$m \times n$，其中m為列數，n為行數。不失一般性，假設$m \geq n$，我們將這樣列數大於或等於行數的擺放方式，稱為**直向擺放**；以下全文的討論皆將矩形方格**直向擺放**。

矩形方格的基礎圖形 $\boldsymbol{k} \times \mathbf{2}$

(一)矩形方格2×2

不失一般性，從(1,1)開始。

接著，向右、向下是對稱的，選擇向右，

再來僅能向下再向左，完成路徑。

即(1,1)→(1,2)→(2,2)→(2,1)，僅此一路徑。

因此$L(2,2) = M(2,2) = 2$，如**圖 2-4**。

(1,1)	(1,2)
(2,1)	(2,2)

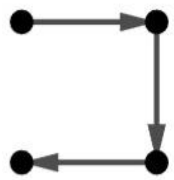
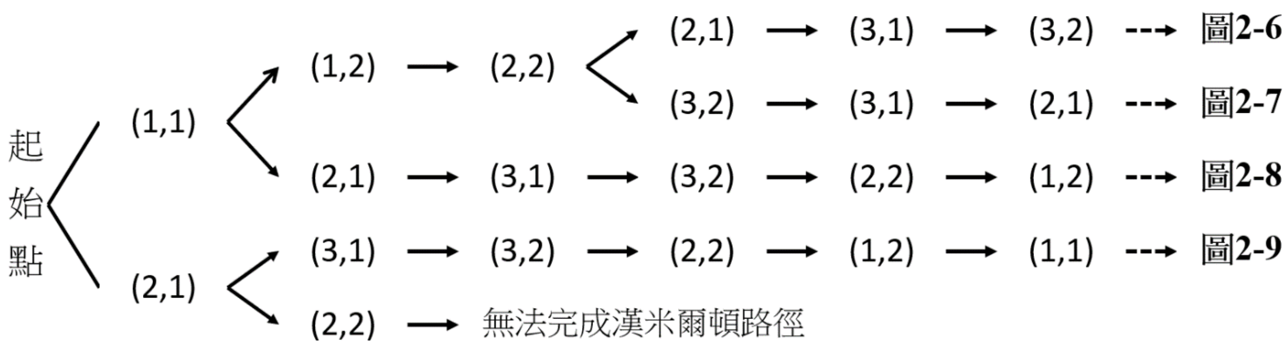


圖 2-4

(二)矩形方格3×2

不失一般性，運用樹狀圖討論起始點為(1,1)或(2,1)的情形。



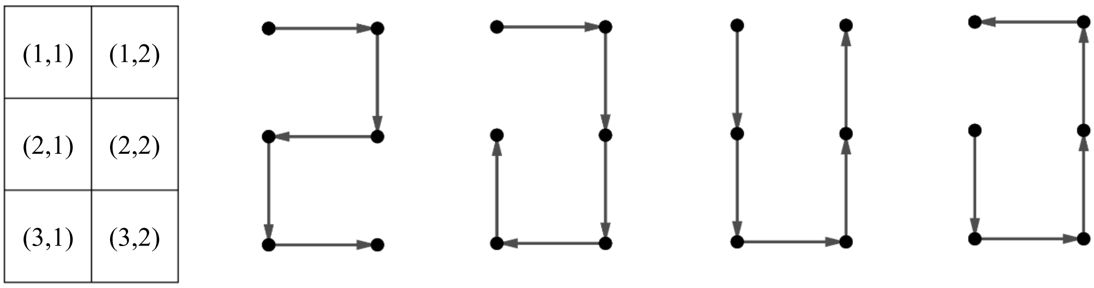


圖 2-5 **圖 2-6** **圖 2-7** **圖 2-8** **圖 2-9**

其中，**圖 2-7** 與**圖 2-9** 所得路徑相同，因此矩形方格3×2僅有**圖 2-6**、**圖 2-7** 與**圖 2-8** 三種漢米爾頓路徑，其轉折數分別為 4、3、2，故$L(3,2) = 2$、$M(3,2) = 4$。其中**圖 2-8** 的 U 形為最少轉折數的路徑，而**圖 2-6** 的 S 形為最多轉折數的路徑。

(三)矩形方格$m \times 2$

Theorem 1 矩形方格$\boldsymbol{m} \times 2$的最少轉折數

在矩形方格$m \times 2$中，最少轉折數$L(m,2) = 2$，其中$m \geq 2$。

證明：

不失一般性，起始點(i,j)，僅需討論$1 \leq i \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$，$j = 1$的情況。

首先，以**圖 2-8** 相同作法的 U 形路徑，可得轉折數為 2。

故僅需說明不存在其他更小轉折數之路徑。

1. 以(1,1)為起始點

(1) 向右走到(1,2)

接著僅能向下到(2,2)，此時，產生第一個轉折。

接著若向左走到(2,1)，則累計兩個轉折，後續累計轉折數≥ 2。

若不向左，選擇向下，接著僅能繼續向下，否則無法完成漢米爾頓路徑，下至$(m,2)$後必定要向左，再由$(m,1)$向上，最後到(2,1)，此路徑轉折數為3。

(2) 向下走到(2,1)

接著僅能繼續向下，否則無法完成漢米爾頓路徑，下至$(m,1)$後必定要向右，再由$(m,2)$向上，最後到(1,2)，此路徑即 U 形路徑，得轉折數為2。

(1,1)	(1,2)
(2,1)	(2,2)
(3,1)	(3,2)
⋮	⋮
$(i,1)$	$(i,2)$
⋮	⋮
$(m,1)$	$(m,2)$

圖 2-10

2. 以$(i,1)$為起始點，其中i不等於1

向上或向下，都只能到底，然後向右，再轉彎完成漢米爾頓路徑。

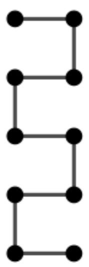
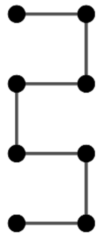
最終路徑之轉折數為3或4。

由上述 1、2，得最少轉折數的路徑為 U 形，轉折數為 2，故$L(m,2)=2$，其中$m \geq 2$。

■

由前述矩形方格3×2中，我們得知 S 形走法為最多轉折數的路徑。此外，我們也觀察到在**圖 2-6** 中，除了起、終點之外，每個點皆為轉折處，故而轉折數最多。

矩形方格$\boxed{m \times 2}$以**圖 2-6** 相同的方式延伸，可得以下兩種情形：

m為奇數，起、終點在相異兩側	m為偶數，起、終點同側
 **圖 2-11**	 **圖 2-12**

Theorem 2 矩形方格$\boldsymbol{m}\times\mathbf{2}$最多轉折數

$M(m,2)=2(m-1)$，其中 m 為任意正整數。

證明：

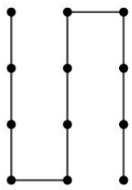
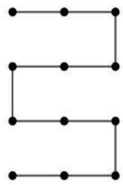
以**圖 2-11** 與**圖 2-12** 相同的策略所得的 S 形路徑僅起始點與終點為非轉折處，其餘 $2m-2$個點皆為轉折處，轉折數為最多，所以$M(m,2)=2m-2=2(m-1)$。

■

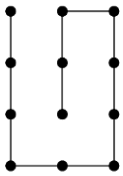
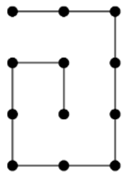
一、矩形方格$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$的最少轉折數路徑及其公式

由 **Definition 2**，以矩形方格4×3為例，我們嘗試以下兩種轉折方式：

1. 採取迴轉策略(轉$180°$)，得到以下兩種走法。

沿著長邊方向開始 路徑轉折數為$4=2\times(短邊-1)$	沿著短邊方向開始 路徑轉折數為$6=2\times(長邊-1)$
 **圖 3-1**	 **圖 3-2**

2. 採取螺旋策略 (轉$90°$)，得到以下兩種走法。

沿著長邊方向開始 路徑轉折數為$4=2\times(短邊-1)$	沿著短邊方向開始 路徑轉折數為$5=2\times\big(短邊-1\big)+1$
 **圖 3-3**	 **圖 3-4**

因此，在列數與行數相異的矩形方格中，我們發現從頂點 (1,1)為起點、沿著長邊方向開始，其路徑可得最少轉折。如**圖 3-1** 與**圖 3-3**。當長寬相同時，兩者相同。

Theorem 3 矩形方格$\boldsymbol{m \times n}$之最少轉折數

任意的矩形方格$m \times n$，最少轉折數$L(m,n) = 2 \times (\min\{m,n\} - 1)$。

證明：

由 **Theorem 1**，得知$L(k,2) = 2$，其中$k \geq 2$。

不失一般性，假設$m \geq n \geq 2$，也就是將矩形方格直向擺放。

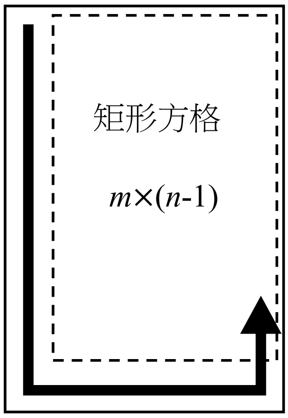


圖 3-5

(1) 螺旋策略(轉90°)：

從頂點 (1,1)為起點，沿著長邊方向開始，

可得轉折數之遞迴關係式為：

$$\begin{cases} L_R(m,n) = L_R(m-1,n-1) + 2 \\ \quad L_R(k,2) = L(k,2) = 2 \end{cases}, m \geq n > 2$$

則$L_R(m,n) = L_R(m-1,n-1) + 2 = L_R(m-2,n-2) + 2 \times 2$

$$= \cdots = L_R(m-n+2,2) + (n-2) \times 2 = (n-1) \times 2$$

其轉折數為 2×(短邊−1)。

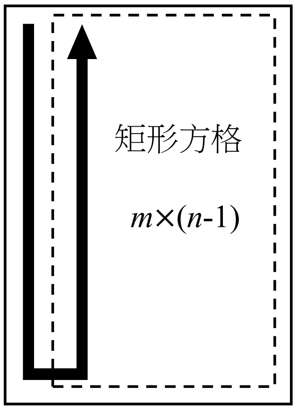


圖 3-6

(2) 迴轉策略(轉180°)：

從頂點 (1,1)為起點，沿著長邊方向開始，

可得轉折數之遞迴關係式為：

$$\begin{cases} L_U(\mathrm{m},\mathrm{n}) = L_U(\mathrm{m},\mathrm{n}-1) + 2 \\ \quad L_U(\mathrm{k},2) = L(k,2) = 2 \end{cases}, m \geq n > 2$$

則$L_U(m,n) = L_U(m,n-1) + 2 = L_U(m,n-2) + 2 \times 2$

$$= \cdots = L_U(m,2) + (n-2) \times 2 = (n-1) \times 2$$

其轉折數為 2×(短邊−1)。

由(1)、(2)，兩種策略皆可得到最少轉折數之路徑，$L(m,n) = 2 \times (\min\{m,n\} - 1)$

■

採取螺旋策略(轉90°)的形式，其最少轉折數與迴轉策略(轉180°)相同，我們知道螺旋策略的路徑並不是最少轉折數的唯一路徑，卻是全文的核心策略與基礎。

二、矩形方格$\boldsymbol{m \times n}$的最多轉折數路徑及其公式

試著找出任意矩形方格$m \times n$的最多轉折數及其路徑的過程中，我們發現利用樹狀圖窮舉的方式，隨著矩形方格的列數、行數增加，其路徑數量成指數增長。因此，我們化繁為簡，將所有矩形方格運用迴轉策略(轉180°)或螺旋策略(轉90°)，觀察其轉彎次數與轉折數的關係，推得各個矩形方格的最多轉折數之路徑，藉此找出最多轉折數公式。

(一) 矩形方格$\boldsymbol{m \times 3}$：最多轉折數的公式

由 **Theorem2** 已知矩形方格$m \times 2$的最多轉折數。在此，利用樹狀圖窮舉出3×3、4×3的所有漢米爾頓路徑，再從中觀察其路徑的關係，進而證明矩形方格$m \times 3$最多轉折數。

矩形方格3×3

利用樹狀圖可窮舉出矩形方格3×3所有的漢米爾頓路徑為**圖 4-1**、**圖 4-2** 與**圖 4-3** 三種，其轉折數分別為 5、4、3，故$M(3,3) = 5$。另外，可觀察出**圖 4-1**、**圖 4-2** 與**圖 4-3** 恰為矩形方格3×2的路徑**圖 2-6**、**圖 2-7** 與**圖 2-8** 延伸而來。

矩形方格4×3

同樣運用樹狀圖可窮舉出矩形方格4×3所有的漢米爾頓路徑，其中最多轉折數的路徑有三個，**圖 4-4**、**圖 4-5**、**圖 4-6**，得$M(4,3) = 8$；其中**圖 4-4** 從頂點(1,1)出發的路徑，而**圖 4-5** 為從點(1,2)出發的路徑，兩者皆可視為使用螺旋策略及迴轉策略的路徑，除此之外，可由**圖 4-5** 形成漢米爾頓迴路。而**圖 4-5**、**圖 4-6** 的下半部是對稱的。

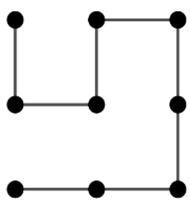


圖 4-1

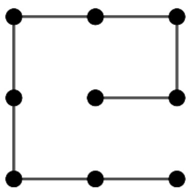


圖 4-2

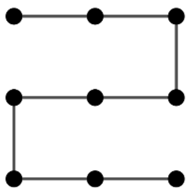


圖 4-3

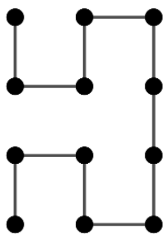


圖 4-4

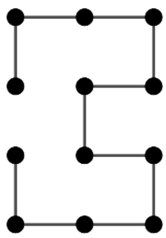


圖 4-5

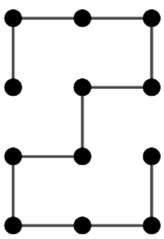


圖 4-6

矩形方格$m \times 3$

在矩形方格5×3、6×3、7×3、8×3中，運用樹狀圖窮舉的方式找出最多轉折數的路徑，不只一種，我們將其符合螺旋策略的路徑，繪製如下：

奇數$\times 3$		偶數$\times 3$	
5×3	7×3	6×3	8×3

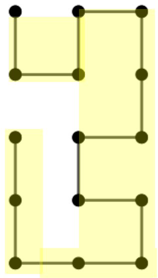
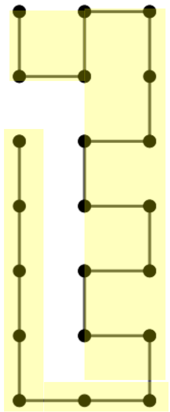
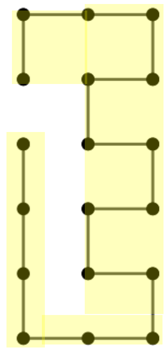
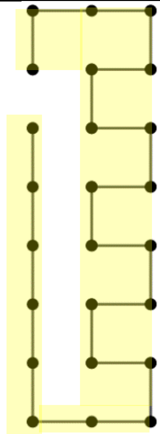

			

圖 4-7	**圖 4-8**	**圖 4-9**	**圖 4-10**

從中可發現，這些矩形方格的路徑上方：2×3的路徑有兩種：

(1) 當m為奇數時：必須以頂點$(1,1)$為起點，$(2,1)$不能為起始點的原因，如同文獻回顧中提到的，$(2,1)$為起始點，不能完成漢米爾頓路徑。

(2) 當m為偶數時：由左邊點$(2,1)$為起點而非頂點$(1,1)$，理由為，由頂點$(1,1)$為起始點，無法使用螺旋策略，完成最多轉折數的漢米爾頓路徑。

以上兩路徑皆為使用螺旋策略完成的漢米爾頓路徑，並且，皆為最多轉折數的路徑。

Theorem 4 矩形方格 $m \times 3$ 最多轉折數

$M(m,3) = 2m$，其中$m \geq 3$。

證明：在矩形方格$m \times 3$中$(m \geq 3)$，符合螺旋策略的路徑形同**圖 4-7** 至**圖 4-10**，

其轉折數為所有點減去起終點，再來，每使用螺旋策略轉彎一次會減少一個轉折，

最後，長長的尾巴也會減少轉折，減少的數量為$(m-4)$

故$M(m,3) = (3m-2) - 2 - (m-4) = 2m$ ■

(二) 矩形方格 $\boldsymbol{m \times n}$：最多轉折數的公式

首先，很顯然的，任意矩形方格$m \times n$的最大轉折數$M(m, \mathrm{n})$的上界為$mn - 2$，僅起始點及終點沒有轉折，其餘各點皆為轉折處；符合此上界的情形，可由 **Theorem 2** 中證得，矩形方格$\mathrm{m} \times 2(m \geq 2)$可達到。

因此，在後續討論任意矩形方格$m \times n$的情形中，若要得到最多轉折數，原則上要愈多$k \times 2$的矩形方格才能辦到。然而，為了要完成任意的矩形方格$m \times n$的漢米爾頓路徑，當路徑走到底時，路徑的趨勢必產生轉彎，由 **Definition 2**，分為迴轉策略與螺旋策略兩種。

Lemma 1 矩形方格$\boldsymbol{m \times n}$路徑策略選擇與轉折數之影響

路徑使用**螺旋策略(轉90°)**方式得到的每轉彎一次會少 1 個轉折數；
路徑使用**迴轉策略(轉180°)**方式得到的每迴轉一次會少 2 個轉折數。

證明：

首先，

若路徑需要向異側延伸，則須將路徑修改，如**圖 5-1**

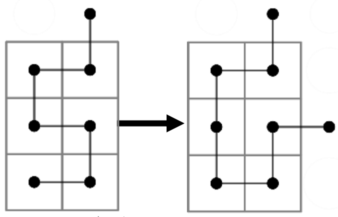
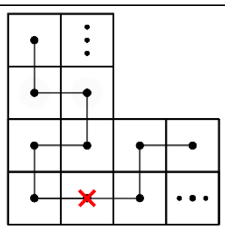
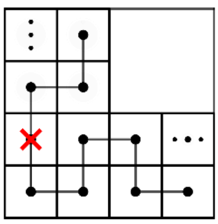
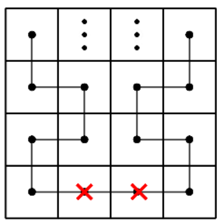
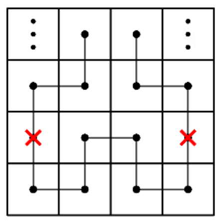


圖 5-1

螺旋策略(轉90°)		迴轉策略(轉180°)	
 **圖 5-2**	 **圖 5-3**	 **圖 5-4**	 **圖 5-5**

接著，從**圖 5-2** 與**圖 5-3** 可知，每使用螺旋策略一次，轉折數會少 1；
而從**圖 5-4** 與**圖 5-5** 可知，每使用迴轉策略一次，轉折數會少 2。

■

為找出最多轉折數的路徑，即為透過螺旋策略或迴轉策略，找出損失最少轉折數的路徑。以下將矩形方格分為四種情形討論：偶數×偶數、偶數×奇數、奇數×偶數、奇數×奇數。

Theorem 5 矩形方格 偶數×偶數 最多轉折數

矩形方格$2k \times 2t$中，$M(2k,2t) = (2k-1) \times 2t$，其中$2k \geq 2t$。

證明：

不失一般性，假設$2k \geq 2t \geq 4$。

為了減少損失轉折數，由 **Theorem2** 可知，必須從長邊方向開始。

1. 螺旋策略：

由 **Lemma 1**，轉彎數等於損失的轉折數。

而螺旋策略的轉彎數等於$L_R(k,t)$，圖示如**圖 5-6。**

得$M_R(2k,2t) = (2k \times 2t - 2) - L_R(k,t) \ = (2k-1) \times 2t$

2. 迴轉策略：

由 **Lemma 1**，迴轉數的兩倍等於損失的轉折數。

而其迴轉數的兩倍等於$L_U(k,t)$，圖示如**圖 5-7**。

得$M_U(2k,2t) = (2k \times 2t - 2) - L_U(k,t) \ = (2k-1) \times 2t$

由 1、2 得，$M(2k,2t) = (2k-1) \times 2t$，其中$2k \geq 2t \geq 4$。

又由 **Theorem 2**，得$M(2k,2t) = (2k-1) \times 2t$，其中$2k \geq 2t$。

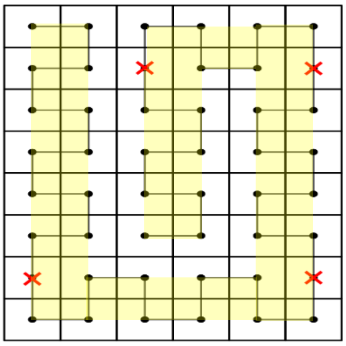


圖 5-6

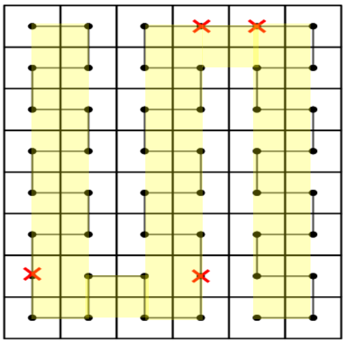


圖 5-7

■

Theorem 6 矩形方格 偶數×奇數 最多轉折數

矩形方格$2k \times (2t+1)$中，$M(2k,2t+1) = 2k \times 2t$，其中$2k \geq 2t+1$。

證明： 不失一般性，假設$2k \geq 2t+1 > 3$。以矩形方格8×5圖示如下：

1. 螺旋策略：

(1) 偶數邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-8**)

=所有點的數量−起終兩點−轉彎減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$= 2k(2t+1) - 2 - L_R(k, t+1) - (2k - 2t - 1) = 4kt - 1$

(2) 奇數邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-9**)

=所有點的數量−起終兩點−轉彎減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$= 2k(2t+1) - 2 - (L_R(k, t+1) + 1) - (2k - 2t - 3) = 4kt$

2. 迴轉策略

(1) 偶數邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-10**)

=所有點的數量−起終兩點−迴轉減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$= 2k(2t+1) - 2 - L_U(k, t+1) - (2k - 3) = 4kt - 2t + 1$

(2) 奇數邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-11**)

=所有點的數量−起終兩點−迴轉減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$= 2k(2t+1) - 2 - (2k - 2) - 0 = 4kt$

得$M(2k, 2t+1) = 2k \times 2t$，其中$2k \geq 2t+1$。

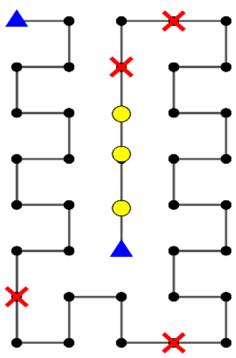


圖 5-8

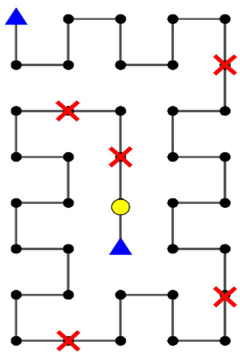


圖 5-9

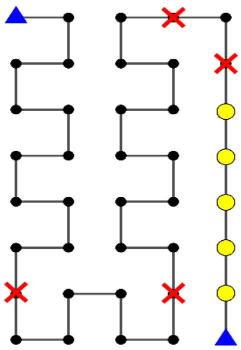


圖 5-10

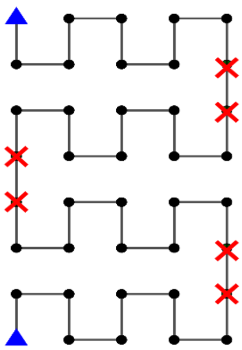


圖 5-11

■

Theorem 7 矩形方格 奇數×偶數 最多轉折數

矩形方格$(2k+1)\times 2t$中，$M(2k+1,2t)=2k\times 2t$，其中$2k+1\geq 2t$。

證明： 不失一般性，假設$2k+1\geq 2t>4$。以矩形方格9×6舉例圖示如下：

1. 螺旋策略：

(1) 偶數邊出發的轉折數（圖示如**圖 5-12**）

=所有點的數量−起終兩點−轉彎減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$=(2k+1)\times 2t-2-(L_R(k+1,t)+1)-0=4kt-1$

(2) 奇數邊出發的轉折數（圖示如**圖 5-13**）

=所有點的數量−起終兩點−轉彎減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$=(2k+1)\times 2t-2-L_R(k+1,t)-0=4kt$

2. 迴轉策略

(1) 偶數邊出發的轉折數（圖示如**圖 5-14**）

=所有點的數量−起終兩點−迴轉減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$=(2k+1)\times 2t-2-(2k-2)-(2t-3)=4kt-2k+3$

(2) 奇數邊出發的轉折數（圖示如**圖 5-15**）

=所有點的數量−起終兩點−迴轉減少的轉折數−最後尾巴減少的轉折數

$=(2k+1)\times 2t-2-L_U(k+1,t)-0=4kt$

得$M(2k+1,2t)=2k\times 2t$，其中$2k+1\geq 2t$。

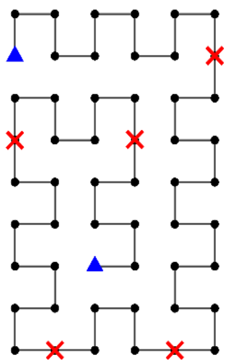


圖 5-12

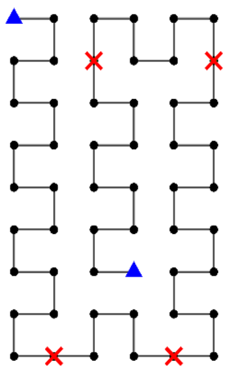


圖 5-13

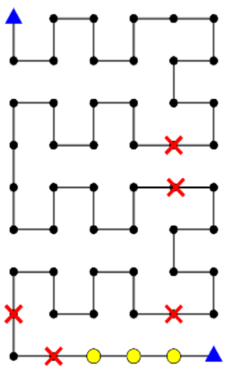


圖 5-14

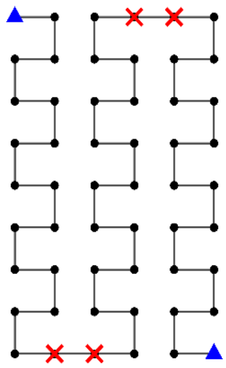


圖 5-15

■

由 **Theorem 1** 至 **Theorem 7**，兩種策略均能達到我們所要的最多或最少轉折數；然而，由 **Theorem 6**、**7**，及由**圖 5-10**、**14** 知，奇數×奇數的情形，僅需考慮螺旋策略。

Theorem 8 矩形方格 奇數×奇數 最多轉折數

> 矩形方格$(2k+1)\times(2t+1)$中，
>
> $M(2k+1,2t+1)=\begin{cases}(k+1)^2-(k+1)-1 & ,2k+1=2t+1\\ (2k+1)\times 2t & ,2k+1>2t+1\end{cases}$。

證明：不失一般性，假設$2k+1\geq 2t+1>4$。以矩形方格7×7、7×5舉例圖示如下：

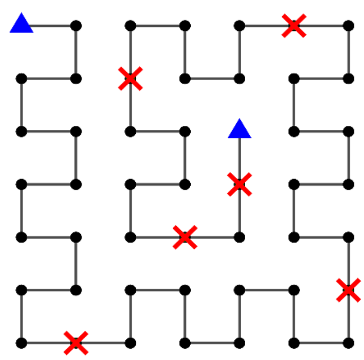


圖 5-16

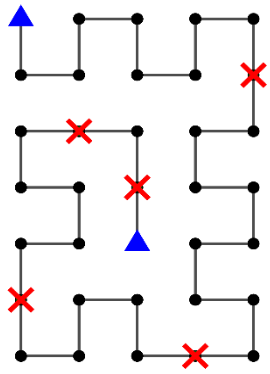


圖 5-17

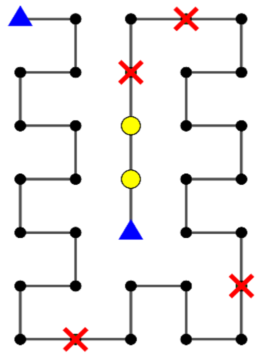


圖 5-18

1. $2k+1=2t+1$的轉折數 (圖示如**圖 5-16**)

   $=$ 所有點的數量 $-$ 起終兩點 $-$ 轉彎減少的轉折數 $-$ 最後尾巴減少的轉折數

   $=(2k+1)\times(2k+1)-2-L_R(k+1,k+1)-0=(k+1)^2-(k+1)-1$

2. $2k+1>2t+1$

   (1) 短邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-17**)

   $=$ 所有點的數量 $-$ 起終兩點 $-$ 轉彎減少的轉折數 $-$ 最後尾巴減少的轉折數

   $=(2k+1)\times(2k+1)-2-(L_R(k+1,k+1)+1)-0=(2k+1)\times 2t$

   (2) 長邊出發的轉折數 (圖示如**圖 5-18**)

   $=$ 所有點的數量 $-$ 起終兩點 $-$ 轉彎減少的轉折數 $-$ 最後尾巴減少的轉折數

   $=(2k+1)\times(2t+1)-2-L_R(k+1,t+1)-(2k-2t)$

   $=(2k+1)\times 2t-1$

得$M(2k+1,2t+1)=\begin{cases}(k+1)^2-(k+1)-1 & ,2k+1=2t+1\\ (2k+1)\times 2t & ,2k+1>2t+1\end{cases}$。

■

三、矩形方格$m \times n$有缺塊的討論

不失一般性，由於矩形方格具有對稱性，因此我們這裡只需討論$m \geq n$的情形；在討論缺塊位置(i,j)時，也只需要考慮$1 \leq i \leq \left[\frac{m}{2}\right]$與$1 \leq j \leq \left[\frac{n}{2}\right]$即可。

首先，我們先找出無法完成有缺塊的矩形方格無法完成漢米爾頓路徑的充分條件。

Theorem 9 有缺塊的矩形方格無法完成漢米爾頓路徑的充分條件

> 給定矩形方格 $m \times n$，當 m、n 皆為奇數，且缺塊位置 (i,j) 滿足 $i+j$ 為奇數時，則該矩形方格無法完成漢米爾頓路徑。

證明：

首先，與前面文獻回顧相同的做法，我們將矩形方格以西洋棋盤黑白相間的方式塗滿如**圖 6-1**；接著將白色方格以 A 表示，黑色方格以 B 表示。A 的四周皆為 B，B 的四周皆為 A；而在連接每一個方格的中心點時，A、B 必定是交錯連接的。

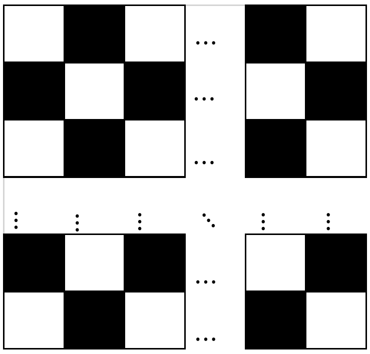


圖 6-1

A	B	A	$\cdots$	B	A
B	A	B	$\cdots$	A	B
A	B	A	$\cdots$	B	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
B	A	B	$\cdots$	A	B
A	B	A	$\cdots$	B	A

圖 6-2

當m、n皆為奇數時，矩形方格中共有$\left[\frac{m \times n}{2}\right]+1$個 A 與 $\left[\frac{m \times n}{2}\right]$個 B，此時 A 比 B 的數量多一個。因此，若缺塊位置(i,j)滿足$i+j$為奇數時，即再缺少一個 B，則 A 比 B 的數量多兩個，無法完成漢米爾頓路徑。

■

定義函數

函數 $M_{(i,j)}(m,n)$ 為矩形方格 $m \times n$ 中$(m \geq n)$，缺塊為 (i,j) 時的最多轉折數。

(一) 矩形方格 $m \times 2$ 的情形

在討論 $m \times 2$ 的矩形方格時，由於矩形對稱性的關係，我們分成「缺塊為 (1,1)」和「缺塊不為 (1,1)」的情形，如**圖 6-3**，方格中的數字為缺此格與未缺塊最多轉折數的差異。

-1	-1
-2	-2
-2	-2
⋮	⋮
-2	-2
-1	-1

圖 6-3

Theorem 10 缺塊為 $(1,1)$ 的最多轉折數

矩形方格 $m \times 2$，$M_{(1,1)}(m,2) = M(m,2) - 1$。

證明：

與 **Theorem 2** 同理，以 4×2 與 5×2 為例（如**圖 6-4**、**6-5**）除了起點和終點不是轉折處外，其餘皆為轉折，因此會比沒有缺塊的圖形轉折數少1，即 $M_{(1,1)}(m,2) = M(m,2) - 1$。

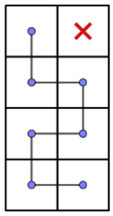


圖 6-4

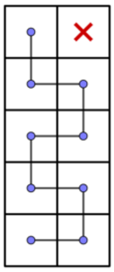


圖 6-5

■

Theorem 11 缺塊不為 $(1,1)$ 的最多轉折數

矩形方格 $m \times 2$，且 $(i,j) \neq (1,1)$，則 $M_{(i,j)}(m,2) = M(m,2) - 2$。

證明：由**圖 6-6**、**6-7** 可知兩路徑轉折數相差 2，且缺邊塊的矩形方格 $m \times 2$ 皆可由**圖 6-7** 往上下延伸，所以當 $(i,j) \neq (1,1)$ 時，$M_{(i,j)}(m,2) = M(m,2) - 2$。

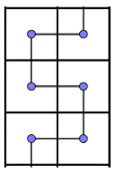


圖 6-6

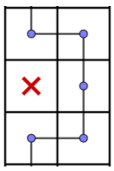


圖 6-7

■

接著為了方便處理邊數更大的矩形方塊缺塊情形，我們撰寫了 **Theorem 12**、**Theorem13**。

Theorem 12 缺塊為螺旋畫法轉角處的最多轉折數

矩形方格$m \times n$，當$m \geq n \geq 3$時，$M_{(1,1)}(m,n) = M(m,n)$。

證明：

前面沒有缺塊的漢米爾頓路徑，

在短邊大於 3 的情形下，可以利用螺旋畫法畫出最多的轉折數，

並且當缺塊在轉角處時，其轉折數與未缺塊的轉折數相同（如**圖 6-8**、**6-9**）。

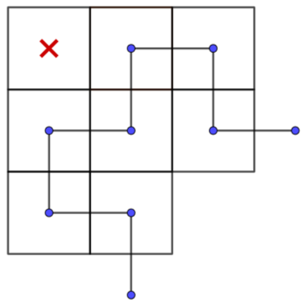


圖 6-8

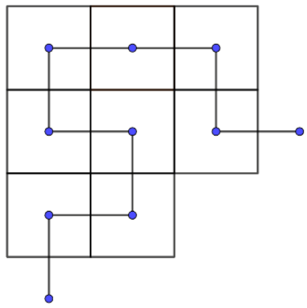


圖 6-9

■

Theorem 13 有缺塊之矩形方格的最多轉折數之下界

缺一塊的矩形方格$m \times n$，其最多轉折數至少為$M(m,n) - 2$。

證明：

利用完成$m \times n$矩形方格漢米爾頓路徑最多轉折數的螺旋方式畫法，

若缺塊在角塊(1,1)的位置，則將此缺塊旁邊的方格作為路徑起點

由 **Theorem 10** 可知此時$M_{(1,1)}(m,n) \geq M(m,n) - 1$；

若缺塊不在(1,1)的位置，則可利用**圖 6-7** 的方式繞過缺塊，

由 **Theorem 11** 可知此時$M_{(i,j)}(m,n) = M(m,n) - 2$。

■

(二) 矩形方格 $m \times 3$的情形

這裡我們分成「偶數乘3」、「奇數乘3」兩種情形來看：

1. 偶數乘3

這邊先以4×3、6×3 與 8×3三個例子來看，首先未缺塊的情形如**圖 7-1**、缺角塊的情形如**圖 7-2**。

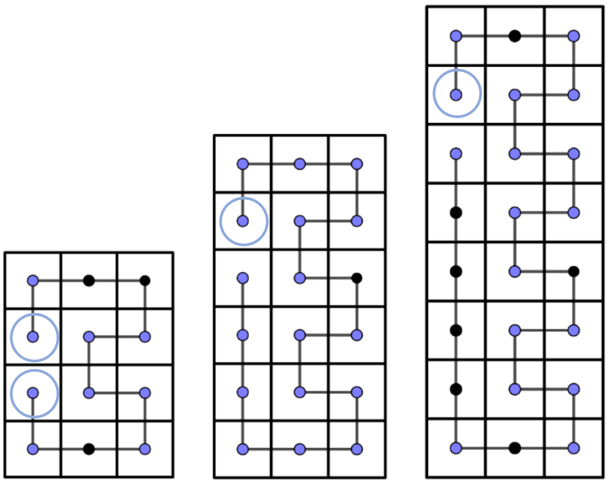


圖 7-1

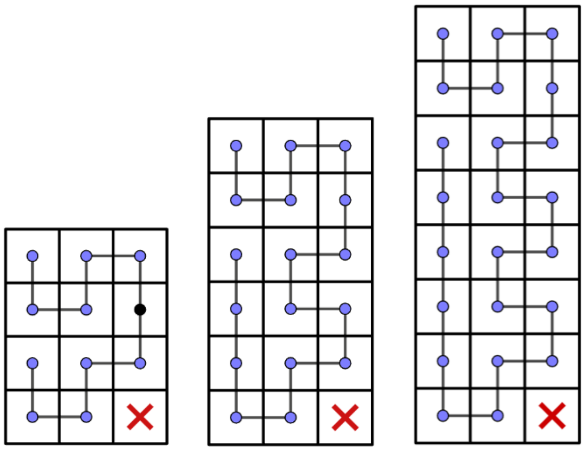


圖 7-2

（1） 缺角塊的情形不影響最多轉折數，因此若缺塊位置在四個角塊，其最多轉折數仍為$M(m,3)-0$。

（2） 接著**圖 7-1** 可看出在第一行的路徑為一條筆直的線段，因此若缺塊位置為$(i,1)$，其中$3 \le i \le m-2$ 時，其最多轉折數仍為$M(m,3)-0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(m,3)-0$。

（3） 當缺塊位置在(2,1)時，其最多轉折數比未缺塊少1，即缺塊位置若為藍色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(m,3)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(m,3)-1$。

（4） 由 **Theorem 13**，剩餘位置皆填入-2。

因此，4×3、6×3 與 8×3缺塊情形與未缺塊的最多轉折數比較如**圖 7-3**。

0	-2	0
-1	-2	-1
-1	-2	-1
0	-2	0

0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0
0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0

0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0
0	-2	0
0	-2	0
0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0

圖 7-3

2. 奇數乘3

我們以9×3為例，由前述可知以螺旋策略畫出最多轉折數（**圖 7-4**），亦可以迴轉搭配螺旋策略，同樣也可以畫出最多轉折數（**圖 7-5**、**圖 7-6**）。

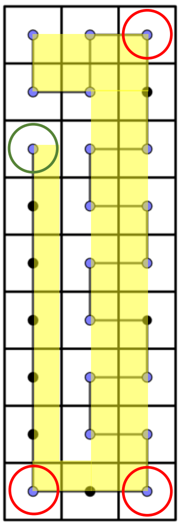


圖 7-4

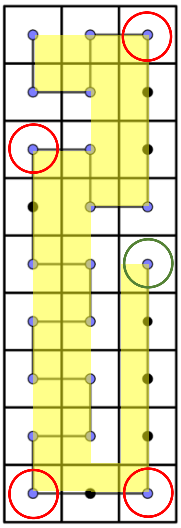


圖 7-5

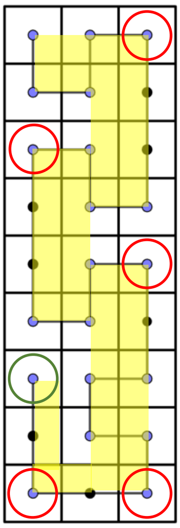


圖 7-6

0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0

圖 7-7

（1） 由 **Theorem 9** 可知，若缺塊位置(i, j)滿足$i + j$為奇數，則無法完成漢米爾頓路徑。

（2） 由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」時，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(9,3) - 0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(9,3) - 0$。

（3） 若缺塊位置在**圖 7-4** 的(3,1)、**圖 7-5** 的(5,3)、**圖 7-6** 的(7,1)皆不會影響最多轉折數，即缺塊位置若為綠色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(9,3) - 0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(9,3) - 0$。

（4） 由 **Theorem 13**，剩餘位置皆填入-2（如**圖 7-7**）。

從這個例子當中我們可以發現，在處理奇數乘奇數矩形方格的時候，最多轉折數的畫法可以利用螺旋策略與迴轉策略，**圖 7-4** 為單純做螺旋策略、**圖 7-5** 為一次迴轉再做螺旋策略、**圖 7-6** 為兩次迴轉再做螺旋策略。因此，奇數乘奇數螺旋搭配迴轉策略，迴轉策略的次數最少為 0 次，最多為$\left(\frac{m-n}{2}\right)-1$次，也就是可以一直做迴轉策略直至剩下的矩形方格為「正方形」。

(三) 矩形方格 $m \times n (m \geq n \geq 4)$ 的情形

接著我們就「偶乘偶」、「奇乘偶」、「奇乘奇」三種情形分別來看：

1. 偶乘偶

偶數乘偶數的矩形方格，以螺旋方式完成漢米爾頓路徑可以產生最多轉折數，但需要從長邊出發，依出發點不同可以有兩種畫法，以10×6的矩形方格為例（**圖 8-1**、**圖 8-2**）。

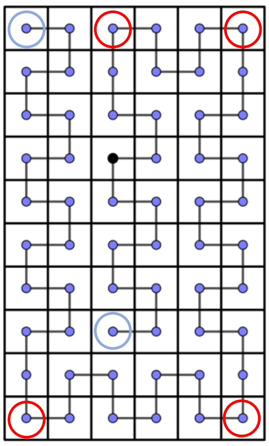


圖 8-1

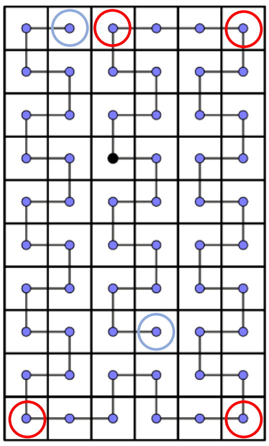


圖 8-2

0	-1	0	0	-1	0
		-1	-1		
		-1	-1		
0	-1	0	0	-1	0

圖 8-3

（1） 由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」時，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(10,6)-0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(10,6)-0$。

（2） 由 **Theorem 10** 可知，若缺塊為路徑的起終點，則最多轉折數比未缺塊少 1，即缺塊位置若為藍色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(10,6)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置

亦為$M(10,6)-1$。如**圖 8-3** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（3） 偶數乘偶數的矩形方格，亦可由短邊出發以螺旋方式完成漢米爾頓路徑，但是其轉折數比最多轉折數少 1（如**圖 8-4**、**圖 8-5**）。又依 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為轉角處，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色三角形處，則最多轉折數皆為$M(10,6)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(10,6)-1$。如**圖 8-6** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（4） 由 **Theorem 13，**剩餘位置皆填入-2。

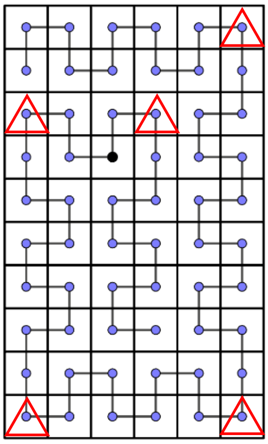


圖 8-4

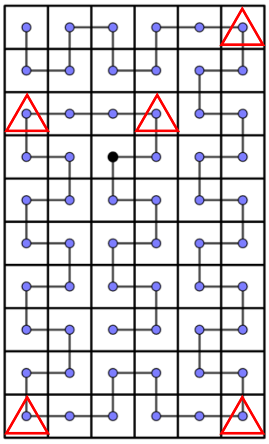


圖 8-5

0	-1	0	0	-1	0
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
0	-1	0	0	-1	0

圖 8-6

2. 奇乘偶（奇大於偶）

奇數乘偶數（奇大於偶）的矩形方格，以螺旋方式完成漢米爾頓路徑可以產生最多轉折數，但需要從長邊出發，依出發點不同有兩種畫法，以7×6的矩形方格為例（**圖 8-7**、**圖 8-8**）。

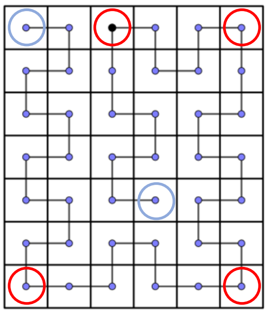


圖 8-7

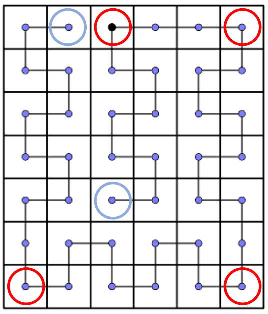


圖 8-8

0	-1	0	0	-1	0
		-1	-1		
		-1	-1		
0	-1	0	0	-1	0

圖 8-9

（1） 由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」時，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(7,6)-0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(7,6)-0$。

（2） 由 **Theorem 10** 可知，若缺塊為路徑的起終點，則最多轉折數比未缺塊少 1，即缺塊位置若為藍色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(7,6)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為 $M(7,6)-1$。如**圖 8-9** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（3） 奇數乘偶數的矩形方格，亦可由短邊出發以螺旋方式完成漢米爾頓路徑，但是其轉折數比最多轉折數少 1（如**圖 8-10**、**圖 8-11**）。又依 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為轉角處，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色三角形處，則最多轉折數皆為$M(7,6)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(7,6)-1$。如**圖 8-12** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（4） 由 **Theorem 13，**剩餘位置皆填入-2。

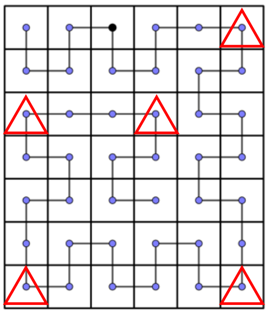


圖 8-10

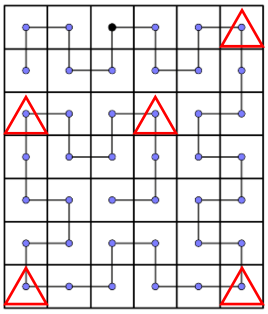


圖 8-11

0	-1	0	0	-1	0
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
0	-1	0	0	-1	0

圖 8-12

3. 奇乘偶（偶大於奇）

奇數乘偶數（偶大於奇）的矩形方格，以螺旋方式完成漢米爾頓路徑可以產生最多轉折數，但需要從短邊出發，只有一種畫法，以8×5的矩形方格為例（**圖 8-13**）。

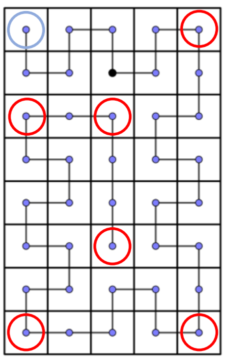


圖 8-13

0				0
0		0		0
0		0		0
0				0

圖 8-14

（1） 由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」與「異於角點之路徑端點」，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(8,5)-0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(8,5)-0$。

（2） 由 **Theorem 10** 可知，若缺塊為路徑的起終點，則最多轉折數比未缺塊少 1，即缺塊位置若為藍色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(8,5)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為 $M(8,5)-1$。如**圖 8-14** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（3） 奇數乘偶數的矩形方格，亦可由長邊出發以螺旋方式完成漢米爾頓路徑，但是其轉折數比最多轉折數少 1（如**圖 8-15**）。又依 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為轉角處時，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色三角形處，則最多轉折數皆為$M(8,5)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(8,5)-1$。如**圖 8-16** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（4） 由 **Theorem 13**，剩餘位置皆填入-2。

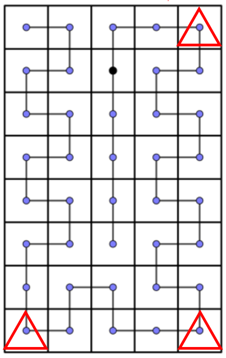


圖 8-15

0	-2	-1	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	0	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	0	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	-1	-2	0

圖 8-16

4. 奇乘奇

奇數乘奇數的矩形方格，從短邊出發以螺旋策略搭配迴轉策略完成漢米爾頓路徑，可以產生最多轉折數。以11×5的矩形方格為例，可以有三種畫法（**圖 8-17**）。

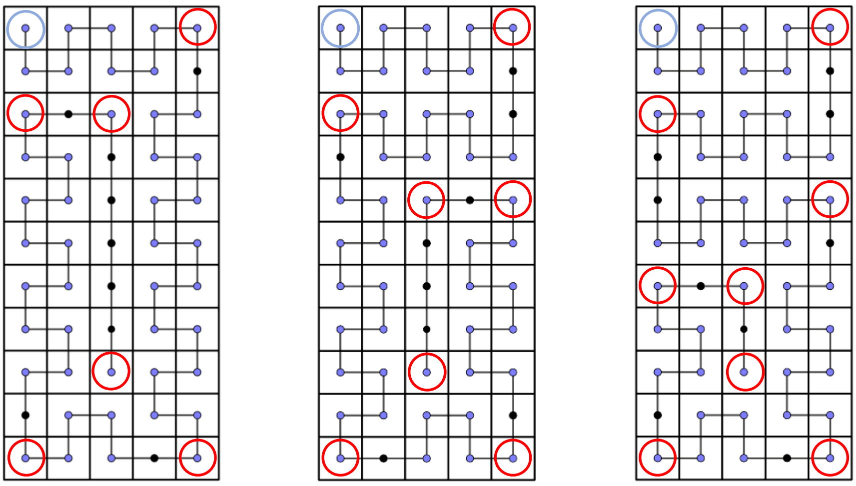


圖 8-17

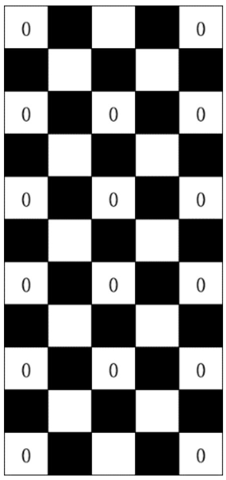


圖 8-18

（1） 由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」與「異於角點之路徑端點」，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(11,5)-0$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(11,5)-0$。

（2）由 **Theorem 10** 可知，若缺塊為路徑的起終點，則最多轉折數比未缺塊少 1，即缺塊位置若為藍色圓圈處，則最多轉折數皆為$M(11,5)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(11,5)-1$。如**圖 8-18** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（3）奇乘奇的矩形方格，亦可由長邊出發以螺旋方式完成漢米爾頓路徑，但是其轉折數比最多轉折數少 1（如**圖 8-19**）。又依 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」與「異於角點之路徑端點」時，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為紅色三角形處，則最多轉折數皆為$M(11,5)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為 $M(11,5)-1$。已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（4）奇乘奇的矩形方格，亦可由短邊出發，接著迴轉以另一個方向螺旋完成路徑，其轉折數比最多轉折數少 1（如**圖 8-20**）。由 **Theorem 12** 可知，若缺塊位置為「轉角處」與「異於角點之路徑端點」，最多轉折數與未缺塊的該路徑最多轉折數相同，即缺塊位置若為藍色三角形處，則最多轉折數皆為$M(11,5)-1$，並依矩形對稱性，對稱位置亦為$M(11,5)-1$。如**圖 8-21** 所示，已填入 0 者已為最佳，故不再填入後續數字。

（5）由 **Theorem 13，**剩餘位置皆填入-2。

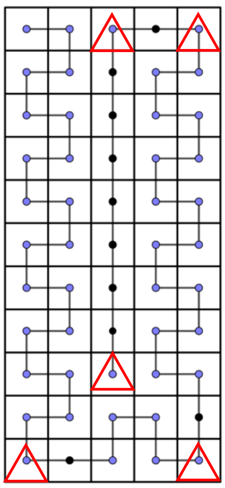


圖 8-19

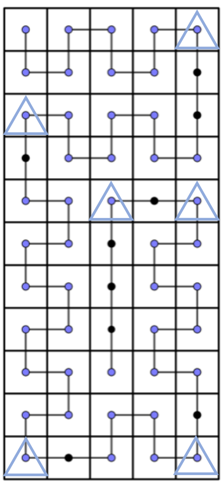


圖 8-20

0		-1		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		-1		0

圖 8-21

肆、　研究結果

一、 任意矩形方格最少轉折數的公式

$L(m,n) = 2 \times (\min\{m,n\} - 1)$

二、 任意矩形方格最多轉折數的路徑策略及其公式

1. 偶×偶、偶×奇的矩形方格使用「螺旋策略」或「迴轉策略」皆能畫出最多轉折數。

2. 奇×奇的矩形方格可使用螺旋策略或者迴轉搭配螺旋（一定要）策略畫出最多轉折數。

3. 使用螺旋策略畫出矩形方格的最多轉折數：

（1）偶×偶需從長邊出發；

（2）奇×偶需從奇數邊出發；

（3）奇×奇需從短邊出發。

整理公式如下：

類別	最多轉折數$M(m,n)$
m、n皆為偶數且$m \geq n$	$(m-1) \times n$
m為奇數、n為偶數	$(m-1) \times n$
m、n為相等奇數	$n^2 - n - 1$
m、n皆為奇數且$m > n$	$m \times (n-1)$

三、 有缺塊的矩形方格之最多轉折數

1. **Theorem 9** 給定矩形方格$m \times n$，當m、n皆為奇數，且缺塊位置(i,j)滿足$i+j$為奇數時，則該圖形無法完成漢米爾頓路徑。

2. $m \times 2$的矩形方格中，缺角塊的最多轉折數為$M(m,2)-1$，缺非角塊的最多轉折數為$M(m,2)-2$。

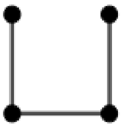
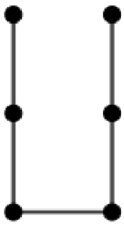
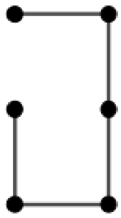
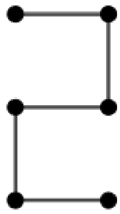
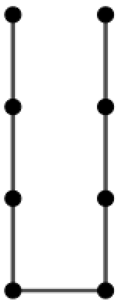
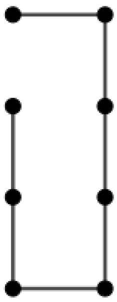
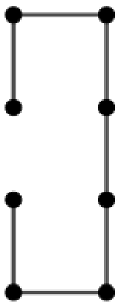
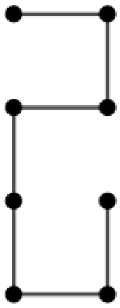
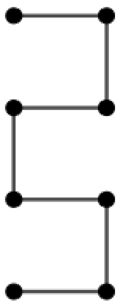
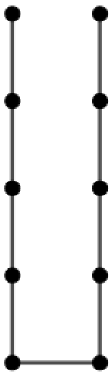
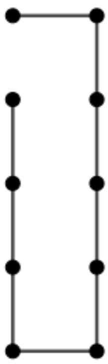
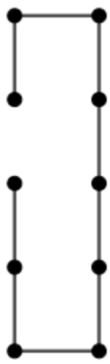
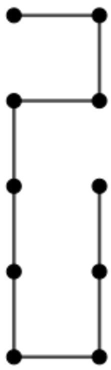
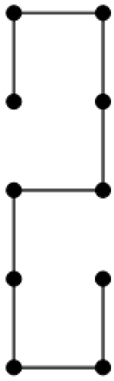
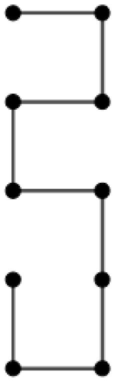
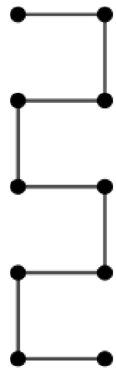
3. **Theorem 13** 缺一塊的矩形方格$m \times n$，其最多轉折數至少為$M(m,n)-2$。

4. 缺一個角塊的矩形方格$m \times n$，其最多轉折數為$M(m,n) - 0$。

5. 對於任意有缺塊的矩形方格，利用螺旋及迴轉策略，依序找出與未缺塊的矩形方格的最多轉折數-0、-1與-2的位置。

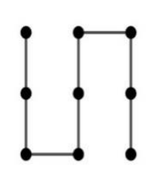
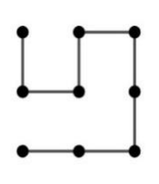
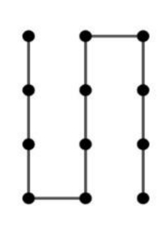
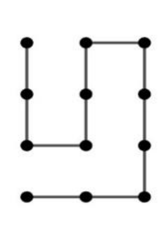
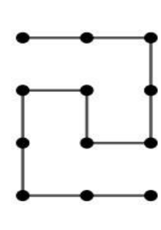
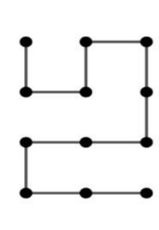
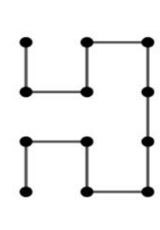
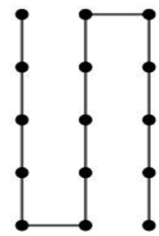
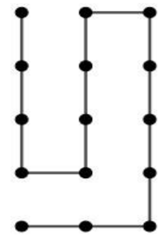
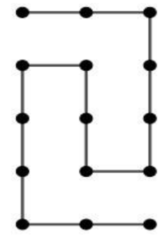
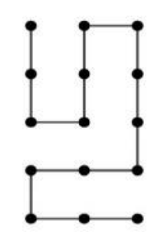
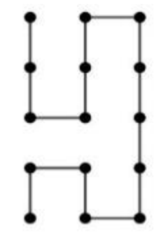
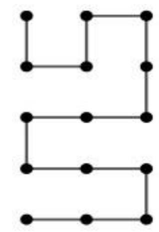
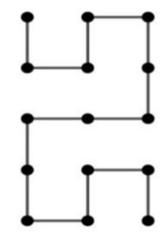
伍、　討論

一、矩形方格$\boldsymbol{m \times 2}$：所有可能轉折數及其路徑之特徵

轉折數	2	3	4	5	6	7	8
2×2							
3×2							
4×2							
5×2							

我們發現在$m \times 2$的圖形中，可以用奇數次轉折與偶數次轉折的分類方式，找出轉折數在最多轉折(隨m而改變)與最少轉折(2 次)之間的任何轉折數之路徑。

二、矩形方格$m \times 3$：所有可能轉折數及其路徑之特徵

轉折數	4	5	6	7	8	9	10
3×3							
4×3							
5×3							

我們由上述的結果，猜測任意矩形方格$m \times n$的所有可能轉折數為$L(m,n) \sim M(m,n)$，雖然我們僅討論上述基本的矩形方格，不過或許可以如同最多轉折數的討論方式，化繁為簡，找到適合的策略來推論。

陸、　結論

矩形方格的所有可能轉折數整理為下表：

列數 / 行數	2	3	4	5
2	2	2 ~ 4	2 ~ 6	2 ~ 8
3		4 ~ 5	4 ~ 8	4 ~ 10

我們由上述的結果，猜測任意矩形方格$m \times n$的所有可能轉折數為$L(m,n)$與$M(m,n)$，之間的所有整數，對於任意矩形方格介於最多與最少轉折數之間轉折數的路徑關係，以及其是否都能找到一個路徑對應，是我們未來可繼續探討的方向。或許，可以如同前述最多轉折

數的情形，以任意矩形方格$m \times 2$、$m \times 3$為基礎，找出任意矩形方格$m \times n$的所有可能轉折數。

最後，最多轉折數不論是在無缺塊的情形抑或是有缺塊的矩形方格之路徑中，本文的研究都僅能盡可能的找出最多轉折數的下界，而無法確定其是否必為最大值，我們嘗試使用不同的策略之後，最終選擇使用轉彎數與轉折數的策略，期許未來在這個部分能有所突破。

柒、 參考文獻資料

一、 游森棚(2023 年 6 月)。森棚教官的數學題—蜿蜒曲折。科學研習月刊，第 62 - 3 期。
取自 https://www.ntsec.edu.tw/monthly/detail.aspx?a=20461

二、 趙啟超(2020 年 12 月 31 日)。離散數學〔國立清華大學開放式課程〕。
取自 https://ocw.nthu.edu.tw/ocw/index.php?page=course&cid=288&

三、 國立臺灣師範大學演算法筆記。國立臺灣師範大學。
取自 https://web.ntnu.edu.tw/~algo/Graph.html

四、 楊智超(91 年 10 月)。第一屆旺宏科學獎成果報告書。經理來了！─談一筆劃問題。
取自 https://www.mxeduc.org.tw/scienceaward/history/projectDoc/1st/doc/SA-130.pdf

五、 鄭惟厚。普通型高中數學第一冊。三民書局。

六、 鄭惟厚。普通型高中數學第二冊。三民書局。

【評語】050408

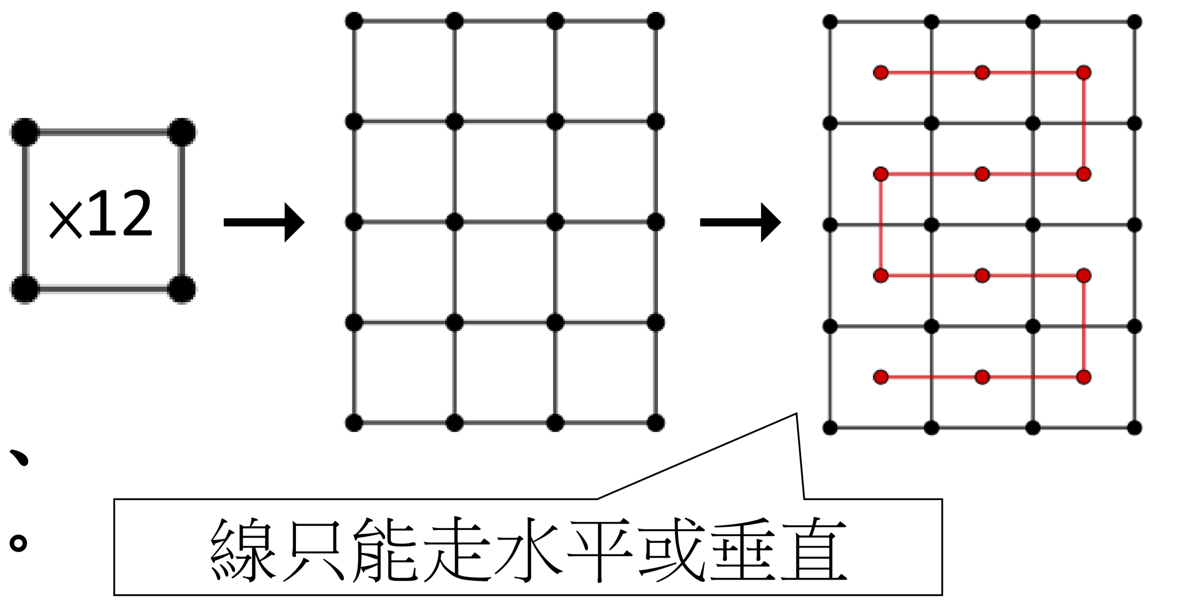
本作品研究一個 m×n 的格子點的漢米爾頓路徑的最少及最多轉彎數(左或右轉 90 度)。作者宣稱可以分類 m 和 n 的奇偶性並將問題解出來，但事實上，作者只探討了兩種特殊策略來構造路徑:「迴轉策略」及「螺旋策略」下之最少及最多轉彎數，且探討方式大致上就是窮舉與歸納，但未能完整證明此即為所求之最大值。之後，作者在格子點中移除一點，藉由細緻的計算，探討此時以「螺旋策略」構造的漢米爾路徑最多轉彎數變化。本作品研究結果不夠一般性，較為可惜。

作品海報

漢行無阻 ，蜿蜒曲折

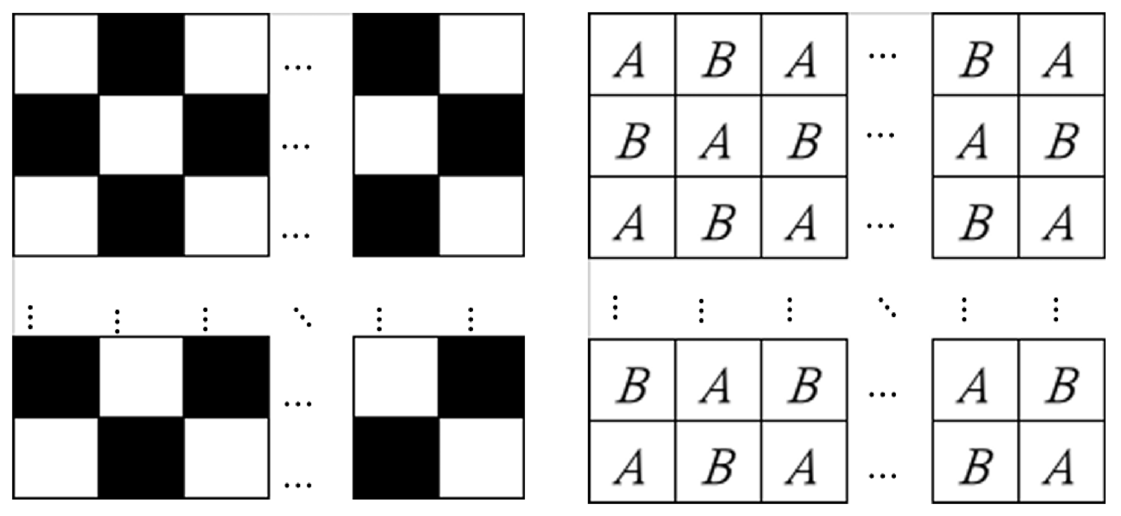
研究動機及目的

在國立臺灣科學教育館《科學研習期刊》第62卷第3期，
將12個單位小正方形組成一個3x4的矩形，
若要畫一條轉折次數最少的折線通過12個小正方形的中心各一次
轉折數最少是多少？轉折數最多是多少？有哪些可能的轉折數？

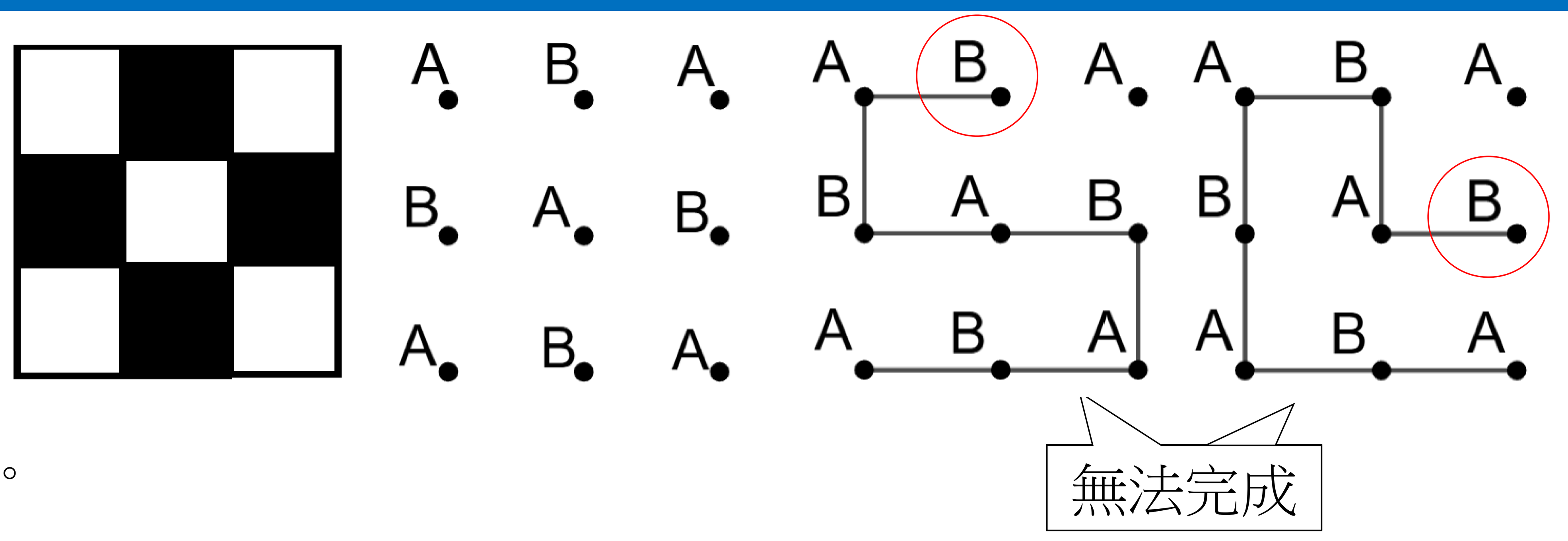


目的：找出矩形方格的最少轉折數、最多轉折數、所有可能轉折數、有缺一塊小正方形的矩形方格之最多轉折數之路徑及其公式。

矩形方格中起始點位置是否可以完成漢米爾頓路徑

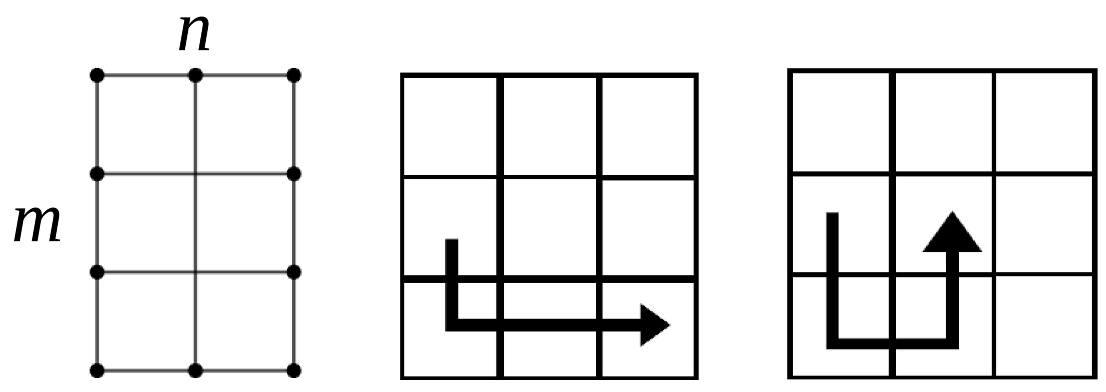


A的四周皆為B，通過A的下一個點必為B。



定義函數

矩形方格$m \times n$，其中m為列數，n為行數。
列數大於行數，為直向擺放
螺旋策略：轉90°的轉折/轉彎
迴轉策略：轉180°的轉折/轉彎

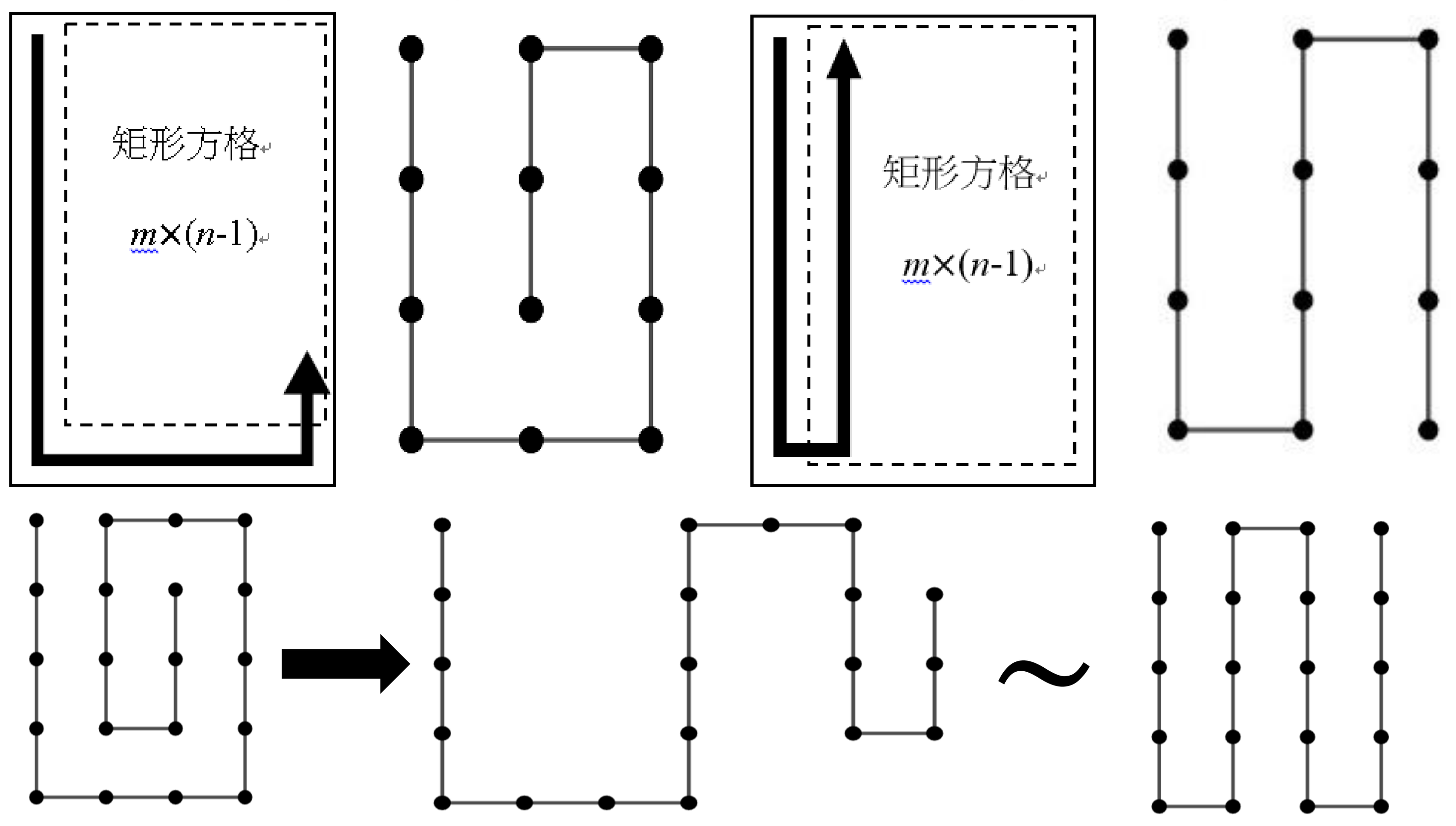


矩形方格 $m \times n$	R	螺旋策略
	U	迴轉策略
	(i,j)	缺塊方格的座標
	M_x/L_x	$x \in \{R, U, (i,j), \emptyset\}$

矩形方格的最少轉折數

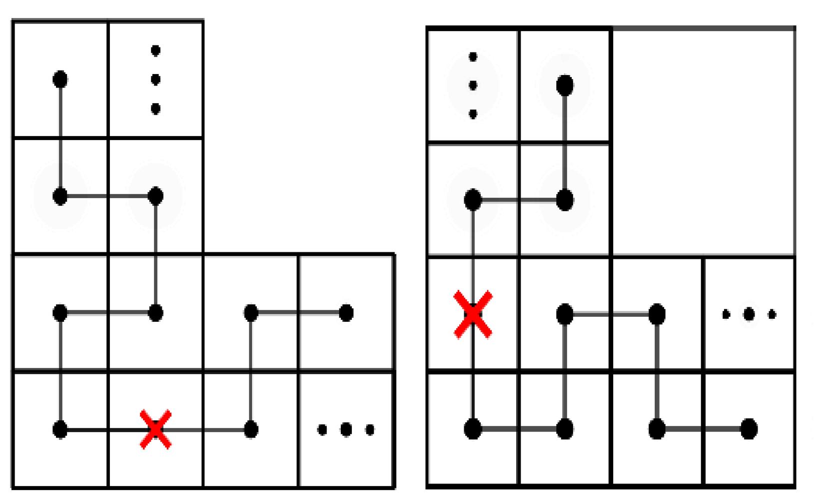
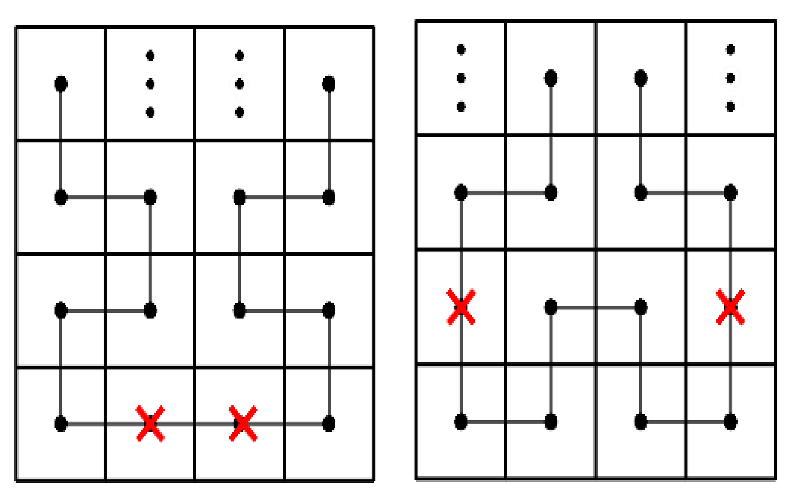
假設$m \geq n \geq 2$，將矩形方格直向擺放

螺旋策略(轉90°)：　迴轉策略(轉180°)：



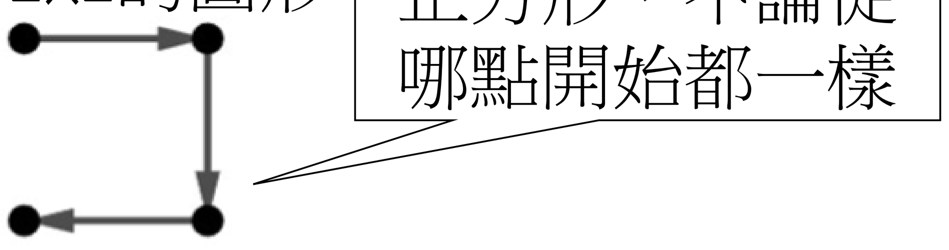
兩種策略皆可得到最少轉折數之路徑
$L(m,n)=2\times(\min\{m,n\}-1)$

矩形方格$m \times n$路徑策略選擇與轉折數之影響

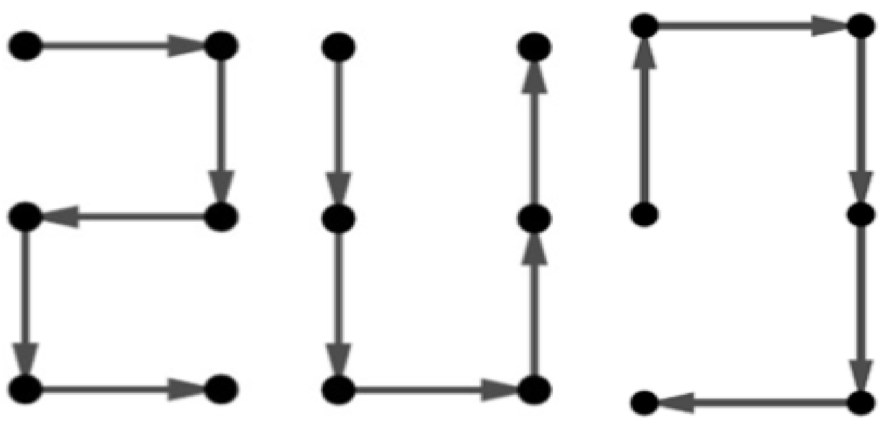
螺旋策略(轉90°)	迴轉策略(轉180°)
	
每次使用轉折數少1	每次使用轉折數少2

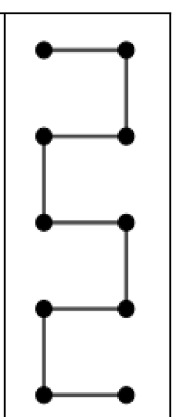
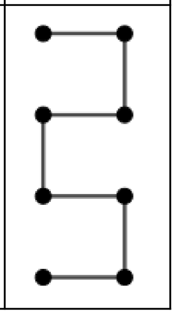
矩形方格mx2：最多轉折數的公式及證明

2x2的圖形



3x2的圖形



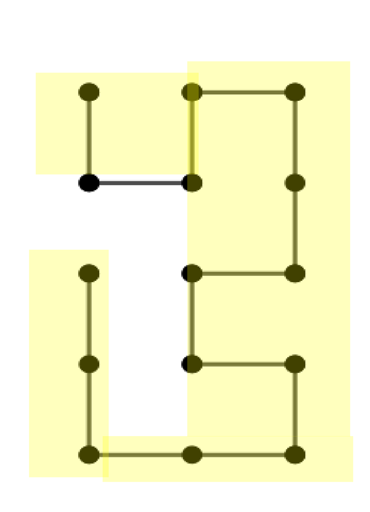
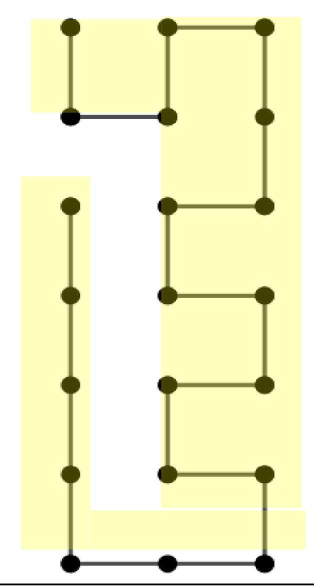
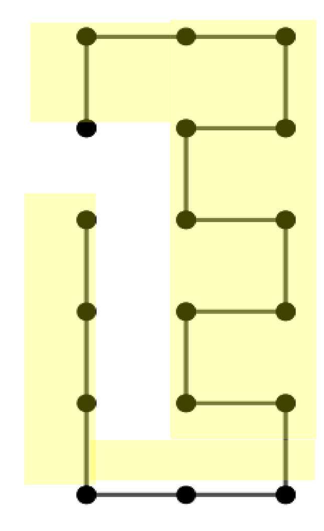
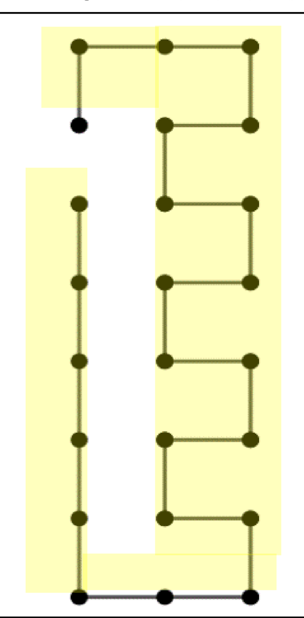
m為奇數(起、終點異側) 圖形開始的點在左側， 結束的點在右側。	
m為偶數(起、終點同側) 圖形開始的點在左側， 結束的點在左側。	

證明
如同上方表格的圖形，以同樣的方式所得的路徑僅起始點與終點為非轉折處，其餘個點皆為轉折處，所以 $M(m,2)=2m-2=2(m-1)$

矩形方格mx3：最多轉折數的公式及證明

螺旋策略轉折數為**所有點個數**，減去：
1. 起終點(2)
2. 螺旋策略轉彎次數(2)
3. 尾巴缺少的轉折$(m-4)$

故 $M(m,3)=3m-2-2-(m-4)=2m$

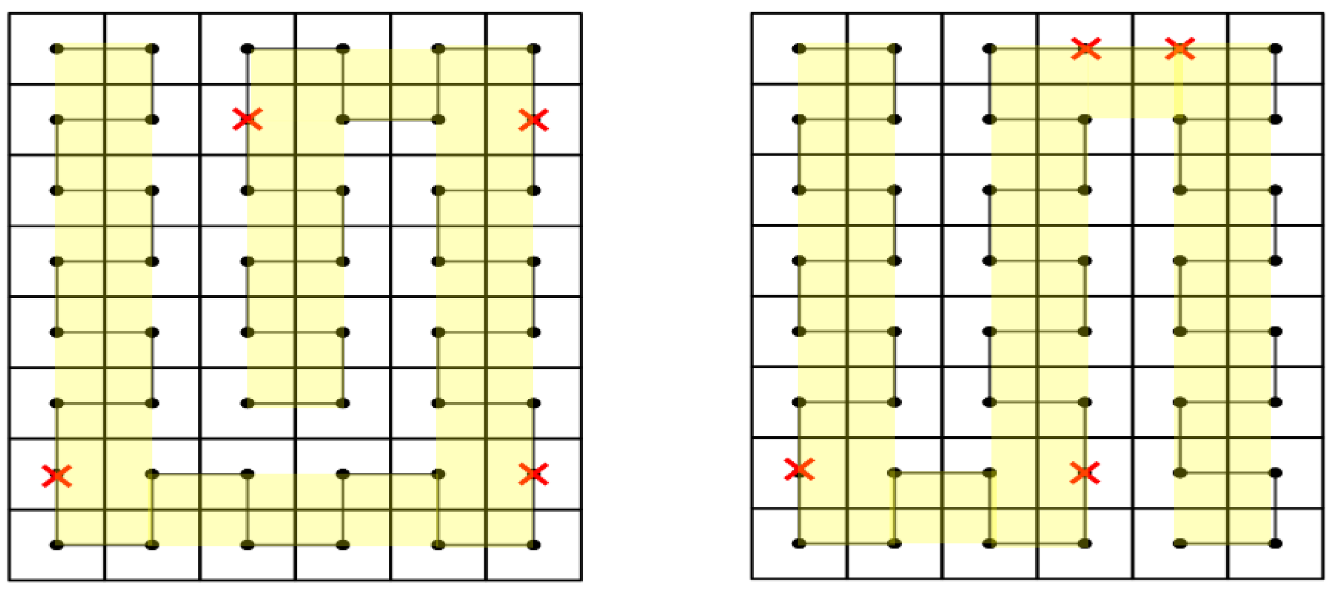
奇數x3		偶數x3	
5x3(10轉折)	7x3(14轉折)	6x3(12轉折)	8x3(16轉折)
			

矩形方格 $m \times n$ 的最多轉折數路徑及其公式

偶數×偶數

路徑由長邊方向開始

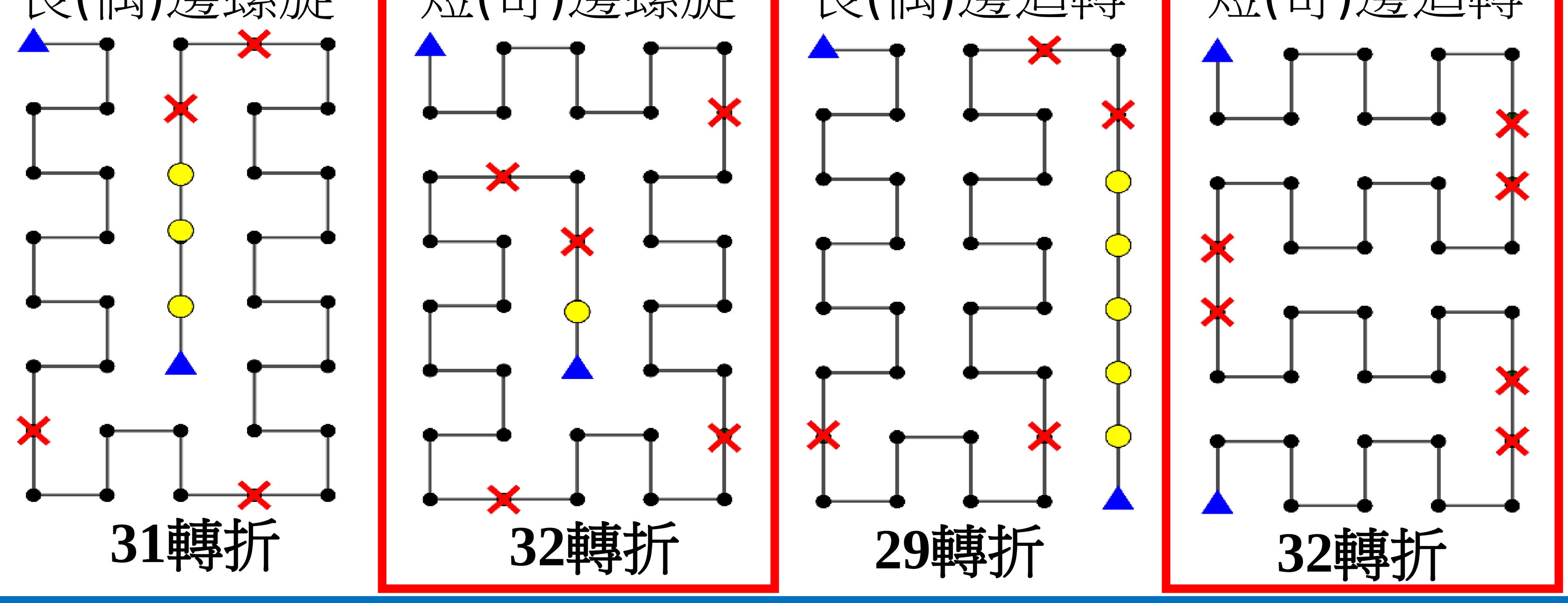
轉折數$M(2k,2t) = (2k-1) \times 2t$，其中$2k \geq 2t$



偶數×奇數

路徑由奇數邊出發

轉折數$M(2k,2t+1) = 2k \times 2t$，其中$2k \geq 2t+1$

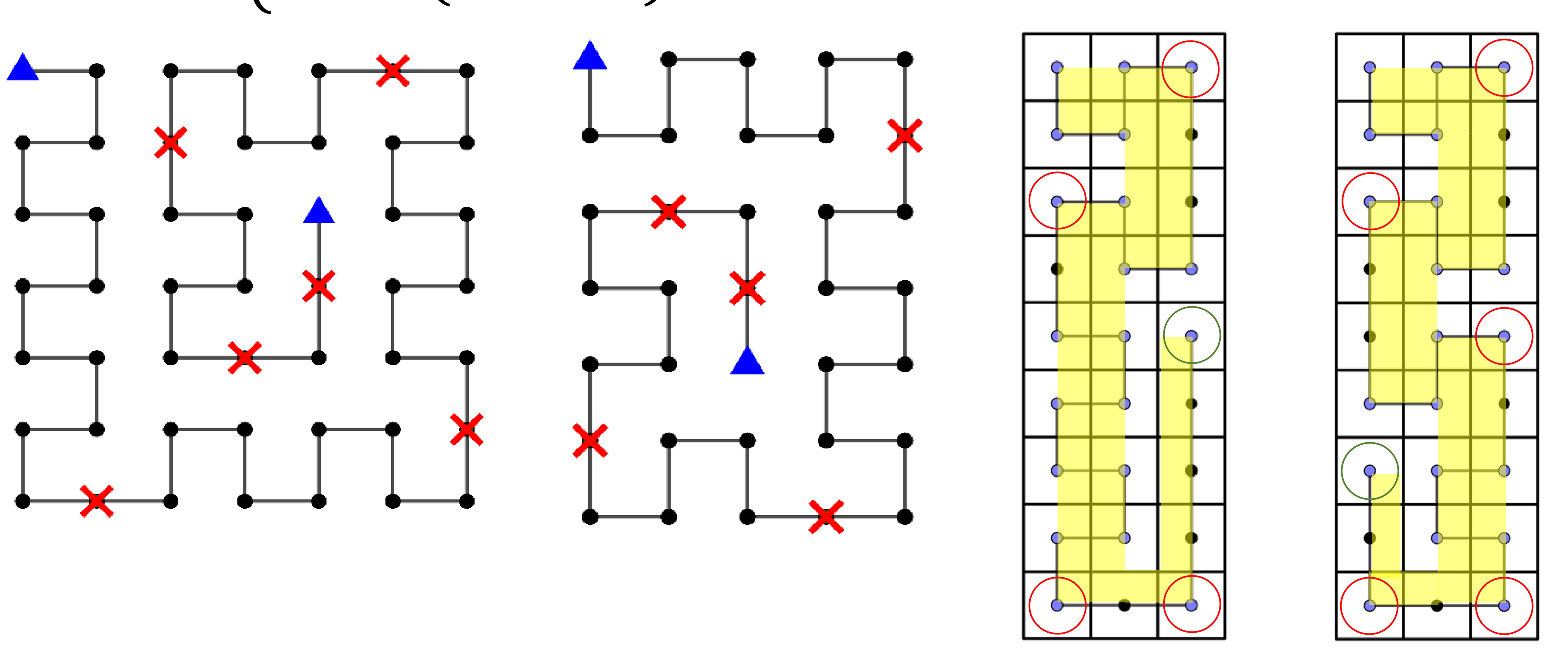


奇數×奇數

短邊出發、螺旋策略搭配迴轉策略

轉折數$M(2k+1,2t+1)$

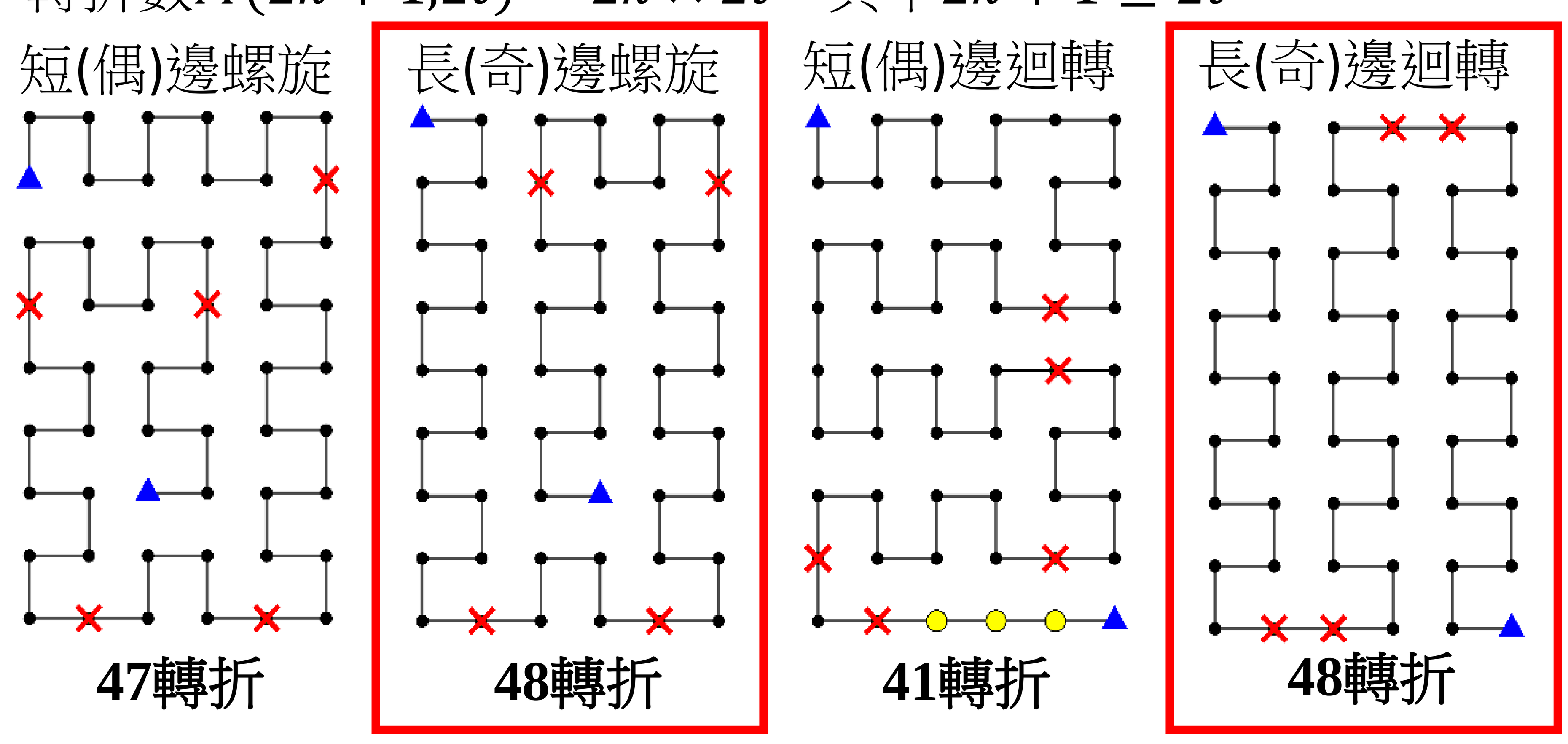
$$= \begin{cases} (2k+1)^2 - (2k+1) - 1 & 2k+1 = 2t+1 \\ (2k+1) \times 2t & ,2k+1 > 2t+1 \end{cases}$$



奇數×偶數

路徑由奇數邊出發

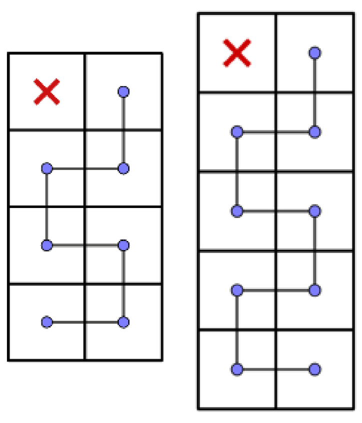
轉折數$M(2k+1,2t) = 2k \times 2t$，其中$2k+1 \geq 2t$



矩形方格 $m \times n$ 有缺塊的最多轉折數討論

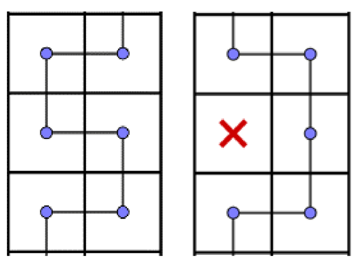
矩形方格 $m \times 2$ 的情形

缺塊為角點



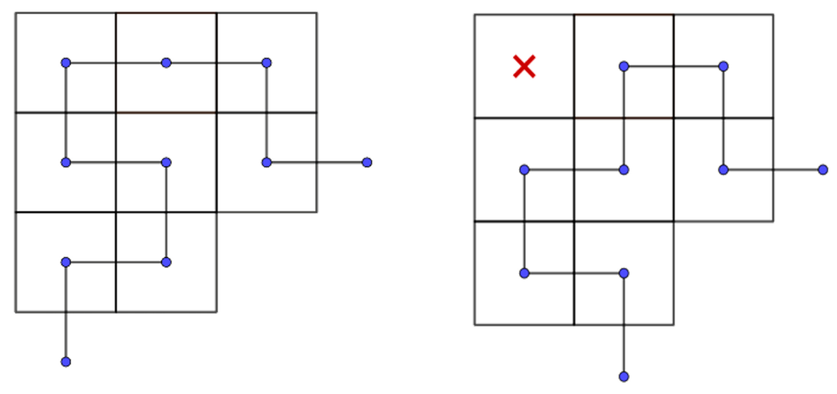
$$M_{(1,1)}(m,2) = M(m,2) - 1$$

缺塊非角點



$$M_{(i,j)}(m,2) = M(m,2) - 2$$

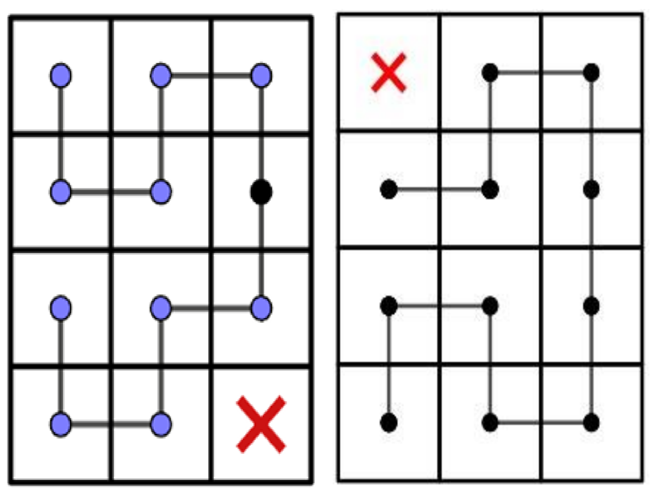
缺塊為螺旋畫法轉角處的情形



$$M_{(1,1)}(m,n) = M(m,n)$$

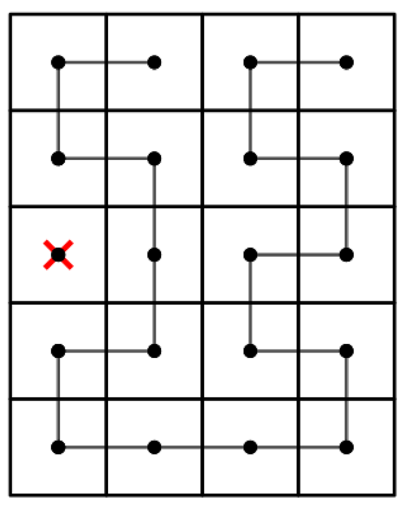
矩形方格的轉折數下界

缺塊為角點



$$M_{(1,1)}(m,n) \geq M(m,n) - 1$$

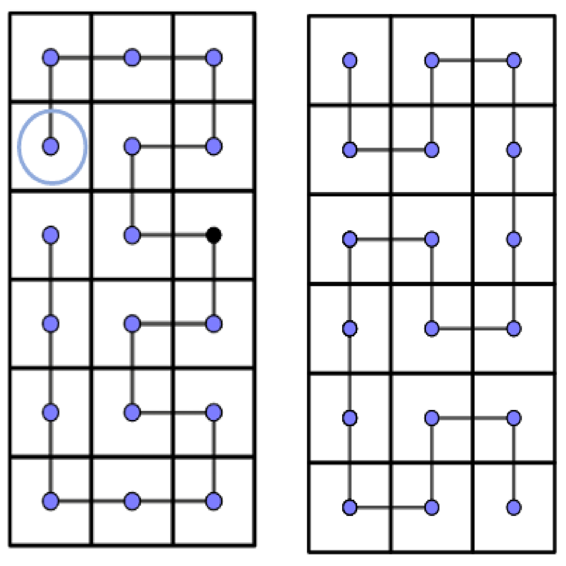
缺塊非角點



$$M_{(i,j)}(m,n) \geq M(m,n) - 2$$

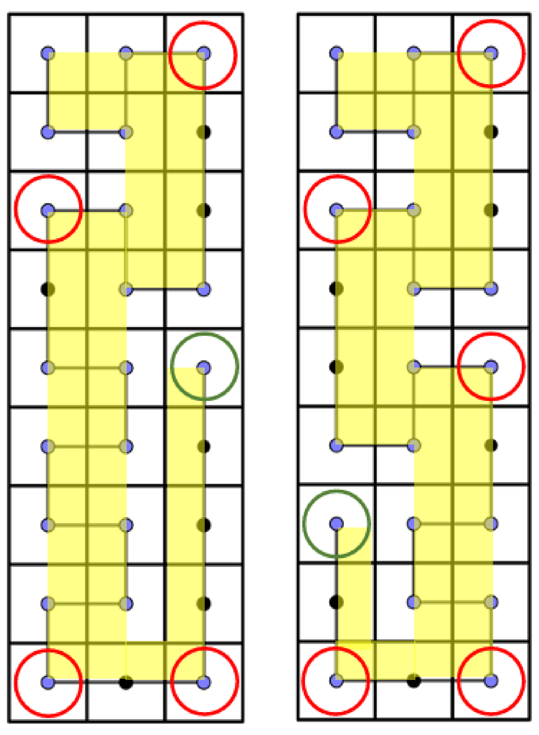
矩形方格 $m \times 3$的情形

偶數x3



0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0
0	-2	0
-1	-2	-1
0	-2	0

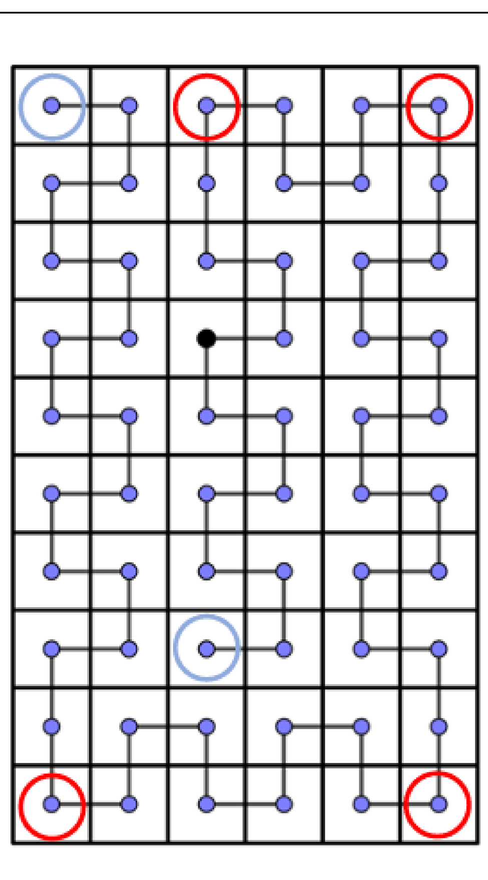
奇數x3



0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0
	-2	
0		0

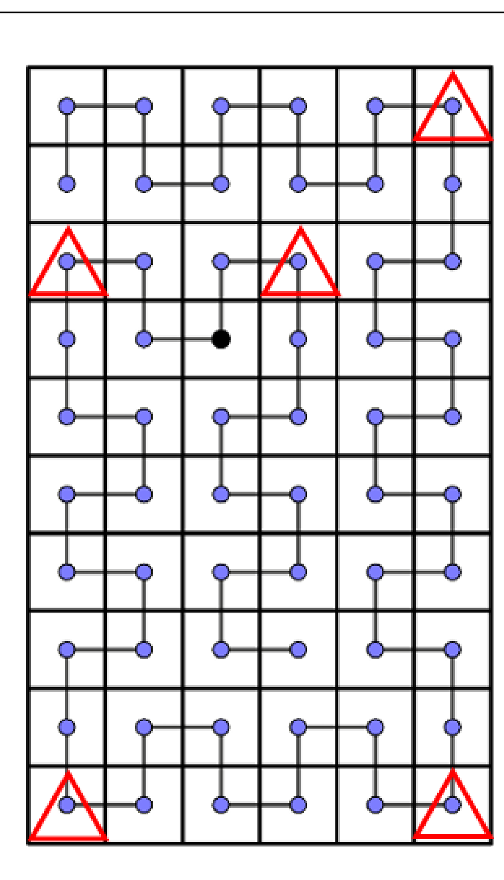
偶數 × 偶數

長邊出發



0	-1	0	0	-1	0
		-1	-1		
		-1	-1		
0	-1	0	0	-1	0

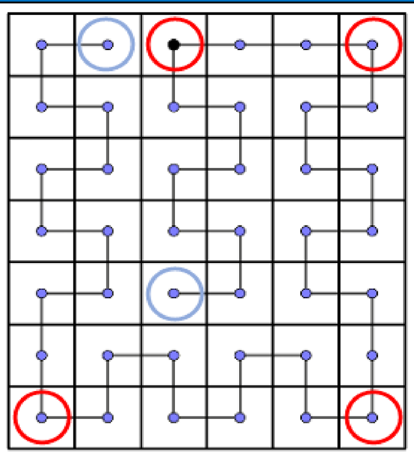
短邊出發



0	-1	0	0	-1	0
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
0	-1	0	0	-1	0

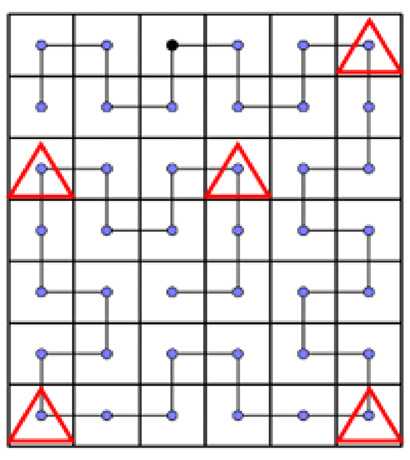
奇數×偶數

長邊出發



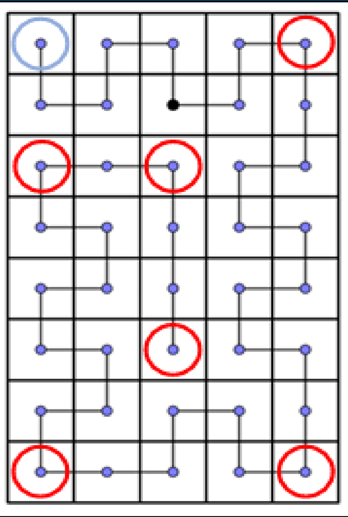
0	-1	0	0	-1	0
		-1	-1		
		-1	-1		
0	-1	0	0	-1	0

短邊出發



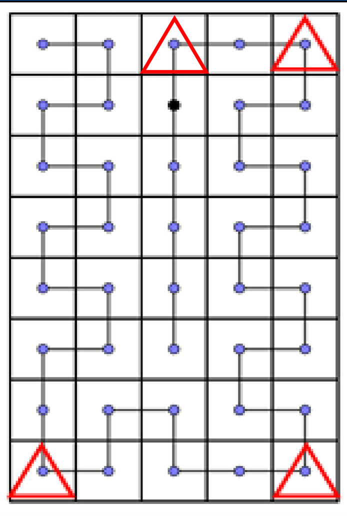
0	-1	0	0	-1	0
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-2	-1	-1	-2	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2
0	-1	0	0	-1	0

短邊出發



0				0
0		0		0
0		0		0
0				0

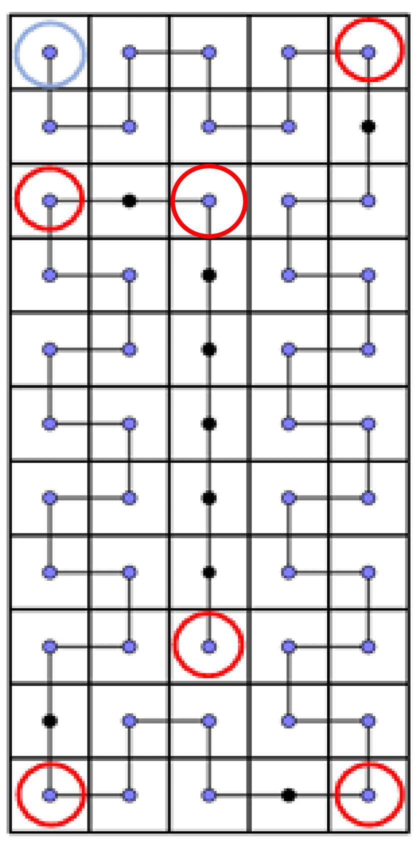
長邊出發

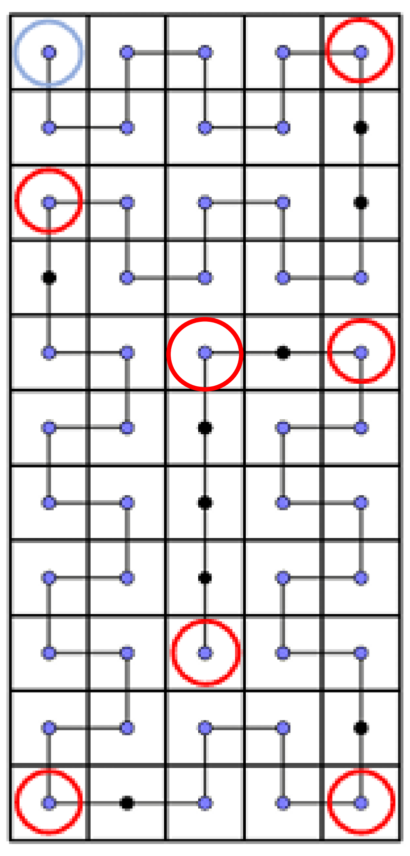


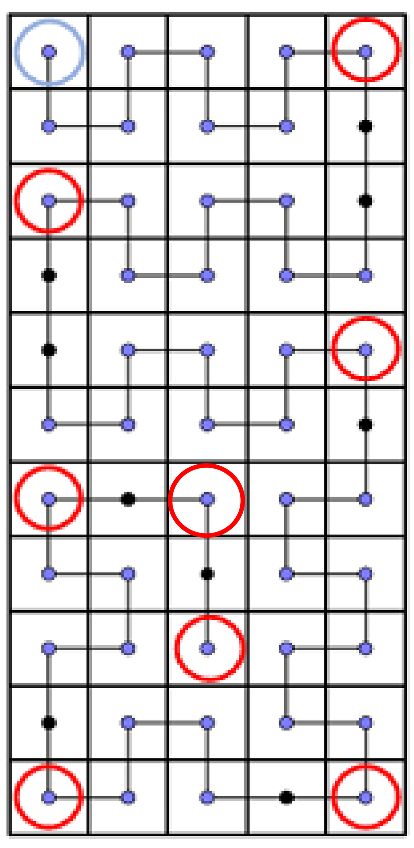
0	-2	-2	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	0	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	0	-2	0
-2	-2	-2	-2	-2
0	-2	-2	-2	0

奇數×奇數

短邊出發

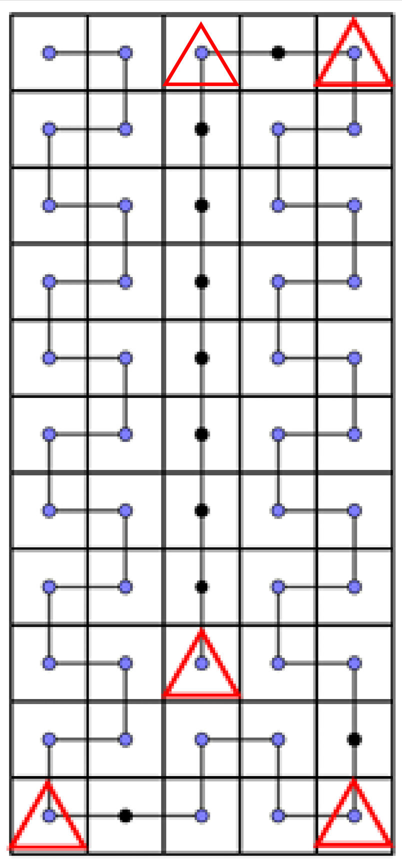






0				0
0		0		0
0		0		0
0		0		0
0		0		0
0				0

長邊出發



0		-1		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		0		0
	-2		-2	
0		-1		0

最多、最少轉折數公式

任意矩形方格最少轉折數公式
$L(m,n) = 2 \times (\min\{m,n\} - 1)$

類別	最多轉折數$M(m,n)$
m、n皆為偶數且$m \geq n$	$(m-1) \times n$
m為奇數、n為偶數	$(m-1) \times n$
m、n為相等奇數	$n^2 - n - 1$
m、n皆為奇數且$m > n$	$m \times (n-1)$

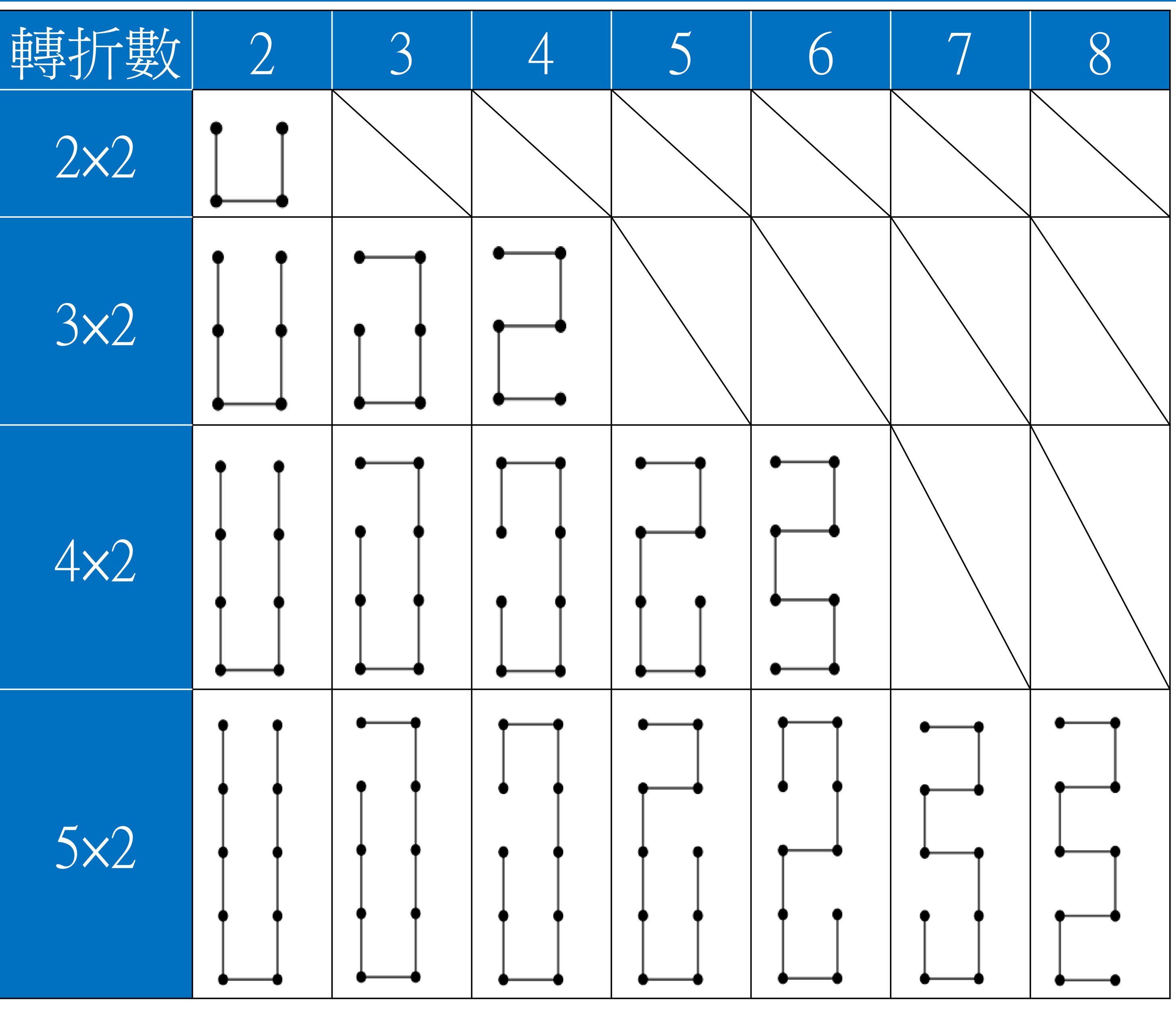
有缺塊的矩形方格之最多轉折數

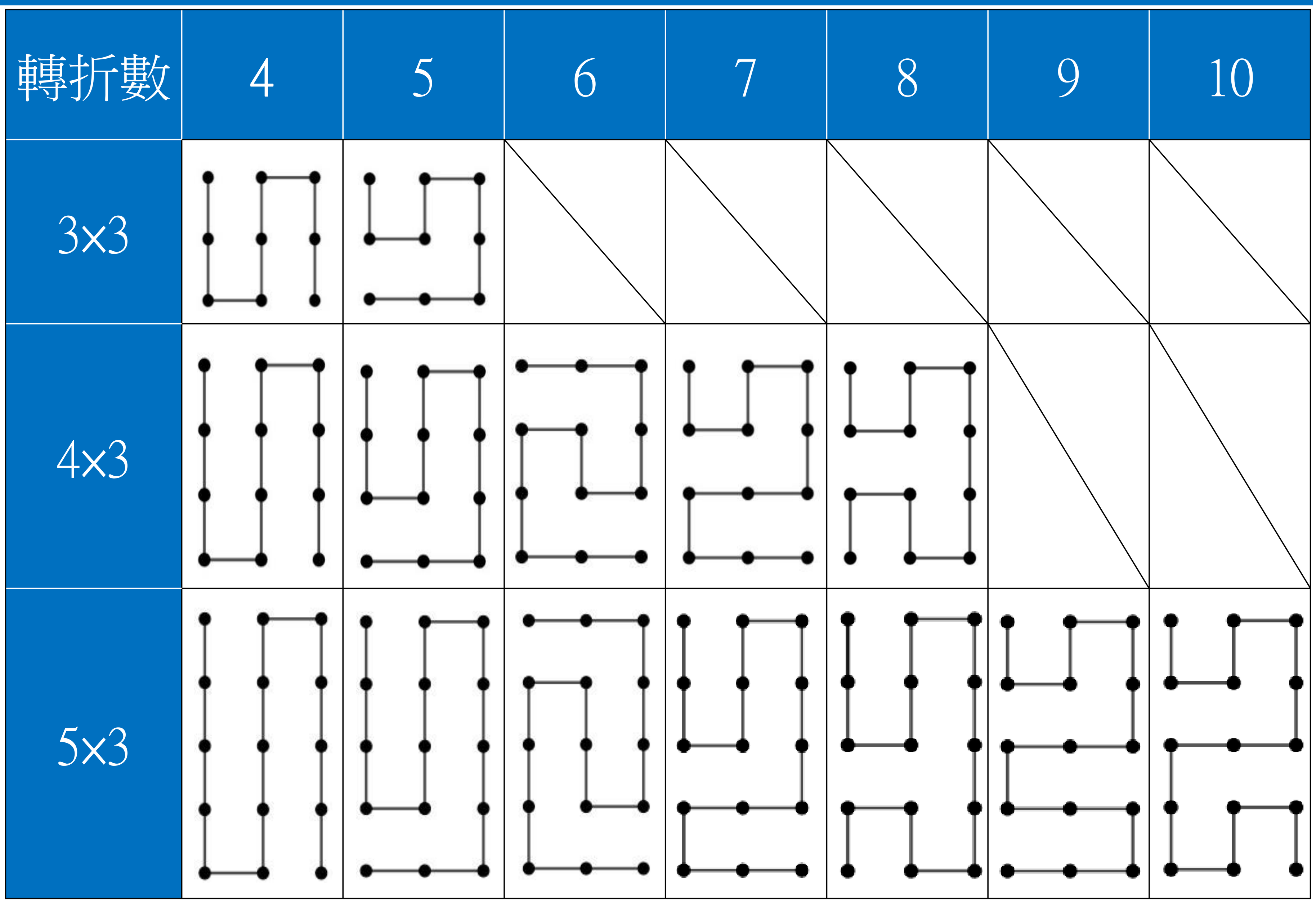
最多轉折數	
缺一角塊	$M(m,n)-0$
缺任意塊	至少為$M(m,n)-2$。

給定矩形方格mxn，當m、n皆為奇數，且缺塊位置(i,j)滿足 $i+j$ 為奇數時，則該圖形無法完成漢米爾頓路徑。

利用螺旋及迴轉策略，依序找出與未缺塊的矩形方格的最多轉折數-0、-1與-2的位置。

所有可能轉折數及其路徑之特徵

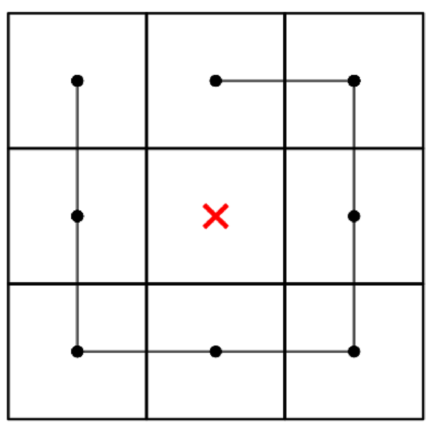




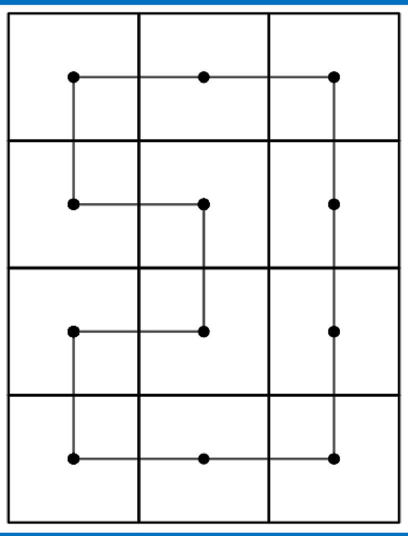
所有可能轉折數

行數 \ 列數	2	3	4	5
2	2	2 ~ 4	2 ~ 6	2 ~ 8
3		4 ~ 5	4 ~ 8	4 ~ 10

有缺塊的最少轉折數

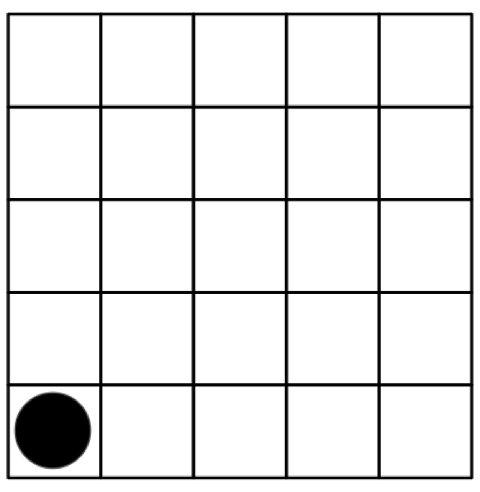


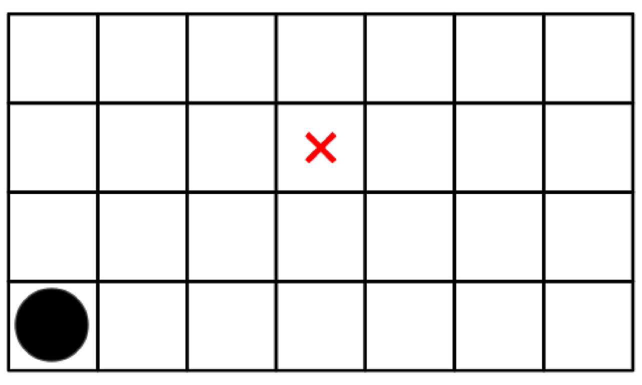
0		0
	-1	
0		0



0	+2	0
+1	0	+1
+1	0	+1
0	+2	0

生活中的應用





參考資料

一、游森棚(2023年6月)。森棚教官的數學題—蜿蜒曲折。科學研習月刊，第62 - 3期。

二、 趙啟超(2020年12月31日)。離散數學〔國立清華大學開放式課程〕。

三、 國立臺灣師範大學演算法筆記。國立臺灣師範大學。

四、 楊智超(91年10月)。第一屆旺宏科學獎成果報告書。

經理來了！–談一筆劃問題。

註：本海報中所有圖片皆由作者自行繪製。