中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050407

自指數列的週期現象

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蕭詠璦 高二 吳彥妮	姜焙元

關鍵詞：遞迴數列、週期

自指數列的週期現象

摘要

我們稱滿足遞迴關係 $a_n = a_{a_{n-1}}$ 的非負整數數列 $< a_n >$ 為「自指數列」。本研究探討其循環性質，發現若存在某個非負整數 m 使得 $a_m \neq m+1$，則數列從某一項開始會進入循環，且循環長度與 a_m 相關。我們推導出如何根據初始條件計算數列的循環長度，並進一步引入週期與最小循環起始項的概念，定義 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。透過研究，我們找出 $\mathbf{per}(s,p)$ 各項滿足的充要條件，從而判定自指數列的值。最後，我們證明了一個定理，能夠從初始條件找出所有滿足條件的 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。該定理使得求解數列各項的過程比原始方法更簡潔。此外，我們將此定理轉化為演算法，並以 Python 實作。

壹、 前言

一、 研究動機

我們在 USA Mathematical Talent Search 上找到一個關於遞迴數列的問題如下：

> ❓ 設 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 是一個非負整數數列，使得 $a_2 = 5, a_{2014} = 2015$，且 $a_n = a_{a_{n-1}}$ 對所有正整數 n 都成立。試求 a_{2015} 的所有可能值。

根據網站所提供的解法 ([1])，它先利用數學歸納法證明了 $< a_n >$ 從 a_3 開始每 2 項循環，接著利用這個性質進行分類。但是這個分類討論的過程非常繁瑣，如果再增加或改變初始條件，則需要討論的情況會更多。我們認為這個問題應該有更一般性的結論，所以想探究這個數列的性質，從而用更精簡的方法解決原始問題。

二、研究目的

1. 證明自指數列的循環性。
2. 探討初始條件與自指數列的循環性的關係。
3. 給定自指數列的初始條件，如何找出 a_n 每一項的可能值，並解決原始問題。

貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦。

參、研究過程與方法

一、自指數列的循環性與性質探討

定義 3.1.1: 自指數列

設數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的每一項均為非負整數，且滿足對任意正整數 n 都有

$$a_n = a_{a_{n-1}}$$

則數列 $< a_n >$ 稱為「自指數列」(Self-indexing Sequence)。

原始問題的解法中先利用數學歸納法證明以下性質

性質 3.1.2

若 $< a_n >$ 是自指數列且 $a_2 = 5$，則 $a_n = \begin{cases} a_3 & \text{，若 } n \text{ 為奇數} \\ a_4 & \text{，若 } n \text{ 為偶數} \end{cases}$ 對所有 $n > 2$ 都成立。

這個循環性在解題過程中扮演很重要的角色，所以我們先探討自指數列的循環性。

首先我們給定自指數列 $< a_n >$ 某一項 a_m 的值，並觀察 a_m 的值是否會讓數列產生循環。先考慮 $a_m \geq m$ 的情形，例如給定 a_0 的值

- 若 $a_0 = 0$，則 $a_1 = a_{a_0} = a_0 = 0$，$a_2 = a_{a_1} = a_0 = 0$，依此類推，推測 $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0$。
- 若 $a_0 = 1$，則 $a_1 = a_{a_0} = a_1$，數列 $< a_n >$ 看起來沒有特別的規律。
- 若 $a_0 = 2$，則 $a_1 = a_{a_0} = a_2$、$a_2 = a_{a_1} = a_{a_2} = a_3$，依此類推，猜測 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$

- 若 $a_0=3$，則 $a_1=a_{a_0}=a_3$、$a_2=a_{a_1}=a_{a_3}=a_4$、依此類推，猜測

$$\begin{cases} a_1=a_3=a_5=\cdots \\ a_2=a_4=a_6=\cdots \end{cases}$$

- 若 $a_0=4$，則 $a_1=a_4$、$a_2=a_{a_1}=a_{a_4}=a_5$、$a_3=a_{a_2}=a_{a_5}=a_6$、依此類推，猜測

$$\begin{cases} a_1=a_4=a_7=\cdots \\ a_2=a_5=a_8=\cdots \\ a_3=a_6=a_9=\cdots \end{cases}$$

接著考慮 $a_m<m$ 的情況，例如 $a_5=2$，則

$$\begin{aligned} a_6&=a_{a_5}=a_2 \\ a_7&=a_{a_6}=a_{a_2}=a_3 \\ a_8&=a_{a_7}=a_{a_3}=a_4 \\ a_9&=a_{a_8}=a_{a_4}=a_5=2 \\ a_{10}&=a_{a_9}=a_2=a_6 \\ a_{11}&=a_{a_{10}}=a_{a_2}=a_3=a_7 \end{aligned}$$

因此我們可得

$$\begin{aligned} a_2&=a_6=a_{10}=\cdots \\ a_3&=a_7=a_{11}=\cdots \\ a_4&=a_8=a_{12}=\cdots \\ a_5&=a_9=a_{13}=\cdots \end{aligned}$$

根據上面的觀察，我們猜測如果 $a_m=m$，則數列自某項之後為常數數列；如果 $a_m=m+t$，當 $t\neq 1$ 時，數列會產生循環。

定理 3.1.3

設 $<a_n>$ 為自指數列，若存在非負整數 m 使得 $a_m=m+t$，其中 t 為定值。則

$$a_{m+n}=\begin{cases} m & \text{，若 } t=0 \\ a_{m+n+t-1} & \text{，若 } t\neq 0 \end{cases}$$

對所有正整數 n 都成立。

證明：我們對 n 使用數學歸納法來證明。

1. 若 $t=0$，則當 $n=1$ 時，$a_{m+1}=a_{a_m}=a_m=m$ 成立。
   設 $n=k$ 時，$a_{m+k}=m$ 成立。
   則當 $n=k+1$ 時，$a_{m+k+1}=a_{a_{m+k}}=a_m=m$

2. 若 $t\neq 0$，則當 $n=1$ 時，$a_{m+1}=a_{a_m}=a_{m+t}=a_{m+1+t-1}$ 顯然成立。
   設 $n=k$ 時，$a_{m+k}=a_{m+k+t-1}$ 成立。則當 $n=k+1$ 時

$$
\begin{aligned}
a_{m+k+1} &= a_{a_{m+k}} && (\text{由 } <a_n> \text{ 的定義})\\
&= a_{a_{m+k+t-1}} && (\text{由歸納假設得知})\\
&= a_{m+k+t}=a_{m+(k+1)+t-1} && (\text{由 } <a_n> \text{ 的定義})
\end{aligned}
$$

所以由數學歸納法可知 $a_{m+n}=\begin{cases} m & \text{，若 } t=0\\ a_{m+n+t-1} & \text{，若 } t\neq 0\end{cases}$ 對所有正整數 n 都成立。 □

原始題目給定 $a_2=5$，恰好為 $m=2, t=3$ 的情況，由定理3.1.3即可得到性質3.1.2的結果。而 $a_5=2$ 是 $m=5, t=-3$ 的情況，利用定理3.1.3就能得到前述觀察的結果。

定義 3.1.4

設 $<a_n>$ 為自指數列且 m 為非負整數，若存在正整數 ℓ 使得

$$a_{m+n-1}=a_{m+n-1+\ell}$$

對所有正整數 n 都成立，即 $a_m=a_{m+\ell}$、$a_{m+1}=a_{m+1+\ell}$、$a_{m+2}=a_{m+2+\ell},\cdots$，則稱 $<a_n>$ 是**從第 m 項開始循環長度為 ℓ 的自指數列**。

定義 3.1.5: (m,ℓ) 自指數列

設 $<a_n>$ 為自指數列且 m 為非負整數，若存在正整數 ℓ 使得

$$a_m=a_{m+\ell}$$

則 $<a_n>$ 稱為 (m,ℓ) 自指數列。

由 (m,l) 自指數列的定義顯然可知一個 (m,ℓ) 自指數列是從第 m 項開始循環長度為 ℓ 的自指數列。利用定理3.1.3 可以得到以下性質：

性質 3.1.6

設 $< a_n >$ 為自指數列，若存在非負整數 m 使得 $a_m = m + t$，其中 t 為整數，則

1. 若 $t > 1$，則 $< a_n >$ 是 $(m+1, t-1)$ 自指數列。
2. 若 $t \leq 0$，則 $< a_n >$ 是 $(m+t, 1-t)$ 自指數列。

例如，若 $a_2 = 5$，則 $< a_n >$ 是 $(3,2)$ 自指數列；若 $a_5 = 2$，則 $< a_n >$ 是 $(2,4)$ 自指數列。

從性質3.1.6知道如果給定 $a_m \neq m+1$，則 $< a_n >$ 會從某一項開始循環，很自然會想到的問題是，如果給定相異兩項 $a_i \neq i+1$ 與 $a_j \neq j+1$，則自指數列 $< a_n >$ 是 (m_1, ℓ_1) 自指數列，也是 (m_2, ℓ_2) 自指數列，我們想知道這樣的條件會對自指數列產生什麼影響。

定理 3.1.7

設 $< a_n >$ 是 (m_1, ℓ_1) 自指數列，且 $< a_n >$ 也是 (m_2, ℓ_2) 自指數列，其中 $m_1 \leq m_2$。則 $< a_n >$ 必為 (m_1, d) 自指數列，其中 $d = \gcd(\ell_1, \ell_2)$ 為 ℓ_1 與 ℓ_2 的最大公因數。

證明：由貝祖定理 (Bézout's lemma) 可知存在整數 x, y 使得

$$x\ell_1 + y\ell_2 = d$$

因為 $d > 0$，所以 x, y 兩數必為一正一負。若 $x > 0$ 且 $y < 0$，因為 $< a_n >$ 是 (m_1, ℓ_1) 自指數列，所以 $< a_n >$ 是 (m_2, ℓ_1) 自指數列。故

$$a_{m_2 + x\ell_1} = a_{m_2}$$

又 $m_2 + x\ell_1 > m_2 + d > m_2$ 且 a_{m_2} 後每隔 ℓ_2 項皆相等，因此

$$a_{m_2} = a_{m_2 + x\ell_1} = a_{m_2 + x\ell_1 + y\ell_2} = a_{m_2 + d}$$

同理若 $x < 0$ 且 $y > 0$，則

$$a_{m_2} = a_{m_2 + y\ell_2} = a_{m_2 + y\ell_2 + x\ell_1} = a_{m_2 + d}$$

因此 $< a_n >$ 是 (m_2, d) 自指數列。

因為 $a_{m_1} = a_{m_1 + k\ell_1}$ 對任意正整數 k 都成立，選取適當的 k 使得 $m_1 + k\ell_1 \geq m_2$，因為 $< a_n >$ 是 (m_2, d) 自指數列，所以

$$a_{m_1 + k\ell_1} = a_{m_1 + k\ell_1 + d}$$

即 $a_{m_1} = a_{m_1 + d}$，表示 $< a_n >$ 是 (m_1, d) 自指數列。 □

我們以 $(m_1,\ell_1)=(3,4)$ 與 $(m_2,\ell_2)=(6,6)$ 來說明定理3.1.7的證明過程，因為 $\gcd(4,6)=2$，利用輾轉相除法可得 $4\times 2+6\times(-1)=2$。因為 $<a_n>$ 為 $(3,4)$ 自指數列，所以 $<a_n>$ 也是 $(6,4)$ 自指數列，故

$$\underbrace{a_6=a_{6+4}=a_{6+4\times 2}=a_{14}=a_{14-6}=a_8}_{a_6\text{ 後每隔 }4\text{ 項或 }6\text{ 項循環}}$$

表示 $<a_n>$ 是 $(6,2)$ 自指數列。又

$$\underbrace{a_3=a_{3+4}}_{a_3\text{ 後每隔 }4\text{ 項循環}} = \underbrace{a_7=a_{7+2}}_{a_6\text{ 後每隔 }2\text{ 項循環}} = \underbrace{a_9=a_{9-4}=a_5}_{a_3\text{ 後每隔 }4\text{ 項循環}}$$

故 $a_3=a_5=a_{3+2}$，表示 $<a_n>$ 是 $(3,2)$ 自指數列。

因為 $\gcd(a,b,c)=\gcd(\gcd(a,b),c)$，我們可以將定理3.1.7 推廣成以下系理

系理 3.1.8

設 $<a_n>$ 為 (m_i,ℓ_i) 自指數列，其中 $i=1,2,3\cdots,r$。令

$$m=\min(m_1,m_2,\cdots,m_r), d=\gcd(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_r)$$

其中 $\min(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 表 r 個非負整數 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 中最小者，則 $<a_n>$ 為 (m,d) 自指數列。

利用系理3.1.8可知如果給定自指數列 $<a_n>$ 多個初始條件，我們可以判斷 $<a_n>$ 的最大循環長度。例如，若 $a_3=10,a_6=19,a_{13}=5$，則 $<a_n>$ 同時為 $(4,6)$、$(7,12)$、$(5,9)$ 自指數列，因為 $\min(4,7,5)=4,\gcd(6,12,9)=3$，利用系理3.1.8可知 $<a_n>$ 為 $(4,3)$ 自指數列。

二、 自指數列的週期與最小循環起始項

系理3.1.8告訴我們，如果給定多個初始條件，該如何來判斷 $<a_n>$ 的循環現象。接下來我們想把這個觀念繼續延伸，討論 $<a_n>$ 最小的循環長度，以及循環的起點。因為如果僅給定 $a_k=k+1$ 的初始條件，無法判定數列是否有循環現象，為了方便討論，接下來的自指數列 $<a_n>$ **必存在非負整數** k**，使得** $a_k\neq k+1$。若 $a_k=k+t$ 且 $t\neq 1$，則 $<a_n>$ 為 $(k+1,t-1)$ 自指數列 (若 $t>1$) 或 $(k+t,1-t)$ 自指數列 (若 $t\leq 0$)，所以必存在非負整數 m 與正整數 d，使得 $a_m=a_{m+d}$。

定義 3.2.1

設 $<a_n>$ 為 (m,p) 自指數列，且對任意正整數 $k<p$，$a_m \neq a_{m+k}$ 成立，則稱 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期 (period) 為 p 的自指數列。

接下來我們證明一些關於自指數列週期的性質。

性質 3.2.2

設 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期為 p 的自指數列，若 $a_k = a_{k+d}$ 且 $k \geq m$，則 $p \mid d$。

證明：利用定理3.1.7可知 $<a_n>$ 是 $(m, \gcd(p,d))$ 自指數列，即

$$a_m = a_{m+\gcd(p,d)}$$

因為 p 是最小正整數使得 $a_{m+p} = a_m$，所以 $p \leq \gcd(p,d)$。另一方面，因為 $\gcd(p,d) \leq p$，所以得到

$$\gcd(p,d) = p$$

因此 $p \mid d$。 □

性質 3.2.3

若 $<a_n>$ 是從第 m_1 項開始且週期為 p_1 的自指數列，也是從第 m_2 項開始且週期為 p_2 的自指數列，其中 $m_1 < m_2$，則 $p_1 = p_2$。

證明：因為 $<a_n>$ 是 (m_1, p_1) 自指數列且 $m_2 > m_1$，所以 $a_{m_2} = a_{m_2+p_1}$，故 $p_2 \leq p_1$。
由定理3.1.7可知 $a_{m_1} = a_{m_1+\gcd(p_1,p_2)}$，所以 $p_1 \leq \gcd(p_1,p_2) \leq p_2$。因此 $p_1 = p_2$。 □

性質 3.2.4

設 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期為 p 的自指數列，若存在非負整數 $s<m$ 與正整數 d，使得 $a_s = a_{s+d}$，則 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列。

證明：因為存在非負整數 $s<m$ 與正整數 d，使得 $a_s = a_{s+d}$，所以存在正整數 p' 使得 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p' 的自指數列。利用性質3.2.3可知 $p' = p$。 □

性質3.2.3和性質3.2.4告訴我們，如果自指數列 $<a_n>$ 從第 m 開始循環且週期為 p，則在 $<a_n>$ 只要某一項開始循環，不論這項在 a_m 之前或之後，其週期必為 p。因此我們考慮最小開始產生循環的項 a_s，使得 $<a_n>$ 從第 s 項開始週期為 p，而且不會從第 s 項之前的項產生循環。

定義 3.2.5: $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列

設 s 為非負整數，若 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列，且對於所有非負整數 $i<s$，$a_i \neq a_{i+p}$ 成立，則稱 $<a_n>$ 是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。

利用性質3.2.4可知 $\mathbf{per}(s,p)$ 有以下性質

性質 3.2.6

設 $<a_n>$ 為 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列，則 $<a_n>$ 不可能為 (m,d) 自指數列，其中 m 是任意小於 s 的非負整數，d 為任意正整數。

性質3.2.6告訴我們，$\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列不能從第 s 項之前產生任何長度的循環，所以一個 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列 $<a_n>$ 的形式如下

$$\underbrace{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{s-1}}_{\text{非循環部分}}, \underbrace{a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_{s+p-1}}_{\text{循環部分 (週期為 } p)}$$

我們把 a_s 稱為「最小循環起始項」(minimum cycle starting term)。
例如 $<a_n>=\{1,2,5,4,7,4,7,4,7,\cdots\}$ 為 $\mathbf{per}(3,2)$ 自指數列，且最小循環起始項為 $a_3=4$。

接下來我們有興趣的問題是，若數列 $<a_n>$ 滿足 $a_s=a_{s+p}$，還需要增加什麼條件才能保證 $<a_n>$ 是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列呢？我們先證明一個關於自指數列週期的引理。

引理 3.2.7

令 $s\geq 1$，若 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列，則

1. p 整除 $|a_{s+i}-s-i-1|$，其中 $i=-1,0,1,2,\cdots,p-2$
2. p 整除 $|a_{s+p-1}-s|$

證明：

1. 根據自指數列的定義 $a_{s+i+1}=a_{a_{s+i}}$，其中 $i=-1,0,1,2,\cdots,p-2$。
   如果 $a_{s+i}\geq s+i+1$，則
   $$a_{s+i+1}=a_{a_{s+i}}=a_{s+i+1+(a_{s+i}-s-i-1)}$$
   利用性質3.2.2可知 $p \mid a_{s+i}-s-i-1$。
   如果 $a_{s+i}<s+i+1$，則 $a_{a_{s+i}}=a_{a_{s+i}+(s+i+1-a_{s+i})}$，表示數列從第 a_{s+i} 項開始產生循環，利用性質3.2.4得知週期仍為 p，再利用性質3.2.2可知 $p \mid s+i+1-a_{s+i}$。綜合以上討論可知 p 整除 $|a_{s+i}-s-i-1|$。

2. 因為 $a_s = a_{s+p}$，所以 $a_{a_{s+p-1}} = a_{s+p} = a_s$。同樣地如果 $a_{s+p-1} \geq s$，
則 $a_s = a_{s+(a_{s+p-1}-s)}$，利用性質3.2.2可知 $p \mid a_{s+p-1} - s$。
如果 $a_{s+p-1} < s$，則 $a_{a_{s+p-1}} = a_{a_{s+p-1}+(s-a_{s+p-1})}$，利用性質3.2.2可知 $p \mid s - a_{s+p-1}$。
綜合以上討論可知 p 整除 $|a_{s+p-1} - s|$。

□

利用引理3.2.7，我們證明了一個 (s,p) 自指數列是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列的充要條件。

定理 3.2.8

令 $s \geq 1$ 且 $< a_n >$ 是 (s,p) 自指數列，則 $< a_n >$ 是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列的充要條件為 $< a_n >$ 滿足以下四個條件：

1. $a_i = i + 1$ 其中 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, s-2$
2. $a_{s+i} = s + i + 1 + pk_{s+i}$，其中 $i = -1, 0, 1, 2, \cdots, p-2$，$k_{s+i}$ 是非負整數。
3. $a_{s+p-1} = s + pk_{s+p-1}$，其中 k_{s+p-1} 是非負整數。
4. $k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$

證明： $(\Rightarrow)$ 設 $< a_n >$ 是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列，我們證明 1,2,3,4 都成立。

1. 利用反證法，假設存在整數 i，且 $0 \leq i < s-1$，使得 $a_i \neq i+1$。令 $a_i = i+t, t \neq 1$，如果 $t > 1$，由性質3.1.6可得 $< a_i >$ 是 $(i+1, t-1)$ 自指數列。因為 $i+1 < s$，所以利用定理3.1.7知道 $< a_n >$ 是 $(i+1, \gcd(t-1,p))$ 自指數列，但由性質3.2.6知道這不成立。若 $t \leq 0$，則 $< a_i >$ 是 $(i+t, 1-t)$ 自指數列，且 $i+t < s$，同樣地由定理3.1.7可知 $< a_n >$ 是 $(i+t, \gcd(1-t,p))$ 自指數列，利用性質3.2.6也知道這不成立。所以 $a_i = i+1$。

2. 由引理3.2.7可知 $a_{s+i} = s + i + 1 + pk_{s+i}$，其中 $-1 \leq i \leq p-2, k_{s+i} \in \mathbb{Z}$。
如果 $k_{s+i} < 0$，則

$$a_{s+i} \leq s + i + 1 - p \leq s + p - 2 + 1 - p = s - 1$$

利用性質3.1.6可知 $< a_n >$ 的最小循環項在 a_s 之前，但這與 $\mathbf{per}(s,p)$ 的定義矛盾，因此 $k_{s+i} \geq 0$。

3. 由引理3.2.7可知 $a_{s+p-1} = s + pk_{s+p-1}$，其中 $k_{s+p-1} \in \mathbb{Z}$。
如果 $k_{s+p-1} < 0$，則 $a_{s+p-1} < s$，利用性質3.1.6可知 $< a_n >$ 的最小循環項在 a_s 之前，但這與 $\mathbf{per}(s,p)$ 的定義矛盾，因此 $k_{s+p-1} \geq 0$。

4. 由 $\mathbf{per}(s,p)$ 的定義可知 $a_{s-1} \neq a_{s+p-1}$，因此

$$s + pk_{s-1} \neq s + pk_{s+p-1} \Rightarrow k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$$

($\Leftarrow$) 另一方面，設 $< a_n >$ 是 (s,p) 自指數列且滿足 1,2,3 和 4。

因為 1 成立，所以 $a_i \neq a_{i+p}$ ，其中 $0 \leq i \leq s-1$，故 $< a_n >$ 不可能是 $\mathbf{per}(m,p)$ 自指數列，其中 $m < s$。

接下來我們要證明兩件事情

(1) $\boxed{\text{不存在非負整數 } i < s \text{ 使得 } a_i = a_{i+p}}$

因為 4 成立，所以

$$a_{s-1} \neq a_{s-1+p} \ldots\ldots ①$$

若存在有 $0 \leq i < s-1$，使得 $a_i = a_{i+p}$。因為 $s-1 > i$，所以 $a_{s-1} = a_{s-1+p}$，這與 ① 矛盾，因此不存在 $0 \leq i \leq s-1$，使得 $a_i = a_{i+p}$

(2) $\boxed{< a_n > \text{ 是從 } a_s \text{ 項開始且週期為 } p \text{ 的自指數列}}$

利用反證法，若存在有正整數 $p' < p$ 使得 $a_s = a_{s+p'}$。

如果 $p' < p-1$，因為 2 成立，所以

$$1 + s + pk_s = s + p' + 1 + pk_{s+p'}$$

其中 $k_s, k_{s+p'}$ 都是非負整數，化簡得 $p(k_s - k_{s+p'}) = p'$，因為 p, p' 都是正整數，所以 $k_s - k_{s+p'} > 0$，從而

$$p(k_s - k_{s+p'}) \geq p$$

但這與 $p' < p$ 矛盾。如果 $p' = p-1$，即 $a_s = a_{s+p-1}$，因為 3 成立，所以

$$s + 1 + pk_s = s + pk_{s+p-1}$$

其中 k_s, k_{s+p-1} 都是非負整數，此時

$$p(k_{s+p-1} - k_s) = 1$$

因為 $p > 0$，所以 $p = 1$，但 $p = 1$ 表示不可能存在比 p 更小的正整數了。綜合以上討論，我們知道不可能有小於 p 的正整數 p'，使得 $a_s = a_{s+p'}$，因此週期為 p。

根據 (1)(2) 可知 $< a_n >$ 是 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。

□

定理3.2.8告訴我們當 $s \geq 1$ 時 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列的形式如下，其中 $k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$

n	0	1	$\cdots$	$s-2$	$s-1$	s	$\cdots$	$s+p-2$	$s+p-1$
a_n	1	2	$\cdots$	$s-1$	$s+pk_{s-1}$	$s+1+pk_s$	$\cdots$	$s+p-1+pk_{s+p-2}$	$s+pk_{s+p-1}$

接下來討論 $\mathbf{per}(0,p)$ 自指數列的性質，當 $p=1$ 時表示自指數列為常數數列，這是簡單 (trivial) 的情況，所以我們考慮 $\mathbf{per}(0,p)$ 自指數列且 $p > 1$ 的情況。我們證明以下結果：

定理 3.2.9

設 $<a_n>$ 是 $(0,p)$ 自指數列且 $p>1$，則 $<a_n>$ 是 $\mathbf{per}(0,p)$ 自指數列的充要條件為 $<a_n>$ 滿足如下形式

n	0	1	$\cdots$	$p-1$
a_n	$1+pk_0$	$2+pk_1$	$\cdots$	pk_{p-1}

其中 $k_0,k_1,\cdots,k_{p-1}$ 為非負整數。

證明： $(\Rightarrow)$ 設 $<a_n>$ 為 $\mathbf{per}(0,p)$ 自指數列，則由性質3.2.3可知 $<a_n>$ 必為從 a_1 開始週期為 p 的自指數列，由引理3.2.7可知 p 整除 $|a_i-i-1|$，其中 $i=0,1,2,\cdots,p-1$。若 $0\le i\le p-2$，因為 $a_i-i-1=pk_i$，所以

$$a_i=i+1+pk_i$$

因為 $i+1<p$ 且 $a_i\ge 0$，所以 k_i 為非負整數。若 $i=p-1$，則 $a_{p-1}-p=pk'_{p-1}$，可得

$$a_{p-1}=p(1+k'_{p-1})=pk_{p-1}\ge 0$$

其中 k_{p-1} 為非負整數，因此 $<a_n>$ 滿足表格內的形式。

$(\Leftarrow)$ 設 $<a_n>$ 滿足表格內的形式且 $a_0=a_p$，我們要證明週期為 p。假設存在有 $p'<p$ 使得 $a_0=a_{p'}$，則

$$1+pk_0=p'+1+pk_{p'}$$

因此可得 $p'=p(k_0-k_{p'})\Rightarrow p\mid p'$，但這與 $0<p'<p$ 矛盾，所以週期為 p。

□

三、 判斷滿足初始條件之自指數列的演算法

定理3.2.8與定理3.2.9已經告訴我們一個 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列各項的形式，所以原始問題相當於是給定 $a_2=5$ 與 $a_{2014}=2015$ 這兩個初始條件，想找出滿足初始條件的自指數列可能是哪種 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。我們將這個條件推廣，如果給定數列 $<a_n>$ 的初始條件

$$a_{x_1}=y_1,a_{x_2}=y_2,\cdots,a_{x_n}=y_n$$

其中 x_i,y_i 皆為非負整數。那麼滿足條件的自指數列是否存在？有一個顯然的情況是，如果對於所有的 i 都有 $a_{x_i}=x_i+1$，那麼滿足這個條件的自指數列一定存在。所以我們考慮給定的初始條件中存在非負整數 x_i，使得 $a_{x_i}\ne x_i+1$。

我們首先注意到，若給定初始條件，則滿足此條件的自指數列可能不存在，例如若 $a_2=5$ 且 $a_3=1$，如果有滿足條件的自指數列，則由定理3.1.7可知 $<a_n>$ 是 $(1,1)$ 自指數

列，因此 $<a_n>$ 可能為 $\mathbf{per}(0,1)$ 或 $\mathbf{per}(1,1)$ 自指數列，但 $<a_n>$ 不可能從 a_0 或 a_1 開始為常數數列 $(\because a_2 \neq a_3)$，所以找不到滿足 $a_2 = 5$ 且 $a_3 = 1$ 的自指數列。

另一方面，若一個自指數列存在 $a_i \neq i+1$，則它會從某一項開始有週期現象；那麼如果一個數列從某一項開始有週期現象，那麼它也會是自指數列嗎？我們可以證明，如果數列從某一項開始有週期現象，且各項的值滿足以下條件時，則此數列也是自指數列。

定理 3.3.1

設數列 $<a_n>$ 為非負整數數列，且存在有非負整數 s，使得對於所有非負整數 i，$a_{s+i} = a_{s+i+p}$ 恆成立 (即從 a_s 開始每隔 p 項都相等)，其中 p 為正整數。若 $<a_n>$ 中有定義的項滿足以下條件

1. $a_i = i+1$ ，其中 $i = 0,1,2,3,\cdots,s-2$
2. $a_{s+i} = s+i+1+pk_{s+i}$，其中 $i = -1,0,1,2,\cdots,p-2$，k_{s+i} 是非負整數。
3. $a_{s+p-1} = s+pk_{s+p-1}$，其中 k_{s+p-1} 是非負整數。

則 $<a_n>$ 為自指數列。(若 $i<0$ 則 a_i 沒有定義)

證明：我們要證明對於所有的正整數 n，$a_n = a_{a_{n-1}}$ 都成立。

- 若 $1 \leq n \leq s-1$，顯然 $a_{a_{n-1}} = a_n$ 成立。
- 若 $s \leq n \leq s+p-1$，因為 k_{s+i} 為非負整數且 $a_{s+i} = a_{s+i+p} = a_{s+i+2p} = \cdots$，故
$$a_{a_{s+i}} = a_{s+i+1+pk_{s+i}} = a_{s+i+1}$$
- 顯然 $a_{a_{s+p-1}} = a_{s+pk_{s+p-1}} = a_s = a_{s+p}$。
- 若 $n > s+p$，令 $n = s+pq+r$，其中 $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、$0<r<p$，
則 $a_{n-1} = a_{s-1+pq+r} = a_{s-1+r}$。因為我們已經證明了對 $s \leq n \leq s+p-1$ 的 n，$a_n = a_{a_{n-1}}$ 恆成立，所以
$$a_{a_{n-1}} = a_{a_{s-1+r}} = a_{s+r} = a_{s+r+pq} = a_n$$

綜合以上討論可知，$a_n = a_{a_{n-1}}$ 對於所有正整數 n 都成立，也就是說，$<a_n>$ 為自指數列。
□

根據定理3.3.1，我們知道，如果數列 $<a_n>$ 從 a_0 開始每隔 p 項相等，且各項的值如下

n	0	1	$\cdots$	$p-1$
a_n	$1+pk_0$	$2+pk_1$	$\cdots$	pk_{p-1}

或是從 a_s 開始每隔 p 項相等，且各項的值如下

n	0	1	$\cdots$	$s-2$	$s-1$	s	$\cdots$	$s+p-2$	$s+p-1$
a_n	1	2	$\cdots$	$s-1$	$s+pk_{s-1}$	$s+1+pk_s$	$\cdots$	$s+p-1+pk_{s+p-2}$	$s+pk_{s+p-1}$

那麼 $< a_n >$ 必為自指數列。所以當給定條件時，我們需要檢查給定的條件能否構成一個從某項開始的週期數列。為了方便討論，以數對 (x_i, y_i) 表示 $a_{x_i} = y_i$，其中 $1 \leq i \leq n$。顯然如果存在 $x_i = x_j$ 且 $y_i \neq y_j$，則滿足條件的自指數列不存在，不失一般性，我們假設

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

令

$$m_i = \begin{cases} x_i + 1 & \text{，若 } x_i < y_i \\ y_i & \text{，若 } x_i \geq y_i \end{cases} \qquad \ell_i = |y_i - x_i - 1|$$

利用系理3.1.8可知如果 $< a_n >$ 是自指數列，則必為 (m, d) 自指數列，其中

$$m = \min(m_1, m_2, \cdots, m_n), d = \gcd(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$$

因為 $d \mid \ell_i$，所以 $d \Big| |y_i - x_i - 1|$。再利用性質3.2.2得知 $< a_n >$ 可能為 $\mathbf{per}(s, p)$ 自指數列，其中 $s \leq m$ 且 $p \mid d$，顯然 $p \Big| |y_i - x_i - 1|$。

關於 m，我們有以下性質：

性質 3.3.2

設 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$，則

1. 對於所有的 i，$m \leq y_i$
2. 對於所有 $i \geq 2$，$m \leq x_i$ 成立
3. 若 $x_1 < m$，則 $m = x_1 + 1$。

證明：

1. 因為 $m_i = \begin{cases} x_i + 1 & \text{，若 } x_i < y_i \\ y_i & \text{，若 } x_i \geq y_i \end{cases}$。如果 $x_i < y_i$，則 $x_i + 1 \leq y_i$，可得 $m_i \leq y_i$。如果 $x_i \geq y_i$，則 $m_i = y_i$。故 $m \leq m_i \leq y_i$ 必成立。

2. 考慮以下兩種情況

   Case 1: $\boxed{\textbf{若 } x_1 < y_1}$ 此時 $m_1 = x_1 + 1$。對於 $i \geq 2$，
   若 $x_i < y_i$，則 $m_i = x_i + 1 > x_1 + 1 = m_1 \geq m$。
   若 $x_i \geq y_i$，則 $x_i \geq y_i = m_i \geq m$。

Case 2: $\boxed{若\ x_1 \geq y_1}$ 此時 $m_1 = y_1 \leq x_1$。對於 $i \geq 2$，

若 $x_i < y_i$，則 $m_i = x_i + 1 > x_1 \geq m$。

若 $x_i \geq y_i$，則 $x_i \geq y_i = m_i \geq m$。

綜合以上討論可知 $m \leq x_i$ 對 $i \geq 2$ 成立。

3. 若 $x_1 < m$，如果 $x_1 \geq y_1$，則 $m_1 = y_1$。但因為 $x_1 < m_1$，所以 $x_1 < y_1$，兩者矛盾。故 $x_1 < y_1 \Rightarrow m_1 = x_1 + 1$，因此 $m \leq x_1 + 1 \Rightarrow x_1 < m \leq x_1 + 1$。故可得 $m = x_1 + 1$。

□

利用性質3.3.2，我們證明以下關於滿足初始條件的自指數列之存在性定理。

定理 3.3.3: 滿足初始條件的自指數列之存在性

設 $a_{x_i} = y_i$，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 x_i, y_i 為非負整數。對於非負整數 s 與正整數 p，定義

$$r_i = \begin{cases} -1 & ，若\ x_i - s < 0 \\ x_i - s \pmod p & ，若\ x_i - s \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x_i - s \pmod p$ 為 $x_i - s$ 除以 p 的餘數。則存在 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列滿足 $a_{x_i} = y_i$ 的充要條件為：數對 (r_i, y_i) 滿足以下兩個條件

1. 不存在 i, j 使得 $r_i = r_j$ 且 $y_i \neq y_j$

2. 不存在 $r_i = -1, r_j = p - 1$ 且 $y_i = y_j$

證明： $(\Rightarrow)$ 由定理3.2.8與定理3.2.9顯然可知若存在 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列滿足 $a_{x_i} = y_i$，則滿足

1. 不存在 i, j 使得 $r_i = r_j$ 且 $y_i \neq y_j$

2. 不存在 $r_i = -1, r_j = p - 1$ 且 $y_i = y_j$

$(\Leftarrow)$ 假設 (r_i, y_i) 滿足上述兩個條件，以下我們針對不同的 s, p 進行討論。

Case 1: $\boxed{能否找到滿足條件的\ \mathbf{per}(0,1)\ 自指數列}$

此時 $r_i = 0$，相當於判斷 $(0, y_1), (0, y_2), \cdots, (0, y_n)$ 能否形成常數數列，所以若不存在 i, j 使得 $r_i = r_j = 0$ 且 $y_i \neq y_j$時，$< a_n >$ 可能常數數列 (也是自指數列)，因此存在 $\mathbf{per}(0,1)$ 自指數列滿足初始條件。

Case 2: $\boxed{能否找到滿足條件的\ \mathbf{per}(0,p)\ 自指數列，其中\ p > 1}$

若 $< a_n >$ 從首項開始週期為 p，則 $a_{x_i} = a_{x_i \pmod p}$，給定條件相當於判斷滿足

$$(r_1, y_1), (r_2, y_2), \cdots, (r_n, y_n)$$

的自指數列是否存在。如果存在 $r_i = r_j$，使得 $y_i \neq y_j$，則此數列不滿足週期數列的性質，所以此自指數列不存在。假設不存在 $r_i = r_j$，使得 $y_i \neq y_j$。因為 $p \Big| |y_i - x_i - 1|$，所以 $y_i - x_i - 1 = pq_i, q_i \in \mathbb{Z}$，又 $x_i = pq_i' + r_i$，所以

$$y_i = 1 + r_i + p(q_i + q_i')$$

若 $0 \leq r_i < p - 1$，因為

$$0 \leq y_i = 1 + r_i + p(q_i + q_i') \leq p - 1 + p(q_i + q_i') = p(q_i + q_i' + 1) - 1$$

所以 $q_i + q_i' \geq 0$，令 $k_{r_i} = q_i + q_i'$，則

$$a_{r_i} = 1 + r_i + pk_{r_i}, k_{r_i} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

若 $r_i = p - 1$，則 $0 \leq y_i = p + p(q_i + q_i') = p(q_i + q_i' + 1)$，因此 $q_i + q_i' + 1 \geq 0$，令 $k_{p-1} = q_i + q_i' + 1$，則

$$a_{r_i} = a_{p-1} = 1 + p - 1 + p(q_i + q_i') = pk_{p-1}$$

根據定理3.3.1與定理3.2.9，滿足條件的自指數列存在且週期為 p。因此若不存在 $r_i = r_j$，使得 $y_i \neq y_j$，可以找到滿足條件的 $\mathbf{per}(0, p)$ 自指數列。

Case 3: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(s,p) \text{ 自指數列，其中 } 1 \leq s \leq m, p \mid d}$

若 $< a_n >$ 從 a_s 開始週期為 p，則對於 $x \geq s$，$a_x = a_{x \pmod p}$。而由性質3.3.2知道只有 x_1 可能小於 m，且當 $x_1 < m$ 時 $m = x_1 + 1$。這表示除了 $s = x_1 + 1$ 外，其餘的 s 一定不大於 x_1。利用性質3.3.2可知只有 r_1 可能等於 -1，$r_2, r_3, \cdots, r_n$ 的值必為非負整數。所以我們要判斷滿足

$$(r_1, y_1), (r_2, y_2), \cdots, (r_n, y_n)$$

的自指數列是否存在。

同樣地如果存在 $r_i = r_j$，使得 $y_i \neq y_j$，則滿足條件的自指數列不存在。

假設不存在 $r_i = r_j$，使得 $y_i \neq y_j$。因為 $p \Big| |y_i - x_i - 1|$，所以 $y_i - x_i - 1 = pq_i, q_i \in \mathbb{Z}$。因為 $x_i = s + r_i + pq_i'$，其中 $q_i' \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2, 3, \cdots, n$，所以

$$y_i = 1 + x_i + pq_i = 1 + s + r_i + p(q_i' + q_i)$$

由性質3.3.2得知對所有的 i 恆有 $y_i - s \geq y_i - m \geq 0$，因此 $1 + r_i + p(q_i' + q_i) \geq 0$ 恆成立，其中 $-1 \leq r_i \leq p - 1$。故 $p(q_i' + q_i) \geq 0$，又 q_i, q_i' 為整數，所以

$$y_i = s + r_i + 1 + pk_i, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

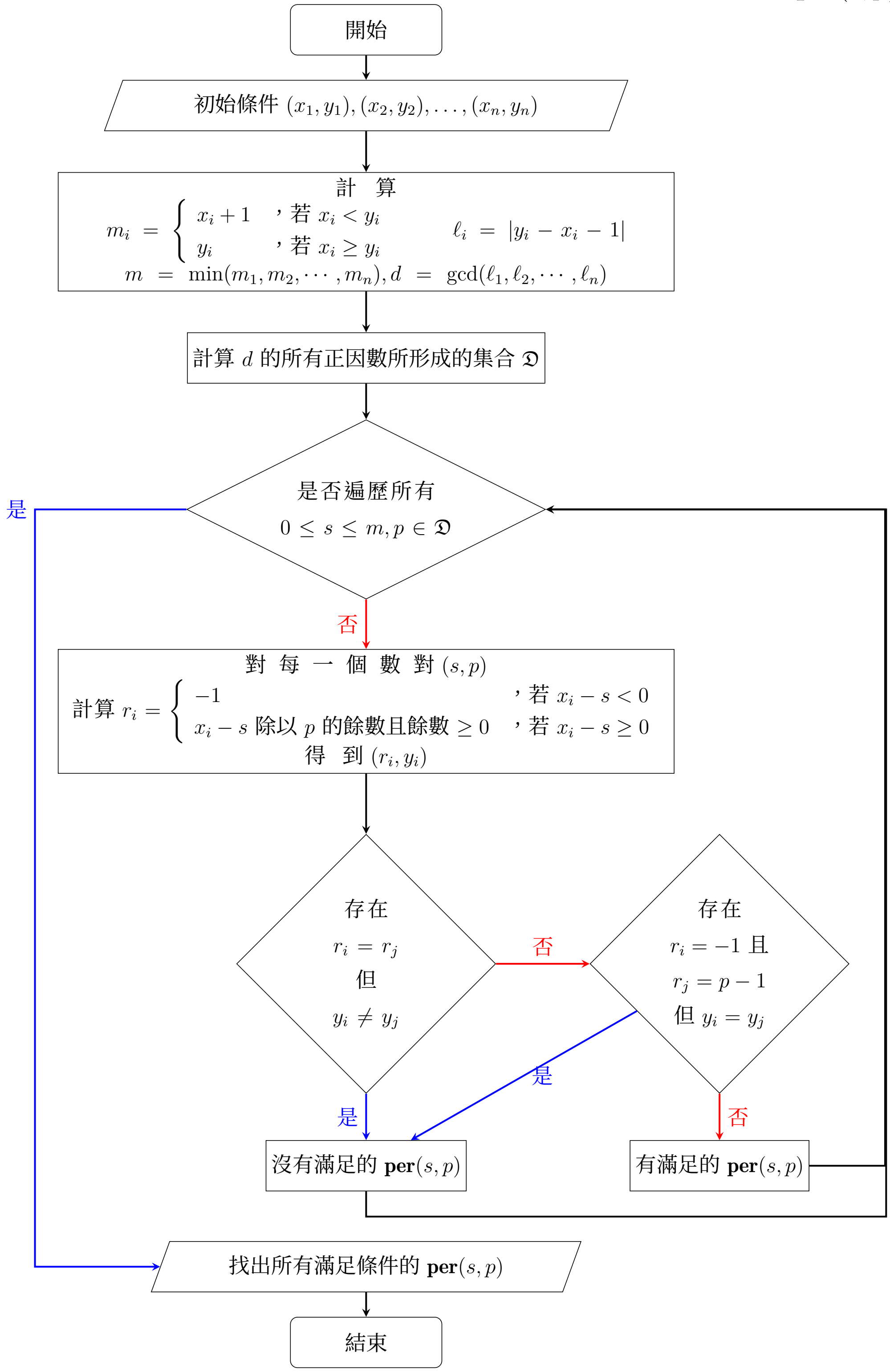
根據定理3.3.1可知滿足此條件的自指數列存在。再由定理3.2.8得知，如果 $r_1 = -1$ 且存在 t 使得 $r_t = p - 1$，則必須滿足 $y_1 \neq y_t$，才能保證給定的條件可以成為 $\mathbf{per}(s, p)$ 自指數列，否則最小循環起始項就不是 a_s(而是 a_{s-1})。除此之外，都能找到滿足條件的 $\mathbf{per}(s, p)$ 自指數列。

綜合 Case 1、Case 2、Case 3 的討論，可以得知若 (r_i, y_i) 滿足

1. 不存在 i, j 使得 $r_i = r_j$ 且 $y_i \neq y_j$
2. 不存在 $r_i = -1, r_j = p-1$ 且 $y_i = y_j$

則存在滿足條件的 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。 □

利用定理3.3.3，我們可以用以下流程來找出所有滿足初始條件之 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。



我們以 $a_3=7, a_6=7$ 為例，說明如何利用定理3.3.3得到的流程圖，找出滿足條件的 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。若 $(x_1,y_1)=(3,7),(x_2,y_2)=(6,7)$，則 $m_1=4, \ell_1=3, m_2=7, \ell_2=0$，所以

$$m=\min(4,7)=4, d=\gcd(3,0)=3$$

因此 $s=0,1,2,3,4$、$p=1,3$。

Case 1: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(0,1)}$ 因為 $y_1=y_2$，所以可能為 $\mathbf{per}(0,1)$ 自指數列 (常數數列)。

Case 2: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(0,p), p>1}$ 此時 $p=3$，因為

$$r_1=3 \pmod 3=0, r_2=6 \pmod 3=0$$

所以 $(r_1,y_1)=(0,7),(r_2,y_2)=(0,7)$，因為不存在 $r_i=r_j$ 使得 $y_i\neq y_j$，所以滿足條件的可能為 $\mathbf{per}(0,3)$ 自指數列，數列的值各項如下表，其中 k_1,k_2 為非負整數。

n	0	1	2
a_n	7	$2+3k_1$	$3+3k_2$

Case 3: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(s,p) \text{ 自指數列, 其中 } 1\leq s\leq m, p\mid d}$ 此時有

$$\mathbf{per}(1,1),\mathbf{per}(1,3),\mathbf{per}(2,1),\mathbf{per}(2,3),\mathbf{per}(3,1),\mathbf{per}(3,3),\mathbf{per}(4,1),\mathbf{per}(4,3)$$

8 種情況需要檢查。

Case 3-1: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(1,1)}$ 計算 r_1,r_2 並得到新的數對組

$$(r_1,y_1)=(3-1 \pmod 1,7)=(0,7),(r_2,y_2)=(6-1 \pmod 1,7)=(0,7)$$

所以可能為 $\mathbf{per}(1,1)$ 自指數列，數列的值如下表，k_0 為非負整數且 $k_0\neq 6$

n	0	1
a_n	$1+k_0$	7

Case 3-2: $\boxed{\text{能否找到滿足條件的 } \mathbf{per}(1,3)}$ 因為

$$(r_1,y_1)=(3-1 \pmod 3,7)=(2,7)(r_2,y_2)=(6-1 \pmod 3,7)=(2,7)$$

所以可能為 $\mathbf{per}(1,3)$ 自指數列，數列的值如下表，k_0,k_1,k_2 為非負整數，且 $k_0\neq 2$。

n	0	1	2	3
a_n	$1+3k_0$	$2+3k_1$	$3+3k_2$	7

Case 3-3: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(2,1)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (3-2 \pmod 1, 7) = (0,7), (r_2, y_2) = (6-2 \pmod 1, 7) = (0,7)$$

所以可能為 **per**$(2,1)$ 自指數列。數列的值如下表，$k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $k_1 \neq 5$

n	0	1	2
a_n	1	$2+k_1$	7

Case 3-4: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(2,3)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (3-2 \pmod 3, 7) = (1,7), (r_2, y_2) = (6-2 \pmod 3, 7) = (1,7)$$

所以可能為 **per**$(2,3)$ 自指數列。數列的值如下表，$k_1, k_2, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，且 $k_1 \neq k_4$。

n	0	1	2	3	4
a_n	1	$2+3k_1$	$3+3k_2$	7	$2+3k_4$

Case 3-5: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(3,1)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (3-3 \pmod 1, 7) = (0,7), (r_2, y_2) = (6-3 \pmod 1, 7) = (0,7)$$

所以可能為 **per**$(3,1)$ 自指數列。數列的值如下表，$k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $k_2 \neq 4$。

n	0	1	2	3
a_n	1	2	$3+k_2$	7

Case 3-6: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(3,3)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (3-3 \pmod 3, 7) = (0,7), (r_2, y_2) = (6-3 \pmod 3, 7) = (0,7)$$

所以可能為 **per**$(3,3)$ 自指數列。數列的值如下表，$k_2, k_4, k_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，
且 $k_2 \neq k_5$。

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	2	$3+3k_2$	7	$5+3k_4$	$3+3k_5$

Case 3-7: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(4,1)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (-1, 7), (r_2, y_2) = (6-4 \pmod 1, 7) = (0,7)$$

但 $r_1 = -1, r_2 = p-1 = 0, y_1 = y_2$，所以不可能是 **per**$(4,1)$ 自指數列。

Case 3-8: $\boxed{\textbf{能否找到滿足條件的 per}(4,3)}$ 因為

$$(r_1, y_1) = (-1, 7), (r_2, y_2) = (6-4 \pmod 3, 7) = (2,7)$$

但 $r_1 = -1, r_2 = p-1 = 2, y_1 = y_2$，所以不可能是 **per**$(4,3)$ 自指數列。

綜合以上討論，當 $a_3 = 7$ 且 $a_6 = 7$ 時，滿足條件的自指數列可能為

$$\mathbf{per}(0,1), \mathbf{per}(0,3), \mathbf{per}(1,1), \mathbf{per}(2,1), \mathbf{per}(3,1), \mathbf{per}(1,3), \mathbf{per}(2,3), \mathbf{per}(3,3)$$

我們將流程圖用 python 語言寫成一個可執行的程式，程式碼如下

```python
points = []  #輸入points為初始條件(xi,yi)的串列，其中a_{x_i}=y_i
from math import gcd
from functools import reduce

#第一步: 根據初始條件計算m和d
def calculate_m_and_d(points):
    """
    根據給定的 points 計算 m 和 d。

    :param points: 二維串列，每個元素為 (xi, yi)
    :return: 返回 m 和 d，分別為最小的 mi 和所有 li 的最大公因數
    """
    m_values = []
    l_values = []

    for x, y in points:
        if x < y:
            mi = x + 1
        else:
            mi = y
        li = abs(y - x - 1)

        m_values.append(mi)
        l_values.append(li)

    # 計算 m 為最小的 m_i
    m = min(m_values)

    # 計算 d 為所有 l_i 的最大公因數
    d = reduce(gcd, l_values) #reduce 會自動從左到右依序將列表中的元素兩兩進行 gcd 運算

    return m, d

m, d = calculate_m_and_d(points) #m是m_i最小值，d是l_i的最大公因數

#第二步: 計算所有d的正因數p

def find_factors(n):
    """
    計算正整數 n 的所有因數，並存入串列中。

    :param n: 正整數
    :return: 包含 n 所有因數的串列
    """
    factors = []
    for i in range(1, int(n**0.5) + 1):  # 從 1 遍歷到 sqrt(n)
        if n % i == 0:  # 如果 i 是 n 的因數
            factors.append(i)
            if i != n // i:  # 避免平方數重複加入相同因數
                factors.append(n // i)
```

```python
    return sorted(factors)  # 將因數串列排序後返回

factors=find_factors(d) #將d的所有正因數存入factors串列

#第三步:對於每一個s<=m,遍歷所有整除d的正因數p,檢查是否有滿足條件的(s,p)
def find_valid_s_p(s, p, points):
    """
    查找符合條件的 (s, p)。

    :param s: 整數 s (0 <= s <= m)
    :param p: 整數 p
    :param points: 二維串列，包含 (xi, yi) 的值
    :return: 如果條件滿足，返回串列 (s, p)；否則返回 None
    """
    transformed_points = []
    for x, y in points:
        r = (x - s) % p if x - s >= 0 else -1
        transformed_points.append((r, y))

    # 檢查條件 1: 存在 ri = rj 但 yi 不等於 yj
    for i in range(len(transformed_points)):
        for j in range(i + 1, len(transformed_points)):
            r1, y1 = transformed_points[i]
            r2, y2 = transformed_points[j]
            if r1 == r2 and y1 != y2:
                return None

    # 檢查條件 2: 存在 ri = -1, rj = p - 1，但 yi = yj
    for r, y in transformed_points:
        if r == -1:
            for r2, y2 in transformed_points:
                if r2 == p - 1 and y == y2:
                    return None

    # 如果條件均滿足，傳回 (s, p)，也就是有滿足條件的per(s,p)
    return (s, p)

sp_pairs=[] #sp_pairs是滿足條件的(s,p)

for s in range(0, m + 1):
    for p in factors:
        valid_pair = find_valid_s_p(s, p, points) #對每一個s,p進行檢查
        if valid_pair is not None:
            sp_pairs.append(valid_pair) #將滿足條件的sp_pair存到sp_pairs串列

print(sp_pairs)
```

若 $a_3 = 7, a_6 = 7$，則輸入為 `points=[(3,7),(6,7)]` ，程式的輸出為

```
[(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)]
```

與之前討論的結果相同。

最後，我們綜合利用定理3.2.8、定理3.2.9以及定理3.3.3，提出了一種相較原始解法更為簡潔的處理方式。

? 若自指數列 $< a_n >$ 滿足 $a_2 = 5$ 且 $a_{2014} = 2015$，則 a_{2015} 的所有可能值為何？

解：初始條件為 $(x_1, y_1) = (2, 5), (x_2, y_2) = (2014, 2015)$，
計算得 $m_1 = 3, \ell_1 = 2, m_2 = 2015, \ell_2 = 0$，因此 $m = \min\{3, 2015\} = 3, d = \gcd(2, 0) = 2$。
故 $s = 0, 1, 2, 3$，$p = 1, 2$。
若 $s \le 2$，因為 $r_1 = 2 - s \pmod 1 = 0, r_2 = 2014 - s \pmod 1 = 0$，
所以 $(r_1, y_1) = (0, 2), (r_2, y_2) = (0, 2015)$，由定理3.3.3可知沒有滿足條件的自指數列。
同理若 $s \le 2$，因為 $r_1 = 2 - s \pmod 2 = r_2 = 2014 - s \pmod 2$，由定理3.3.3可知沒有滿足條件的自指數列，因此 $s = 3$。以下分別討論 $p = 1, 2$ 的情況。

Case 1: 若 $p = 1$，則 $(r_1, y_1) = (-1, 5), (r_2, y_2) = (0, 2015)$。由定理3.3.3可知存在滿足條件的 $\mathbf{per}(3, 1)$ 自指數列，此時 $a_{2014} = a_{2015} = 2015$。

Case 2: 若 $p = 2$，則 $(r_1, y_1) = (-1, 5), (r_2, y_2) = (1, 2015)$，由定理3.3.3可知存在滿足條件的 $\mathbf{per}(3, 2)$ 自指數列，利用定理3.2.8可知 $< a_n >$ 的各項形式如下

n	0	1	2	3	4
a_n	1	2	5	$4 + 2k$	2015

其中 k 為非負整數，所以 $a_{2015} = 4 + 2k$ 可為任何大於 2 的偶數。

綜合以上討論可知，a_{2015} 的所有可能值為 2015 或大於 2 的偶數。

肆、 研究結果

1. 設 $< a_n >$ 為自指數列，若存在非負整數 m 使得 $a_m = m + t$，其中 t 為整數，則

   (1) 若 $t > 1$，則 $< a_n >$ 是 $(m + 1, t - 1)$ 自指數列。

   (2) 若 $t \le 0$，則 $< a_n >$ 是 $(m + t, 1 - t)$ 自指數列。

2. 設 $< a_n >$ 為 (m_i, ℓ_i) 自指數列，其中 $i = 1, 2, 3 \cdots, r$。令

$$m = \min(m_1, m_2, \cdots, m_r), d = \gcd(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_r)$$

   其中 $\min(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 表 r 個非負整數 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中最小者，則 $< a_n >$ 為 (m, d) 自指數列。

3. 設自指數列 $< a_n >$ 是 (s, p) 自指數列，則 $< a_n >$ 是 $\mathbf{per}(s, p)$ 自指數列 $(s \ge 1)$ 的充要條件為 $< a_n >$ 滿足如下形式

n	0	1	$\cdots$	$s-2$	$s-1$	s	$\cdots$	$s+p-2$	$s+p-1$
a_n	1	2	$\cdots$	$s-1$	$s+pk_{s-1}$	$s+1+pk_s$	$\cdots$	$s+p-1+pk_{s+p-2}$	$s+pk_{s+p-1}$

其中 $k_{s-1}, k_s, \cdots, k_{s+p-2}, k_{s+p-1}$ 為非負整數，且 $k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$。
而 $< a_n >$ 是 $\mathbf{per}(0,p)$ 自指數列 $(p>1)$ 的充要條件為 $< a_n >$ 滿足如下形式

n	0	1	$\cdots$	$p-1$
a_n	$1+pk_0$	$2+pk_1$	$\cdots$	pk_{p-1}

其中 $k_0, k_1, \cdots, k_{p-1}$ 為非負整數。

4. 設 $a_{x_i} = y_i$，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 x_i, y_i 為非負整數。對於非負整數 s 與正整數 p，定義

$$r_i = \begin{cases} -1 & \text{，若 } x_i - s < 0 \\ x_i - s \pmod p & \text{，若 } x_i - s \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x_i - s \pmod p$ 為 $x_i - s$ 除以 p 的餘數。則存在 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列滿足 $a_{x_i} = y_i$ 的充要條件為：數對 (r_i, y_i) 滿足以下兩個條件

(1) 不存在 i, j 使得 $r_i = r_j$ 且 $y_i \neq y_j$

(2) 不存在 $r_i = -1, r_j = p-1$ 且 $y_i = y_j$

伍、 討論

一、 廣義自指數列

我們將原始自指數列的概念推廣如下

定義 5.1.1

設 d 是正整數，若數列 $< a_n >$ 滿足對所有的 $n \geq d$，恆有

$$a_n = a_{a_{n-d}}$$

則稱 $< a_n >$ 為**廣義自指數列**。

例如 $a_2=5, a_n=a_{a_{n-2}}, n\geq 2$，觀察此數列的某些項

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_{a_0}\\
a_3 &= a_{a_1}\\
a_4 = a_{a_2} &= a_5\\
a_5 &= a_{a_3}\\
a_6 = a_{a_4} = a_{a_5} &= a_7\\
a_7 &= a_{a_5}\\
a_8 = a_{a_6} = a_{a_7} &= a_9
\end{aligned}
$$

發現 $a_4=a_5, a_6=a_7, a_8=a_9, \cdots$。利用數學歸納法，我們可以證明以下定理

定理 5.1.2

設 d 為正整數，且對所有的 $n\geq d$，$a_n=a_{a_{n-d}}$ 成立。若 $a_m=m+t, t\in\mathbb{Z}$，則

$$a_{m+id}=a_{m+id+(t-d)}$$

對於所有 $i\in\mathbb{N}$ 都成立。

證明： 當 $i=1$ 時，$a_{m+d}=a_{a_{m+d-d}}=a_{a_m}=a_{m+t}$，所以成立。
設 $i=k$ 時，$a_{m+kd}=a_{m+kd+(t-d)}$ 成立。
則當 $i=k+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
a_{m+(k+1)d} &= a_{a_{m+(k+1)d-d}} = a_{a_{m+kd}} && (\text{由 } < a_n > \text{ 的定義})\\
&= a_{a_{m+kd+(t-d)}} && (\text{由歸納假設得知})\\
&= a_{m+kd+t} = a_{m+(k+1)d+(t-d)} && (\text{由 } < a_n > \text{ 的定義})
\end{aligned}
$$

由數學歸納法可知 $a_{m+id}=a_{m+id+(t-d)}$ 對於所有 $i\in\mathbb{N}$ 都成立。 □

以 $a_2=5, a_n=a_{a_{n-2}}$ 為例，將 $m=2, t=3, d=2$ 代入定理5.1.2，可得到 $a_{2i+2}=a_{2i+3}$ 對所有 $i\in\mathbb{N}$ 都成立，這就是我們觀察的結果。未來我們想要繼續探討，當給定自指數列的初始條件時，如何決定數列各項之值。

陸、結論

本研究利用 $\mathbf{per}(s,p)$ 的概念推導出定理 3.2.8、定理 3.2.9 及定理 3.3.3。這些定理不僅簡化了原始問題的求解過程，更關鍵的是，它們使得該方法能以程式實作，並透過電腦運算自動獲得結果。將數學理論結果與計算機程式結合，是本研究的核心成果。

柒、 參考文獻資料

[1] USA Mathematical Talent Search. (2024). *Solutions to Round 1, 26th USA Mathematical Talent Search.* 擷取自 https://files.usamts.org/Solutions_26_1.pdf

[2] Risager, M. S. (2024). *Introduction to number theory: Lecture notes 2024.* 擷取自 https://web.math.ku.dk/~risager/introtal/main.pdf

[3] Das, U., Lawson, A., Mayfield, C., & Norouzi, N.（2024）。*Introduction to Python Programming*。 擷 取 自 https://openstax.org/books/introduction-python-programming/pages/1-introduction

[4] 許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2020）。數學 2A （書號 62002，頁 9-18）。龍騰文化。

【評語】050407

本作品研究自指數列，其滿足 $a_n = a_{a_{n-1}}$。作者以數學歸納法證明自指數列一定從某一項開始會是循環數列，並且也探討在循環出現前數列各項的數值，最終證明：給定數字 s、p，一個第 s 項開始循環，循環長度為 p 的數列$\langle a_n \rangle$是自指數列若且唯若""當 $n<s-1$ 時 $a_n=n+1$，　而當 $n>s-1$ 時 $a_n=n+1 \pmod p$""。本作品的""自指數列""似乎並沒有自然的應用或是自然的結構，但結論十分有趣；儘管自指數列的遞迴式看似繁複，卻可證明它們是單純的循環數列。雖然證明只用到同餘等簡單的數學工具，過程直接，但能找出所有自指數列，仍屬難得。

作品海報

自指數列的週期現象

摘要

我們稱滿足遞迴關係 $a_n = a_{a_{n-1}}$ 的非負整數數列 $< a_n >$ 為「自指數列」。本研究探討其循環性質，發現若存在某個非負整數 m 使得 $a_m \neq m+1$，則數列從某一項開始會進入循環，且循環長度與 a_m 相關。我們推導出如何根據初始條件計算數列的循環長度，並進一步引入週期與最小循環起始項的概念，定義 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。透過研究，我們找出 $\mathbf{per}(s,p)$ 各項滿足的充要條件，從而判定自指數列的值。最後，我們證明了一個定理，能夠從初始條件找出所有滿足條件的 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列。該定理使得求解數列各項的過程比原始方法更簡潔。此外，我們將此定理轉化為演算法，並以 Python 實作。

研究動機

我們在 USA Mathematical Talent Search 上找到一個關於遞迴數列的問題如下：

> ⓘ 設 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ 是一個非負整數數列，使得 $a_2 = 5, a_{2014} = 2015$，且 $a_n = a_{a_{n-1}}$ 對所有正整數 n 都成立。試求 a_{2015} 的所有可能值。

原始問題的解法先利用數學歸納法證明了 $< a_n >$ 從 a_3 開始每 2 項循環，接著利用這個性質以及分類討論。如果初始條件改變，則需要分類的情況會更多。所以我們想探究這個數列的性質，從而用更精簡的方法解決原始問題。

研究目的

1. 證明自指數列的循環性。
2. 探討初始條件與自指數列的循環性的關係。
3. 給定自指數列的初始條件，如何找出 a_n 每一項的可能值，並解決原始問題。

自指數列的定義

設數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的每一項均為非負整數，且滿足對任意正整數 n 都有

$$a_n = a_{a_{n-1}}$$

則數列 $< a_n >$ 稱為「自指數列」。

定理 3.1.3

設 $< a_n >$ 為自指數列，若存在非負整數 m 使得 $a_m = m + t$，其中 t 為定值。則

$$a_{m+n} = \begin{cases} m & \text{，若 } t = 0 \\ a_{m+n+t-1} & \text{，若 } t \neq 0 \end{cases}$$

對所有正整數 n 都成立。

(m,ℓ) 自指數列的定義

設 $< a_n >$ 為自指數列且 m 為非負整數，若存在正整數 ℓ 使得 $a_m = a_{m+\ell}$，則 $< a_n >$ 稱為 (m,ℓ) 自指數列。

循環起始項與循環長度的性質

設 $< a_n >$ 為自指數列，若存在非負整數 m 使得 $a_m = m + t$，其中 t 為整數，則

1. 若 $t > 1$，則 $< a_n >$ 是 $(m+1, t-1)$ 自指數列。
2. 若 $t \leq 0$，則 $< a_n >$ 是 $(m+t, 1-t)$ 自指數列。

定理 3.1.7

設 $< a_n >$ 是 (m_1,ℓ_1) 自指數列，且 $< a_n >$ 也是 (m_2,ℓ_2) 自指數列，其中 $m_1 \leq m_2$。則 $< a_n >$ 必為 (m_1, d) 自指數列，其中 $d = \gcd(\ell_1,\ell_2)$ 為 ℓ_1 與 ℓ_2 的最大公因數。

定理 3.1.7 的證明

由貝祖定理 (Bézout's lemma) 可知存在整數 x, y 使得 $x\ell_1 + y\ell_2 = d$，因為 $d > 0$，所以 x, y 兩數必為一正一負。若 $x > 0$ 且 $y < 0$，因為 $< a_n >$ 是 (m_1,ℓ_1) 自指數列，所以 $< a_n >$ 是 (m_2,ℓ_1) 自指數列。故

$$a_{m_2+x\ell_1} = a_{m_2}$$

又 $m_2 + x\ell_1 > m_2 + d > m_2$ 且 a_{m_2} 後每隔 ℓ_2 項皆相等，因此

$$a_{m_2} = a_{m_2+x\ell_1} = a_{m_2+x\ell_1+y\ell_2} = a_{m_2+d}$$

同理可證 $x < 0$ 且 $y > 0$，因此 $< a_n >$ 是 (m_2, d) 自指數列。因為 $a_{m_1} = a_{m_1+k\ell_1}$ 對任意正整數 k 都成立，選取適當的 k 使得 $m_1 + k\ell_1 \geq m_2$，因為 $< a_n >$ 是 (m_2, d) 自指數列，所以 $a_{m_1+k\ell_1} = a_{m_1+k\ell_1+d}$，即 $a_{m_1} = a_{m_1+d}$，故 $< a_n >$ 是 (m_1, d) 自指數列。

系理 3.1.8

設 $< a_n >$ 為 (m_i,ℓ_i) 自指數列，其中 $i = 1, 2, 3 \cdots, r$。令

$$m = \min(m_1, m_2, \cdots, m_r), d = \gcd(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_r)$$

其中 $\min(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 表 r 個非負整數 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中最小者，則 $< a_n >$ 為 (m, d) 自指數列。

定義 3.2.1(週期)

設 $<a_n>$ 為 (m,p) 自指數列，且對任意正整數 $k<p$，$a_m \neq a_{m+k}$ 成立，則稱 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期 (period) 為 p 的自指數列。

(m,p) 自指數列的性質

性質 3.2.2 設 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期為 p 的自指數列，若 $a_k = a_{k+d}$ 且 $k \geq m$，則 $p \mid d$。

性質 3.2.3 若 $<a_n>$ 是從第 m_1 項開始且週期為 p_1 的自指數列，也是從第 m_2 項開始且週期為 p_2 的自指數列，其中 $m_1 < m_2$，則 $p_1 = p_2$。

性質 3.2.4 設 $<a_n>$ 是從第 m 項開始且週期為 p 的自指數列，若存在非負整數 $s<m$ 與正整數 d，使得 $a_s = a_{s+d}$，則 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列。

定義 3.2.5(per(s,p) 自指數列)

設 s 為非負整數，若 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列，且對於所有非負整數 $i<s$，$a_i \neq a_{i+p}$ 成立，則稱 $<a_n>$ 是 **per**(s,p) 自指數列。

性質 3.2.6

設 $<a_n>$ 為 **per**(s,p) 自指數列，則 $<a_n>$ 不可能為 (m,d) 自指數列，其中 m 是任意小於 s 的非負整數，d 為任意正整數。

per(s,p) 自指數列的形式

$$\underbrace{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{s-1}}_{\text{非循環部分}}, \underbrace{a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_{s+p-1}}_{\text{循環部分 (週期為 } p)}$$

引理 3.2.7

令 $s \geq 1$，若 $<a_n>$ 是從第 s 項開始且週期為 p 的自指數列，則

1. p 整除 $|a_{s+i} - s - i - 1|$，其中 $i = -1, 0, 1, 2, \cdots, p-2$
2. p 整除 $|a_{s+p-1} - s|$

定理 3.2.8(per(s,p) 的充要條件，$s \geq 1$)

令 $s \geq 1$ 且 $<a_n>$ 是 (s,p) 自指數列，則 $<a_n>$ 是 **per**(s,p) 自指數列的充要條件為 $<a_n>$ 滿足以下四個條件：

1. $a_i = i+1$ 其中 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, s-2$
2. $a_{s+i} = s+i+1+pk_{s+i}$，其中 $i = -1, 0, 1, 2, \cdots, p-2$，$k_{s+i}$ 是非負整數。
3. $a_{s+p-1} = s + pk_{s+p-1}$，其中 k_{s+p-1} 是非負整數。
4. $k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$

per(s,p) 自指數列的形式，$s \geq 1$

n	0	1	$\cdots$	$s-2$	$s-1$	s	$\cdots$	$s+p-2$	$s+p-1$
a_n	1	2	$\cdots$	$s-1$	$s+pk_{s-1}$	$s+1+pk_s$	$\cdots$	$s+p-1+pk_{s+p-2}$	$s+pk_{s+p-1}$

其中 $k_{s-1} \neq k_{s+p-1}$

定理 3.2.9 per$(0,p)$ 自指數列的形式

設 $<a_n>$ 是 $(0,p)$ 自指數列且 $p>1$，則 $<a_n>$ 是 **per**$(0,p)$ 自指數列的充要條件為 $<a_n>$ 滿足如下形式

n	0	1	$\cdots$	$p-1$
a_n	$1+pk_0$	$2+pk_1$	$\cdots$	pk_{p-1}

其中 $k_0, k_1, \cdots, k_{p-1}$ 為非負整數。

探討滿足初始條件的自指數列

如果給定數列 $<a_n>$ 的初始條件

$$a_{x_1} = y_1, a_{x_2} = y_2, \cdots, a_{x_n} = y_n$$

其中 x_i, y_i 皆為非負整數。那麼滿足條件的自指數列可能不存在。若 $a_2 = 5$ 且 $a_3 = 1$，如果有滿足條件的自指數列，則 $<a_n>$ 是 $(1,1)$ 自指數列，因此 $<a_n>$ 可能為 **per**$(0,1)$ 或 **per**$(1,1)$ 自指數列，但 $<a_n>$ 不可能從 a_0 或 a_1 開始為常數數列 $(\because a_2 \neq a_3)$，所以找不到滿足 $a_2 = 5$ 且 $a_3 = 1$ 的自指數列。

定理 3.3.1

設數列 $<a_n>$ 為非負整數數列，且存在有非負整數 s，使得對於所有非負整數 i，$a_{s+i} = a_{s+i+p}$ 恆成立 (即從 a_s 開始每隔 p 項都相等)，其中 p 為正整數。若 $<a_n>$ 中有定義的項滿足以下條件

1. $a_i = i+1$，其中 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, s-2$
2. $a_{s+i} = s+i+1+pk_{s+i}$，其中 $i = -1, 0, 1, 2, \cdots, p-2$，$k_{s+i}$ 是非負整數。
3. $a_{s+p-1} = s + pk_{s+p-1}$，其中 k_{s+p-1} 是非負整數。

則 $<a_n>$ 為自指數列。(若 $i<0$ 則 a_i 沒有定義)

自指數列的初始條件

以數對 (x_i, y_i) 表示 $a_{x_i} = y_i$，其中 $1 \leq i \leq n$。如果存在 $x_i = x_j$ 且 $y_i \neq y_j$，則滿足條件的自指數列不存在，不失一般性，我們假設 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

令 $m_i = \begin{cases} x_i + 1 & \text{，若 } x_i < y_i \\ y_i & \text{，若 } x_i \geq y_i \end{cases}$ $\qquad \ell_i = |y_i - x_i - 1|$

利用系理 3.1.8 可知如果 $<a_n>$ 是自指數列，則必為 (m,d) 自指數列，其中

$$m = \min(m_1, m_2, \cdots, m_n), d = \gcd(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$$

因為 $d \mid \ell_i$，所以 $d \,\big|\, |y_i - x_i - 1|$。再利用性質 3.2.2 得知 $<a_n>$ 可能為 **per**(s,p) 自指數列，其中 $s \leq m$ 且 $p \mid d$，顯然 $p \,\big|\, |y_i - x_i - 1|$。

性質 3.3.2(m 的性質)

設 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$，則

1. 對於所有的 i，$m \leq y_i$
2. 對於所有 $i \geq 2$，$m \leq x_i$ 成立
3. 若 $x_1 < m$，則 $m = x_1 + 1$。

定理 3.3.3(初始條件與自指數列存在性)

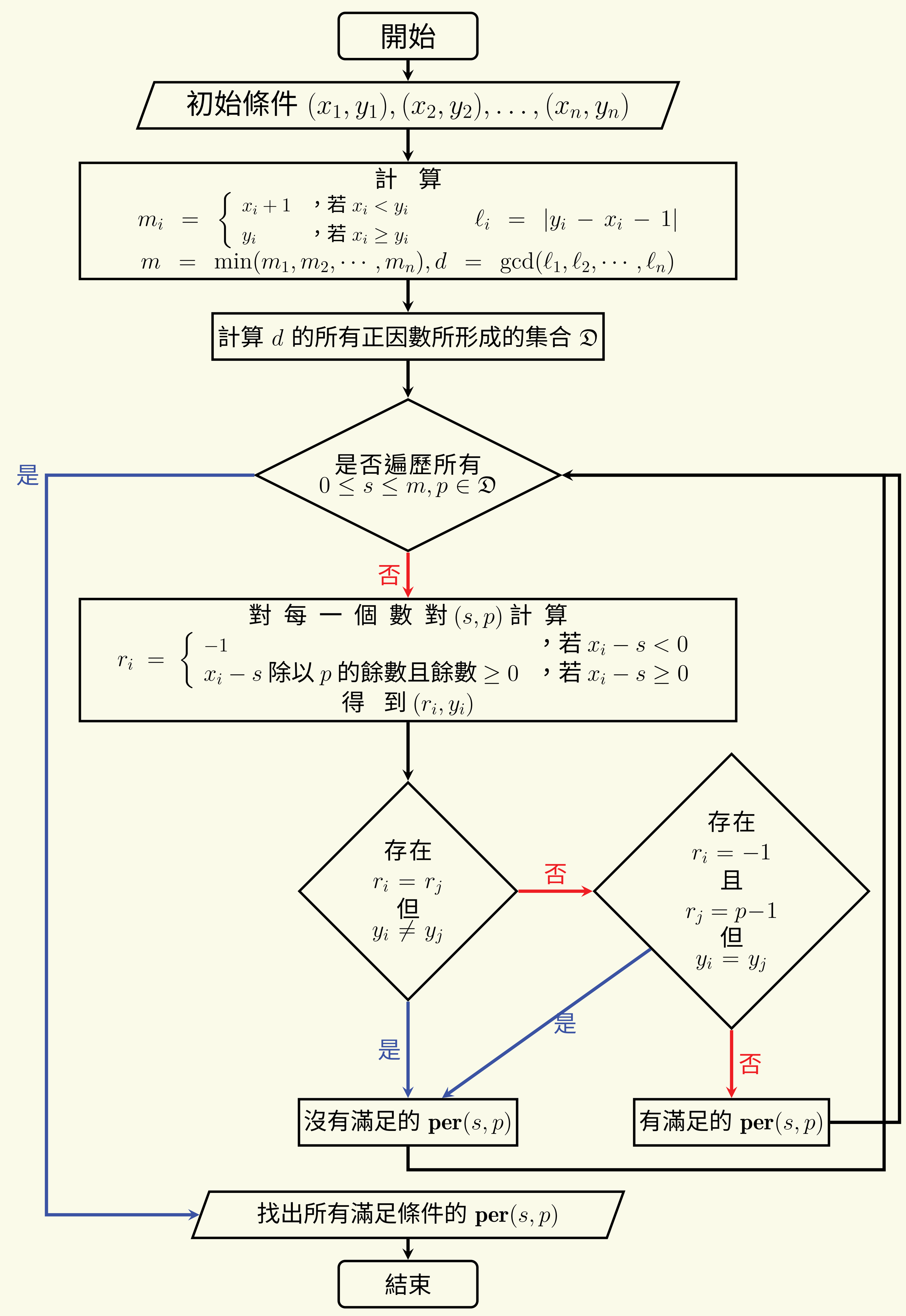
設 $a_{x_i} = y_i$，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 x_i, y_i 為非負整數。對於非負整數 s 與正整數 p，定義

$$r_i = \begin{cases} -1 & \text{，若 } x_i - s < 0 \\ x_i - s \pmod{p} & \text{，若 } x_i - s \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x_i - s \pmod{p}$ 為 $x_i - s$ 除以 p 的餘數。則存在 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列滿足 $a_{x_i} = y_i$ 的充要條件為：數對 (r_i, y_i) 滿足以下兩個條件

1. 不存在 i, j 使得 $r_i = r_j$ 且 $y_i \neq y_j$
2. 不存在 $r_i = -1, r_j = p - 1$ 且 $y_i = y_j$

尋找滿足初始條件的 $\mathbf{per}(s,p)$ 自指數列之流程圖



流程圖實作的部分程式碼

```
#對於每一個s<=m，遍歷所有整除d的正因數p，檢查是否有滿足條件的(s,p)
def find_valid_s_p(s, p, points):
    transformed_points = []
    for x, y in points:
        r = (x - s) % p if x - s >= 0 else -1
        transformed_points.append((r, y))
    for i in range(len(transformed_points)):
        for j in range(i + 1, len(transformed_points)):
            r1, y1 = transformed_points[i]
            r2, y2 = transformed_points[j]
            if r1 == r2 and y1 != y2:
                return None
    for r, y in transformed_points:
        if r == -1:
            for r2, y2 in transformed_points:
                if r2 == p - 1 and y == y2:
                    return None
    return (s, p)
```

比原始問題解法較簡潔的處理方式

給定 $(x_1, y_1) = (2, 5), (x_2, y_2) = (2014, 2015)$，計算得 $m_1 = 3, \ell_1 = 2, m_2 = 2015, \ell_2 = 0$，因此 $m = \min\{3, 2015\} = 3, d = \gcd(2, 0) = 2$。

故 $s = 0, 1, 2, 3$，$p = 1, 2$。

若 $s \leq 2$，因為 $\begin{cases} r_1 = 2 - s \pmod{1} = 0 \\ r_2 = 2014 - s \pmod{1} = 0 \end{cases}$

所以 $(r_1, y_1) = (0, 2), (r_2, y_2) = (0, 2015)$，由定理 3.3.3 可知沒有滿足條件的 $(s, 1)$ 自指數列。類似地可證明沒有 $(s, 2)$ 自指數列，其中 $s \leq 2$。因此 $s = 3$，以下分別討論 $p = 1, 2$ 的情況。

Case 1: 若 $p = 1$，則

$(r_1, y_1) = (-1, 5), (r_2, y_2) = (0, 2015)$。由定理 3.3.3 可知存在滿足條件的 $\mathbf{per}(3, 1)$ 自指數列，此時 $a_{2014} = a_{2015} = 2015$。

Case 2: 若 $p = 2$，則

$(r_1, y_1) = (-1, 5), (r_2, y_2) = (1, 2015)$，由定理 3.3.3 可知存在滿足條件的 $\mathbf{per}(3, 2)$ 自指數列，利用定理 3.2.8 可知 $< a_n >$ 的各項形式如下

n	0	1	2	3	4
a_n	1	2	5	$4+2k$	2015

其中 k 為非負整數，所以 $a_{2015} = 4 + 2k$ 可為任何大於 2 的偶數。

討論：定義 5.1.1(廣義自指數列)

若數列 $< a_n >$ 滿足對所有的 $n \geq d$，恆有

$$a_n = a_{a_{n-d}}$$

其中 d 是正整數，則稱 $< a_n >$ 為廣義自指數列。

討論：定理 5.1.2

設 d 為正整數，且對所有的 $n \geq d$，$a_n = a_{a_{n-d}}$ 成立。若 $a_m = m + t, t \in \mathbb{Z}$，則

$$a_{m+id} = a_{m+id+(t-d)}$$

對於所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。

討論：未來展望

當給定廣義自指數列的初始條件時，如何決定數列各項之值。

結論

本研究利用 $\mathbf{per}(s,p)$ 的概念推導出定理 3.2.8、定理 3.2.9 及定理 3.3.3。這些定理不僅簡化了原始問題的求解過程，更關鍵的是，它們使得該方法能以程式實作，並透過電腦運算自動獲得結果。將數學理論結果與計算機程式結合，是本研究的核心成果。