中華民國第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050406

Langford 數列之探討

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 施竽涵	麥順發

關鍵詞：奇偶性、數列

摘要

Langford 數列為一種特殊的排列，本研究旨在探討改變 Langford 數列的不同參數，進而探討數列的必要條件以及是否存在結構規律，我透過奇偶性以及位移法兩種方法，得到數列各種情況下的存在條件。研究分為五階段:第一階段不改變數列條件；第二階段改變每數出現次數，以上述兩種方法分析其影響；第三階段改變數列最小數，計算並討論何種情況下存在數列；第四階段為整合以上三階段，使數列同時存在三種參數；第五階段為將數列以特定方式進行簡化，並且尋找其規律。

壹、前言

一、研究動機

學校曾經邀請一名講師來進行數學魔術的演講，而在講座中被反覆提及的便是奇偶性，之中提到許多可以應用奇偶性解題的例子，其中就包含了這個奇妙的數列—Langford 數列，這個數列非常的神奇，由 1 開始到最大數中每個正整數都在數列出現兩次，而且 1 與 1 之間間隔一個位置，2 與 2 之間間隔兩個位置......以此類推直到給定的最大數。在講座中講師給了我們最大數為 3 的 Langford 數列，並請我們找出最大數為 4 以及 5 的 Langford 數列，實際上當最大數為 5 時無解，而我在聽完講師的證明之後燃起了研究此數列之興趣。

二、符號定義

1.Langford 數列定義為：對於正整數 n，尋找排列使$\{1,2,...,n\}$每數在數列中出現兩次，滿足對於不大於 n 的任意正整數 i，數列中 i 與 i 之間存在 i 個數字，且此數列具有對稱性: 某 Langford 數列的鏡像也滿足 Langford 數列的特性，並且兩者被視為同一種數列。([1]OEIS A050998)

2.$L(s,a,n)$為廣義 Langford 數列，s 為數列每數重複次數，a 為數列最小數，n 為數列最大數。

3.對於數列 $L(s,a,n)$，$d(k,i)$為數列中第 k 次出現的數字 i 位置，其中 $1\le k\le s$，$d(k,i)\in\{1,2,\dots,s(n-a+1)\}$。

4.$D(k,i)$為描述數列位置奇偶之函數。

$$D(k,i)=\begin{cases}O,d(k,i)\equiv 1(mod\,2)\\E,d(k,i)\equiv 0(mod\,2)\end{cases}$$

若某數所有位置總計位於 u 個奇數位及 v 個偶數位，記作 $\sum_{k=1}^{s} D(k,i)=uOvE$。

5. $S_O=\{(k,i)|D(k,i)=O\}$，$S_E=\{(k,i)|D(k,i)=E\}$

6.定義集合 P_{uOvE}，集合內元素在數列中位置皆位於 u 個奇數位及 v 個偶數位，若 u 或 v 為零則可省略，如 P_{2O} 內的元素兩個位置皆於奇數位。$(u,v\in\mathbb{N},u+v=s)$

三、研究目的

以改變數列不同參數或者簡化數列等方式進行數列存在條件以及構造之規律探討。

(一) $L(2,1,n)$

(二) $L(s,1,n)$

(三) $L(2,a,n)$

(四) $L(s,a,n)$

(五) $L(2,1,n)$ 簡化與其結構規律

貳、文獻探討

在尋找 Langford 數列之文獻時，我發現有研究已經給出 $L(s,1,n)$ 的存在條件，給出存在條件的研究是利用矩陣計算當改變重複次數時最大數為多少可以填滿矩陣，但這個公式只適用於質數的重複次數。在這個研究中我希望以奇偶性及位移法作為研究方法，這兩種方法並不能分出質數與合數，而只有奇數與偶數的差別，因此希望能在這個研究中得到與其他研究不同的結果。

參、研究過程或方法

一、$L(2,1,n)$

【定理一】 $L(2,1,n)$ 數列存在，若且唯若 $n\equiv 0,3 \pmod 4$

必要條件之證明

(一)奇偶性

由於數列的特性可知任意正整數 i 與 i 之間間隔 i 個數字，此方法就是將數列每個位置分類為奇數位或偶數位，透過探討中間 i 個數字的奇數位偶數位排列方式推得 $D(1,i)$及 $D(2,i)$之關係。

$i\equiv 0(mod\,2)\Leftrightarrow D(1,i)+D(2,i)=1O1E, P_{1O1E}=\{i|i\equiv 0(mod\,2)\}$

$i\equiv 1(mod\,2)\Leftrightarrow D(1,i)+D(2,i)=2O$ 或 $2E, P_{2O}\cup P_{2E}=\{i|i\equiv 1(mod\,2)\}$

以上兩式分別指當 i 為奇數或偶數時，在數列中佔有之位置。若中間間隔奇數個位置，則兩數同時占有奇數位或偶數位，若中間間隔偶數位個位置，則兩數占有奇數位及偶數位各一。

由於 n 的奇偶會影響其中奇數、偶數的數量，因此本研究將 n 分為奇數、偶數討論。數列共有 n 個奇數位及 n 個偶數位，有 $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 個 i 位置分別位於一個奇數位及一個偶數位，$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 個 i 位於兩個奇數位或者兩個偶數位。($\lceil x\rceil$為 ceiling function，表示取不小於 x 的最小整數；$\lfloor x\rfloor$ 為 floor function，表示取不大於 x 的最大整數。)

1. $n\equiv 0(mod\,2)$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}D(k,i)=nOnE, n(P_{1O1E})=\frac{n}{2}, n(P_{2O}\cup P_{2E})=\frac{n}{2}$$

$$n(S_O)=n=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})$$

$$n(S_E)=n=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})$$

由上述兩式可得 $n(P_{2O})=n(P_{2E})=\frac{n}{4}$，由於集合內元素個數必為正整數，得 $n\equiv 0(mod\,4)$。

2. $n\equiv 1(mod\,2)$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}D(k,i)=nOnE, n(P_{1O1E})=\frac{n-1}{2}, n(P_{2O}\cup P_{2E})=\frac{n+1}{2}$$

$$n(S_O)=n=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})$$

$$n(S_E)=n=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})$$

由上述兩式可得 $n(P_{2O})=n(P_{2E})=\frac{n+1}{4}$，由於集合內元素個數必為正整數，得 $n\equiv 3(mod\,4)$。

透過 1、2 解得 $n\equiv 0,3(mod\,4)$，此方法是透過數字間奇偶位置之個數，計算數列中的所有位置是否能被給定之數字填滿。

n	$2n$	$uOvE$	$n(P_{2O}\cup P_{2E})$	$n(P_{1O1E})$	$L(2,1,n)$ 是否存在
3	6	3O3E	2 對	1 對	存在
4	8	4O4E	2 對	2 對	存在
5	10	5O5E	3 對	2 對	不存在
6	12	6O6E	3 對	3 對	不存在
7	14	7O7E	4 對	3 對	存在
8	16	8O8E	4 對	4 對	存在
9	18	9O9E	5 對	4 對	不存在
10	20	10O10E	5 對	5 對	不存在
11	22	11O11E	6 對	5 對	存在
12	24	12O12E	6 對	6 對	存在
13	26	13O13E	7 對	6 對	不存在

表一: n 與數列的關係

上表顯示在 $n\equiv 0,3 \mod 4$ 時存在 $L(2,1,n)$ 數列。

(二)位移法

除了奇偶性外，本研究中使用了位移法來進行再次驗證，在$L(2,1,n)$數列中，所有位置皆可以表示為 $d(1,i)$ 或 $d(2,i)$，定義數列起始位置為 1，末位為 $2n$，每個位置皆可以使用 $d(1,i)$ 或者 $d(2,i)$ 表示，且 $d(k,i)$ 之值會位於區間 $[1,2n]$且各不重複，由此可得：

$$d(2,i)=d(1,i)+i+1$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n} d(2,i)=\sum_{j=1}^{2n} j$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n} (d(1,i)+i+1)=2\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} 1=\sum_{j=1}^{2n} j$$

$$2\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\frac{(1+n)n}{2}+n=\frac{(1+2n)2n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(1,i)=\frac{n(3n-1)}{4}, d(1,i)\in\mathbb{N}, \frac{n(3n-1)}{4}\in\mathbb{N}$$

由位移法的計算結果可得 n 必滿足 $n\equiv 0(mod 4)$ 或 $n\equiv 3(mod 4)$。

此方法與奇偶性法的不同點:

一、奇偶性法僅利用兩個數字間位置之奇偶進行運算，不考慮中間間隔數量，位移法則是利用數字直接計算其位置。

二、由於奇數及偶數占有位置數量的奇偶不同，奇偶性法需要就最大數之奇偶進行分類計算，而位移法不考慮最大數的性質，因此較奇偶性省去不少計算。

充分條件之證明

在 1959 年 Daveis 發現了 Langford 數列之構造方法，根據 [2](R. O. Davies, 1959)，可用下列兩種方法構造出 Langford 數列。

1.n=4r (r 為正整數):

(4r-4, …, 2r), 4r-2, (2r-3, …,1), 4r-1, (1, …, 2r-3), (2r, …, 4r-4), 4r, (4r-3, …, 2r+1), 4r-2, (2r-2, …, 2), 2r-1, 4r-1, (2, …, 2r-2), (2r+1, …, 4r-3), 2r-1, 4r.

2.n=4r-1(r 為正整數):

(4r-4, …, 2r), 4r-2, (2r-3, …, 1), 4r-1, (1, …, 2r-3), (2r, …, 4r-4), 2r-1, (4r-3, …, 2r+1), 4r-2, (2r-2, …, 2), 2r-1, 4r-1, (2, …, 2r-2), (2r+1, …, 4r-3).

其中括號內的數字相差 2。由於 Langford 數列的規則，若 $i,i+2$ 相鄰，且 $d(1,i+2)<d(1,i)$，則 $d(2,i)$ 與 $d(2,i+2)$ 相鄰，Davies 就是利用 Langford 數列的這個性質找出了數列可行的構造。

例如:

4	2	10	8	2	4	7	11	9	1	6	1	8	10	7	5	3	6	9	11	3	5

此為 $L(2,1,11)$ 的其中一種解，以此佐證上面的想法，而從以上必要條件以及文獻探討，我們可得知$L(2,1,n)$存在，若且唯若 $n\equiv 0,3\,(mod\,4)$。

二、$L(s,1,n)$

在這個部分中，我推廣前文探討 $L(2,1,n)$條件之方法(奇偶性、位移法)至 $L(s,1,n)$，一般化此兩種方法，並且計算其必要條件。

【定理二】若 $L(s,1,n)$ 存在，s 與 n 有以下關係：

1.若 $s\equiv 0\,(mod\,2)$，則 $n\equiv 0,3\,(mod\,4)$

2.若 $s\equiv 1\,(mod\,2)$，則 n 為正整數

證：

(一)奇偶性

在 $L(s,1,n)$中，數列總長度為 sn ，且根據 i 的奇偶有以下性質：

$$i\equiv 0(mod\,2)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{s}D(k,i)=\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E \text{ 或 } \lfloor\frac{s}{2}\rfloor O\lceil\frac{s}{2}\rceil E$$

(若 $s\equiv 0(mod\,2)$則所有偶數皆位於 $\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E$)

$$i\equiv 1(mod\,2)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{s}D(k,i)=sO \text{ 或 } sE$$

在數列中所有位置皆可表示為 $D(k,i)$，在1到 n 的數中有 $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 個奇數與 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 個偶數，數列共有 $\lceil\frac{sn}{2}\rceil$ 個奇數位及 $\lfloor\frac{sn}{2}\rfloor$ 個偶數位，且偶數 i 所有位置應位於 $\lceil\frac{s}{2}\rceil$ 個奇數位及 $\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$ 個偶數位或者 $\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$ 個奇數位 $\lceil\frac{s}{2}\rceil$ 個偶數位，奇數 i 則同時位於 s 個奇數位或者 s 個偶數位。

故得知:

$$n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E}\cup P_{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor O\lceil\frac{s}{2}\rceil E})=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,n(P_{sO}\cup P_{sE})=\lceil\frac{n}{2}\rceil$$

$$n(S_O)=\lceil\frac{sn}{2}\rceil=\lceil\frac{s}{2}\rceil n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E})+\lfloor\frac{s}{2}\rfloor[\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E})]+s\,n(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\lfloor\frac{sn}{2}\rfloor=\lfloor\frac{s}{2}\rfloor n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E})+\lceil\frac{s}{2}\rceil[\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E})]+s[\lceil\frac{n}{2}\rceil-n(P_{sO})]$$

1.若 s,n 皆為奇數，所有數中偶數皆位於 $\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E$ 或者 $\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E$ ，共有 $\frac{n-1}{2}$ 組，奇數則位於 sO 或者 sE ，共有 $\frac{n+1}{2}$ 組。

$$n(S_O)=\frac{sn+1}{2}=\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+s\,n(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{sn-1}{2}=\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+s\,n(P_{sE})$$

$$n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+s\,n(P_{sO})=\frac{sn+s+n+1}{4},\frac{(s+1)(n+1)}{4}\in\mathbb{N}$$

得若 $s\equiv 1(mod\,2)$，$n\equiv 1(mod\,2)$ 皆符合條件。

2.若 s 為奇數 n 為偶數，所有數中偶數位於 $\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E$ 或者 $\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E$，共有 $\frac{n}{2}$ 組，奇數則位於 sO 或者 sE，共有 $\frac{n}{2}$ 組。

$$n(S_O)=\frac{sn}{2}=\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{sn}{2}=\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+sn(P_{sO})=\frac{ns+n}{4},\frac{n(s+1)}{4}\in\mathbb{N}$$

得若 $s\equiv1(mod\,2)$，$n\equiv0(mod\,2)$ 皆符合條件。

3.若 s 為偶數 n 為奇數，所有數中偶數皆位於 $\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E$ ，共有 $\frac{n-1}{2}$ 組，奇數則位於 sO 或者 sE ，共有 $\frac{n+1}{2}$ 組。

$$n(S_O)=\frac{sn}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{sn}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sE})$$

兩等式中 $n(P_{sO})=n(P_{sE})=\frac{n+1}{4}$，由於 $\frac{n+1}{4}\in\mathbb{N}$，故 $n\equiv3(mod\,4)$ 符合條件。

4.若 s,n 皆為偶數，所有數中偶數皆位於 $\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E$ ，共有 $\frac{n}{2}$ 組，奇數則位於 sO 或者 sE ，共有 $\frac{n}{2}$ 組。

$$n(S_O)=\frac{sn}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{sn}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sE})$$

兩等式中 $n(P_{sO})=n(P_{sE})=\frac{n}{4}$ ，由於 $\frac{n}{4}\in\mathbb{N}$，故 $n\equiv0(mod\,4)$ 符合條件。

利用奇偶性，可得知當重複次數為偶數時，數列最大數 $n\equiv0,3(mod\,4)$

(二)位移法

在 $L(s,1,n)$中，將數列位置定義為1到 sn ，使數列各位置總和為 $\frac{(1+sn)sn}{2}$，定義數列起始位置為 1，最後位置為 sn，每個位置皆可以以 $d(k,i)$ 表示，且 $d(k,i)$ 之值會位於區間 $[1,sn]$且各不重複，且因非首個出現的各個 i，與上一個 i 之間隔為 i，

由此可列式:

$d(k,i)=d(1,i)+(k-1)i+k-1$

$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}d(k,i)=\frac{(1+sn)sn}{2}$

$s\sum_{i=1}^{n}d(1,i)+\frac{(1+s-1)(s-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{(1+s-1)(s-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{(1+sn)sn}{2}$

$\sum_{i=1}^{n}d(1,i)=\frac{n(sn+n+5-3s)}{4}$

因此，$\frac{n(sn+n+5-3s)}{4}\in\mathbb{N}$ 為 $L(s,1,n)$ 成立之必要條件。

而上式又可簡化成須滿足 $n\equiv 0(mod\,4)$ 或 $(s+1)n\equiv 3s-1(mod\,4)$。

根據上式可得:

s	$s\equiv 0(mod\,4)$	$s\equiv 1(mod\,4)$	$s\equiv 2(mod\,4)$	$s\equiv 3(mod\,4)$
n	$n\equiv 0,3(mod\,4)$	$n\in\mathbb{N}$	$n\equiv 0,3(mod\,4)$	$n\in\mathbb{N}$

三、$L(2,a,n)$

本部分改變數列的最小數 a，使數列共有 $2(n-a+1)$位。

【定理三】 $L(2,a,n)$ 存在， a 與 n 有以下關係：

1. 若 $a\equiv 0,1(mod\,4)$，則 $n\equiv 0,3(mod\,4)$
2. 若 $a\equiv 2,3(mod\,4)$，則 $n\equiv 1,2(mod\,4)$

證

(一) 奇偶性

$i\in\{a,a+1,\ldots,n\}$

$i\equiv 0(mod\,2)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2}D(k,i)=1O1E,P_{1O1E}=\{i|i\equiv 0(mod\,2)\}$

$i\equiv 1(mod\,2)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2}D(k,i)=2O$ 或 $2E,P_{2O}\cup P_{2E}=\{i|i\equiv 1(mod\,2)\}$

數字在數列中分布位置只受 s 影響，而本部分中已限定 $s=2$，故與未推廣之 Langford 數列相同，i 的個數則受 a、n 之奇偶影響，因此本研究將 a、n 分別分為奇數及偶數進行研究。

1.當$a\equiv n\equiv 0(mod\,2)$

$n(S_O)+n(S_E)=2(n-a+1)$,

$n(S_O)=n(S_E)=n-a+1, n(P_{1O1E})=\frac{n-a+2}{2}, n(P_{2O}\cup P_{2E})=\frac{n-a}{2}$

$n(S_O)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})\Rightarrow n(P_{2O})=\frac{n-a}{4}$

$n(S_E)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})\Rightarrow n(P_{2E})=\frac{n-a}{4}$

$\Rightarrow L(2,a,n)$ 存在，且 $a\equiv n\equiv 0(mod\,2)$時，必有 $n-a\equiv 0(mod\,4)$

2.當$a\equiv n\equiv 1(mod\,2)$

$n(S_O)+n(S_E)=2(n-a+1)$,

$n(S_O)=n(S_E)=n-a+1, n(P_{1O1E})=\frac{n-a}{2}, n(P_{2O}\cup P_{2E})=\frac{n-a+2}{2}$

$n(S_O)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})\Rightarrow n(P_{2O})=\frac{n-a+2}{4}$

$n(S_E)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})\Rightarrow n(P_{2E})=\frac{n-a+2}{4}$

$\Rightarrow L(2,a,n)$ 存在，且 $a\equiv n\equiv 1(mod\,2)$時，必有 $n-a\equiv 2(mod\,4)$

3.當$a\equiv 1(mod\,2), n\equiv 0(mod\,2)$ 或 $a\equiv 0(mod\,2), n\equiv 1(mod\,2)$

$n(S_O)+n(S_E)=2(n-a+1)$,

$n(S_O)=n(S_E)=n-a+1, n(P_{1O1E})=\frac{n-a+1}{2}, n(P_{2O}\cup P_{2E})=\frac{n-a+1}{2}$

$n(S_O)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})\Rightarrow n(P_{2O})=\frac{n-a+1}{4}$

$n(S_E)=n-a+1=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})\Rightarrow n(P_{2E})=\frac{n-a+1}{4}$

$\Rightarrow L(2,a,n)$ 存在，且 $a\not\equiv n(mod\,2)$，必有 $n-a\equiv 3(mod\,4)$

統整以上算式，我們可知若存在 $L(2,a,n)$，則 (a,n) 必滿足底下條件:

1. (a,n) 皆為偶數，$n-a\equiv 0(mod\,4)$
2. (a,n) 皆為奇數，$n-a\equiv 2(mod\,4)$
3. (a,n) 一奇一偶，$n-a\equiv 3(mod\,4)$

(二) 位移法

在 $L(2,a,n)$中，數列最小數變為 a ，將數列位置定義為1到 $2(n-a+1)$ ，使數列位置總和為 $\frac{[1+2(n-a+1)][2(n-a+1)]}{2}$，並且由於非首個出現的各個 i，與上一個 i 之間隔為 i，每個位置皆可以以 $d(1,i)$ 或者 $d(2,i)$ 表示，且 $d(k,i)$ 之值會位於區間 $[1,2(n-a+1)]$ 之間各不重複，可列式:

$$\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n} d(2,i)=\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n}(d(1,i)+i+1)=\sum_{j=1}^{2n} j$$

$$2\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\frac{(a+n)(n-a+1)}{2}+n-a+1=\frac{[1+2(n-a+1)][2(n-a+1)]}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(1,i)=\frac{3n^2+7n+5a^2-9a-8an}{4},d(1,i)\in\mathbb{N},3n^2+3n+a^2-a\equiv 0(mod\,4)$$

a	$a\equiv 0(mod\,4)$	$a\equiv 1(mod\,4)$	$a\equiv 2(mod\,4)$	$a\equiv 3(mod\,4)$
n	$n\equiv 0,3(mod\,4)$	$n\equiv 0,3(mod\,4)$	$n\equiv 1,2(mod\,4)$	$n\equiv 1,2(mod\,4)$

位移法同樣可證明定理三。

(三) 程式實作

在此部份我希望透過程式，進一步檢驗所求出的條件是否為充分條件，以下為已知 $L(2,a,n)$數列，但由於程式是透過將數字代入且不斷重複直到成立數列，對於許多過大之 n 尚無法給出解答，在以下描述中將以(......)表示在此 n 程式無法順利運行。

$a=1,n=3,4,7,8,11,12,15,16,19,20,.......$

$a=2,n=6,9,10,13,14,17,18,21,22,25,26,(......)$

$a=3,n=9,10,13,14,17,18,21,22,(......)$

$a=4,n=12,15,16,19,20,23,24,(......)$

$a=5,n=15,16,19,20,23,24,(......)$

$a=6,n=18,21,22,25,26,(......)$

$a=7,n=21,22,25,26,(......)$

$a=8,n=24,27,28,(......)$

$a=9,n=27,28,31,(......)$

$a=10,n=30,33,34,(......)$

透過運行程式，可觀察到對於以上 (a,n)，若滿足定理三則 $L(2,a,n)$ 存在。

四、$L(s,a,n)$

證

(一)奇偶性

在 $L(s,a,n)$中，數列總長度為 $s(n-a+1)$ ，且根據 i 的奇偶有以下性質，

$$i\equiv 0(mod\,2)\Rightarrow\sum_{k=1}^{s}D(k,i)=\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E\text{或}\lfloor\frac{s}{2}\rfloor O\lceil\frac{s}{2}\rceil E$$

(若 $s\equiv 0(mod\,2)$則所有偶數皆位於 $\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E$)

$$i\equiv 1(mod\,2)\Rightarrow\sum_{k=1}^{s}D(k,i)=sO\text{ 或 }sE$$

在數列中任一位置皆可表示為 $D(k,i)$，在 a 到 n 中的數中若 a、n 奇偶不同，則有 $\frac{n-a+1}{2}$ 個奇數及偶數；若皆為奇數有 $\frac{n-a+2}{2}$ 個奇數及 $\frac{n-a}{2}$ 個偶數；若皆為偶數則有 $\frac{n-a}{2}$ 個奇數及 $\frac{n-a+2}{2}$ 個偶數。數列共有 $\lceil\frac{s(n-a+1)}{2}\rceil$ 個奇數位及 $\lfloor\frac{s(n-a+1)}{2}\rfloor$ 個偶數位，且偶數 i 位置分別位於 $\lceil\frac{s}{2}\rceil$ 個奇數位及 $\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$ 個偶數位或者 $\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$ 個奇數位 $\frac{s}{2}$ 個偶數位，奇數 i 位於 s 個奇數位或者 s 個偶數位。

s	a	n	$n(S_O)$	$n(S_E)$	$n(P_{\lceil\frac{s}{2}\rceil O\lfloor\frac{s}{2}\rfloor E}\cup P_{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor O\lceil\frac{s}{2}\rceil E})$	$n(P_{sO}\cup P_{sE})$
奇	奇	奇	$\frac{s(n-a+1)+1}{2}$	$\frac{s(n-a+1)-1}{2}$	$\frac{n-a}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$
奇	奇	偶	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
奇	偶	奇	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
奇	偶	偶	$\frac{s(n-a+1)+1}{2}$	$\frac{s(n-a+1)-1}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$	$\frac{n-a}{2}$
偶	奇	奇	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$
偶	奇	偶	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
偶	偶	奇	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
偶	偶	偶	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$	$\frac{n-a}{2}$

上表呈現當 s、a、n 分別為奇數或者偶數時，數列中各集合之個數。

個別推導

(1) $s\equiv a\equiv n\equiv 1(mod\,2)\Rightarrow n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E}\cup P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})=\frac{n-a}{2}, n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a+2}{2}$

$$n(S_O)=\frac{s(n-a+1)+1}{2}=\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)-1}{2}=\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+sn(P_{sO})=\frac{(s+1)(n-a+2)}{4}\in\mathbb{N}$$

(2) $s\equiv 1(mod\,2), a\not\equiv n(mod\,2)\Rightarrow n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E}\cup P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})=n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a+1}{2}$

$$n(S_o)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+sn(P_{sO})=\frac{(s+1)(n-a+1)}{4}\in\mathbb{N}$$

(3) $s\equiv 1(mod\,2), a\equiv n\equiv 0(mod\,2)$

$\Rightarrow n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E}\cup P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})=\frac{n-a+2}{2}, n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a}{2}$

$$n(S_O)=\frac{s(n-a+1)+1}{2}=\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)-1}{2}=\frac{s-1}{2}n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+\frac{s+1}{2}n(P_{\frac{s-1}{2}O\frac{s+1}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{\frac{s+1}{2}O\frac{s-1}{2}E})+sn(P_{sO})=\frac{sn-sa+n-a+4}{4},\frac{(s+1)(n-a)}{4}\in\mathbb{N}$$

(4) $s\equiv 0(mod\,2), a\equiv n\equiv 1(mod\,2)\Rightarrow n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})=\frac{n-a}{2}, n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a+2}{2}$

$$n(S_O)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{sO})=n(P_{sE})=\frac{n-a+2}{4},\frac{n-a+2}{4}\in\mathbb{N}$$

(5) $s\equiv 0(mod\,2), a\not\equiv n(mod\,2) \Rightarrow n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})=\frac{n-a+1}{2}, n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a+1}{2}$

$$n(S_O)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{sO})=n(P_{sE})=\frac{n-a+1}{4}, \frac{n-a+1}{4}\in\mathbb{N}$$

(6) $s\equiv a\equiv n\equiv 0(mod\,2) \Rightarrow n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})=\frac{n-a+2}{2}, n(P_{sO}\cup P_{sE})=\frac{n-a}{2}$

$$n(S_O)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sO})$$

$$n(S_E)=\frac{s(n-a+1)}{2}=\frac{s}{2}n(P_{\frac{s}{2}O\frac{s}{2}E})+sn(P_{sE})$$

$$n(P_{sO})=n(P_{sE})=\frac{n-a}{4}, \frac{n-a}{4}\in\mathbb{N}$$

統整以上算式，可得:

s	a,n	必要條件
$s\equiv 1(mod\,2)$	$a\equiv n\equiv 1(mod\,2)$	$s\equiv 3(mod\,4)\vee n-a\equiv 2(mod\,4)$
$s\equiv 1(mod\,2)$	$a\not\equiv n(mod\,2)$	$s\equiv 3(mod\,4)\vee n-a\equiv 3(mod\,4)$
$s\equiv 1(mod\,2)$	$a\equiv n\equiv 0(mod\,2)$	$s\equiv 3(mod\,4)\vee n-a\equiv 0(mod\,4)$
$s\equiv 0(mod\,2)$	$a\equiv n\equiv 1(mod\,2)$	$n-a\equiv 2(mod\,4)$
$s\equiv 0(mod\,2)$	$a\not\equiv n(mod\,2)$	$n-a\equiv 3(mod\,4)$
$s\equiv 0(mod\,2)$	$a\equiv n\equiv 0(mod\,2)$	$n-a\equiv 0(mod\,4)$

由奇偶性可得：

若 $s\equiv 0,1,2(mod\,4)$、$a\equiv 0,1(mod\,4)$，則 $n\equiv 0,3(mod\,4)$

若 $s\equiv 0,1,2(mod\,4)$、$a\equiv 2,3(mod\,4)$，則 $n\equiv 1,2(mod\,4)$

若 $s\equiv 3(mod\,4)$，則 a、n 為正整數

(二)位移法

在 $L(s,a,n)$中，將數列位置定義為1到 $s(n-a+1)$ ，使數列各位置總和為 $\frac{(1+s(n-a+1))s(n-a+1)}{2}$，並且由於非首個出現的各個 i，與上一個 i 之間隔為 i，每個位置皆可用 $d(k,i)$ 表示，且 $d(k,i)$ 之值會位於 $[1,s(n-a+1)]$各不重複，可列式：

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}d(k,i)=s\sum_{i=a}^{n}d(1,i)+\frac{(1+s-1)(s-1)}{2}\sum_{i=a}^{n}i+\frac{(1+s-1)(s-1)}{2}\sum_{i=a}^{n}1=\sum_{j=1}^{s(n-a+1)}j$$

$$s\sum_{i=a}^{n}d(1,i)+\frac{(s^2-s)(a+n)(n-a+1)}{4}+\frac{(s^2-s)(n-a+1)}{2}=\frac{(1+s(n-a+1))s(n-a+1)}{2}$$

$$\sum_{i=a}^{n}d(1,i)=\frac{-4san+3sa^2+sn^2-a^2+n^2-3sa+sn+5n-3a+4}{4}$$

簡化後可得 $a(3sa-a-3s-3)\equiv 0(mod\,4)$，以及 $n(n+1)(s+1)\equiv 0(mod\,4)$ ，得：

$L(s,a,n)$存在，s、a、n 有以下關係：

若 $s\equiv 1(mod\,4)$， a、 n 為正整數

若 $s\equiv 2(mod\,4)$， $a\equiv 0,1(mod\,4)$、$n\equiv 0,3(mod\,4)$

若 $s\equiv 3(mod\,4)$， a、 n 為正整數

若 $s\equiv 0(mod\,4)$， $a\equiv 0,1(mod\,4)$、$n\equiv 0,3(mod\,4)$

將兩種方法進行統整得：

【定理四】 $L(s,a,n)$ 存在，s、a、n 有以下關係：

1. 若 $s\equiv 1(mod\,4)$，則 $a\equiv 0,1(mod\,4)$ 時，$n\equiv 0,3(mod\,4)$；$a\equiv 2,3(mod\,4)$ 時，$n\equiv 1,2(mod\,4)$
2. 若 $s\equiv 2(mod\,4)$，則 $a\equiv 0,1(mod\,4)$、$n\equiv 0,3(mod\,4)$
3. 若 $s\equiv 3(mod\,4)$，則 a、 n 為正整數
4. 若 $s\equiv 0(mod\,4)$，則 $a\equiv 0,1(mod\,4)$、$n\equiv 0,3(mod\,4)$

五、 $L(2,1,n)$簡化與其結構規律

(一)簡化$L(2,1,n)$數列與其性質

1.簡數列

根據$L(2,1,n)$定義，$d(2,i)=d(1,i)+i+1$，因此可藉由 $d(1,i)$得知 $d(2,i)$並依序填入序列之中，例如將 $L'(2,1,7)$之一的〈7362541〉還原:

位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
填 7	7	X	X	X	X	X	X	X	7	X	X	X	X	X
填 3	7	3	X	X	X	3	X	X	7	X	X	X	X	X
填 6	7	3	6	X	X	3	X	X	7	6	X	X	X	X
填 2	7	3	6	2	X	3	2	X	7	6	X	X	X	X
填 5	7	3	6	2	5	3	2	X	7	6	5	X	X	X
填 4	7	3	6	2	5	3	2	4	7	6	5	X	4	X
填 1	7	3	6	2	5	3	2	4	7	6	5	1	4	1

最終結果為〈73625324765141〉，與原 $L(2,1,7)$相同，因此可推知**只需要$d(1,i)$即可判別原數列**，而這篇文章中將只有$d(1,i)$的數列定義為「簡數列」，寫成 $L'(s,a,n)$。

以〈73625324765141〉及〈14156742352637〉來舉例，因 $L(2,1,n)$具有對稱性，因此這兩個數列被視為同一種，而這兩者得到的 $L'(2,1,7)$分別是〈7362541〉及〈1456723〉，雖然這兩 $L'(2,1,7)$之間並沒有明顯的共同點，但只要其中一個 $L(2,1,7)$ 即可推得，例如:

→ ←

7	3	6	2	5	3	2	4	7	6	5	1	4	1

在 $L(2,1,n)$ 中，由左開始取 $d(1,i)$及由右開始取 $d(2,i)$會得到兩組數列，而這兩組數列分別是 $L(2,1,n)$ 左右顛倒所得到的簡數列，因此雖然兩者之 $L(2,1,n)$ 被視為同一種，但可推知每一種 $L(2,1,n)$ 皆可得到兩組簡數列。

2.簡數列性質

(1)數列最大數不會出現在簡數列末位。

證　設數列最大數為 n，數列原長 $2n$，簡數列最末位在原數列之最小位置為 n，而簡數列定義為每數第一次出現之位置，根據位移法公式 $d(2,i)=d(1,i)+i+1$，可知若最大數位於簡數列末位，其在原數列之位置最小為 $2n+1$，較數列原長大，故得證。

(2)數列中數字越接近最大數越遠離簡數列最末位。

證　如上，簡數列最末位在原數列最小位置為 n，若數字為 $n-1$，則此數第二位置必不小於 $2n$，為滿足數列要求，得 $d(2,n-1)=2n$，$d(1,n-1)=n$，意指只能有一 $d(2,i)<n$。而要滿足此要求除了一組 $d(1,i)(i\neq n-1)$可為例外，其他則需要滿足 $d(1,1)<n-3$，$d(2,1)<n-4$，......以此類推，，但在滿足前句之情況下 $n-1$及 $n-2$ 位無法填入$d(1,i)$，也只有其一能填入$d(2,i)$，因此 $n-1$不可能填入簡數列最末位。其餘數字同理可證。

(二)數字在數列中位置

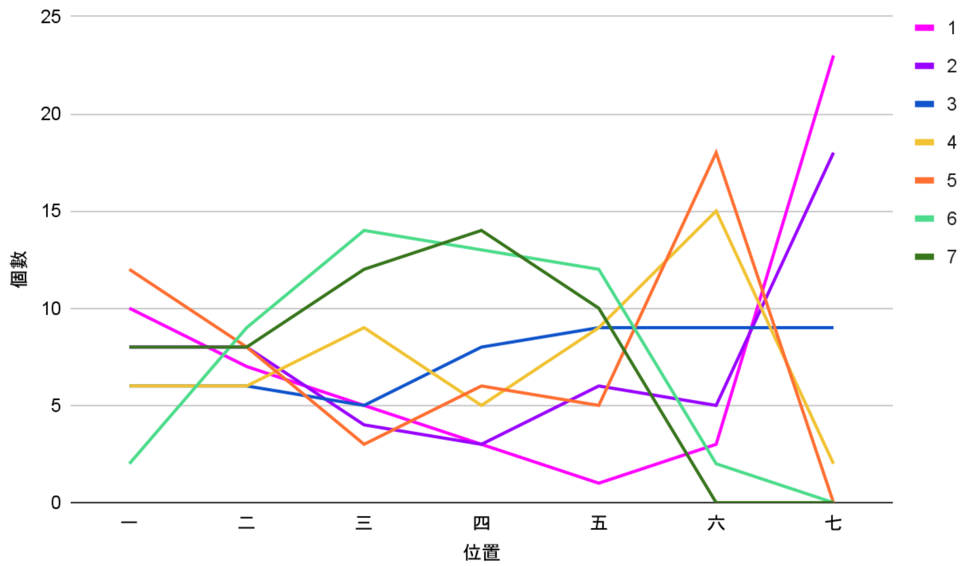
由於 $L(2,1,3)$及 $L(2,1,4)$皆只有一種組合，故本研究中以數列成立數量次少之 $L(2,1,7)$及 $L(2,1,8)$進行探討，並以簡數列進行分析，觀察簡數列中每個數字是否集中於特定位置。

探討方式：以 $L'(2,1,7)$之〈7362541〉以及〈1456723〉為例，在這兩個簡數列中 1 分別出現在第 1 位以及第 7 位，2 分別出現在第 4 位及第 6 位......以此類推。

1.$n=7$

數字\位置	一	二	三	四	五	六	七
1	10	7	5	3	1	3	23
2	8	8	4	3	6	5	18
3	6	6	5	8	9	9	9
4	6	6	9	5	9	15	2
5	12	8	3	6	5	18	0
6	2	9	14	13	12	2	0
7	8	8	12	14	10	0	0

表： $n=7$時簡數列中各數字在各位置之數量

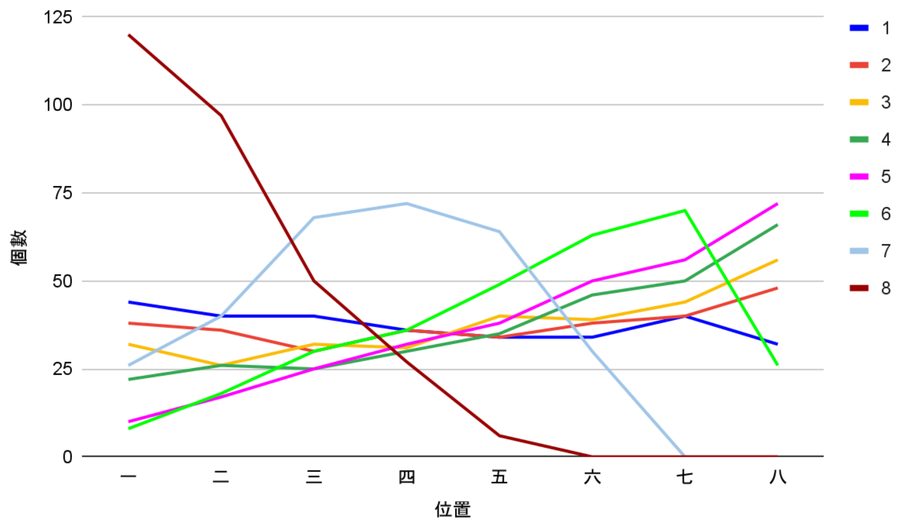


圖： n=7 時各位置與數字分配關係表(作者自行繪製)

2. n=8

數字\位置	一	二	三	四	五	六	七	八
1	44	38	32	22	10	8	26	120
2	40	36	26	26	17	18	40	97
3	40	30	32	25	25	30	68	50
4	36	36	31	30	32	36	72	27
5	34	34	40	35	38	49	64	6
6	34	38	39	46	50	63	30	0
7	40	40	44	50	56	70	0	0
8	32	48	56	66	72	26	0	0

表：n=8 時簡數列中各數字在各位置之數量



圖： n=8時各位置與數字分配關係表(作者自行繪製)

從這兩張圖表無法明顯觀察出簡數列在數字分布上有何規律，也無法推測其他最大數時的數字分布。但未來若需尋找 Langford 數列，且不要求所有滿足條件之數列時，透過圖表可知最大數占第一位比例最高，將最大數放置於第一位將會是最佳選擇。

肆、研究結果

【定理一】 $L(2,1,n)$數列存在，若且唯若 $n\equiv 0,3\pmod 4$

【定理二】 $L(s,1,n)$ 存在，s 與 n 有以下關係：

1. 若 $s\equiv 0\pmod 2$，則 $n\equiv 0,3\pmod 4$
2. 若 $s\equiv 1\pmod 2$，則 n 為正整數

【定理三】 $L(2,a,n)$ 存在，a 與 n 有以下關係：

1. 若 $a\equiv 0,1\pmod 4$，則 $n\equiv 0,3\pmod 4$
2. 若 $a\equiv 2,3\pmod 4$，則 $n\equiv 1,2\pmod 4$

【定理四】 $L(s,a,n)$ 存在，s 、a 、 n 有以下關係：

1. 若 $s\equiv 1\pmod 4$，則 $a\equiv 0,1\pmod 4$ 時，$n\equiv 0,3\pmod 4$；$a\equiv 2,3\pmod 4$ 時，$n\equiv 1,2\pmod 4$
2. 若 $s\equiv 2\pmod 4$，則 $a\equiv 0,1\pmod 4$、$n\equiv 0,3\pmod 4$
3. 若 $s\equiv 3\pmod 4$，則 a、 n 為正整數
4. 若 $s\equiv 0\pmod 4$，則 $a\equiv 0,1\pmod 4$、$n\equiv 0,3\pmod 4$

伍、討論

一、$L(s,1,n)$

我在 $L(2,1,n)$藉由奇偶性、位移法獲得了成立 $L(2,1,n)$的必要條件，再改變數列中每數重複次數後，利用這兩種算法求得了重複次數為偶數時之必要條件，而 s 為奇數時 $L(s,1,n)$之必要條件則未能求得，且由於缺少實例 (隨著最大數越大程式運行時間隨之增加，甚至強行結束程式)，無法獲得各重複次數實際在哪些最大數存在，在未來希望可以透過尋找 $L(s,1,n)$之構造方法獲得充分條件 。

二、$L(2,a,n)$

本部分我同樣使用了奇偶性、位移法得到最小數以及最大數兩者需滿足的條件，並使用 C++程式驗證數列成立之最小數與最大數，發現程式驗證數列存在的所有參數皆與我求得的必要條件相符，故我推測若最小數及最大數滿足定理三之關係，必能找出 $L(2,a,n)$，希望在未來的研究中可以找出 $L(2,a,n)$ 之數列構造法，證明其是否為充分。

三、$L(2,1,n)$ 簡化與其結構規律

這部分研究中，我利用數列定義將 Langford 數列簡化，簡化後的數列可使程式縮短尋找此數列的步驟及時間。關於簡數列數字在各位置之分析，儘管研究中透過 n=7,8 無法觀察出簡數列結構，但期待未來可以以程式結合簡數列，找出所有 n=11,12 之 Langford 數列並繪製圖表，尋找簡數列之結構。

陸、結論

本研究改變了 Langford 數列的性質，並探討不同參數下的必要條件及驗證其規律性，研究中主要透過奇偶性以及位移法進行計算，並一般化此兩種解法。本研究已成功獲取了多數情況下數列成立各參數所具備之關係 (如:重複次數為偶數時，最大數除以 4 需餘 0 或 3)，卻有部份情況無法直接透過一般化計算，期待未來能深入探討研究中尚未解出的問題，也將利用建立數學模型等方式作為方向尋找解答，以及證明每種數列的充分條件。此外，本研究將數列簡化，使數列能以更簡短之型態進行紀錄及研究，並且分析簡化後數列是否存在規律。本研究透過逐步推廣與分析，期望能進一步理解 Langford 數列的結構，並為未來相關研究提供參考方向。

柒、參考文獻資料

[1] Sequence A050998. In The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. From https://oeis.org/A050998.

[2] Davies, R. O. (1959). On Langford's Problem (II). *The Mathematical Gazette*, *43*(346), 253–255. doi:10.1017/S0025557200041693

【評語】050406

本作品研究 Langford 數列，其定義是將 1, 1, 2, 2, …, n, n 重新排列，使得兩個 k 中間間隔 k 個數。文獻中已證明 Langford 數列存在的充要條件是 n 除以 4 餘 0 或 3，作者對此給出兩種證法：奇偶性判斷法及位移法，並且以這兩種證法為基礎，給出廣義 Langford 數列存在的關於 s、a、n 的同餘性質必要條件，其中廣義 Langford 數列中由 a 到 n 的每個正整數 k 都恰出現 s 次，且兩兩中間間隔 k 個數。推廣後的問題變得複雜，作者證明原本問題分類方式仍可得出一些同餘性質作為必要條件，且證明寫作清楚易讀。然而，推廣後的問題之充份性卻未被討論。建議作者可以通過構造一些例子，給出部分情況的充分性，使作品更臻完整。

作品海報

Langford 數列之探討

壹、研究動機

我曾聽過一個關於數學魔術的演講，其中提及了這個奇妙的數列—Langford 數列，此數列由 1 開始到給定最大數中每個正整數都出現兩次，而且 1 與1 之間間隔一個位置，2 與2 之間間隔兩個位置......以此類推。在講座中講師用奇偶性講解了最大數為 3、4、5 的數列存在與否，而我在聽完講師的證明之後燃起了研究此數列之興趣。

貳、名詞定義

$L(s,a,n)$為廣義 Langford 數列，s 為每數出現次數、a 為最小數、n 為最大數。

$d(k,i)$ 為在數列中出現的第k 個i 之位置，$1\le k\le s$ ，$a\le i\le n$

$D(k,i)=\begin{cases}O, d(k,i)\equiv 1 \pmod 2\\ E, d(k,i)\equiv 0 \pmod 2\end{cases}$ ，當 i 在數列中共位於u 個奇數位及v 個偶數位時記作 $\sum_{k=1}^{s} D(k,i)=uOvE$

$S_O=\{(k,i)\mid D(k,i)=O\}$, $S_E=\{(k,i)\mid D(k,i)=E\}$

定義集合P_{uOvE} ，集合內元素在數列中位置皆位於u 個奇數位及v 個偶數位，$u,v\in\mathbb{N}$ ，$u+v=s$ 。

參、研究目的

(一)不改變 Langford 數列之規則，求出所有可存在數列之最大數。

(二)改變數列中每數重複次數，求出所有可存在數列之最大數。

(三)改變數列最小數，求出所有可存在數列之最大數。

(四)同時改變數列重複次數、最小數，求出所有可存在數列之最大數。

(五)簡化未改變規則之 Langford 數列，尋找結構規律。

肆、研究過程與方法

一、不改變 Langford 數列之規則

奇偶性	位移法
$i\equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow D(1,i)+D(2,i)=1O1E$ $P_{1O1E}=\{i\mid i\equiv 0 \pmod 2\}$ $i\equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow D(1,i)+D(2,i)=2O$ 或 $2E$ $P_{2O}\cup P_{2E}=\{i\mid i\equiv 1 \pmod 2\}$ $\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} D(k,i)=nOnE$ $n(S_O)=n(P_{1O1E})+2n(P_{2O})$ $n(S_E)=n(P_{1O1E})+2n(P_{2E})$	$d(2,i)=d(1,i)+i+1$ $\sum_{i=1}^{2n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{2n} d(2,i)=\sum_{j=1}^{2n} j$ $\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+(\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+i+1)$ $=2\sum_{i=1}^{n} d(1,i)+\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} 1=\dfrac{(1+2n)2n}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} d(1,i)=\dfrac{n(3n-1)}{4}$

在奇偶性中，由於數字的奇偶不同數字間間隔個數也會不同，在此處我將數列中的所有位置分為奇數位及偶數位，列出奇數及偶數分別在數列中占有多少位置，並計算當最大數為何時可以使數字填滿數列；在位移法中，我將數列中的每個位置進行編號(由1至2n)，藉由數列的特性得知每數第二次出現位置與第一次出現之關係，再利用和的運算計算所有數字第一次出現的位置總和。

由以上兩方法可分別解得 $n(P_{2O})$ 、$n(P_{2E})$及 $\sum_{i=1}^{n} d(1,i)$，而這三數皆為自然數，必有 $n\equiv 0,3 \pmod 4$

由於研究二只改變重複次數、研究三只改變最小數都屬於研究四同時改變重複次數及最小數的範疇，故海報中僅提及研究四之公式。

二、改變每數重複次數及最小數

奇偶性

$$i \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{s} D(k,i) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil O \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor E \text{ 或 } \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor O \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil E$$

$$i \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow sO \text{ 或 } sE$$

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=a}^{n} D(k,i) = \left\lceil \frac{s(n-a+1)}{2} \right\rceil O \left\lfloor \frac{s(n-a+1)}{2} \right\rfloor E$$

$$n(S_O) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil n(P_{\lceil \frac{s}{2} \rceil O \lfloor \frac{s}{2} \rfloor E}) + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor n(P_{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor O \lceil \frac{s}{2} \rceil E}) + sn(P_{sO})$$

$$n(S_E) = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor n(P_{\lceil \frac{s}{2} \rceil O \lfloor \frac{s}{2} \rfloor E}) + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil n(P_{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor O \lceil \frac{s}{2} \rceil E}) + sn(P_{sE})$$

位移法

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=a}^{n} d(k,i) = s\sum_{i=a}^{n} d(1,i) + \frac{s(s-1)}{2}\sum_{i=a}^{n} i + \frac{s(s-1)}{2}\sum_{i=a}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{s(n-a+1)} j$$

$$\sum_{i=a}^{n} d(1,i) + \frac{(s^2-s)(a+n)(n-a+1)}{4} + \frac{(s^2-s)(n-a+1)}{2} = \frac{[1+s(n-a+1)]s(n-a+1)}{2}$$

$$\sum_{i=a}^{n} d(1,i) = \frac{-4san+3sa^2+sn^2-a^2+n^2-3sa+sn+5n-3a+4}{4}$$

s(奇\偶)	a、n	$n(S_O)$	$n(S_E)$	$n(P_{\lceil \frac{s}{2} \rceil O \lfloor \frac{s}{2} \rfloor E}) \cup n(P_{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor O \lceil \frac{s}{2} \rceil E})$	$n(P_{sO}) \cup n(P_{sE})$
奇	$a \equiv n \equiv 1 \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)+1}{2}$	$\frac{s(n-a+1)-1}{2}$	$\frac{n-a}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$
奇	$a \not\equiv n \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
奇	$a \equiv n \equiv 0 \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)+1}{2}$	$\frac{s(n-a+1)-1}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$	$\frac{n-a}{2}$
偶	$a \equiv n \equiv 1 \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$
偶	$a \not\equiv n \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$	$\frac{n-a+1}{2}$
偶	$a \equiv n \equiv 0 \pmod 2$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{s(n-a+1)}{2}$	$\frac{n-a+2}{2}$	$\frac{n-a}{2}$

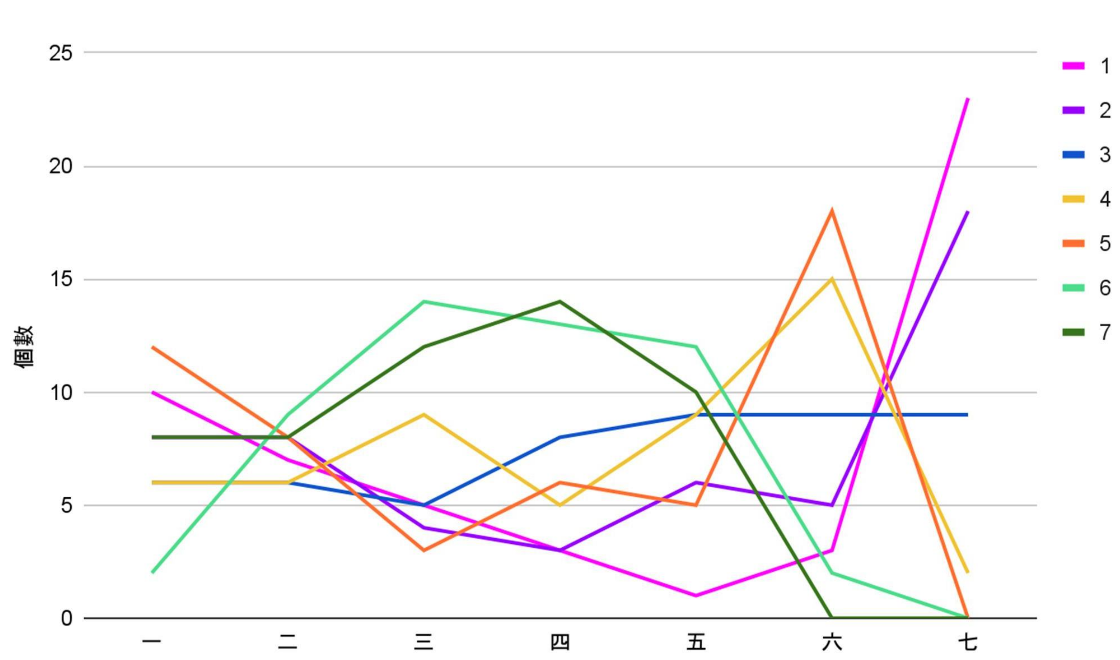
上表為奇偶性中改變三參數各集合之元素個數，其中$\lceil x \rceil$為ceiling function，$\lfloor x \rfloor$為floor function。

將兩種方法進行統整得: 當 $L(s,a,n)$存在，s 、a 、n 有以下關係：

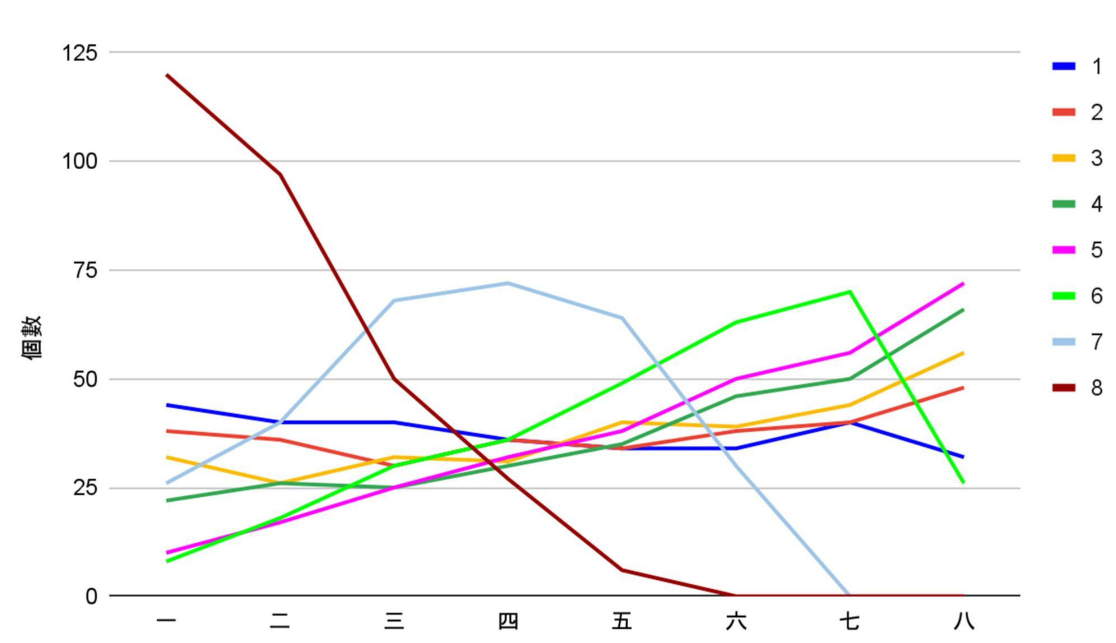
1. 若$s \equiv 1 \pmod 4$ ，則$a \equiv 0,1 \pmod 4$時，$n \equiv 0,3 \pmod 4$ ；$a \equiv 2,3 \pmod 4$時，$n \equiv 1,2 \pmod 4$ 。
2. 若$s \equiv 2 \pmod 4$，則 $a \equiv 0,1 \pmod 4$ 、$n \equiv 0,3 \pmod 4$ 。
3. 若$s \equiv 3 \pmod 4$，則 a 、n 為正整數。
4. 若 $s \equiv 0 \pmod 4$ ，則 $a \equiv 0,1 \pmod 4$ 、 $n \equiv 0,3 \pmod 4$ 。

三、簡化未改變規則之 Langford 數列

為了研究 Langford 數列是否存在規律，在本研究中將其簡化成只有 $d(1,i)$之樣貌，記作 $L'(s,a,n)$，由數列特性可知若有$d(1,i)$之順序則可得數列全貌，在已知每數重複次數的情況下，此特性對於推廣後的數列依舊適用。為研究簡化後數列數字與位置間是否有關係，在研究四中我將$L(2,1,7)$及 $L(2,1,8)$ 兩種情況簡化，並進行數字與其位置分析。例如將$\langle 73625324765141 \rangle$拆分為 $\langle 1456723 \rangle$及$\langle 7362541 \rangle$，而在$\langle 7362541 \rangle$中，7為第一位、3 位於第二位......以此類推，並繪製圖表觀察數字與位置是否存在某種關聯。



圖一、$L'(2,1,7)$ 各數字於各位置分布表(本人繪製)



圖二、$L'(2,1,8)$ 各數字於各位置分布表(本人繪製)

本研究針對簡化後數列進行分析，初步觀察上面兩張圖表，受限於有限的樣本數，目前尚無法明確指出是否存在規律，未來期待可以以程式找出更多數據，探討簡化後數列是否存在規律。

伍、研究結果

【定理一】 $L(2,1,n)$數列存在，若且唯若$n \equiv 0,3 \pmod 4$

【定理二】 $L(s,1,n)$存在，s與n有以下關係：

1. 若 $s \equiv 0 \pmod 2$ ，則 $n \equiv 0,3 \pmod 4$
2. 若 $s \equiv 1 \pmod 2$ ，則 n 為正整數

【定理三】 $L(2,a,n)$存在，a與n有以下關係：

1. 若 $a \equiv 0,1 \pmod 4$ ，則 $n \equiv 0,3 \pmod 4$
2. 若 $a \equiv 2,3 \pmod 4$ ，則 $n \equiv 1,2 \pmod 4$

【定理四】當 $L(s,a,n)$ 存在，s、a、n 有以下關係：

1. 若$s \equiv 1 \pmod 4$ ，則$a \equiv 0,1 \pmod 4$ 時，$n \equiv 0,3 \pmod 4$ ；$a \equiv 2,3 \pmod 4$時，$n \equiv 1,2 \pmod 4$
2. 若$s \equiv 2 \pmod 4$ ，則 $a \equiv 0,1 \pmod 4$ 、$n \equiv 0,3 \pmod 4$
3. 若$s \equiv 3 \pmod 4$ ，則 a 、n 為正整數
4. 若$s \equiv 0 \pmod 4$ ，則$a \equiv 0,1 \pmod 4$ 、$n \equiv 0,3 \pmod 4$

陸、結論

本研究改變了 Langford 數列的性質，並探討不同參數下的必要條件及驗證其規律性，研究中主要透過奇偶性以及位移法進行計算，並一般化此兩種解法。本研究已獲取了多數情況下數列成立各參數所具備之關係 (如:重複次數為偶數時，最大數除以 4 需餘 0 或3)，卻有部份情況無法直接透過一般化計算，期待未來能深入探討研究中尚未解出的問題，以及證明每種數列的充分條件。此外，本研究將數列簡化，使數列能以更簡短之型態進行紀錄及研究，並且分析簡化後數列是否存在規律。本研究透過逐步推廣與分析，期望能進一步理解 Langford 數列的結構。

本研究的特殊之處在於我強調以奇偶性以及位移關係尋找數列的必要條件，並且以同餘等方式證明某些數無法使此數列存在，並發明了「簡數列」試圖尋找規律。

柒、未來展望

一、延續研究二，尋找 $L(s,1,n)$ 的充分條件並證明。

二、延續研究三，證明 $L(2,a,n)$ 的必要條件同時充分。

三、延續研究四，尋找 $L(s,a,n)$ 的充分條件並證明。

四、延續研究五，用程式直接尋找簡化後的數列。

五、延續研究五，找出所有的 $L(2,1,11)$ 以及 $L(2,1,12)$ ，並繪製圖表觀察是否有規律。

六、尋找不同的 Langford 數列變體，並試著以奇偶性、位移法尋找其必要條件。

七、創造新的演算法(如運用簡數列)使找尋 Langford 數列的效率提高。

八、對於 $L(s,1,n)$ 、 $L(2,a,n)$ 、$L(s,a,n)$，尋找公式找出數列成立數量與參數間的關係。

捌、參考資料

[1] Sequence A050998. In The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. From https://oeis.org/A050998.

[2] Davies, R. O. (1959). On Langford's Problem (II). The Mathematical Gazette, 43(346), 253–255. doi:10.1017/S0025557200041693