

# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

050405

空間中兩圓柱面或兩圓錐面之交集研究

學校名稱： 國立鳳山高級中學

作者：  高二 高綺鎧  高二 葉宥銓  高二 馮國庭	指導老師：  黃士洪
---	------------------

關鍵詞： 圓錐曲線、空間幾何

# 摘要

本研究探討三類幾何結構的交集特性：第一，兩個直圓柱面在特定條件下相交時，交點集合的幾何特性；第二，兩個直圓錐面相交時，交點集合的幾何特性；第三，一個直圓柱面與一個直橢柱面相交時，交點集合的幾何特性。我們透過數學建模，理解圓錐曲線在不同條件下所形成的圖形，並進一步探索其數學特性。研究過程中，我們考慮了兩個直圓柱面的相對位置、中心軸夾角的變化與比例關係，兩個直圓錐面的相對位置與中心軸夾角的變化，以及一個直圓柱面與一個直橢柱面的相對位置與比例關係，並透過數學推導與動態幾何模擬來分析這些變數對交點集合的影響。

## 壹、前言

### 一、研究動機

在一次燈光秀活動中，我們注意到舞臺周圍的聚光燈光束形成了直圓錐面結構，隨著光束交疊，產生了引人注目的視覺效果，這激發了我們對坐標空間中交集點集合的幾何特性產生興趣，進而，我們開始深入研究光束交匯處所形成的圖形及其幾何特性。我們希望透過數學模型分析這些交點的分佈與形狀，以進一步理解其中的規律。

### 二、研究目的

#### （一）空間中兩直圓柱面相交之交集探討

- 1、中心軸相交且互垂的兩直圓柱面交集之性質
- 2、中心軸相交且夾  $\theta_z$  的兩直圓柱面交集之性質
- 3、中心軸歪斜且兩中心軸向量垂直的兩直圓柱面交集之性質

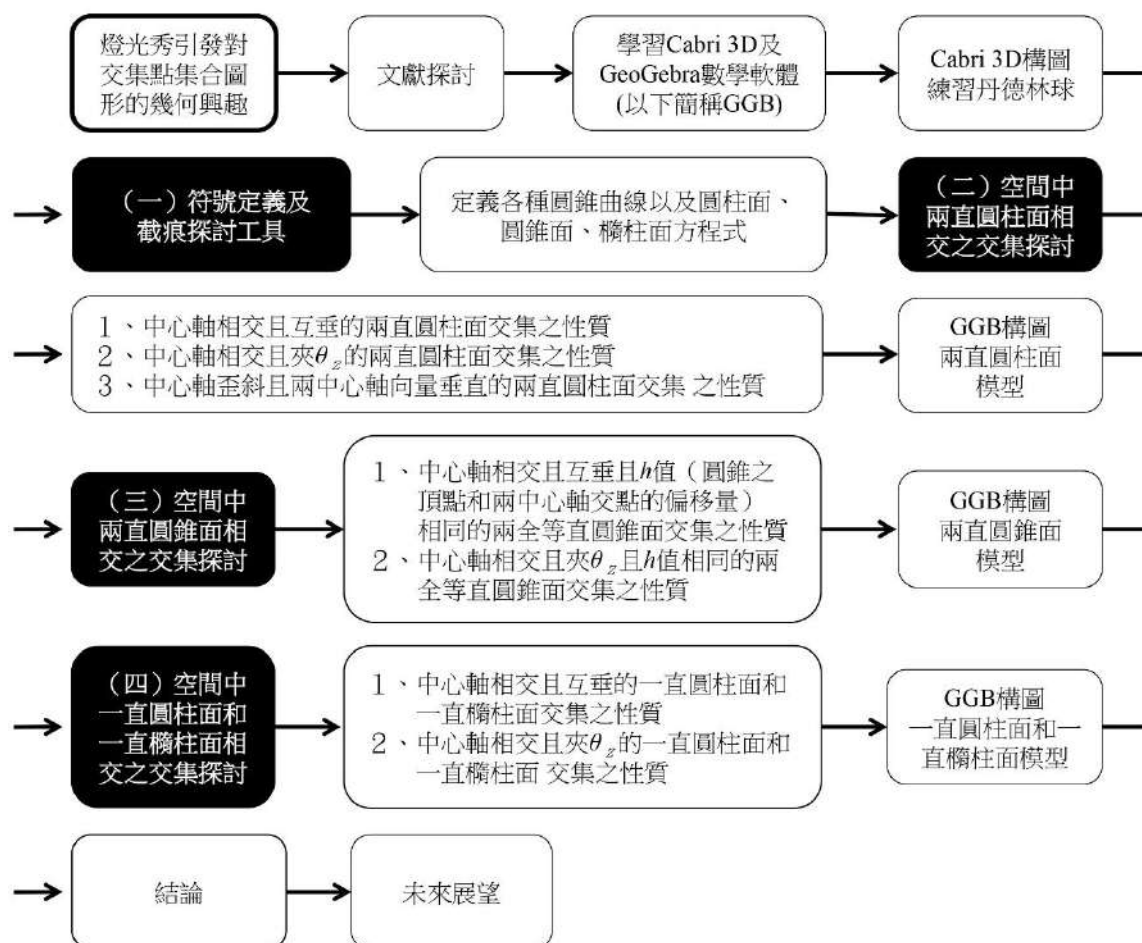
#### （二）空間中兩直圓錐面相交之交集探討

- 1、中心軸相交且互垂且  $h$  值（圓錐之頂點和兩中心軸交點的偏移量）相同的兩全等直圓錐面交集之性質
- 2、中心軸相交且夾  $\theta_z$  且  $h$  值相同的兩全等直圓錐面交集之性質

### (三) 空間中一直圓柱面和一直橢柱面相交之交集探討

- 1、中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質
- 2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質

### 三、研究架構流程圖



## 貳、研究設備與器材

一、電腦軟體：GeoGebra。

二、紙、筆、電腦。

## 參、研究過程與方法

### 一、符號定義及截痕探討工具

丹德林球主要是由給定一個直圓錐面和一個設有一平面  $E$  不過直圓錐面頂點，利用幾何作圖可作出同時相切於直圓錐面  $\Gamma$  和平面  $E$  的兩個球體，平面  $E$  與圓錐面  $\Gamma$  之切點  $E_1$ 、 $E_2$ ，則該平面  $E$  與直圓錐面  $\Gamma$  交集的點將滿足以下三種圓錐曲線定義：1.橢圓（圓）2.拋物線 3.雙曲線。

#### （一）直圓柱面定義

給定坐標空間中兩平行線  $L_1$ 、 $L_2$  且兩線之距  $d(L_1, L_2) = R$ ，其中  $R > 0$ ，則以  $L_1$  為中心軸， $L_2$  繞  $L_1$  旋轉  $360^\circ$  所形成之圖形稱之。

假設一圓柱面之中心軸為  $x$  軸，半徑為  $R$ ，則其方程式為  $\Gamma: y^2 + z^2 = R^2$ ，其中心軸向量  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ 。

#### （二）直圓錐面定義

給定坐標空間中兩相交直線  $M$ 、 $L$  且夾角  $\omega \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，兩者恰交於直圓錐面之頂點  $A$ ，直圓錐面是由一條母線（圓錐面的一斜直線） $M$  圍繞著中心軸  $L$  旋轉  $360^\circ$  所形成的圖形。

假設一圓錐面之中心軸為  $x$  軸，頂點位於  $(h, 0, 0)$ ，母線和其中心軸夾角為  $\omega$ ，則其方程式為  $\Gamma: y^2 + z^2 = r^2(x - h)^2$ ，其中  $r = \tan(\omega)$ ，且其中心軸向量  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ 。

#### （三）直橢柱面定義

在三維空間中，直橢柱面是由一個橢圓沿著與其平面垂直的方向（通常為某一坐標軸方向）平移而形成的曲面。

例如  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  即為一  $xy$  平面上的橢圓，若沿著  $xy$  平面的法向量  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  平移，其

集合即為一直橢柱面，其中心軸方向向量  $\vec{v} = (0,0,1)$ 。

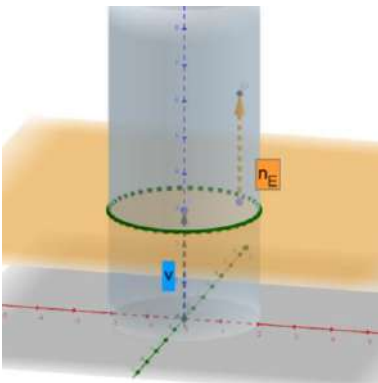
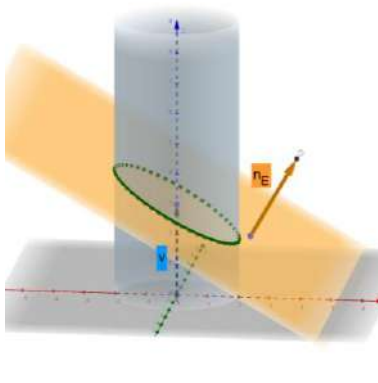
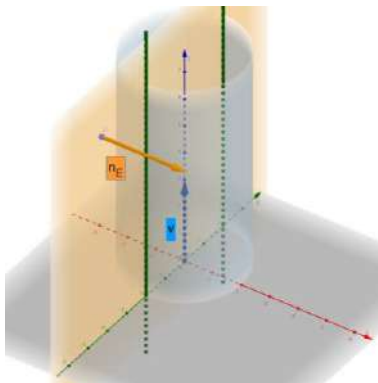
#### (四) 本文中角度 $\omega$ 、 $\theta$ 定義

1、母線  $M$  與中心軸  $L$  相交所形成的銳夾角定義為  $\omega$  角，且  $\tan(\omega)=r$ 。

2、中心軸方向向量  $\vec{v}$  和一平面的法向量  $\vec{n}$  取其銳夾角為  $\theta$ ，不失一般性，設  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ， $\theta=0^\circ$ 、 $\theta=90^\circ$  則另外討論。

#### (五) 截痕探討工具

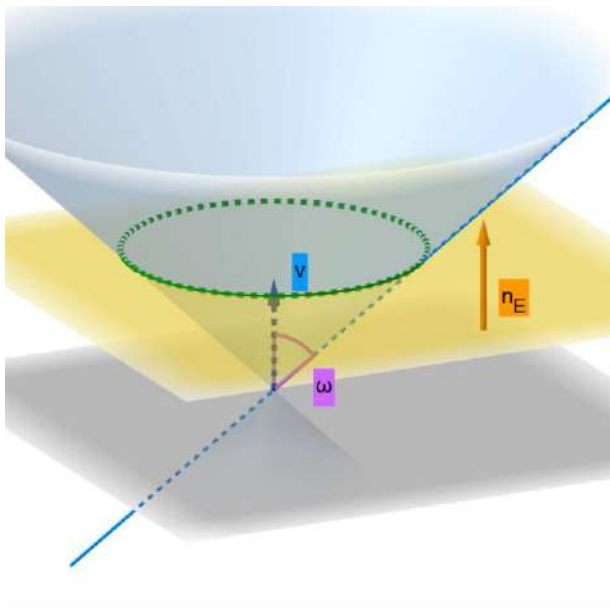
直圓柱面  $\Gamma$  與平面  $E$  相交的截痕共有 3 種情形，分別為圓形、橢圓、以及兩平行（重合）直線，而產出這些圖形和中心軸向量  $\vec{v}$  與平面  $E$  的法向量  $\vec{n}_E$  的銳夾角（同義於  $\theta$ ）有著密不可分的關係，以下為這 3 種圖形所需的條件：

<p>1、<math>\theta=0^\circ</math>（即 <math>\vec{v} \parallel \vec{n}_E</math>）  <math>\Rightarrow</math> 截痕 <math>\Gamma \cap E</math> 表一圓（如圖一）。</p>  <p>（圖一，其中 <math>\theta=0^\circ</math>）</p>	<p>2、<math>\theta \in (0^\circ, 90^\circ)</math>  <math>\Rightarrow</math> 截痕 <math>\Gamma \cap E</math> 表一橢圓（如圖二）。</p>  <p>（圖二，其中 <math>\theta=30^\circ</math>）</p>	<p>3、<math>\theta=90^\circ</math>（即 <math>\vec{v} \perp \vec{n}_E</math>）  <math>\Rightarrow</math> 截痕 <math>\Gamma \cap E</math> 表兩平行或重合直線（如圖三）。</p>  <p>（圖三，其中 <math>\theta=90^\circ</math>）</p>
---	---	---

直圓錐面  $\Gamma$  與不過頂點  $A$  的平面  $E$  相交的截痕共有 4 種情形，分別為圓形、橢圓、拋物線以及雙曲線，而產出這些圖形和夾角  $\omega$ 、 $\theta$  有著密不可分的關係，以下為這 4 種圖形所需的條件：

1、 $\theta=0^\circ$  (即  $\vec{v} \parallel \vec{n}_E$ )

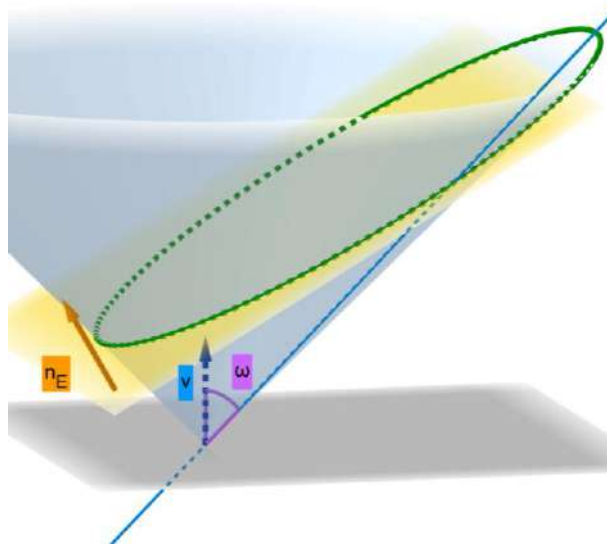
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一圓 (如圖四)。



(圖四，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=0^\circ$ )

2、 $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$

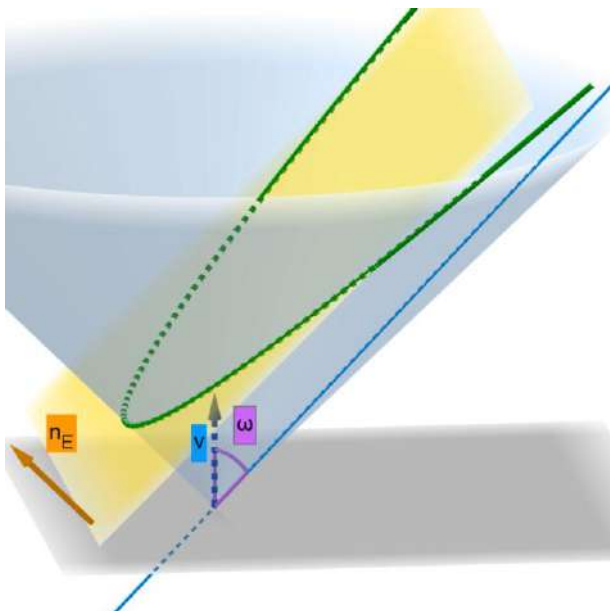
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一橢圓 (如圖五)。



(圖五，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=30^\circ$ )

3、 $\theta=90^\circ - \omega$

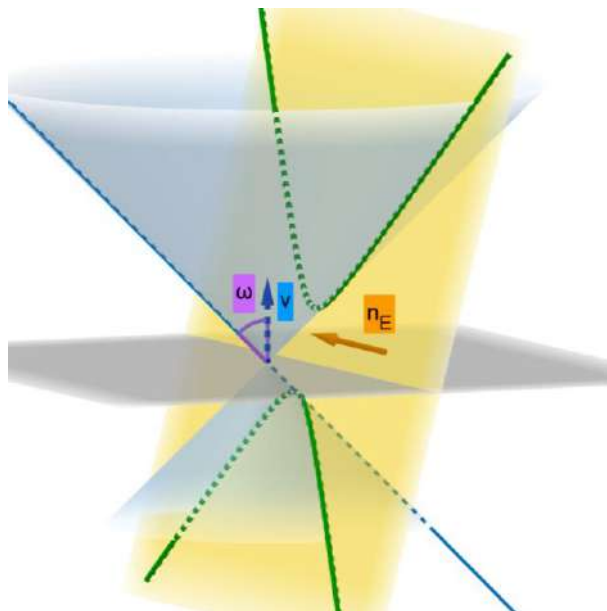
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一拋物線 (如圖六)。



(圖六，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=45^\circ$ )

4、 $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$

$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一雙曲線 (如圖)。

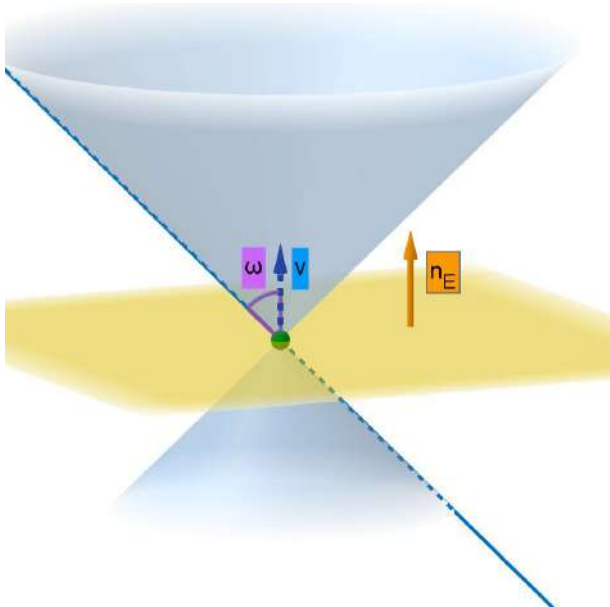


(圖七，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=75^\circ$ )

直圓錐面  $\Gamma$  與過頂點  $A$  的平面  $E$  相交的截痕共有 3 種情形，分別為交於一點、一條直線及兩相交直線，而產出這些圖形和夾角  $\omega$ 、 $\theta$  有著密不可分的關係，以下為這 3 種圖形所需的條件：

1、 $\theta=0^\circ$  (即  $\vec{v} \parallel \vec{n}_E$ )

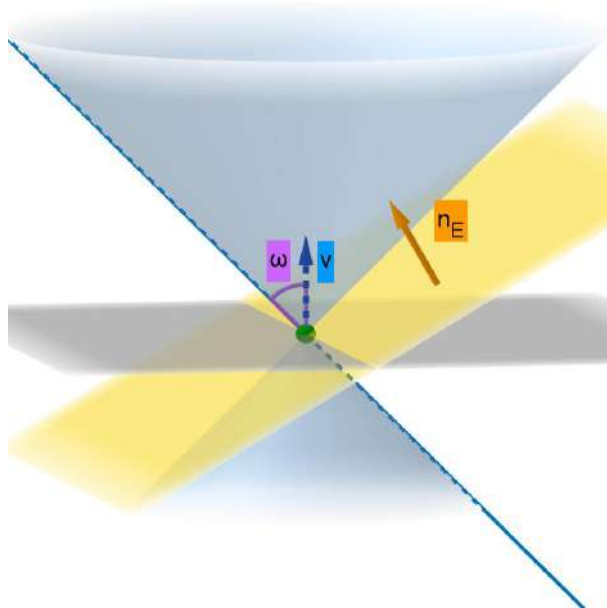
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一點 (如圖八)。



(圖八，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=0^\circ$ )

2、 $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$

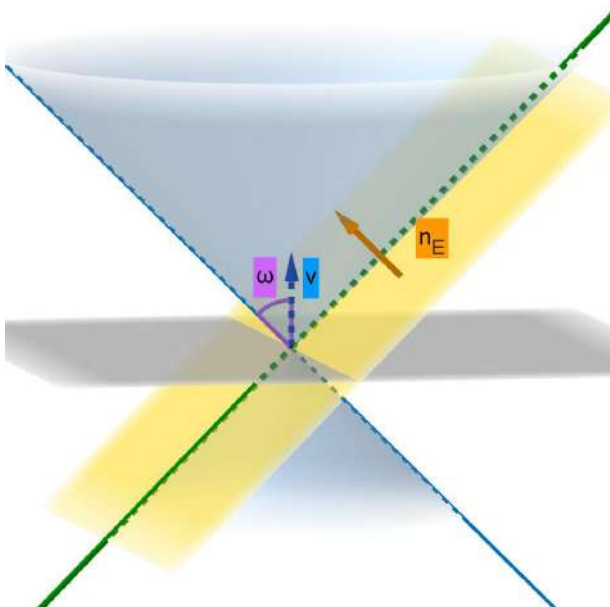
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一點 (如圖九)。



(圖九，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=30^\circ$ )

3、 $\theta=90^\circ - \omega$

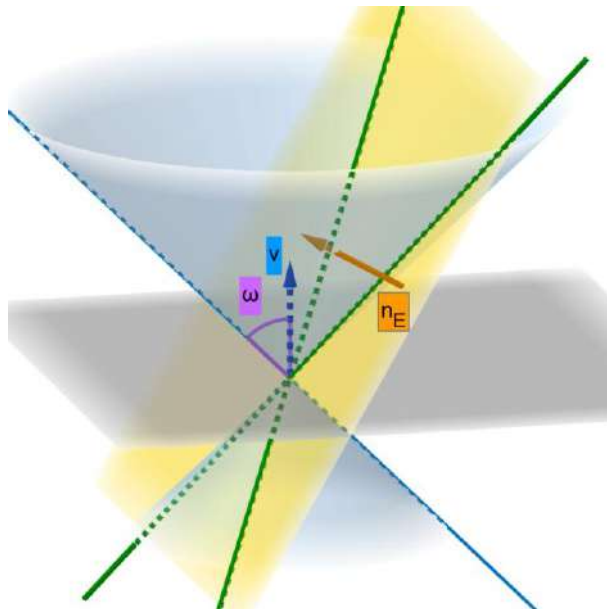
$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表一直線 (如圖十)。



(圖十，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=45^\circ$ )

4、 $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$

$\Rightarrow$  截痕  $\Gamma \cap E$  表兩相交直線 (如圖十一)。



(圖十一，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta=60^\circ$ )

## 二、空間中兩直圓柱面相交之交集探討

### (一) 中心軸相交且互垂的兩直圓柱面交集之性質

#### 1、兩直圓柱面半徑相同

則可考慮兩圓柱面聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_1: x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_2: y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \quad (\text{其中 } R \text{ 為兩組直圓柱面的半徑})$$

解聯立得  $x^2 - y^2 = 0$ ， $(x+y)(x-y) = 0$ ，即同時滿足  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  之空間中的點  $(x,y,z)$  皆落在

空間平面  $E_1: x + y + 0z = 0$  或  $E_2: x - y + 0z = 0$  上，根據截痕探討，利用向量夾角判斷截痕：

$\Gamma_1$  的中心軸方向向量  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ， $\Gamma_2$  的中心軸方向向量  $\vec{v}_2 = (1, 0, 0)$ ， $E_1$  的法向量  $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ ， $E_2$  的法向量  $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$ ，

看  $\Gamma_1$  和  $E_1$  的交集情況： $\cos\theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{n}_1\|} \right|}{\left| \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\theta = 45^\circ$ ，即  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕

探討工具，截痕  $\Gamma_1 \cap E_1$  表一橢圓，同理可證截痕  $\Gamma_2 \cap E_1$  亦為一橢圓；看  $\Gamma_1$  和  $E_2$  的交集情

況： $\cos\theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right|}{\left| \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\theta = 45^\circ$ ，即  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討，截痕  $\Gamma_1 \cap E_2$

表一橢圓，同理可證截痕  $\Gamma_2 \cap E_2$  亦為一橢圓，故兩直圓柱面  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$  交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓（如圖十二）。

#### 2、兩直圓柱面半徑不同

則可考慮兩圓柱面聯立方程組：

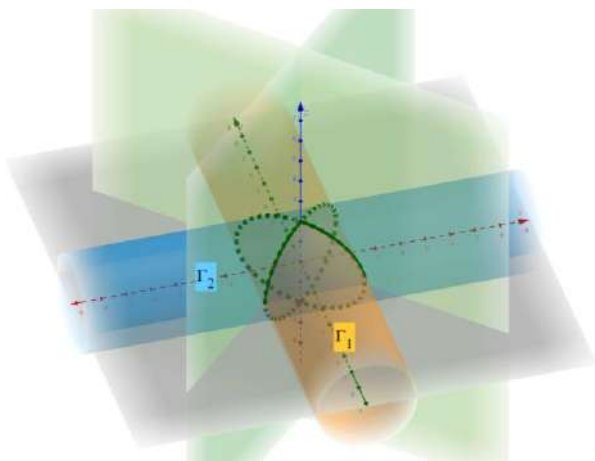


$$\begin{cases} \Gamma_{1R} : x^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2R} : y^2 + z^2 = R_2^2 \end{cases} \quad (\text{不失一般性, 設 } R_1 > R_2)$$

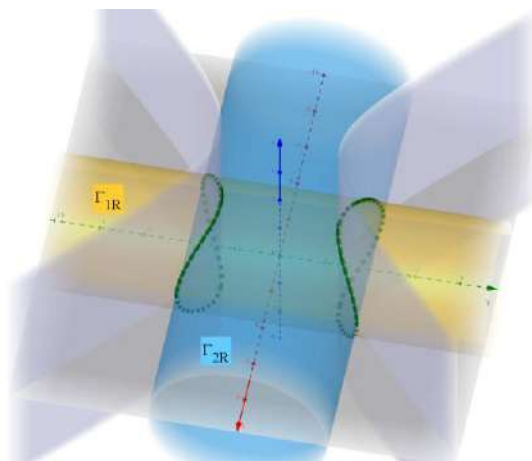
解聯立得  $x^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2$ ，即同時滿足  $\Gamma_{1R}$  和  $\Gamma_{2R}$  之空間中的點(x,y,z)皆落在空間平面

$x^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2$  上，又  $x^2 - y^2 = k$ ，為 xy 平面的雙曲線表達式，即兩直圓柱面  $\Gamma_{1R}$ 、 $\Gamma_{2R}$  交集

投影至 xy 平面為一雙曲線的一部份（如圖十三）。



（圖十二，其中  $R=2$ ）



（圖十三，其中  $R_1=3$ ， $R_2=4$ ）

## （二）中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的兩直圓柱面交集之性質

### 1、兩直圓柱面半徑相同

考慮兩直圓柱面，其一為  $\Gamma_2 : y^2 + z^2 = R^2$ ，另一則是將  $\Gamma_2$  以 z 軸為軸逆時針旋轉  $\theta_z$  角的圖形，定義符號為  $\Gamma_{2'}$ ，不失一般性，設  $\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，變換後的點(x',y',z')與(x,y,z)之關係中，顯然  $z=z'$ ，而(x,y)和(x',y')則由平面上旋轉線性變換：

$$\begin{cases} x' = \cos \theta_z x - \sin \theta_z y \\ y' = \sin \theta_z x + \cos \theta_z y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \theta_z x' + \sin \theta_z y' \\ y = -\sin \theta_z x' + \cos \theta_z y' \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \Gamma_{2'} : (-\sin \theta_z x + \cos \theta_z y)^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_2 : y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

解聯立，第一式減第二式得  $(\cos \theta_z y - \sin \theta_z x)^2 - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta_z y - \sin \theta_z x + y)(\cos \theta_z y - \sin \theta_z x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow [\sin \theta_z x - (\cos \theta_z + 1)y][\sin \theta_z x - (\cos \theta_z - 1)y] = 0$$

即同時滿足  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_2$  之空間中的點(x,y,z)皆落在空間平面  $E_3 : \sin \theta_z x - (\cos \theta_z + 1)y = 0$  或

$E_4 : \sin \theta_z x - (\cos \theta_z - 1)y = 0$  上，根據截痕探討工具，利用向量夾角判斷截痕： $\vec{v}_2 = (1, 0, 0)$ ， $\vec{v}_2 = (\cos \theta_z, \sin \theta_z, 0)$ ， $\vec{n}_3 = (\sin \theta_z, -\cos \theta_z - 1, 0)$ ， $\vec{n}_4 = (\sin \theta_z, 1 - \cos \theta_z, 0)$ ，

$$\text{看 } \Gamma_2 \text{ 和 } E_3 : \cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_3}{\|\vec{v}_2\| \|\vec{n}_3\|} \right|}{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_3}{\|\vec{v}_2\| \|\vec{n}_3\|} \right|} = \left| \frac{\sin \theta_z}{1 \cdot \sqrt{2 + 2 \cos \theta_z}} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_z}}{\sqrt{2(1 + \cos \theta_z)}} \right| = \left| \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_z}{2}} \right| = \sin \frac{\theta_z}{2} =$$

$\cos(90^\circ - \frac{\theta_z}{2})$ ， $\theta = 90^\circ - \frac{\theta_z}{2}$ ，因  $\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ， $\theta = 90^\circ - \frac{\theta_z}{2} \in (45^\circ, 90^\circ)$ ，即  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據

截痕探討工具，截痕  $\Gamma_2 \cap E_3$  表一橢圓，同理可證截痕  $\Gamma_2 \cap E_3$  亦為一橢圓；看  $\Gamma_2$  和  $E_4 : \cos \theta$

$$= \frac{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_4}{\|\vec{v}_2\| \|\vec{n}_4\|} \right|}{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_4}{\|\vec{v}_2\| \|\vec{n}_4\|} \right|} = \left| \frac{\sin \theta_z}{1 \cdot \sqrt{2 - 2 \cos \theta_z}} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_z}}{\sqrt{2(1 - \cos \theta_z)}} \right| = \left| \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_z}{2}} \right| = \cos \frac{\theta_z}{2}，\theta = \frac{\theta_z}{2}，\text{因}$$

$\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ， $\theta = \frac{\theta_z}{2} \in (0^\circ, 45^\circ)$ ，即  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討工具，截痕  $\Gamma_2 \cap E_4$  表一橢圓，同

理可證截痕  $\Gamma_2 \cap E_4$  亦為一橢圓，故兩直圓柱面  $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_2$  交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓（如圖十四）。

## 2、兩直圓柱面半徑不同

則可考慮兩圓柱面聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_{2R_1} : (-\sin \theta_z x + \cos \theta_z y)^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2R_2} : y^2 + z^2 = R_2^2 \end{cases} \quad (\text{不失一般性，設 } R_1 > R_2)$$

兩式相減得  $(-\sin \theta_z x + \cos \theta_z y)^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow (\sin^2 \theta_z)x^2 + (-\sin 2\theta_z)xy - (\sin^2 \theta_z)y^2 = R_1^2 - R_2^2$

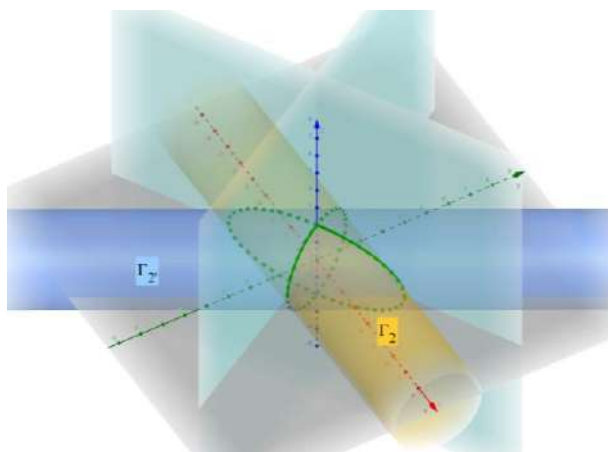
即形如  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  的二元二次方程式，根據文獻[4]所提出之〈二次曲線新解〉可知，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin^2 \theta_z & -\sin 2\theta_z & 0 \\ -\sin 2\theta_z & -2\sin^2 \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 2(R_2^2 - R_1^2) \end{vmatrix} = 2(R_2^2 - R_1^2)(-4\sin^4 \theta_z - \sin^2 2\theta_z)$$

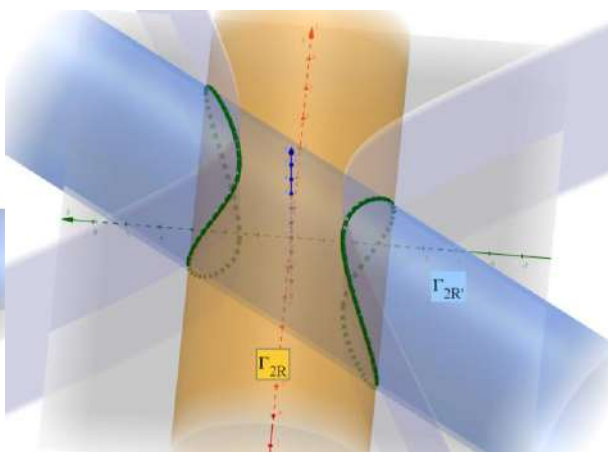
$= 2(R_1^2 - R_2^2)(4\sin^4 \theta_z + \sin^2 2\theta_z)$ ，所有括號內的值皆為正，即  $\Delta > 0$ ； $\delta = B^2 - 4AC$

$= (-\sin 2\theta_z)^2 - 4(\sin^2 \theta_z)(-\sin^2 \theta_z) = \sin^2 2\theta_z + 4\sin^4 \theta_z > 0$ ，即  $\delta > 0$ ，對照知為 xy 平面之雙

曲線，則兩直圓柱面  $\Gamma_{2R}$ 、 $\Gamma_{2R'}$  交集投影至 xy 平面為一雙曲線的一部份（如圖十五）。



（圖十四，其中  $R=2$ ， $\theta_z=60^\circ$ ）



（圖十五，其中  $R_1=3$ ， $R_2=2.5$ ， $\theta_z=60^\circ$ ）

### （三）中心軸歪斜且方向向量互垂的兩直圓柱面交集之性質

#### 1、兩直圓柱面半徑相同

則可考慮兩圓柱面聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_1: x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_{2H}: y^2 + (z-H)^2 = R^2 \end{cases} \quad (\text{其中 } H \text{ 為兩圓柱面中心軸距離})$$

解聯立得  $x^2 - y^2 + z^2 - (z-H)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2Hz - H^2 = 0$ ，則其交集會落在

$x^2 - y^2 + 2Hz - H^2 = 0$  上。

我們嘗試探討其交集投影至 xy 平面的方程式：先嘗試消除 z， $z = \frac{x^2 - y^2 - H^2}{-2H}$ ，再代

入  $\Gamma_1$  得  $\Gamma_1: x^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - H^2}{-2H}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow 4H^2 x^2 + (x^4 + y^4 + H^4 - 2x^2 y^2 - 2x^2 H^2 + 2y^2 H^2) = 4H^2 R^2$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2x^2 H^2 + 2y^2 H^2 - 2x^2 y^2 = 4H^2 R^2 - H^4$  即為其交集投影至 xy 平面的方程式（如圖十

六)，值得注意的是當  $H=2R$ ，則  $x^4 + y^4 + 2x^2(2R)^2 + 2y^2(2R)^2 - 2x^2y^2 = 4(2R)^2 R^2 - (2R)^4 \Leftrightarrow$

$$x^4 + y^4 + 8x^2R^2 + 8y^2R^2 - 2x^2y^2 = 16R^4 - 16R^4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + 8R^2(x^2 + y^2) = 0，即$$

$(x, y) = (0, 0)$ ， $z = \frac{-H^2}{-2H} = \frac{H}{2} = R$ ，交集為一個位於  $(0, 0, R)$  的點， $H > 2R$  時則無解，即無交集。

## 2、兩直圓柱面半徑不同

則可考慮兩圓柱面聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_{1R}: x^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2RH}: y^2 + (z - H)^2 = R_2^2 \end{cases} \quad (\text{不失一般性，設 } R_1 > R_2)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - (z - H)^2 = R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2Hz - H^2 = R_1^2 - R_2^2，則其交集會落在$$

$$x^2 - y^2 + 2Hz - H^2 = R_1^2 - R_2^2 \text{ 上。}$$

我們嘗試探討其交集投影至  $xy$  平面的方程式：先嘗試消除  $z$ ，

$$z = \frac{x^2 - y^2 - H^2 - R_1^2 + R_2^2}{-2H}，再代入 \Gamma_{1R} 得 \Gamma_{1R}: x^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - H^2 - R_1^2 + R_2^2}{-2H}\right)^2 = R_1^2 \Leftrightarrow$$

$$4H^2x^2 + [(x^4 + y^4 + H^4 + R_1^4 + R_2^4) + 2(-x^2y^2 - x^2H^2 - x^2R_1^2 + x^2R_2^2 + y^2H^2 + y^2R_1^2 - y^2R_2^2 + H^2R_1^2 - H^2R_2^2 - R_1^2R_2^2)] = 4H^2R_1^2$$

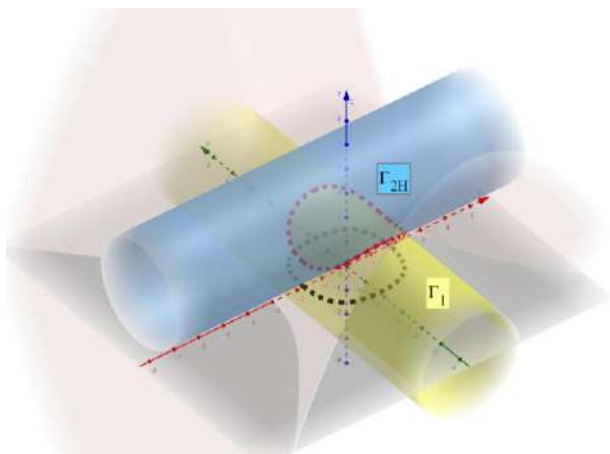
即為其交集投影至  $xy$  平面的方程式（如圖十七），值得注意的是當  $H=R_1+R_2$ ，則可整理成

$$x^2 + \left[\frac{x^2 - y^2 - (R_1 + R_2)^2 - R_1^2 + R_2^2}{-2(R_1 + R_2)}\right]^2 = R_1^2 \Leftrightarrow$$

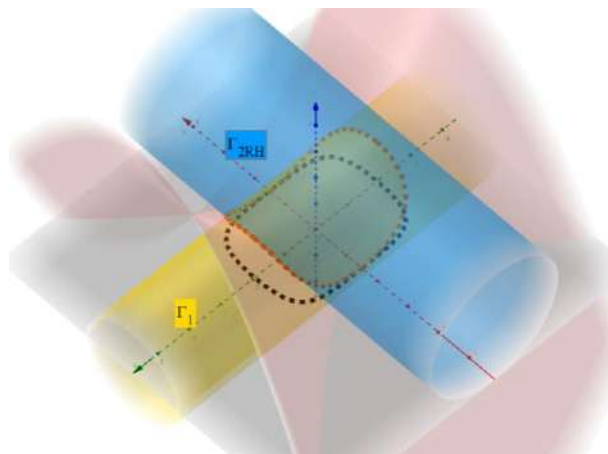
$$\begin{aligned} 4(R_1 + R_2)^2x^2 + [-x^2 + y^2 + 2R_1^2 + 2R_1R_2]^2 &= 4(R_1 + R_2)^2R_1^2 \Leftrightarrow \\ 4(R_1 + R_2)^2x^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 4x^2R_1^2 - 4x^2R_1R_2 + 4y^2R_1^2 + 4y^2R_1R_2 \\ &= 4(R_1 + R_2)^2R_1^2 - 4R_1^4 - 4R_1^2R_2^2 - 8R_1^2R_1R_2 = 0 \end{aligned}$$

$$，即 (x, y) = (0, 0)，z = \frac{-(R_1 + R_2)^2 - R_1^2 + R_2^2}{-2(R_1 + R_2)} = \frac{R_1^2 + R_1R_2}{(R_1 + R_2)} = R_1，交集為一個位於 (0, 0, R_1) 的$$

點， $H > R_1 + R_2$  時則無解，即無交集。



(圖十六，其中  $R=2$ ， $H=3$ )



(圖十七，其中  $R_1=1.5$ ， $R_2=2$ ， $H=2$ )

### 三、空間中兩直圓錐面相交之交集探討

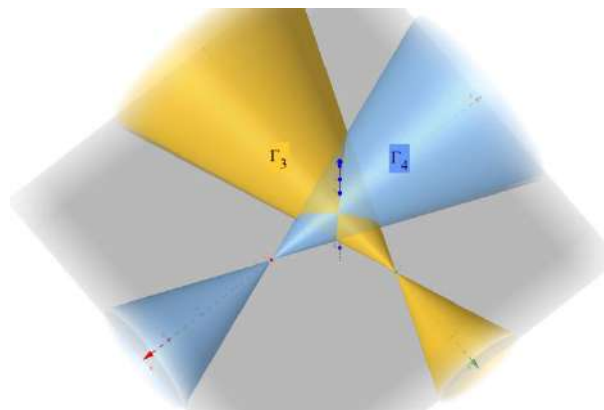
(一) 中心軸相交且互垂且  $h$  值 (頂點和兩中心軸交點的距離) 相同的兩全等直圓錐面交集之性質

考慮兩直圓錐面  $\Gamma_3$ 、 $\Gamma_4$ ，即

$$\begin{cases} \Gamma_3: x^2 + z^2 = [r(y-h)]^2 \\ \Gamma_4: y^2 + z^2 = [r(x-h)]^2 \end{cases} \quad (\text{其中直圓錐面})$$

中心軸與母線之夾角  $\omega$ ，且  $\tan(\omega) = r$ ，

$h$  為頂點和兩中心軸交點的距離) (如圖十八)



(圖十八)

解聯立得

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= r^2[(y-h)^2 - (x-h)^2] \\ \Leftrightarrow (x+y)(x-y) &= r^2(x+y-2h)(y-x) \Leftrightarrow (x+y)(x-y) + r^2(x+y-2h)(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)[x+y+r^2(x+y-2h)] &= 0 \Leftrightarrow (x-y)[(1+r^2)x + (1+r^2)y - 2r^2h] = 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)[x+y - \frac{2r^2h}{1+r^2}] &= 0 \end{aligned}$$

即同時滿足  $\Gamma_3$  和  $\Gamma_4$  之空間中的點  $(x,y,z)$  皆落在空間平面  $E_5: x-y=0$  或  $E_6: x+y - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0$

上，根據截痕探討工具，利用向量夾角判斷截痕： $\vec{v}_3 = (0,1,0)$ ， $\vec{v}_4 = (1,0,0)$ ， $\vec{n}_5 = (1,-1,0)$ ， $\vec{n}_6 = (1,1,0)$ 。

### 1、 $\Gamma_3$ 和 $E_5$ 相交之交集探討

$$\cos\theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{n}_5}{\|\vec{v}_3\| \|\vec{n}_5\|} \right|}{\left| \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = 45^\circ$$

接下來分析 $\omega$ 對交集的影響：

$$(1) \quad \omega < 45^\circ$$

則  $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點 $(h,0,0)$ 代入 $E_5$ 得  $h-0 > 0$ ，知 $E_5$ 不通過  $\Gamma_3$  的頂點，由截痕探討工具知  $\Gamma_3 \cap E_5$  為一橢圓（如圖十九），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_5$  亦為一橢圓。

$$(2) \quad \omega = 45^\circ$$

則  $\theta = 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點 $(h,0,0)$ 代入 $E_5$ 得  $h-0 > 0$ ，知 $E_5$ 不通過  $\Gamma_3$  的頂點，由截痕探討工具知  $\Gamma_3 \cap E_5$  為一拋物線（如圖二十），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_5$  亦為一拋物線。

$$(3) \quad \omega > 45^\circ$$

則  $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點 $(h,0,0)$ 代入 $E_5$ 得  $h-0 > 0$ ，知 $E_5$ 不通過  $\Gamma_3$  的頂點，由截痕探討工具知  $\Gamma_3 \cap E_5$  為雙曲線（如圖二十一），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_5$  亦為雙曲線。

### 2、 $\Gamma_3$ 和 $E_6$ 相交之交集探討

$$\cos\theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{n}_6}{\|\vec{v}_3\| \|\vec{n}_6\|} \right|}{\left| \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = 45^\circ$$

接下來分析 $\omega$ 對交集的影響：

( 1 )  $\omega < 45^\circ$

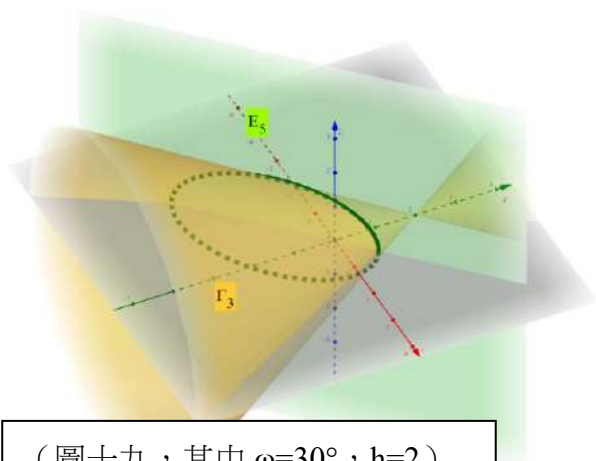
則  $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_6$  得左式  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} \neq 0$ （由反證法證明：若  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0$ ，則  $2r^2 = 1 + r^2$ ， $r = 1$ ， $\omega = 45^\circ$ ，不符合假設），知  $E_6$  不通過頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_3 \cap E_6$  為一橢圓（如圖二十二），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_6$  亦為一橢圓。

( 2 )  $\omega = 45^\circ$

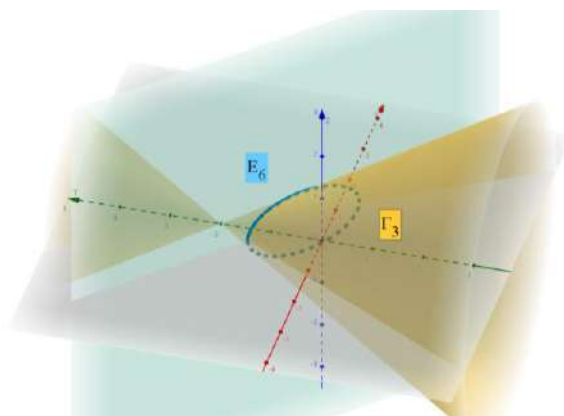
則  $\theta = 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_6$  得左式  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0$ （由上所述：若  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0$ ，則  $2r^2 = 1 + r^2$ ， $r = 1$ ， $\omega = 45^\circ$ ，符合假設），知  $E_6$  通過頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_3 \cap E_6$  為一直線（如圖二十三），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_6$  亦為一直線。

( 3 )  $\omega > 45^\circ$

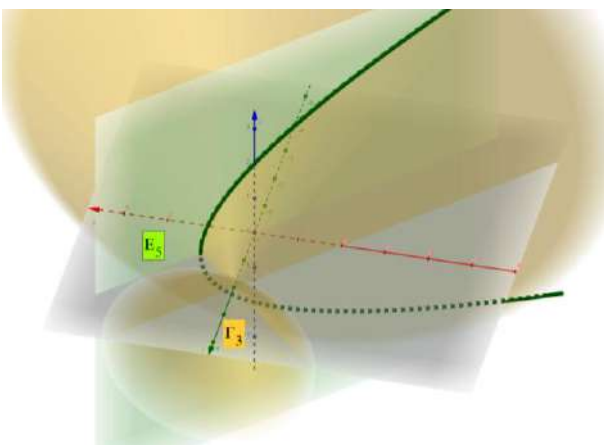
則  $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$ ，且以  $\Gamma_3$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_6$  得左式  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} \neq 0$ （由反證法證明：若  $h - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0$ ，則  $2r^2 = 1 + r^2$ ， $r = 1$ ， $\omega = 45^\circ$ ，不符合假設），知  $E_6$  不通過頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_3 \cap E_6$  為雙曲線（如圖二十四），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_6$  亦為雙曲線。



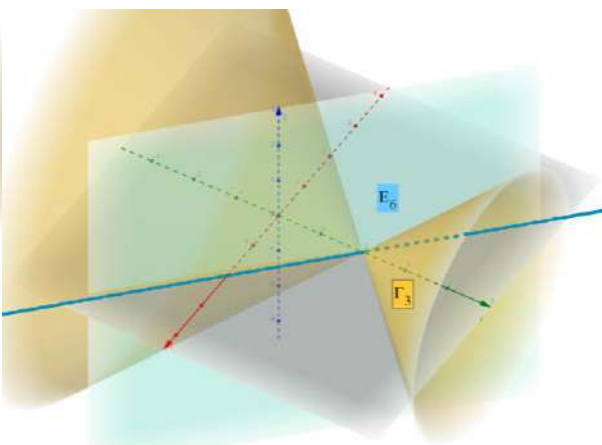
(圖十九，其中  $\omega=30^\circ$ ， $h=2$ )



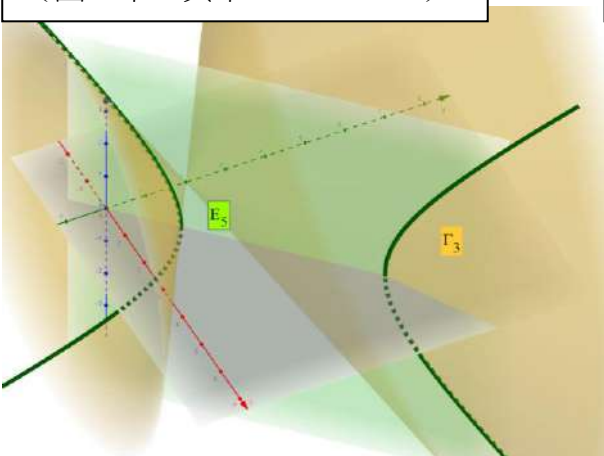
(圖二十二，其中  $\omega=30^\circ$ ， $h=2$ )



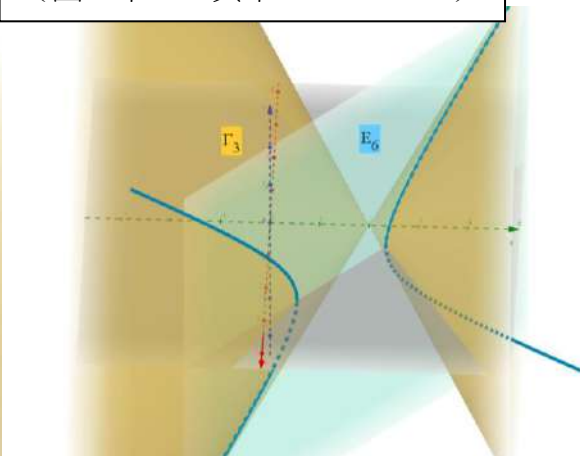
(圖二十，其中  $\omega=45^\circ$ ， $h=2$ )



(圖二十三，其中  $\omega=45^\circ$ ， $h=2$ )



(圖二十一，其中  $\omega=60^\circ$ ， $h=2$ )



(圖二十四，其中  $\omega=60^\circ$ ， $h=2$ )



(二) 中心軸相交且夾  $\theta_z$  且  $h$  值相同的兩全等直圓錐面交集之性質

考慮兩直圓錐面，其一為  $\Gamma_4$ 、另一則是將  $\Gamma_4$  以  $z$  軸為軸逆時針旋轉  $\theta_z$  角，定義符號為  $\Gamma_4'$ ，不失一般性，設  $\theta_z \in (0^\circ, 180^\circ]$ ，即

$$\begin{cases} \Gamma_4: (-\sin \theta_z x + \cos \theta_z y)^2 + z^2 = [r(\cos \theta_z x + \sin \theta_z y - h)]^2 \\ \Gamma_4: y^2 + z^2 = [r(x - h)]^2 \end{cases}$$

解聯立得

$$\begin{aligned} y^2 - (\cos \theta_z y - \sin \theta_z x)^2 &= r^2[(x-h)^2 - (\cos \theta_z x + \sin \theta_z y - h)^2] \\ \Leftrightarrow y^2 - (\sin^2 \theta_z x^2 + \cos^2 \theta_z y^2 - 2 \sin \theta_z \cos \theta_z xy) \\ &= r^2[(x^2 - 2hx + h^2) - (\cos^2 \theta_z x^2 + \sin^2 \theta_z y^2 + h^2 + 2 \sin \theta_z \cos \theta_z xy - 2h \cos \theta_z x - 2h \sin \theta_z y)] \\ \Leftrightarrow y^2 - \sin^2 \theta_z x^2 - \cos^2 \theta_z y^2 + 2 \sin \theta_z \cos \theta_z xy \\ &\quad - r^2 x^2 + 2r^2 hx + \cos^2 \theta_z x^2 r^2 + \sin^2 \theta_z y^2 r^2 - 2hr^2 \sin \theta_z y - 2hr^2 \cos \theta_z x = 0 \end{aligned}$$

同類項整理得

$$[-\sin^2 \theta_z - r^2 + \cos^2 \theta_z r^2]x^2 + (1 - \cos^2 \theta_z + \sin^2 \theta_z r^2)y^2 + (2 \sin \theta_z \cos \theta_z + 2 \sin \theta_z \cos \theta_z r^2)xy \\ + (2hr^2 - 2h \cos \theta_z r^2)x + (-2h \sin \theta_z)y = 0$$

利用 GeoGebra 作圖，我們觀察到交集的 xy 投影會出現在  $\Gamma_4$  的中心軸和  $\Gamma_4$  的中心軸的角平

分線，也就是  $y = \tan \frac{\theta_z}{2} x$ ， $\sin \frac{\theta_z}{2} x - \cos \frac{\theta_z}{2} y = 0$ ，我們猜測此方程式有因式

$\sin \frac{\theta_z}{2} x - \cos \frac{\theta_z}{2} y$ ，方便計算改寫為  $(-2 \sin \frac{\theta_z}{2})(\sin \frac{\theta_z}{2} x - \cos \frac{\theta_z}{2} y) = (\cos \theta_z - 1)x + \sin \theta_z y$ ，然後

作長除法如下：

$$\begin{array}{l} \frac{(1+r^2)(1+\cos\theta_z)x}{(\cos\theta_z-1)x+\sin\theta_zy} + (1+r^2)\sin\theta_zy - 2hr^2 \\ \frac{(-\sin^2\theta_z-r^2+\cos^2\theta_zr^2)x^2+(1-\cos^2\theta_z+\sin^2\theta_zr^2)y^2+(2\sin\theta_z\cos\theta_z+2\sin\theta_z\cos\theta_zr^2)xy+(2hr^2-2h\cos\theta_zr^2)x+(-2h\sin\theta_zr^2)y}{(-\sin^2\theta_z-r^2+\cos^2\theta_zr^2)x^2+(1+\cos\theta_z)(r^2+1)\sin\theta_zy} \\ \frac{- (1+\cos\theta_z)(r^2+1)\sin\theta_zxy + (1-\cos^2\theta_z+\sin^2\theta_zr^2)y^2 + (2\sin\theta_z\cos\theta_z+2\sin\theta_z\cos\theta_zr^2)xy + (2hr^2-2h\cos\theta_zr^2)x + (-2h\sin\theta_zr^2)y}{(1-\cos^2\theta_z+\sin^2\theta_zr^2)y^2 + (1+r^2)(\cos\theta_z-1)\sin\theta_zxy} \\ \frac{- (1+\cos\theta_z)(r^2+1)\sin\theta_zxy - (1+r^2)(\cos\theta_z-1)\sin\theta_zxy + (2\sin\theta_z\cos\theta_z+2\sin\theta_z\cos\theta_zr^2)xy + (2hr^2-2h\cos\theta_zr^2)x + (-2h\sin\theta_zr^2)y}{(2hr^2-2h\cos\theta_zr^2)x + (-2h\sin\theta_zr^2)y} \\ 0 \end{array}$$

可得 $[(\cos\theta_z-1)x+\sin\theta_zy][(1+\cos\theta_z)x+\sin\theta_zy-\frac{2hr^2}{1+r^2}]=0$ ，即同時滿足 $\Gamma_4$ 和 $\Gamma_4'$ 之空間中的

點(x,y,z)皆落在空間平面  $E_7 : (\cos \theta_z - 1)x + \sin \theta_z y = 0$  或  $E_8 : (1 + \cos \theta_z)x + \sin \theta_z y - \frac{2r^2 h}{1+r^2} = 0$  上，

根據截痕探討工具，利用向量夾角判斷截痕： $\vec{v}_4 = (\cos \theta_z, \sin \theta_z, 0)$ ， $\vec{v}_4 = (1, 0, 0)$ ，

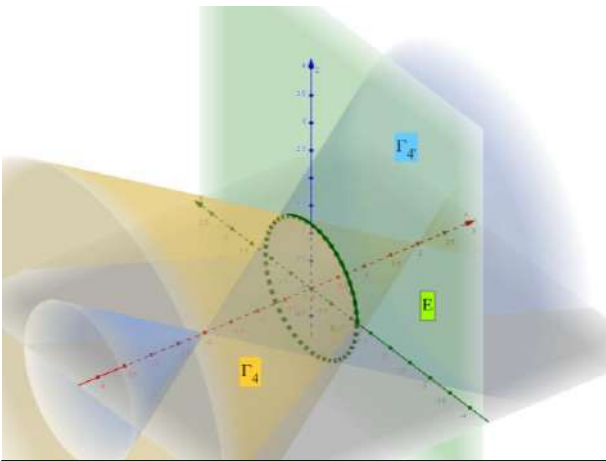
$$\vec{n}_7 = (\cos \theta_z - 1, \sin \theta_z, 0)，\vec{n}_8 = (1 + \cos \theta_z, \sin \theta_z, 0)$$

先討論  $\theta_z = 180^\circ$  時較簡單，分解式子後得到  $(-2x + 0y)(0x + 0y - \frac{2r^2 h}{1+r^2}) = 0$ ，等價

$x = 0$ ，所以所有交集都會落在只有一個平面  $E$  上，此平面  $E$  為  $x = 0$ ，討論截痕  $\Gamma_4 \cap E$ ，則

$$\vec{v}_4 = (1, 0, 0)，\vec{n}_E = (1, 0, 0)，則 \vec{v}_4 \parallel \vec{n}_E，且以 \Gamma_4 的頂點(h, 0, 0)代入 E 得 h > 0，知 E 不通過 \Gamma_4$$

的頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_4 \cap E$  為一圓，同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E$  亦為一圓，所以  $\theta_z = 180^\circ$  時兩直圓錐面交集為一圓（如圖二十五）。



（圖二十五，其中  $\omega = 30^\circ$ ， $\theta_z = 180^\circ$ ， $h = 2$ ）

若  $\theta_z \neq 180^\circ$  時：

1、 $\Gamma_4$  和  $E_7$  相交之交集探討

$$\cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_4 \cdot \vec{n}_7}{\|\vec{v}_4\| \|\vec{n}_7\|} \right|}{\left| \frac{\cos \theta_z - 1}{1 \cdot \sqrt{2 - 2 \cos \theta_z}} \right|} = \left| -\sqrt{\frac{1 - \cos \theta_z}{2}} \right| = \sin \frac{\theta_z}{2}，\theta \text{ 和 } \frac{\theta_z}{2} \text{ 互餘，則 } \theta =$$

$$90^\circ - \frac{\theta_z}{2}。$$

接下來我們分析  $\omega$  和  $\theta_z$  對交集的影響：

$$(1) \omega < \frac{\theta_z}{2}$$

則  $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_4$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_7$  得  $(\cos\theta_z - 1)h < 0$ ，知  $E_7$  不通過  $\Gamma_4$  的頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  為一橢圓（如圖二十六），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  亦為一橢圓。

$$(2) \omega = \frac{\theta_z}{2}$$

則  $\theta = 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_4$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_7$  得  $(\cos\theta_z - 1)h < 0$ ，知  $E_7$  不通過  $\Gamma_4$  的頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  為一拋物線（如圖二十七），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  亦為一拋物線。

$$(3) \omega > \frac{\theta_z}{2}$$

則  $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$ ，且以  $\Gamma_4$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_7$  得  $(\cos\theta_z - 1)h < 0$ ，知  $E_7$  不通過  $\Gamma_4$  的頂點，由截痕探討工具知截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  為雙曲線（如圖二十八），同理可證截痕  $\Gamma_4 \cap E_7$  亦為雙曲線。

## 2、 $\Gamma_4$ 和 $E_8$ 相交之交集探討

$$\cos\theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_4 \cdot \vec{n}_8}{\|\vec{v}_4\| \|\vec{n}_8\|} \right|}{\left| \frac{1 + \cos\theta_z}{1 \cdot \sqrt{2 + 2\cos\theta_z}} \right|} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta_z}{2}} = \cos\frac{\theta_z}{2} \quad (\text{註：因 } \theta_z(0^\circ, 180^\circ), \cos\frac{\theta_z}{2} \text{ 恆}$$

$$\text{正}), \theta = \frac{\theta_z}{2}。$$

接下來我們分析  $\omega$  和  $\theta_z$  對交集的影響：

$$(1) \frac{\theta_z}{2} + \omega < 90^\circ$$

則  $0^\circ < \theta < 90^\circ - \omega$ ，且以  $\Gamma_4$  的頂點  $(h, 0, 0)$  代入  $E_8$  得  $(1 + \cos\theta_z)h - \frac{2r^2h}{1+r^2} \neq 0$ （由反證法證明：

$$\text{若 } (1 + \cos\theta_z)h - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0, \text{ 則 } 2r^2 = (1+r^2)(1 + \cos\theta_z) = 1+r^2 + \cos\theta_z + r^2\cos\theta_z, \quad r^2(1 - \cos\theta_z)$$

$$= 1 + \cos\theta_z, \quad r^2 = \frac{1 + \cos\theta_z}{1 - \cos\theta_z}, \quad r = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta_z}{1 - \cos\theta_z}} = \cot\frac{\theta_z}{2}, \quad \text{又 } r = \tan(\omega) = \cot\frac{\theta_z}{2}, \text{ 則 } \frac{\theta_z}{2} + \omega$$

$=90^\circ$ ，不符合假設），知 $E_8$ 不通過 $\Gamma_4$ 的頂點，由截痕探討工具知截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 為一橢圓（如圖二十九），同理可證截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 亦為一橢圓。

$$(2) \quad \frac{\theta_z}{2} + \omega = 90^\circ$$

則 $\theta = 90^\circ - \omega$ ，且以 $\Gamma_4$ 的頂點 $(h, 0, 0)$ 代入 $E_8$ 得 $(1 + \cos \theta_z)h - \frac{2r^2 h}{1 + r^2} = 0$ （由上所述：若

$$(1 + \cos \theta_z)h - \frac{2r^2 h}{1 + r^2} = 0, \text{ 則 } 2r^2 = (1 + r^2)(1 + \cos \theta_z) = 1 + r^2 + \cos \theta_z + r^2 \cos \theta_z, \quad r^2(1 - \cos \theta_z) =$$

$$1 + \cos \theta_z, \quad r^2 = \frac{1 + \cos \theta_z}{1 - \cos \theta_z}, \quad r = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_z}{1 - \cos \theta_z}} = \cot \frac{\theta_z}{2}, \quad \text{又 } r = \tan(\omega) = \cot \frac{\theta_z}{2}, \text{ 則 } \frac{\theta_z}{2} + \omega =$$

$90^\circ$ ，符合假設），知 $E_8$ 通過 $\Gamma_4$ 的頂點，由截痕探討工具知截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 為一直線（如圖三十），同理可證截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 亦為一直線。

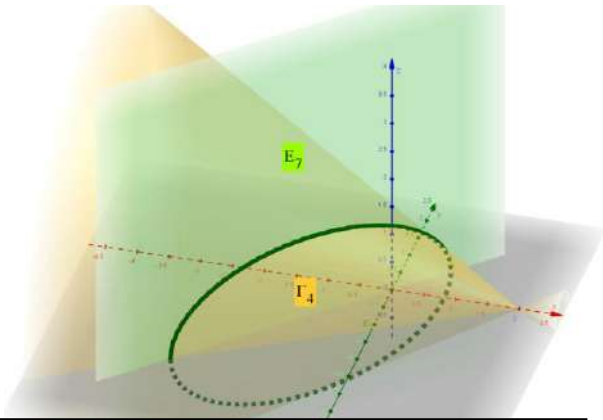
$$(3) \quad \frac{\theta_z}{2} + \omega > 90^\circ$$

則 $90^\circ - \omega < \theta \leq 90^\circ$ ，且以 $\Gamma_4$ 的頂點 $(h, 0, 0)$ 代入 $E_8$ 得 $(1 + \cos \theta_z)h - \frac{2r^2 h}{1 + r^2} \neq 0$ （由反證法證明：

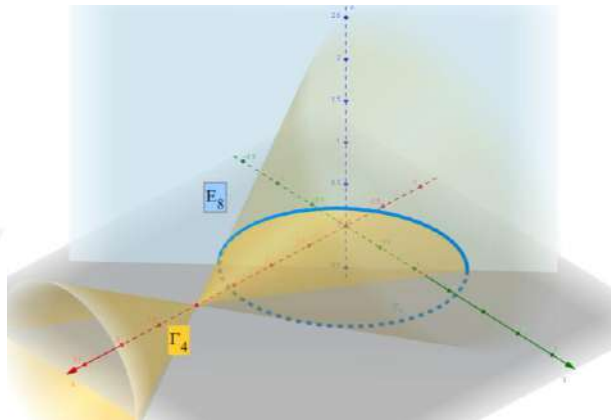
$$\text{若 } (1 + \cos \theta_z)h - \frac{2r^2 h}{1 + r^2} = 0, \text{ 則 } 2r^2 = (1 + r^2)(1 + \cos \theta_z) = 1 + r^2 + \cos \theta_z + r^2 \cos \theta_z, \quad r^2(1 - \cos \theta_z) =$$

$$1 + \cos \theta_z, \quad r^2 = \frac{1 + \cos \theta_z}{1 - \cos \theta_z}, \quad r = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_z}{1 - \cos \theta_z}} = \cot \frac{\theta_z}{2}, \quad \text{又 } r = \tan(\omega) = \cot \frac{\theta_z}{2}, \text{ 則 } \frac{\theta_z}{2} + \omega =$$

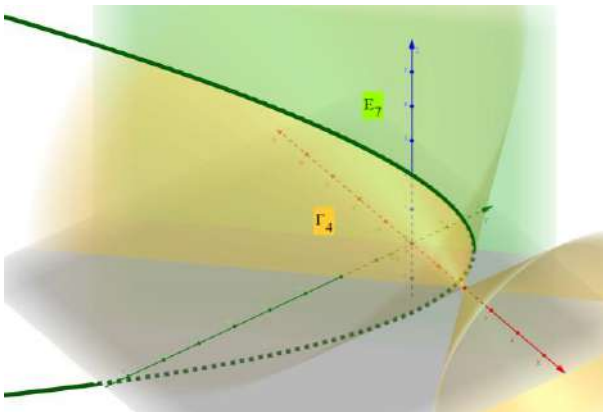
$90^\circ$ ，不符合假設），知 $E_8$ 不通過 $\Gamma_4$ 的頂點，由截痕探討工具知截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 為雙曲線（如圖三十一），同理可證截痕 $\Gamma_4 \cap E_8$ 亦為雙曲線。



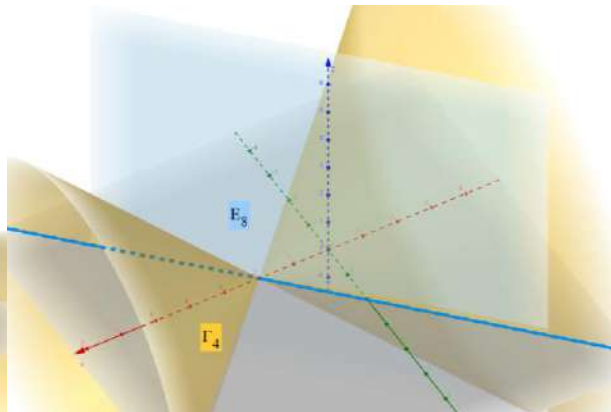
(圖二十六，其中  $\omega=30^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )



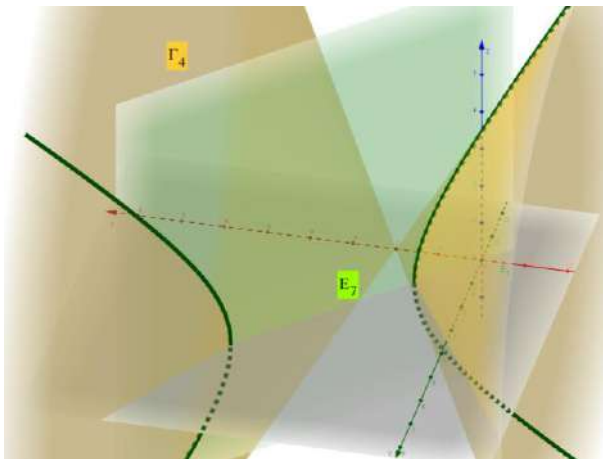
(圖二十九，其中  $\omega=30^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )



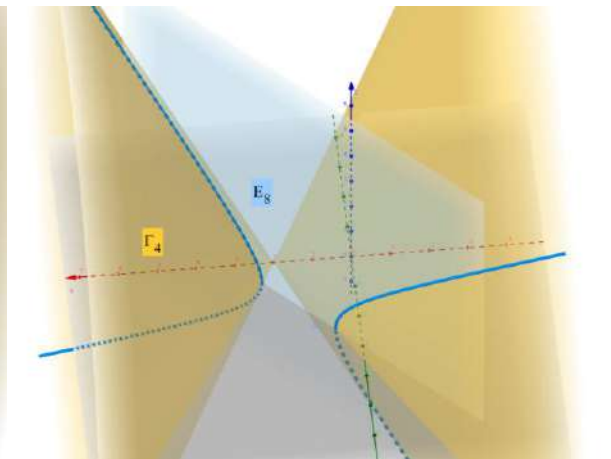
(圖二十七，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )



(圖三十，其中  $\omega=45^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )



(圖二十八，其中  $\omega=60^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )



(圖三十一，其中  $\omega=60^\circ$ ， $\theta_z=90^\circ$ ， $h=2$ )

### 三、空間中一直圓柱面和一直橢柱面相交之交集探討

根據文獻 [5] 所提出之〈正圓錐、正橢錐、斜圓錐和球極投影的保圓性質〉

我們推測斜圓柱可視為直橢柱的一種，因而展開對直圓柱與直橢柱交集性質之研究。

#### (一) 中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質

我們此篇只探討直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時的情形。

則可考慮此聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_1: x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_e: \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \end{cases} \quad (\text{其中 } R > 0, a > 0, a \neq R)$$

解聯立，上式同除以  $R^2$ ，上減下得  $\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow (\frac{x}{R} + \frac{y}{a})(\frac{x}{R} - \frac{y}{a}) = 0$

所以滿足  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_e$  之空間中的點  $(x, y, z)$  皆落在空間平面  $E_9: \frac{x}{R} + \frac{y}{a} = 0 \Leftrightarrow ax + Ry = 0$  或

$E_{10}: \frac{x}{R} - \frac{y}{a} = 0 \Leftrightarrow ax - Ry = 0$  上，根據截痕探討工具，利用向量夾角判斷截痕： $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ，

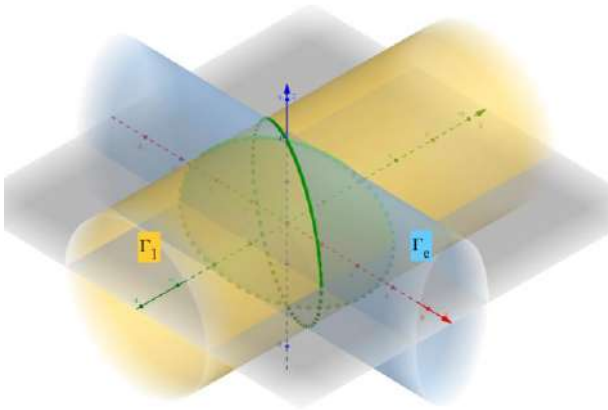
$\vec{v}_e = (1, 0, 0)$ ， $\vec{n}_9 = (a, R, 0)$ ， $\vec{n}_{10} = (a, -R, 0)$ ，看  $\Gamma_1$  和  $E_9$ ：

$$\cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_9}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{n}_9\|} \right|}{\left| \frac{R}{(1)(\sqrt{(a)^2 + (R)^2})} \right|} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad , \text{可知 } 0 < \cos \theta < 1, \theta \in (0^\circ, 90^\circ), \text{ 根據截痕}$$

探討工具，截痕  $\Gamma_1 \cap E_9$  表一橢圓；看  $\Gamma_1$  和  $E_{10}$ ：

$$\cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_{10}}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{n}_{10}\|} \right|}{\left| \frac{-R}{(1)(\sqrt{(a)^2 + (-R)^2})} \right|} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad , \text{可知 } 0 < \cos \theta < 1, \theta \in (0^\circ, 90^\circ), \text{ 根據截痕}$$

探討工具，截痕  $\Gamma_1 \cap E_{10}$  表一橢圓，故中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面在直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓（如圖三十二）。



(圖三十二，其中  $R=4$ ， $a=2$ )

## (二) 中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質

我們此篇只探討直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時的情形。

則可考慮此聯立方程組：

$$\begin{cases} \Gamma_e: \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \\ \Gamma_2: (\cos\theta_z y - \sin\theta_z x)^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \quad (\text{其中 } R>0, a>0, a \neq R, \theta_z \in [0^\circ, 90^\circ))$$

解聯立，下式同除以  $R^2$ ，上減下得

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{(\cos\theta_z y - \sin\theta_z x)^2}{R^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{a} + \frac{\cos\theta_z y - \sin\theta_z x}{R}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{\cos\theta_z y - \sin\theta_z x}{R}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{\cos\theta_z}{R}\right)y - \frac{\sin\theta_z}{R}x\right] \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{\cos\theta_z}{R}\right)y + \frac{\sin\theta_z}{R}x\right] &= 0 \end{aligned}$$

所以滿足  $\Gamma_e$  和  $\Gamma_2$  之空間中的點  $(x, y, z)$  皆落在空間平面  $E_{11}: \left(\frac{1}{a} + \frac{\cos\theta_z}{R}\right)y - \frac{\sin\theta_z}{R}x = 0$  或

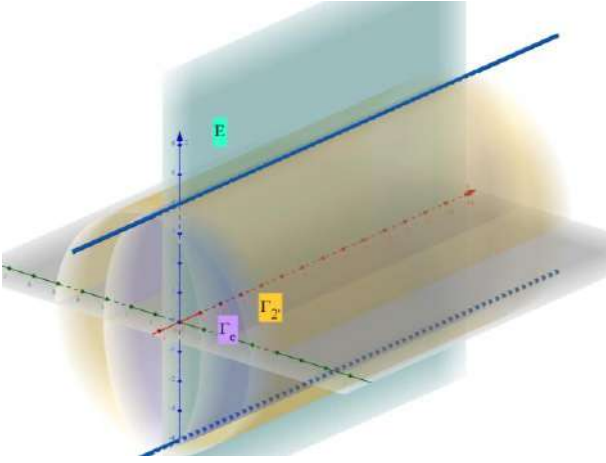
$E_{12}: \left(\frac{1}{a} - \frac{\cos\theta_z}{R}\right)y + \frac{\sin\theta_z}{R}x = 0$  上。

先討論  $\theta_z=0^\circ$  時較簡單，分解式子得到  $\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{R}\right)y\right] \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)y\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}\right)y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ，

所以所有交集都會落在只有一個平面  $E$  上，此平面  $E$  為  $y = 0$ ，討論截痕  $\Gamma_2 \cap E$ ，

$\vec{v_2} = (\cos\theta_z, \sin\theta_z, 0) = (1, 0, 0)$ ， $\vec{n} = (0, 1, 0)$ ， $\vec{v_2} \cdot \vec{n} = 0$ ， $\vec{v_2} \perp \vec{n}$ ，根據截痕探討工具，截

痕  $\Gamma_2 \cap E$  表兩平行或重合直線（如圖三十三）。



(圖三十三，其中  $R=4$ ， $a=2$ ， $\theta_z=0^\circ$ )

若  $\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討，利用向量夾角判斷截痕： $\vec{v}_e = (1, 0, 0)$ ，

$\vec{v}_{2'} = (\cos \theta_z, \sin \theta_z, 0)$ ， $\vec{n}_{11} = (-\frac{\sin \theta_z}{R}, \frac{1}{a} + \frac{\cos \theta_z}{R}, 0)$ ， $\vec{n}_{12} = (\frac{\sin \theta_z}{R}, \frac{1}{a} - \frac{\cos \theta_z}{R}, 0)$ ，看  $\Gamma_2$  和

$E_{11}$ ：

$$\cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_{2'} \cdot \vec{n}_{11}}{\|\vec{v}_{2'}\| \|\vec{n}_{11}\|} \right|}{\left| \frac{\vec{v}_{2'} \cdot \vec{n}_{11}}{\|\vec{v}_{2'}\| \|\vec{n}_{11}\|} \right|} = \frac{\left| \frac{-\frac{\sin \theta_z \cos \theta_z}{R} + \frac{\sin \theta_z}{a} + \frac{\sin \theta_z \cos \theta_z}{R}}{(1) \left( \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_z}{R^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_z}{R^2} + \frac{2 \cos \theta_z}{aR}} \right)} \right|}{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{\sin^2 \theta_z}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_z}{a^2} \right) + \frac{2 \cos \theta_z}{aR}}} \right|} = \frac{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\left( \frac{\sin \theta_z}{a} \right)^2 + \left( \frac{\cos \theta_z}{a} + \frac{1}{R} \right)^2}} \right|}{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\left( \frac{\sin \theta_z}{a} \right)^2 + \left( \frac{\cos \theta_z}{a} + \frac{1}{R} \right)^2}} \right|}$$

，可知  $0 < \cos \theta < 1$ ， $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討工具，截痕  $\Gamma_2 \cap E_{11}$  表一橢圓；看  $\Gamma_2$  和

$E_{12}$ ：

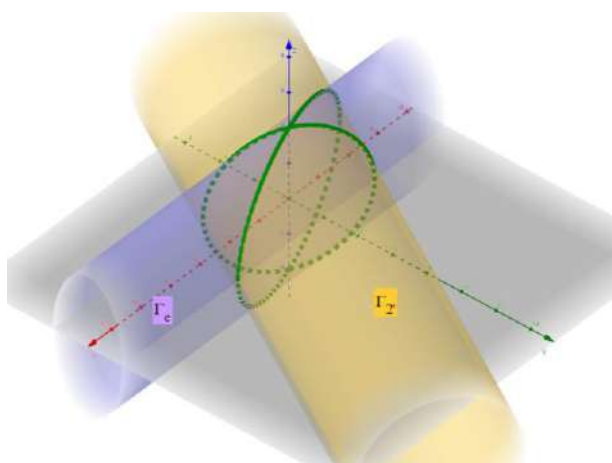
$$\cos \theta = \frac{\left| \frac{\vec{v}_{2'} \cdot \vec{n}_{12}}{\|\vec{v}_{2'}\| \|\vec{n}_{12}\|} \right|}{\left| \frac{\vec{v}_{2'} \cdot \vec{n}_{12}}{\|\vec{v}_{2'}\| \|\vec{n}_{12}\|} \right|} = \frac{\left| \frac{-\frac{\sin \theta_z \cos \theta_z}{R} + \frac{\sin \theta_z}{a} - \frac{\sin \theta_z \cos \theta_z}{R}}{(1) \left( \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_z}{R^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_z}{R^2} - \frac{2 \cos \theta_z}{aR}} \right)} \right|}{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{\sin^2 \theta_z}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_z}{a^2} \right) - \frac{2 \cos \theta_z}{aR}}} \right|} = \frac{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\left( \frac{\sin \theta_z}{a} \right)^2 + \left( \frac{\cos \theta_z}{a} - \frac{1}{R} \right)^2}} \right|}{\left| \frac{\frac{\sin \theta_z}{a}}{\sqrt{\left( \frac{\sin \theta_z}{a} \right)^2 + \left( \frac{\cos \theta_z}{a} - \frac{1}{R} \right)^2}} \right|}$$

，可知  $0 < \cos \theta < 1$ ， $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討工具，截痕  $\Gamma_2 \cap E_{12}$  表一橢圓，故中心軸相

交且夾  $\theta_z$  的一直圓柱面和一直橢柱面，在直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時

交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓（如圖三十四）。





(圖三十四，其中  $R=4$ ， $a=2$ ， $\theta_z=60^\circ$ )

## 肆、結論

- 一、中心軸相交且互垂、半徑相同的兩直圓柱面交集為兩橢圓。
- 二、中心軸相交且互垂、半徑不同的兩直圓柱面交集投影到  $xy$  平面為雙曲線的一部份。
- 三、中心軸相交且夾  $\theta_z$ 、半徑相同的兩直圓柱面交集為兩橢圓。
- 四、中心軸相交且夾  $\theta_z$ 、半徑不同的兩直圓柱面交集投影到  $xy$  平面為雙曲線的一部份。
- 五、中心軸歪斜且方向向量互垂、半徑相同的兩直圓柱面交集：

$0 < H < 2R$  時，交集投影到  $xy$  平面方程式為

$$x^4 + y^4 + 2x^2H^2 + 2y^2H^2 - 2x^2y^2 = 4H^2R^2 - H^4 ;$$

$H=2R$  時，交集為一個位於  $(0,0,R)$  的點； $H>2R$  時則無交集。

- 六、中心軸歪斜且方向向量互垂、半徑不同的兩直圓柱面交集：

$0 < H < R_1 + R_2$  時，交集投影到  $xy$  平面方程式為

$$4H^2x^2 + [(x^4 + y^4 + H^4 + R_1^4 + R_2^4) + 2(-x^2y^2 - x^2H^2 - x^2R_1^2 + x^2R_2^2 + y^2H^2 + y^2R_1^2 - y^2R_2^2 + H^2R_1^2 - H^2R_2^2 - R_1^2R_2^2)] = 4H^2R_1^2 ;$$

$H = R_1 + R_2$  時，交集為一個位於  $(0, 0, R_1)$  的點； $H > R_1 + R_2$  時則無交集。

七、中心軸相交且互垂且  $h$  值相同的兩全等直圓錐面交集由  $\omega$  決定：

(一) 若  $\omega < 45^\circ$ ，則交集為兩橢圓。

(二) 若  $\omega = 45^\circ$ ，則交集為一拋物線和一直線。

(三) 若  $\omega > 45^\circ$ ，則交集為兩雙曲線。

八、中心軸相交且互垂且  $h$  值相同的兩全等直圓錐面交集由  $\omega$  和  $\theta_z$  共同決定：

$\frac{\theta_z}{2} + \omega$	$\omega < \frac{\theta_z}{2}$	$\omega = \frac{\theta_z}{2}$	$\omega > \frac{\theta_z}{2}$
$\frac{\theta_z}{2} + \omega < 90^\circ$	兩橢圓	一拋物線、 一橢圓	一雙曲線、 一橢圓
$\frac{\theta_z}{2} + \omega = 90^\circ$	一橢圓、 一直線	一拋物線、 一直線	一雙曲線、 一直線
$\frac{\theta_z}{2} + \omega > 90^\circ$	一橢圓、 一雙曲線	一拋物線、 一雙曲線	兩雙曲線
$\theta_z = 180^\circ$	一圓		

九、中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面，探討在直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時的情形交集為兩橢圓。

十、中心軸相交且夾  $\theta_z$  的一直圓柱面和一直橢柱面，探討在直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時的情形由  $\theta_z$  決定：若  $\theta_z = 0^\circ$ ，交集為兩平行或重合直線；若  $\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，交集為兩橢圓。

## 伍、未來展望

透過這次的研究，我們發現還有很多可以深入探索的地方，以下是幾個可以發展方向，期待未來能夠拓展研究的深度與廣度，並帶來更多新的發現與應用。

- 一、分析中心軸相交且互垂但  $h$  值不同之全等直圓錐面交集。
- 二、研究中心軸相交且互垂之不全等直圓錐面交集特性。
- 三、探討中心軸不相交之直圓錐面交集關係。
- 四、分析柱面與錐面相交所形成的交集特徵。
- 五、探討橢柱面（錐面）與橢柱面（錐面）交集的幾何性質及應用。

## 陸、文獻參考

- [1] Dandelin spheres. (n.d.). In *Wikipedia*. Retrieved June 14, 2024, from [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dandelin\\_spheres](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres)
- [2] Kós, R. (n.d.). Conics and Dandelin spheres. KöMaL. Retrieved June 14, 2024, from <https://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.e.shtml>
- [3] 吳隆盛（1982）。二元二次方程式圖形判別方法。全國中小學科展作品，22，283-296。  
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/22/pdf/22h/283.pdf>
- [4] 吳建生（1996）。二次曲線新解。數學傳播，20(4)，70-75。  
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d204/20408.pdf>
- [5] 張海潮、黃寶興（2022）。正圓錐、正橢錐、斜圓錐和球極投影的保圓性質。數學傳播，46(4)，19-28。  
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d464/46402.pdf>

※本文中所有圖表皆由作者自行繪製。

## 【評語】 050405

本作品討論兩個直圓柱面、兩個直圓錐面、一個直圓柱面和一個直圓錐面在特定條件下相交時，交點集合的幾何特性，有許多部分其實都是以往的標準圓錐截痕的討論。創意部分較為少了一些，但是整體而言是認真的作品。

作品海報



# 空間中兩圓柱面或兩圓錐面之交集研究



## 摘要

本研究探討三類幾何結構的交集特性：第一，兩個直圓柱面在特定條件下相交時，交點集合的幾何特性；第二，兩個直圓錐面相交時，交點集合的幾何特性；第三，一個直圓柱面與一個直橢柱面相交時，交點集合的幾何特性。我們透過數學建模，理解圓錐曲線在不同條件下所形成的圖形，並進一步探索其數學特性。研究過程中，我們考慮了兩個直圓柱面的相對位置、中心軸夾角的變化與比例關係，兩個直圓錐面的相對位置與中心軸夾角的變化，以及一個直圓柱面與一個直橢柱面的相對位置與比例關係，並透過數學推導與動態幾何模擬來分析這些變數對交點集合的影響。

## 研究動機

在一次燈光秀活動中，我們注意到舞臺周圍的聚光燈光束形成直圓錐結構，隨著光束交疊，產生引人注目的視覺效果。這激發我們對坐標空間中交集點集合的幾何特性產生興趣，進而開始深入研究光束交匯處所形成的圖形及其特性。我們希望透過數學模型分析這些交點的分佈與形狀，以進一步理解其中的規律。

## 研究目的

### （一）空間中兩直圓柱面相交之交集探討

- 1、中心軸相交且互垂的兩直圓柱面交集之性質。半徑相同／半徑不同
- 2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的兩直圓柱面交集之性質。半徑相同／半徑不同
- 3、中心軸歪斜且兩中心軸向量垂直的兩直圓柱面交集之性質。半徑相同／半徑不同

### （二）空間中兩直圓錐面相交之交集探討

- 1、中心軸相交且互垂且h值（圓錐之頂點和兩中心軸交點的偏移量）相同的兩全等直圓錐面交集之性質。
- 2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 且h值相同的兩全等直圓錐面交集之性質。

### （三）空間中一直圓柱面和一直橢柱面相交之交集探討

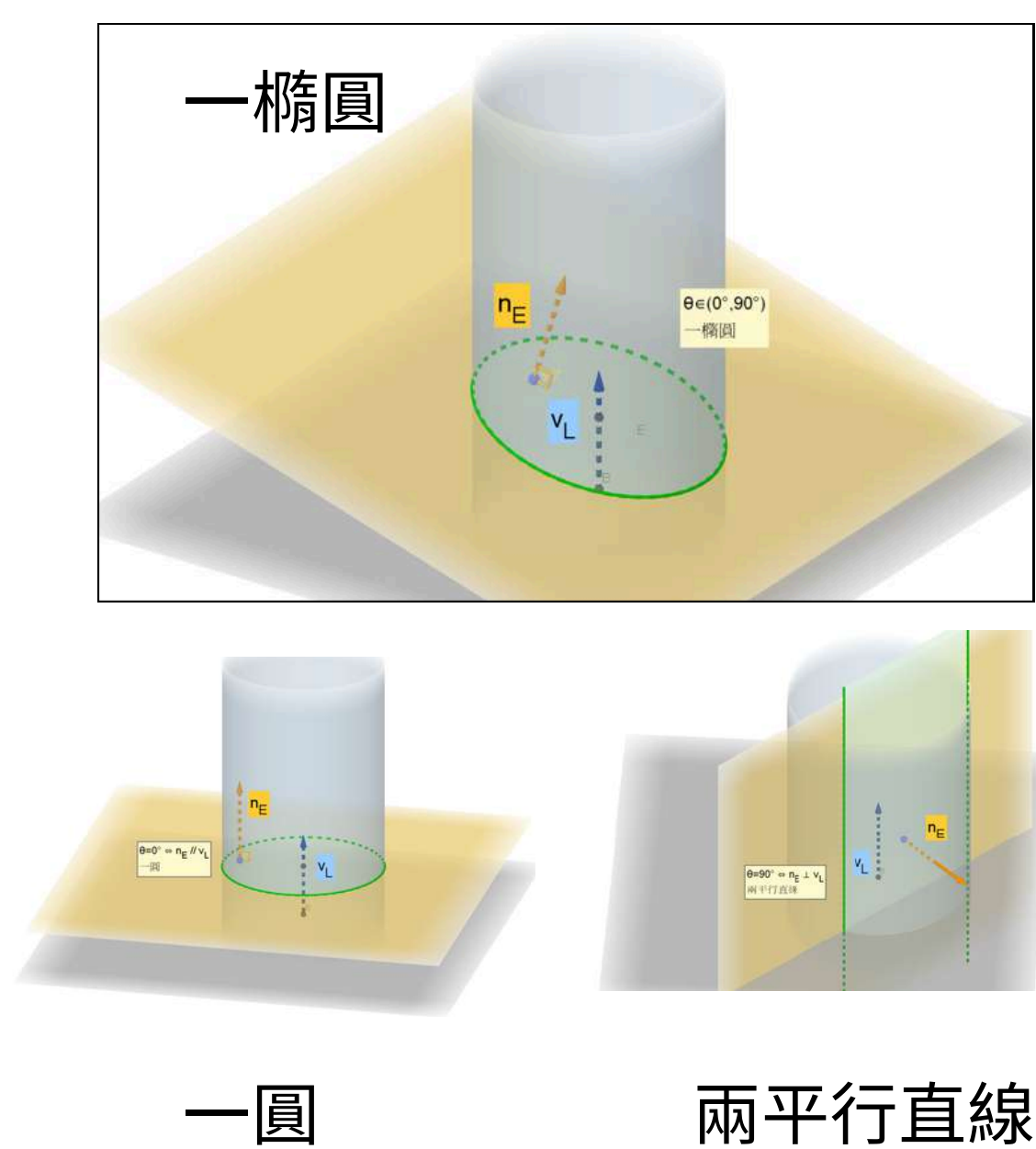
- 1、中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質。
- 2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質。

## 截痕探討工具

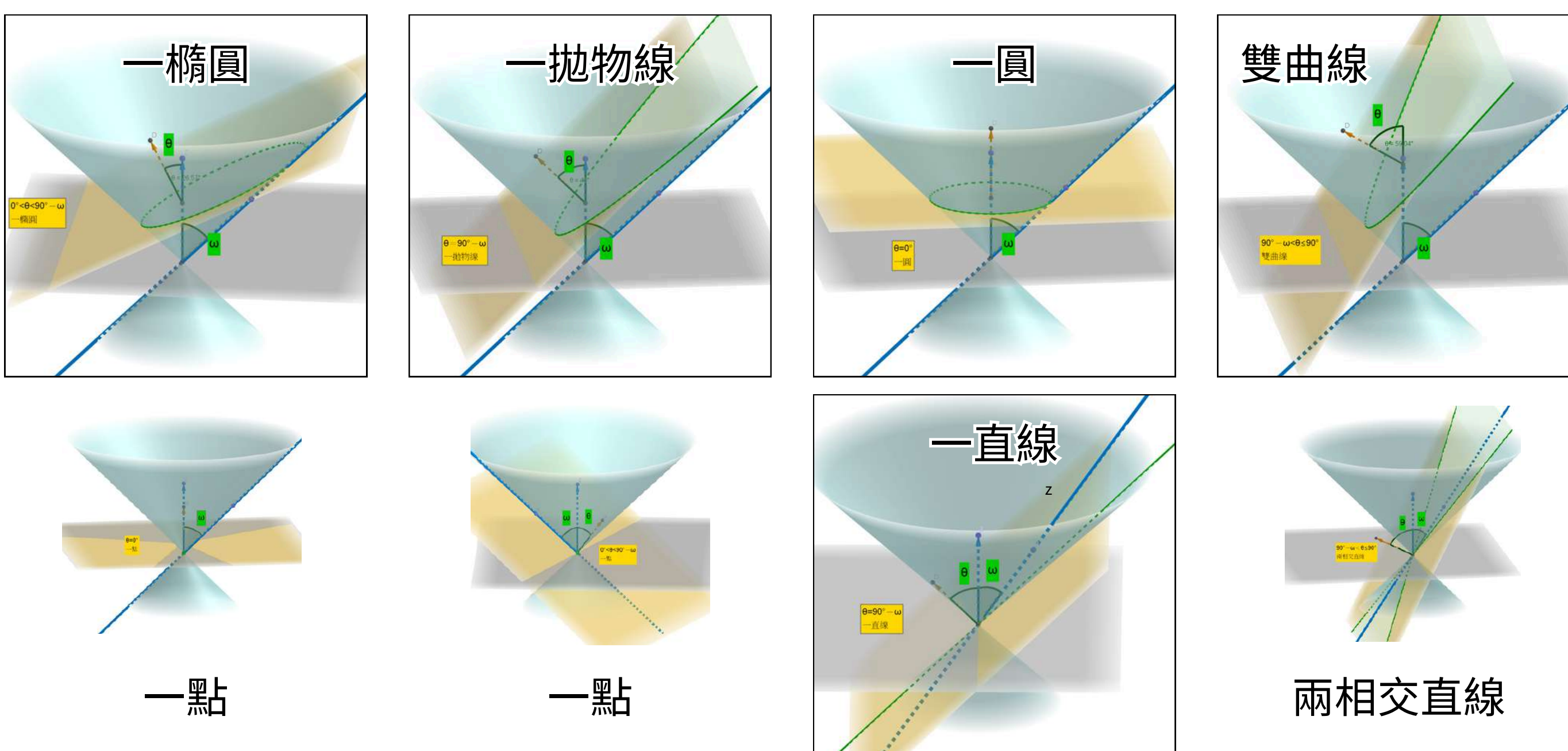
### （一）角度 $\omega$ 、 $\theta$ 、 $\theta_z$ 定義：

- 1、母線M與中心軸L相交所形成的銳夾角定義為 $\omega$ 角，且 $\tan(\omega)=r$ 。
- 2、中心軸方向向量和一平面的法向量取其銳夾角為 $\theta$ ，不失一般性，設 $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ， $\theta=0^\circ$ 、 $\theta=90^\circ$ 則另外討論。
- 3、把一圖形函數 $\Gamma$ 以z軸為軸心逆時針旋轉的度數稱為 $\theta_z$ 。  
(討論圓柱面交集時， $\theta_z \in [0^\circ, 90^\circ]$ ；討論圓錐面交集時， $\theta_z \in [0^\circ, 180^\circ]$ )。

### （二）直圓柱面與平面截痕：



### （三）直圓錐面與平面截痕：



## 研究過程與方法

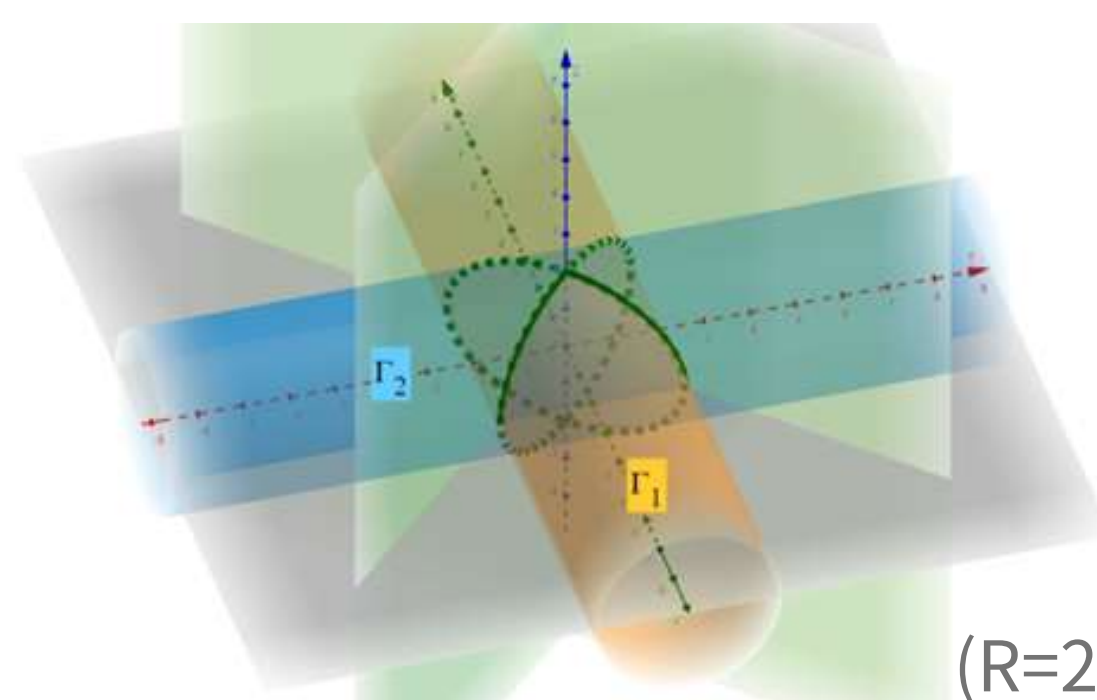
### （一）空間中兩直圓柱面相交之交集探討

#### 1、中心軸相交且互垂的兩直圓柱面交集之性質

若半徑相同

討論  $\begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_2 : y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$  發現交集會出現在  $\begin{cases} E_1 : x + y = 0 \\ E_2 : x - y = 0 \end{cases}$  上，

根據截痕探討工具， $E_1$ 上的截痕為一橢圓， $E_2$ 上的截痕為一橢圓，故此兩直圓柱面交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓。

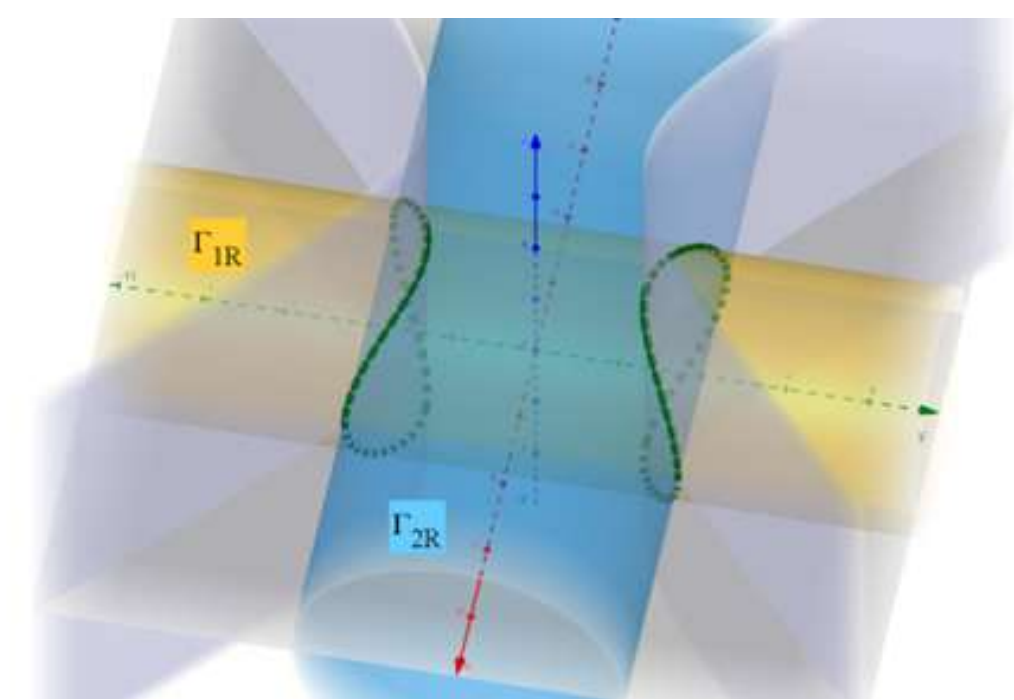


(R=2)

若半徑不同

討論  $\begin{cases} \Gamma_{1R} : x^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2R} : y^2 + z^2 = R_2^2 \end{cases}$ ，解聯立得  $x^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2$

又  $x^2 - y^2 = k$  為xy平面的雙曲線表達式，即其交集投影至xy平面為一雙曲線的一部份。



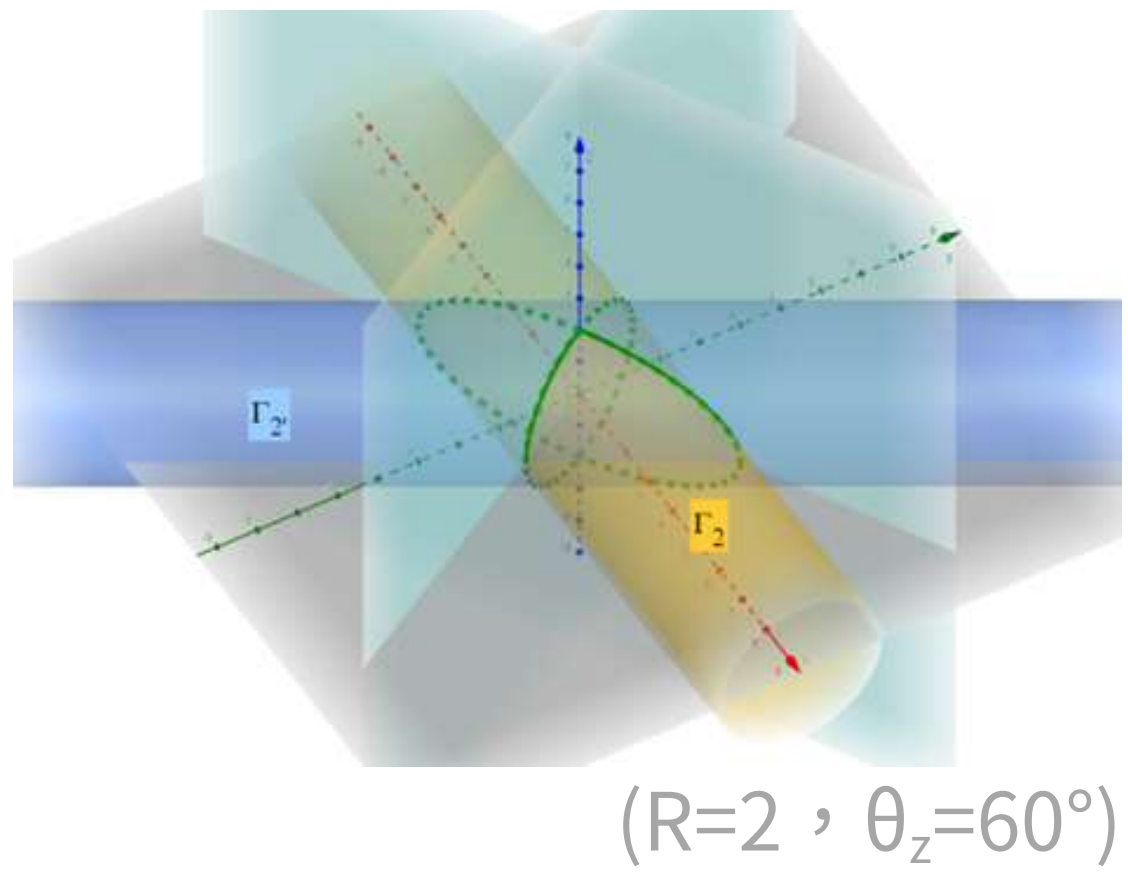
(R<sub>1</sub>=3，R<sub>2</sub>=4)



2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的兩直圓柱面交集之性質

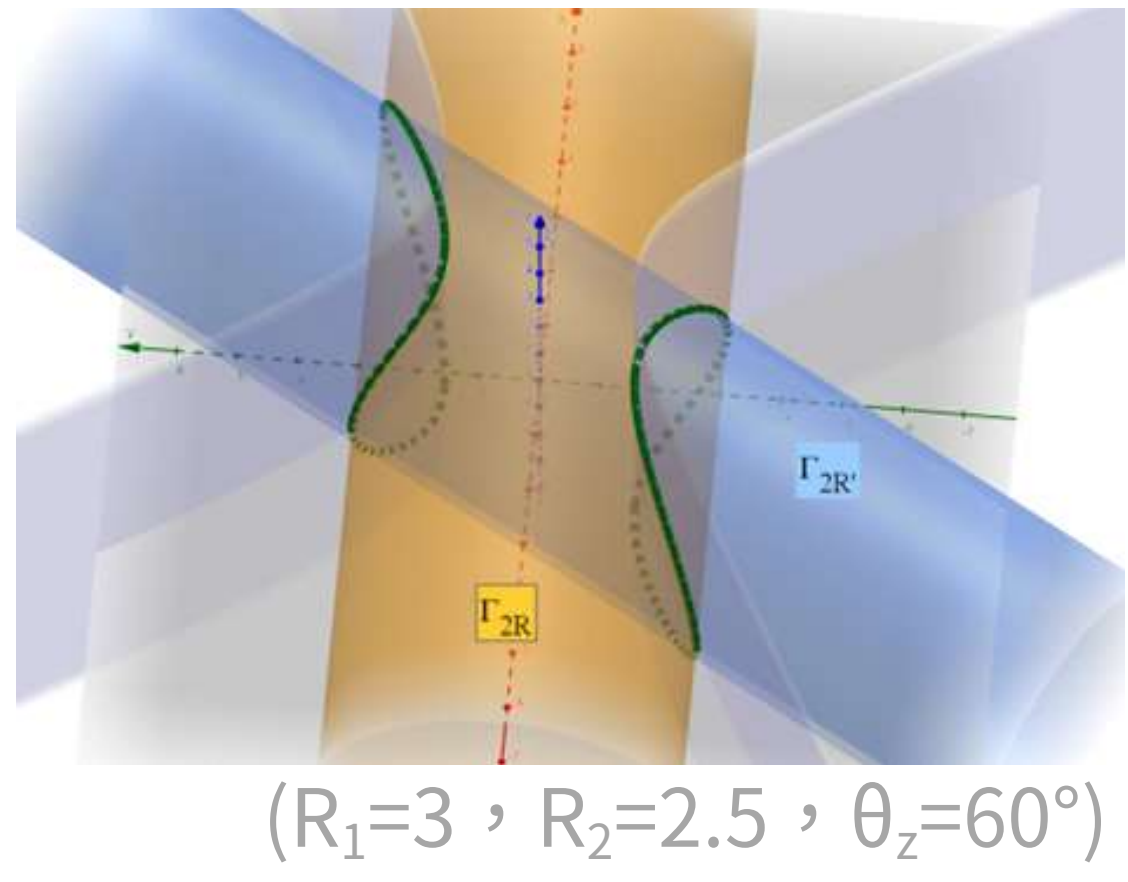
若半徑相同

討論  $\begin{cases} \Gamma_{2'} : (-\sin\theta_z x + \cos\theta_z y)^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_2 : y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$   
發現交集會出現在  $\begin{matrix} E_3 : \sin\theta_z x - (\cos\theta_z + 1)y = 0 \\ E_4 : \sin\theta_z x - (\cos\theta_z - 1)y = 0 \end{matrix}$  上，  
根據截痕探討， $E_3$ 上的截痕為一橢圓， $E_4$ 上的截痕表一橢圓，  
故此兩直圓柱面交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓。



若半徑不同

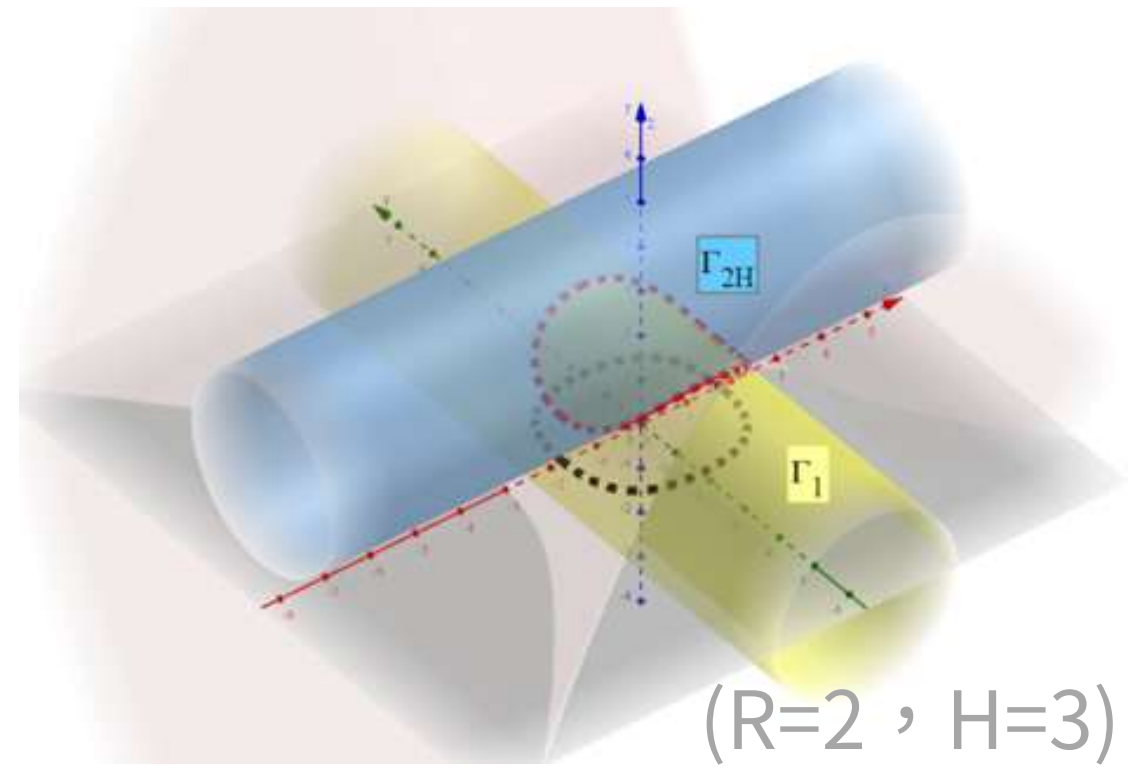
討論  $\begin{cases} \Gamma_{2R'} : (-\sin\theta_z x + \cos\theta_z y)^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2R} : y^2 + z^2 = R_2^2 \end{cases}$   
解聯立得  $(\sin^2\theta_z)x^2 + (-\sin 2\theta_z)xy - (\sin^2\theta_z)y^2 = R_1^2 - R_2^2$   
即形如  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$   
由吳建生（1996）的〈二次曲線新解〉算出 $\Delta > 0$ 、 $\delta > 0$ ，  
可知這是xy平面之雙曲線，即其交集投影至xy平面為一雙曲線的一部份。



3、中心軸歪斜且兩中心軸向量垂直的兩直圓柱面交集之性質

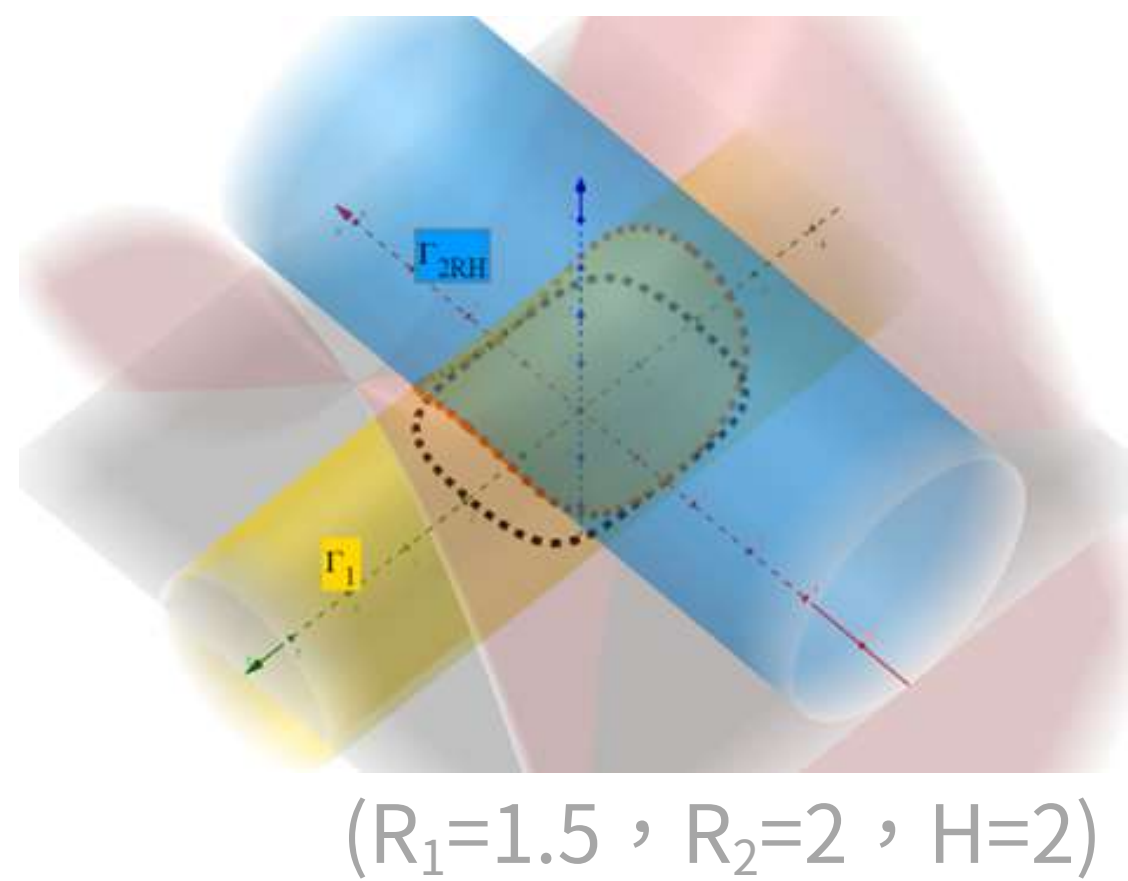
若半徑相同

討論  $\begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_{2H} : y^2 + (z - H)^2 = R^2 \end{cases}$   
解聯立得  $x^2 - y^2 - 2Hz - H^2 = 0$ ，可知交集落於此面上，  
且交集投影至xy平面的方程式為  $x^4 + y^4 + 2x^2H^2 + 2y^2H^2 - 2x^2y^2 = 4H^2R^2 - H^2$   
其中若 $H=2R$ ，交集為一個位於(0,0,R)的點； $H>2R$ 時則無交集。



若半徑不同

討論  $\begin{cases} \Gamma_{1R} : x^2 + z^2 = R_1^2 \\ \Gamma_{2RH} : y^2 + (z - H)^2 = R_2^2 \end{cases}$   
解聯立得  $x^2 - y^2 - 2Hz - H^2 = R_1^2 - R_2^2$ ，可知交集落於此面上，  
且交集投影至xy平面的方程式為  $[(x^4 + y^4 + H^4 + R_1^4 + R_2^4) + 2(-x^2y^2 - x^2H^2 - x^2R_1^2 + x^2R_2^2 + y^2H^2 + y^2R_1^2 - y^2R_2^2 + H^2R_1^2 - H^2R_2^2 - R_1^2R_2^2)]$   
其中若 $H=R_1+R_2$ ，交集為一個位於(0,0,R1)的點； $H>R_1+R_2$ 時則無交集。



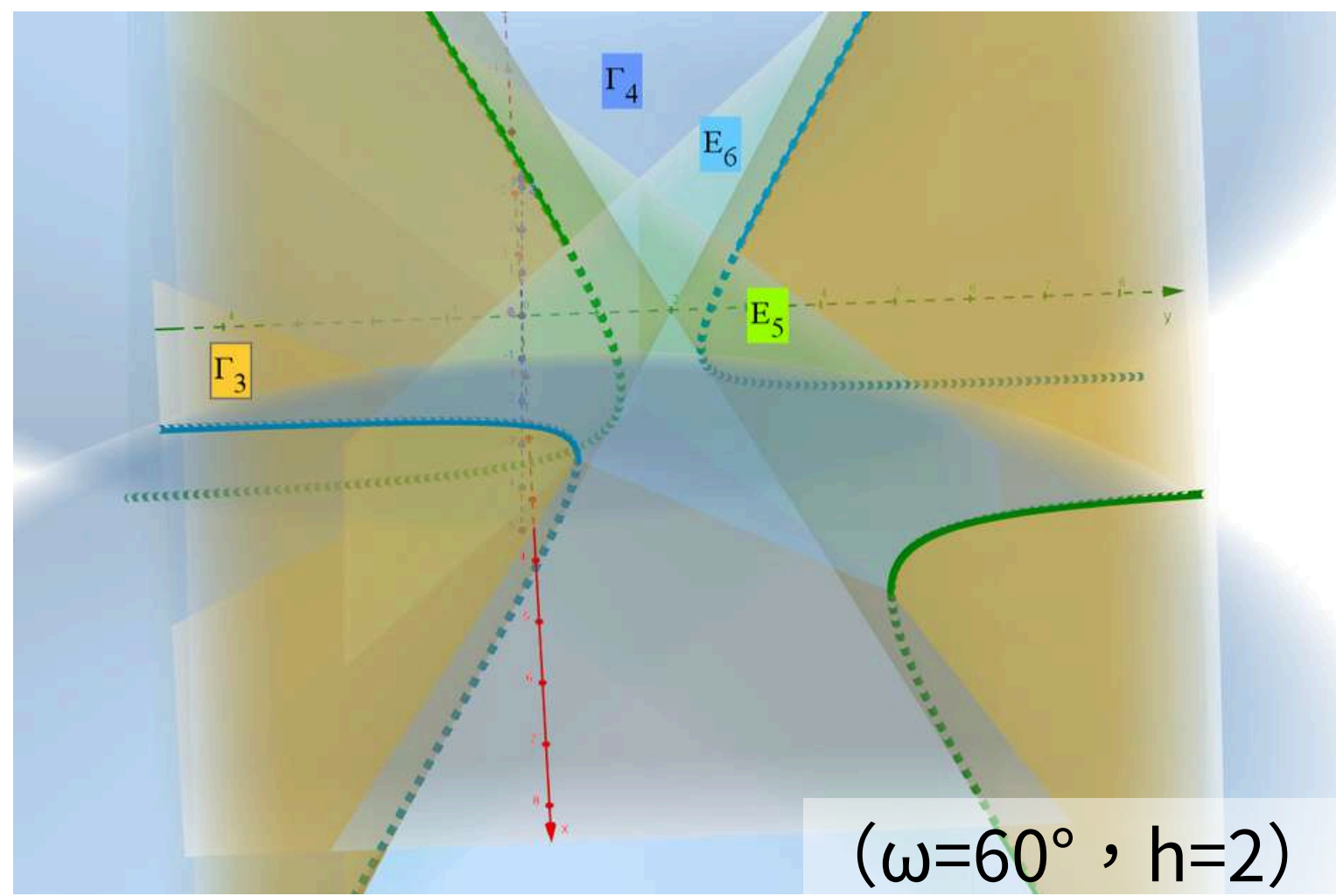
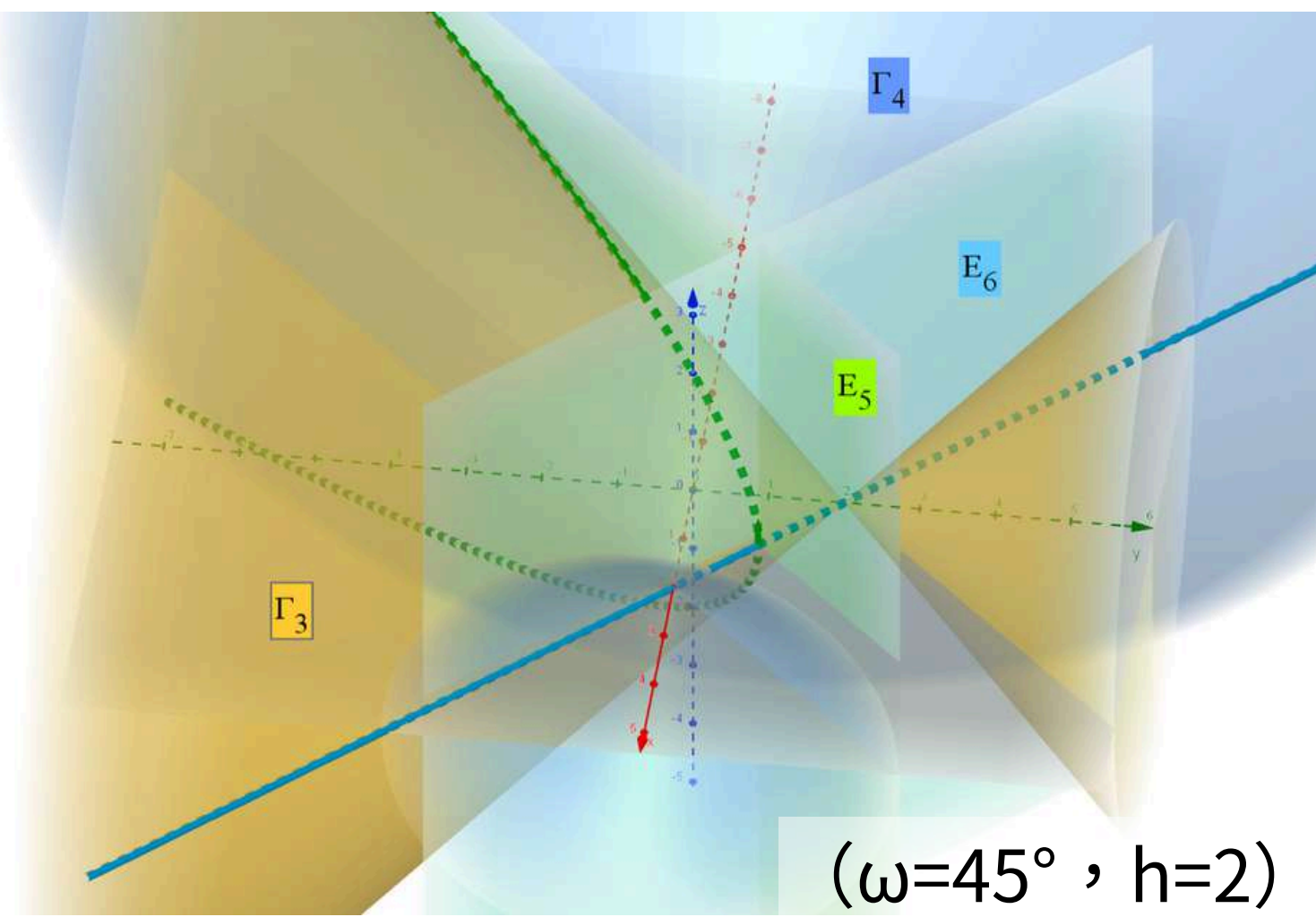
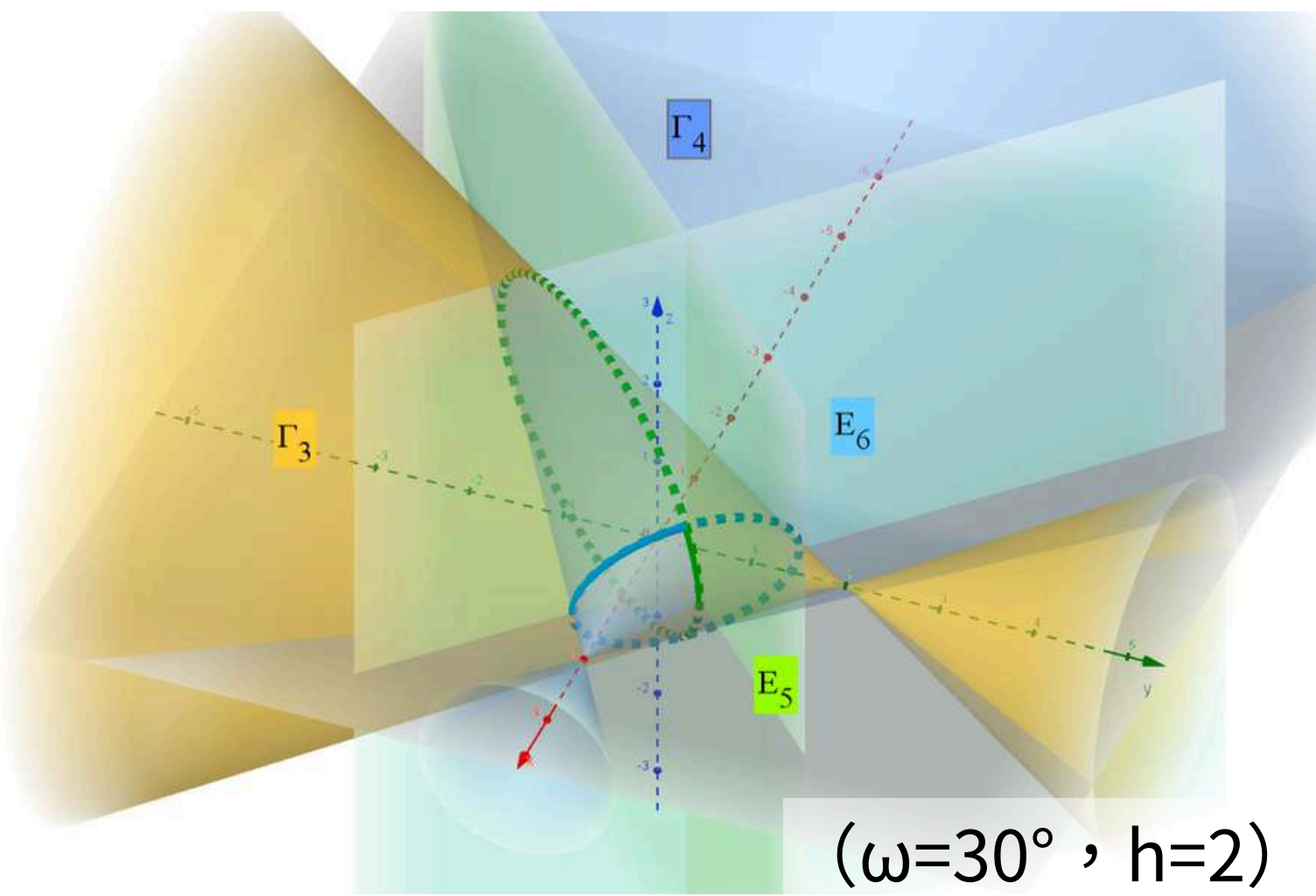
(二) 空間中兩直圓錐面相交之交集探討

1、中心軸相交且互垂且h值 (圓錐之頂點和兩中心軸交點的偏移量) 相同的兩全等直圓錐面交集之性質

討論  $\begin{cases} \Gamma_3 : x^2 + z^2 = [r(y - h)]^2 \\ \Gamma_4 : y^2 + z^2 = [r(x - h)]^2 \end{cases}$  發現交集會出現在  $\begin{matrix} E_5 : x - y = 0 \\ E_6 : x + y - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0 \end{matrix}$  上，  
根據截痕探討，還須討論 $\omega$ 、 $\theta$ 的關係，而 $\theta$ 必為 $45^\circ$ ，則只需討論 $\omega$ 和 $45^\circ$ 的關係。

和  $E_1$  的截痕  $\begin{cases} \omega < 45^\circ \\ \omega = 45^\circ \\ \omega > 45^\circ \end{cases}$  根據截痕探討， $E_1$  上的截痕為一  $\begin{cases} \text{橢圓} \\ \text{拋物線} \\ \text{雙曲線} \end{cases}$

和  $E_2$  的截痕  $\begin{cases} \omega < 45^\circ \\ \omega = 45^\circ \\ \omega > 45^\circ \end{cases}$  根據截痕探討， $E_2$  上的截痕為一  $\begin{cases} \text{橢圓} \\ \text{直線} \\ \text{雙曲線} \end{cases}$

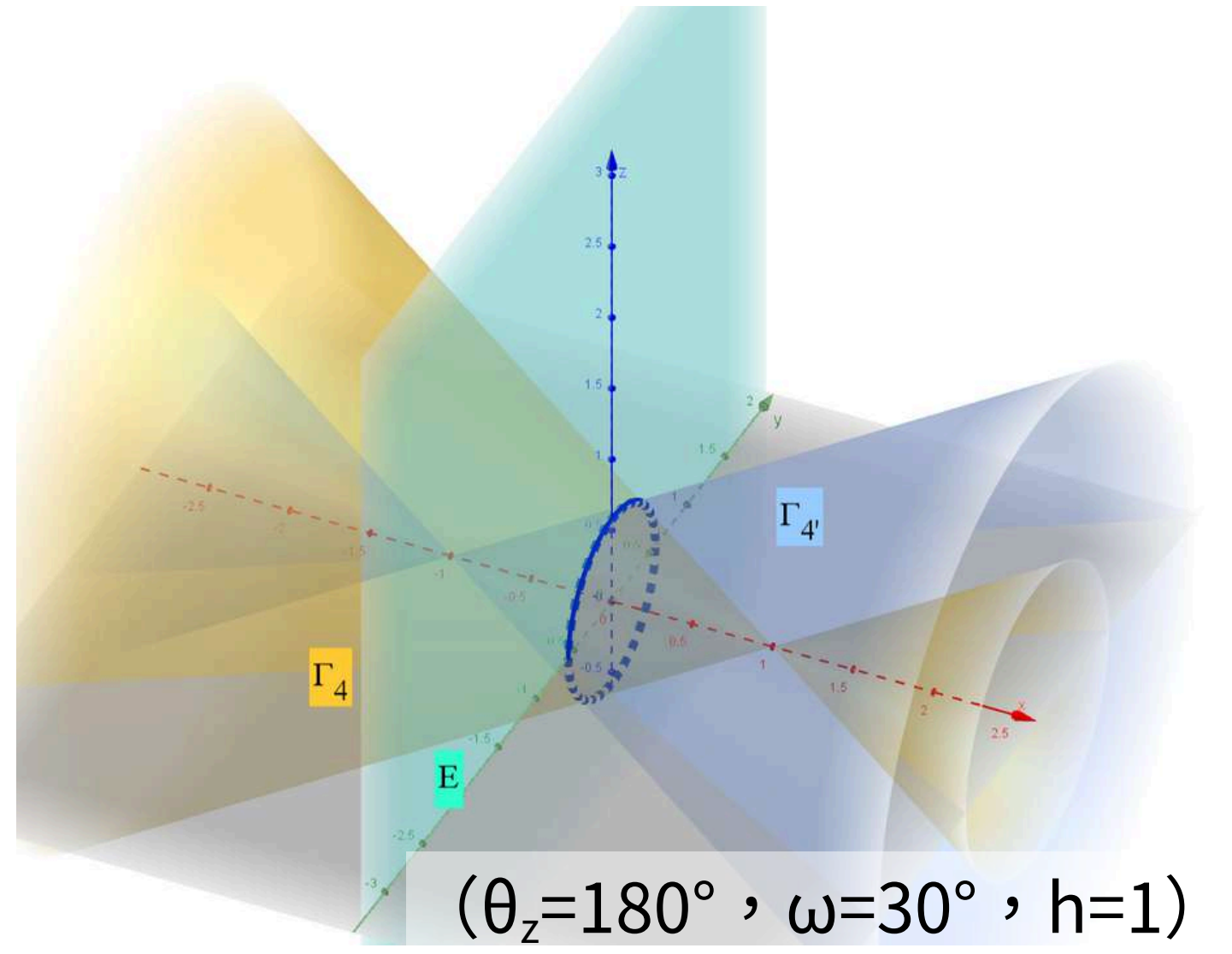


2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 且h值相同的兩全等直圓錐面交集之性質

討論  $\begin{cases} \Gamma_{4'} : (-\sin\theta_z x + \cos\theta_z y)^2 + z^2 = [r(\cos\theta_z x + \sin\theta_z y - h)]^2 \\ \Gamma_4 : y^2 + z^2 = [r(x - h)]^2 \end{cases}$   
發現交集會出現在  $\begin{matrix} E_7 : (\cos\theta_z - 1)x + \sin\theta_z y = 0 \\ E_8 : (1 + \cos\theta_z)x + \sin\theta_z y - \frac{2r^2h}{1+r^2} = 0 \end{matrix}$  上，  
根據截痕探討，還須討論 $\omega$ 、 $\theta$ 的關係，而 $\theta$ 隨 $\theta_z$ 的變化而有所不同，所以須討論 $\omega$ 、 $\theta_z$ 的關係。

$\theta_z = 180^\circ$ 時較單純先討論，把 $\theta_z = 180^\circ$ 帶入原式得兩直圓錐面的交集  
只會在 $E:x=0$ 的面上，根據截痕探討，此時E上的截痕為一圓。

$\theta_z \neq 180^\circ$ 時則須分開討論。



和  $E_1$  的截痕： $\begin{cases} \theta_z/2 > \omega \\ \theta_z/2 = \omega \\ \theta_z/2 < \omega \end{cases}$

$\theta = 90^\circ - \theta_z/2$

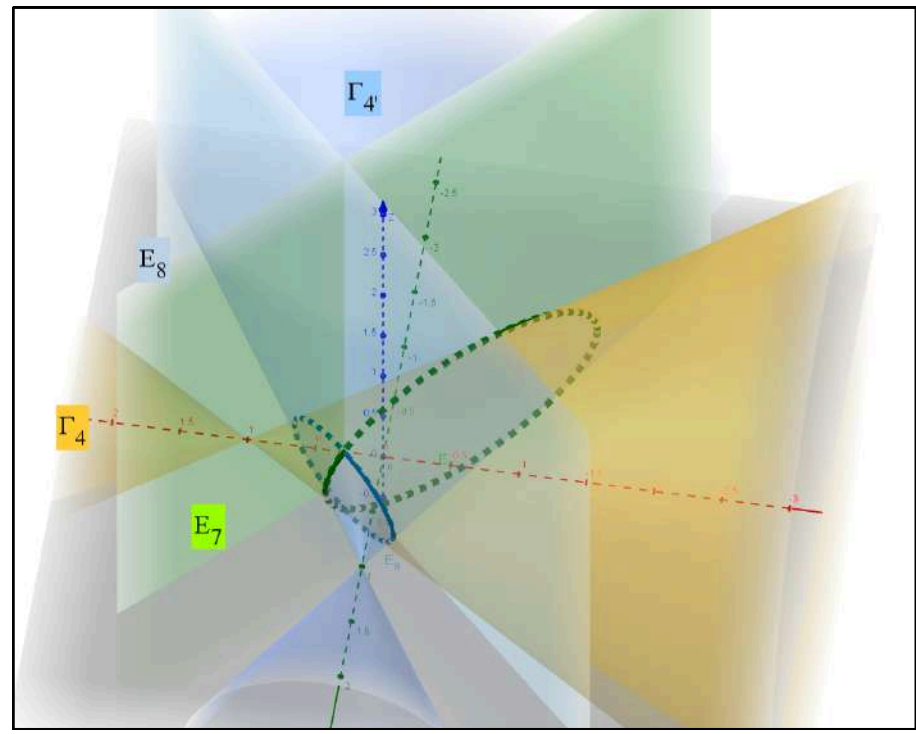
根據截痕探討， $E_1$ 上的截痕為一  $\begin{cases} \text{橢圓} \\ \text{拋物線} \\ \text{雙曲線} \end{cases}$

和  $E_2$  的截痕  $\begin{cases} \theta_z/2 + \omega < 90^\circ \\ \theta_z/2 + \omega = 90^\circ \\ \theta_z/2 + \omega > 90^\circ \end{cases}$

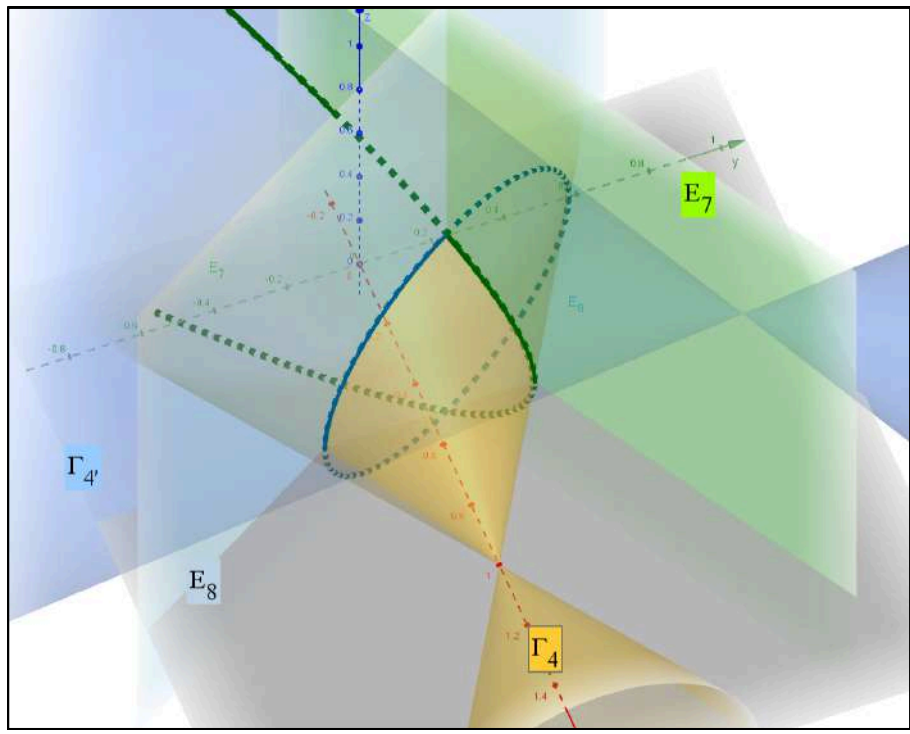
$\theta = \theta_z/2$

根據截痕探討， $E_2$ 上的截痕為一  $\begin{cases} \text{橢圓} \\ \text{直線} \\ \text{雙曲線} \end{cases}$

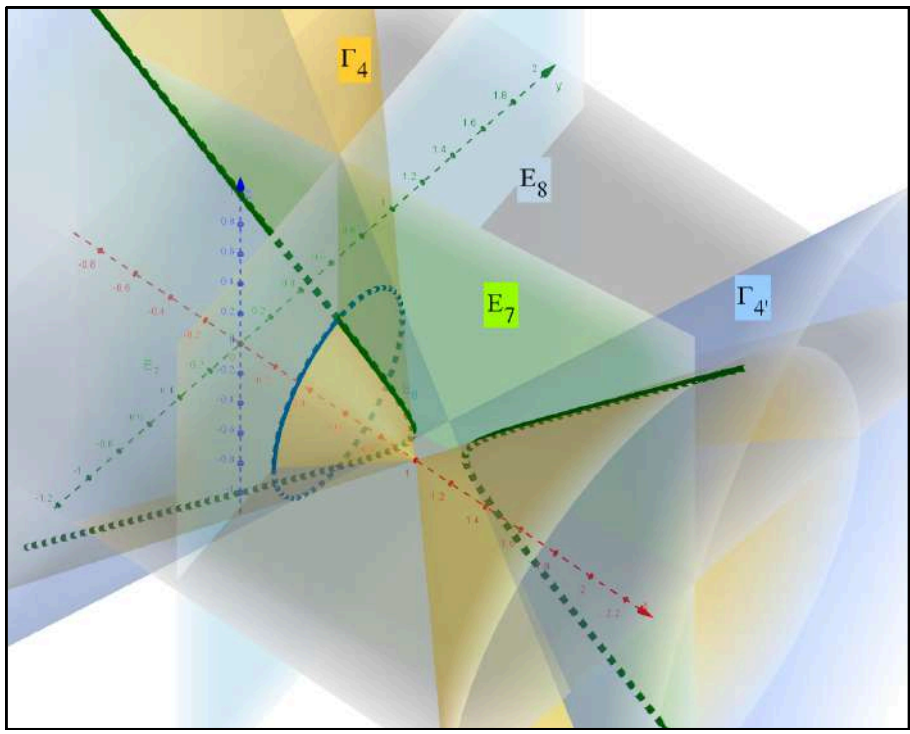




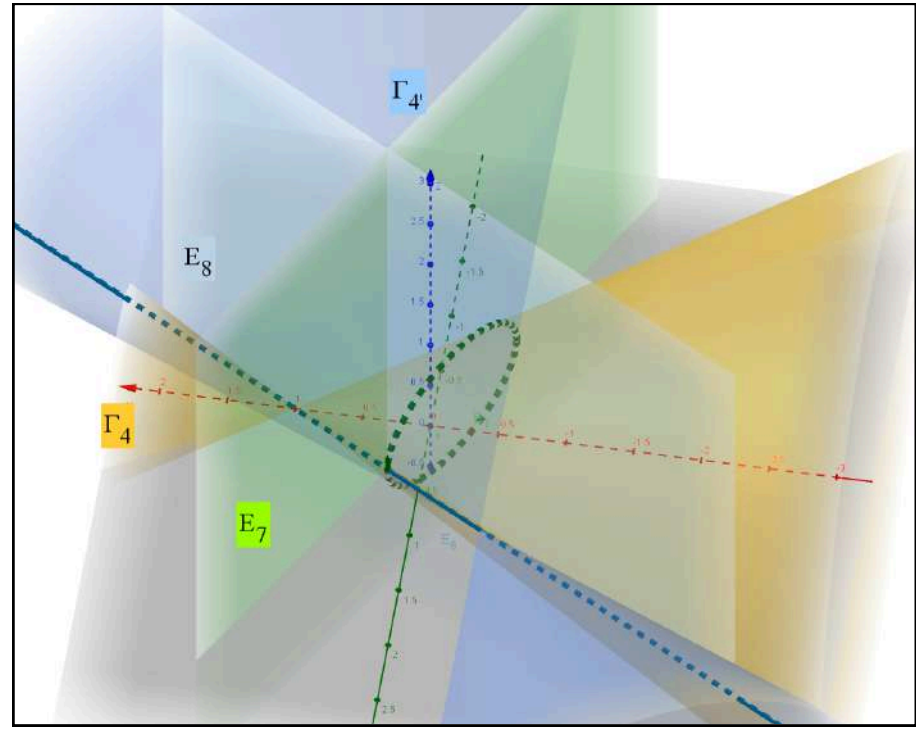
$\theta_z/2 > \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega < 90^\circ$   
兩橢圓  
 $\theta_z = 90^\circ /$   
 $\omega = 30^\circ /$   
 $h = 1$



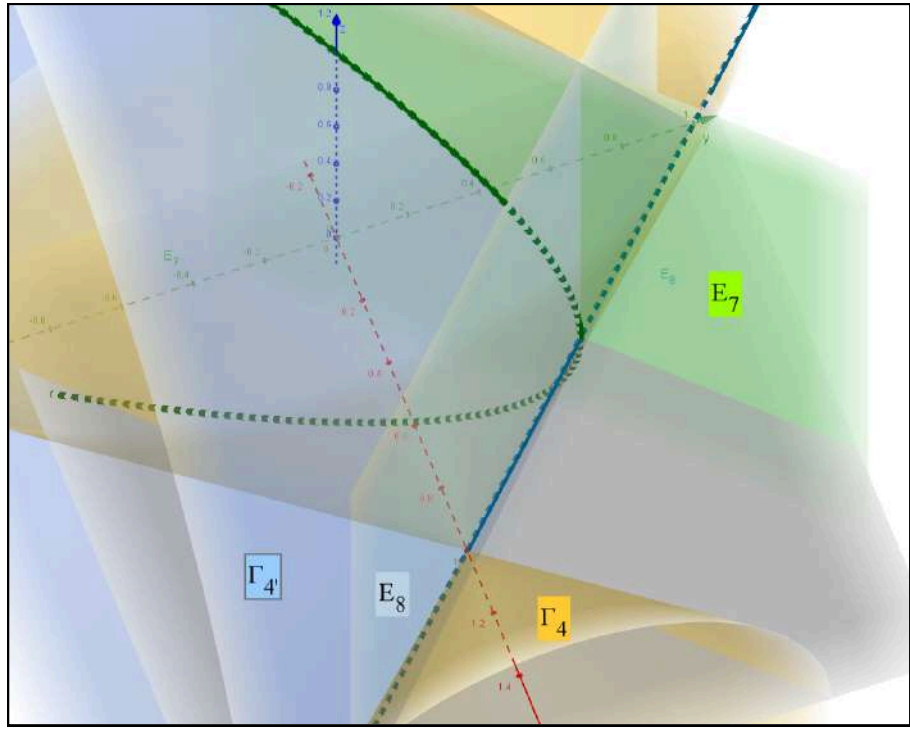
$\theta_z/2 = \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega < 90^\circ$   
一拋物線、  
一橢圓  
 $\theta_z = 60^\circ /$   
 $\omega = 30^\circ /$   
 $h = 1$



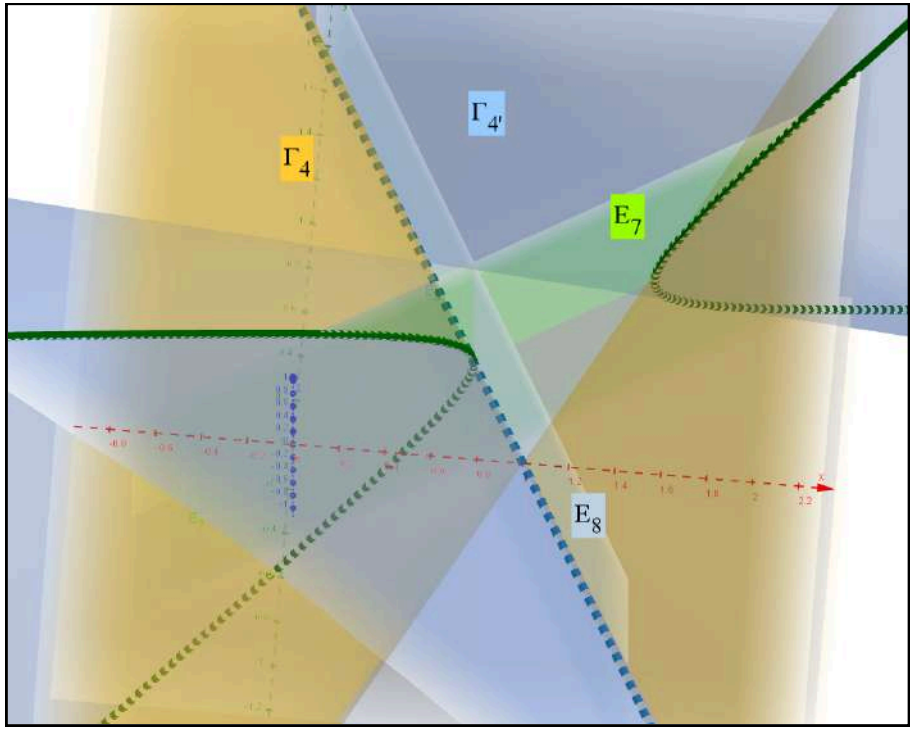
$\theta_z/2 < \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega < 90^\circ$   
一雙曲線、  
一橢圓  
 $\theta_z = 15^\circ /$   
 $\omega = 45^\circ /$   
 $h = 1$



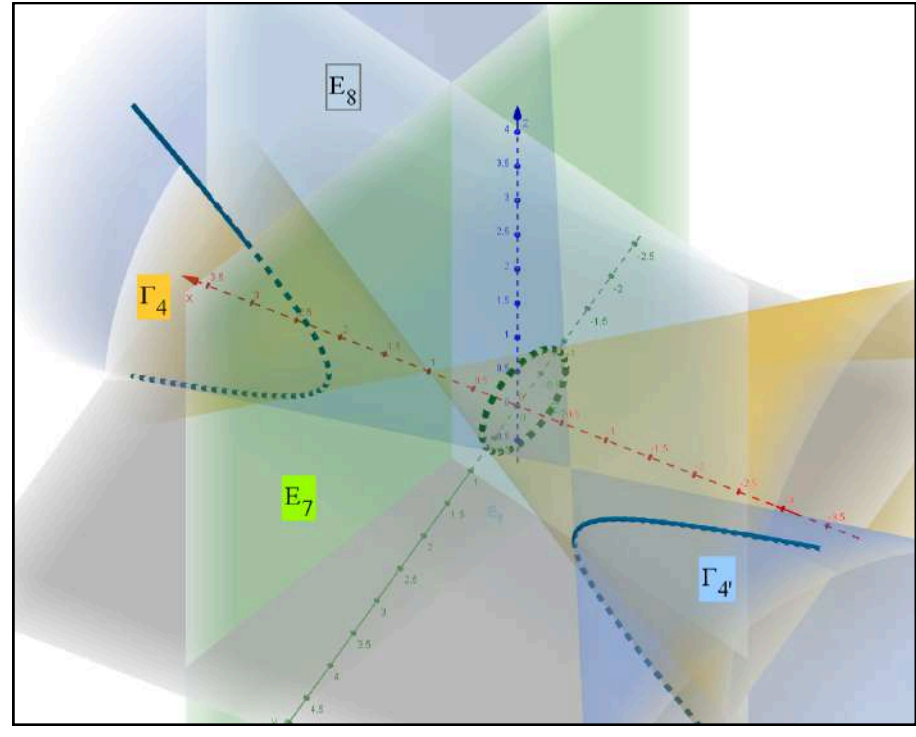
$\theta_z/2 > \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega = 90^\circ$   
一橢圓、  
一直線  
 $\theta_z = 120^\circ /$   
 $\omega = 30^\circ /$   
 $h = 1$



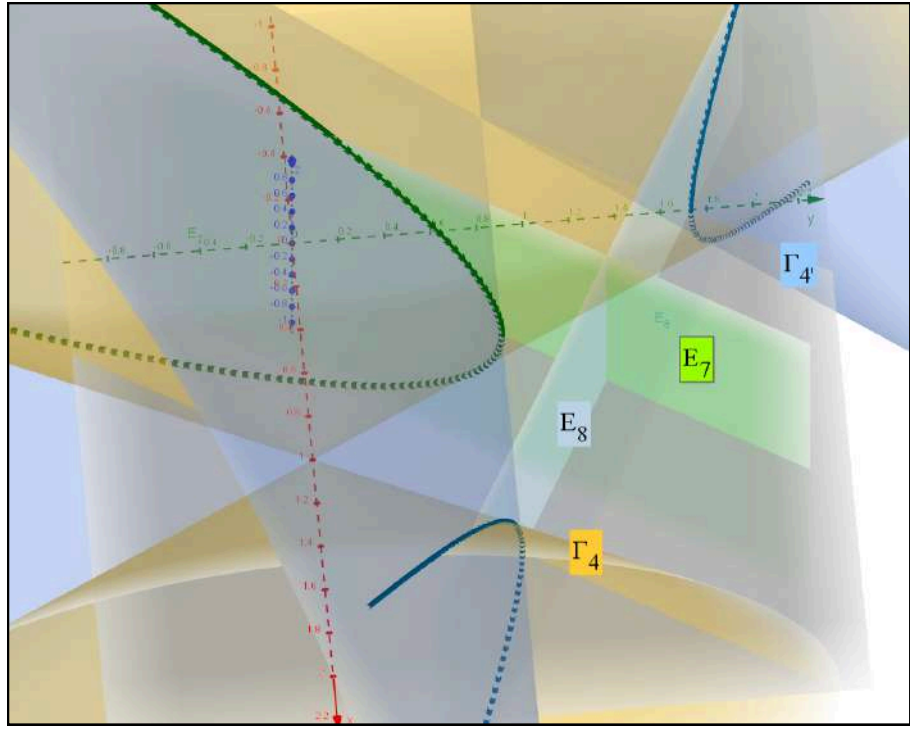
$\theta_z/2 = \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega = 90^\circ$   
一拋物線、  
一直線  
 $\theta_z = 60^\circ /$   
 $\omega = 30^\circ /$   
 $h = 1$



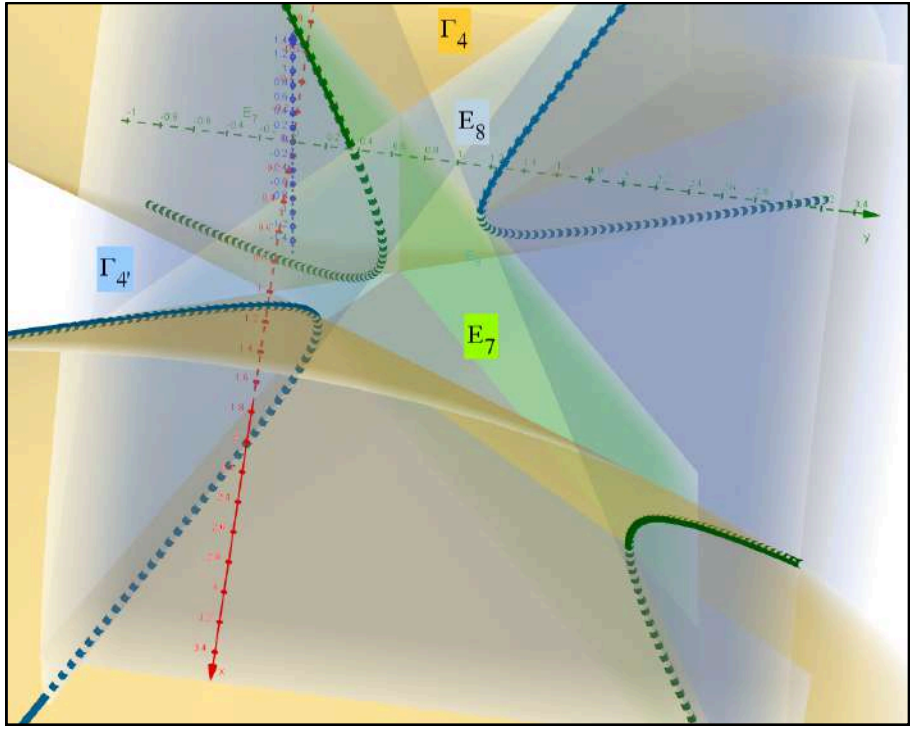
$\theta_z/2 < \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega = 90^\circ$   
一雙曲線、  
一直線  
 $\theta_z = 60^\circ /$   
 $\omega = 60^\circ /$   
 $h = 1$



$\theta_z/2 > \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega > 90^\circ$   
一橢圓、  
一雙曲線  
 $\theta_z = 150^\circ /$   
 $\omega = 30^\circ /$   
 $h = 1$



$\theta_z/2 = \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega > 90^\circ$   
一拋物線、  
一雙曲線  
 $\theta_z = 120^\circ /$   
 $\omega = 60^\circ /$   
 $h = 1$



$\theta_z/2 < \omega$  且  $\theta_z/2 + \omega > 90^\circ$   
兩雙曲線  
 $\theta_z = 90^\circ /$   
 $\omega = 60^\circ /$   
 $h = 1$

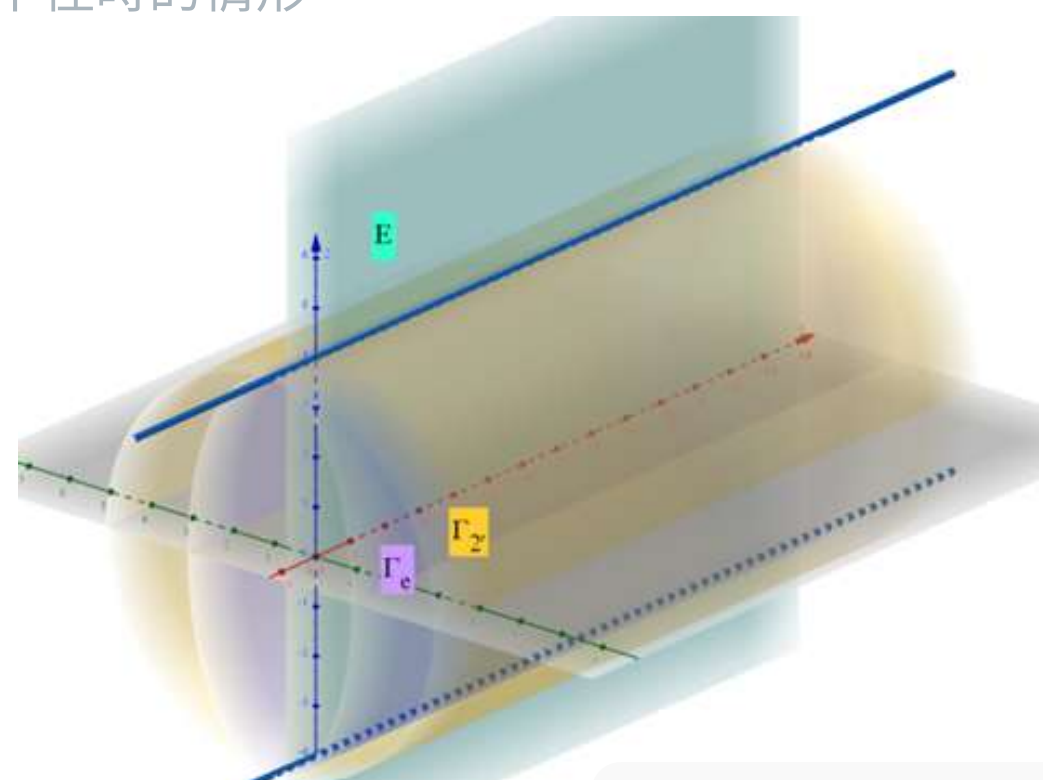
(三) 空間中一直圓柱面和一直橢柱面相交之交集探討

此篇只探討直橢柱面半長軸或半短軸恰等於直圓柱面半徑時的情形

1、中心軸相交且互垂的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質

討論  $\begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + z^2 = R^2 \\ \Gamma_e : \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \end{cases}$  發現交集會出現在  $E_9 : ax + Ry = 0$  上，  
 $E_{10} : ax - Ry = 0$  上，

根據截痕探討工具， $E_9$ 上的截痕為一橢圓， $E_{10}$ 上的截痕表一橢圓，故此兩圓柱面交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓。

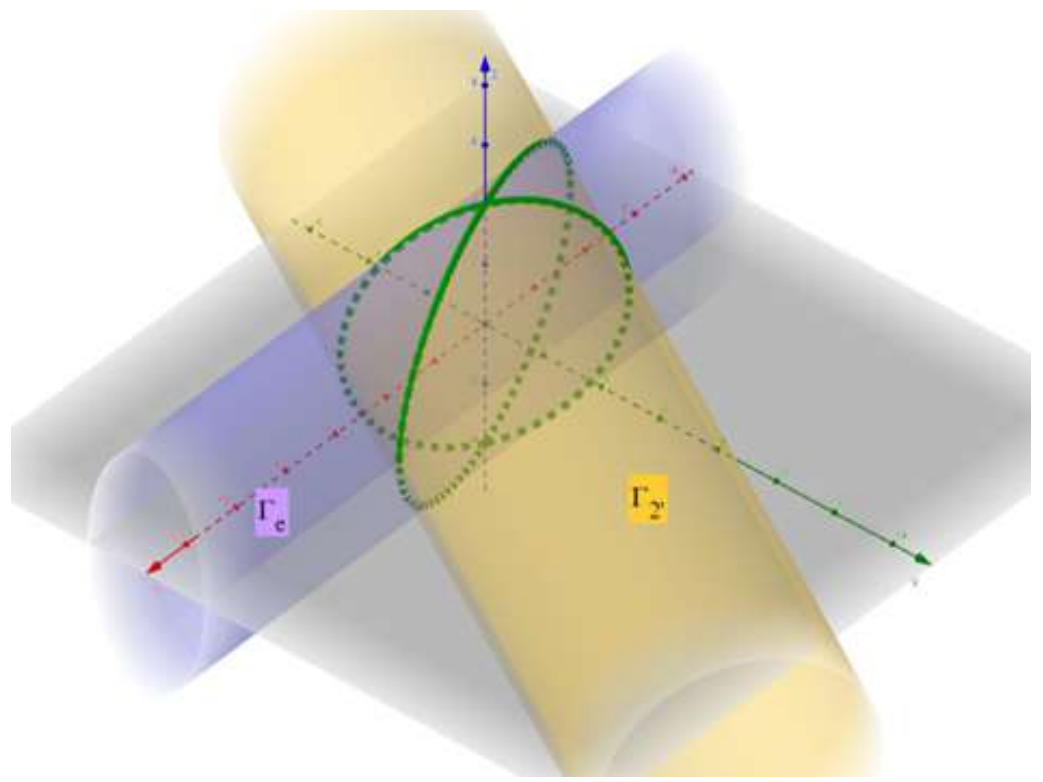


(R=4，a=2， $\theta_z=0^\circ$ )

2、中心軸相交且夾 $\theta_z$ 的一直圓柱面和一直橢柱面交集之性質

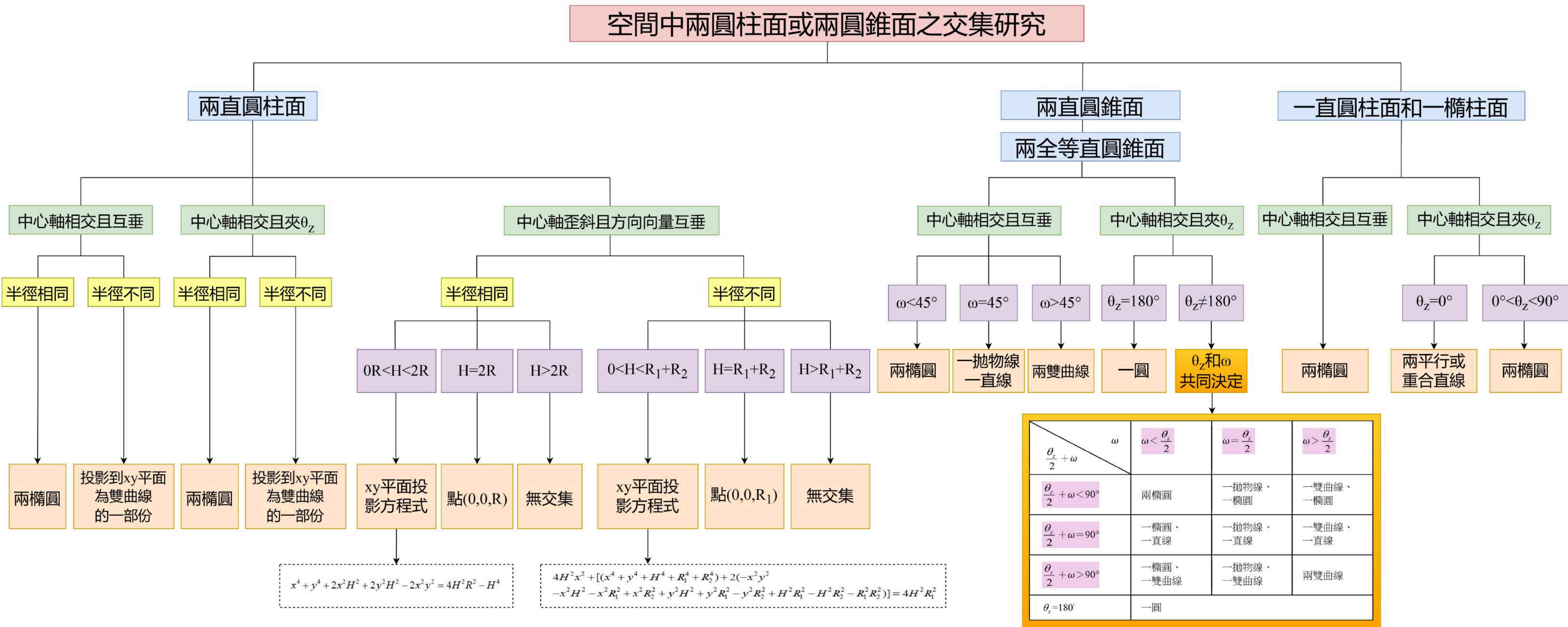
討論  $\begin{cases} \Gamma_e : \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \\ \Gamma_{z'} : (\cos\theta_z y - \sin\theta_z x)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$   
發現交集會出現在  $E_{11} : (\frac{1}{a} + \frac{\cos\theta_z}{R})y - \frac{\sin\theta_z}{R}x = 0$  上，  
 $E_{12} : (\frac{1}{a} - \frac{\cos\theta_z}{R})y + \frac{\sin\theta_z}{R}x = 0$  上，

若 $\theta_z=0^\circ$ 時較單純先討論，把 $\theta_z=0^\circ$ 帶入原式得交集只會落在 $E:y=0$ 上，由截痕探討工具知截痕為兩平行或重合直線。  
若 $\theta_z \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，根據截痕探討工具， $E_{11}$ 上的截痕為一橢圓， $E_{12}$ 上的截痕為一橢圓，故此兩圓柱面交集在空間中所成圖形為空間中相異之兩橢圓。



(R=4，a=2， $\theta_z=60^\circ$ )

結 論



未來展望

- 一、分析中心軸相交且互垂但h值不同之全等直圓錐面交集。
- 二、研究中心軸相交且互垂之不全等直圓錐面交集特性。
- 三、探討中心軸不相交之直圓錐面交集關係。
- 四、分析柱面與錐面相交所形成的交集特徵。
- 五、探討橢柱面（錐面）與橢柱面（錐面）交集的幾何性質及應用。

文 獻 參 考

[1] Dandelin spheres. (n.d.). In Wikipedia. Retrieved June 14, 2024, from [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dandelin\\_spheres](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres)

[2] Kós, R. (n.d.). Conics and Dandelin spheres. KöMaL. Retrieved June 14, 2024, from <https://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.e.shtml>

[3] 吳隆盛 (1982)。二元二次方程式圖形判別方法。全國中小學科展作品，22，283-296。  
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/22/pdf/22h/283.pdf>

[4] 吳建生 (1996)。二次曲線新解。數學傳播，20(4)，70-75。  
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d204/20408.pdf>

[5] 張海潮、黃寶興 (2022)。正圓錐、正橢錐、斜圓錐和球極投影的保圓性質。數學傳播，46(4)，19-28。  
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d464/46402.pdf>