

# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

第二名

050404

三角形內特殊直線變換所構造的軌跡

學校名稱： 新北市立中和高級中學

作者：	指導老師：
高二 鍾一玄	王晞安
高三 郭炳宏	趙志益
高一 劉宜蓁	

關鍵詞： 變換、三角形的心、三線共點

# 三角形內特殊直線變換所構造的軌跡

## 摘要

本研究探討給定三角形經由其三中線、三中垂線、三高、三內角平分線、兩外角平分線及一內角平分線，將線段延伸為直線，分別以其與邊或邊的延長線的交點為旋轉中心同時旋轉，作為新三角形的三個邊，圍出新的三角形時(簡稱為變換)的性質，並關注重心、外心、垂心、內心、旁心的位置。

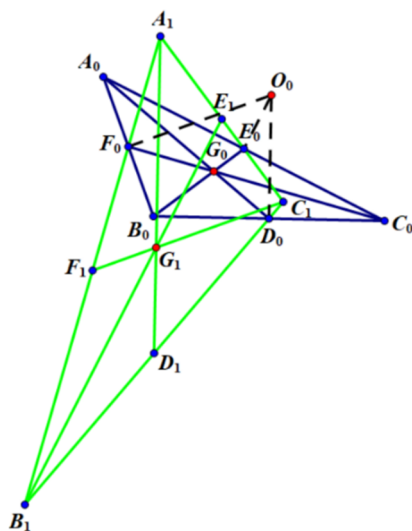
本研究分析變換一次，尋找新三角形隨旋轉角度變化的性質；及固定某個旋轉角度，進行  $n$  次變換時，形成的點列所在的曲線方程式。

結果顯示，變換一次時，根據三線選擇的不同，各自出現陪位重心、心的重疊、Kosnita 點、多心共圓、共圓錐曲線...等性質；而當固定某個旋轉角度，進行  $n$  次變換時，則分別有等角螺線或收斂到特定形狀的性質。

## 壹、前言

### 一、文獻回顧

如圖一，Shawn Godin and J. Chris Fisher 在 2023 年的 *Crux Mathematicorum* 第 49 卷 10 期[1]提出：給定  $\Delta A_0 B_0 C_0$ ，其外心為  $O_0$ ，重心為  $G_0$ 。作  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的三中線並將線段延伸為直線  $\overline{A_0 D_0}$ 、 $\overline{B_0 E_0}$ 、 $\overline{C_0 F_0}$ ，對三中線分別過三中點作垂線(即分別以三中點為旋轉中心，將三中線逆時針旋轉  $90^\circ$ )，以旋轉後的三中線為三邊所成之三角形設為  $\Delta A_1 B_1 C_1$ (以下將此過程簡稱為「進行一次三中線變換」)，其重心為  $G_1$ 。則  $G_0$  為線段  $\overline{O_0 G_1}$  之中點。



圖一：原三角形與三中線變換一次後的三角形

### 二、研究動機

$O_0, G_1, G_0$  共線且  $G_0$  為線段  $\overline{O_0 G_1}$  之中點的性質，引發了我們以下的研究興趣：

1. 三中線變換一次後的三角形具有什麼特質？
2. 如果以三中線的旋轉角度  $\theta$  作為變數時，圖形會有什麼變化與性質？
3. 固定旋轉角度  $\theta$ ，對三角形進行三中線變換  $n$  次，得到的三角形序列及其心的序列會有什麼性質？
4. 使用三角形的三中垂線、三高、三內角平分線、兩外角平分線及一內角平分線進行變換，甚至使用任意共點的三線進行變換時，會有什麼性質？

### 三、研究目的

本研究探討給定三角形經由共點的三線，特別是三中線、三中垂線、三高、三內角平分線或兩外角平分線及一內角平分線(簡稱為三線)，將線段延伸為直線，分別以其與邊或邊的延長線的交點為旋轉中心同時旋轉 $\theta$ 角( $0 < \theta < \pi$ )，作為新三角形的三個邊，圍出新的三角形時(簡稱為變換，特別地有三中線變換、三中垂線變換、三高變換、三內角平分線變換、兩外角平分線及一內角平分線變換)的性質，並關注重心、外心、垂心、內心、旁心的位置：

(一)以 $\theta$ 為變數，將共點的三線，特別是三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線變換一次，形成新的三角形。探討隨著 $\theta$ 改變時三角形的性質。

(二)固定某個旋轉角度 $\theta$ ，進行 $n$ 次變換時，探討變換 $n$ 次後所得的三角形的性質。

### 貳、研究設備及器材

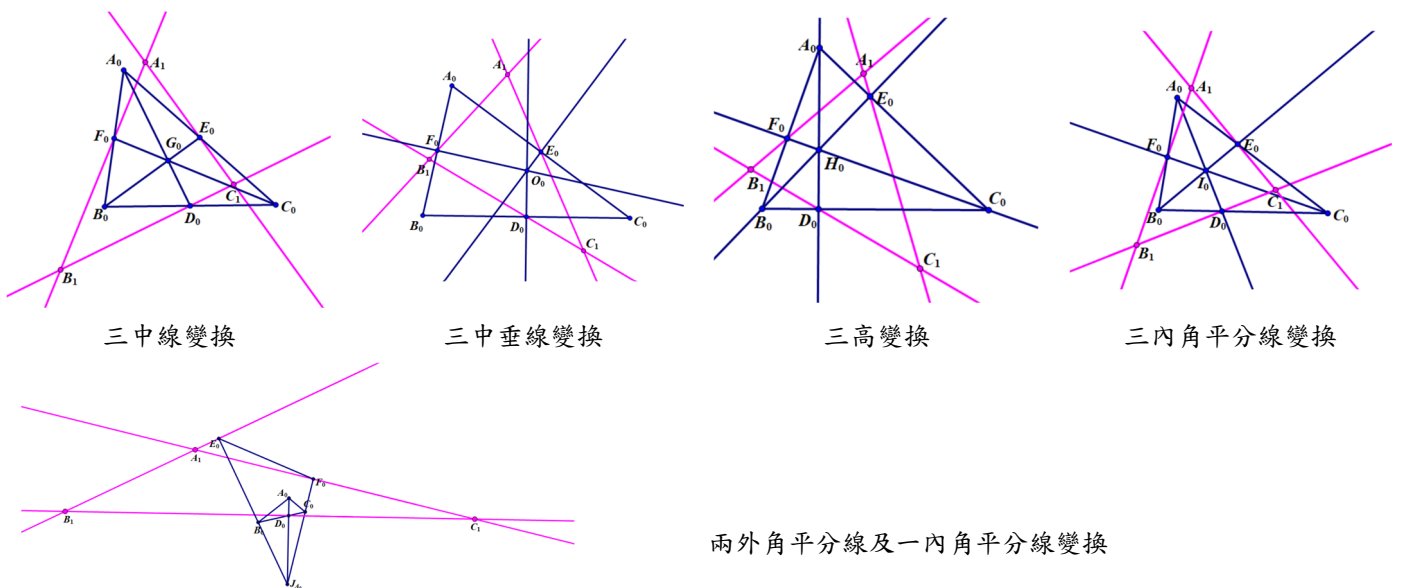
紙、筆、Geogebra 軟體、GSP 軟體。(本研究之圖表皆由本研究之作者團隊自行繪製)

### 參、名詞解釋

一、三線：三條交於一點且同時被旋轉的三條直線的簡稱，例如三中線、三中垂線、三高、三內角平分線或兩外角平分線及一內角平分線(均將線段延伸為直線)。

二、 $\theta$ ：分別以三線與三邊或邊的延長線各自的交點為旋轉中心，將三線同時旋轉之角度( $0 < \theta < \pi$ )。

三、變換：如圖二， $\Delta A_0 B_0 C_0$ 經上述第二點的作圖後，得到三條旋轉後的直線(三條粉紅色的線)。將這三條旋轉後的直線作為新三角形的三個邊，可以圍成新的封閉三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，其中 $A_1$ 是 $\overline{B_0 E_0}$ 跟 $\overline{C_0 F_0}$ 旋轉後的交點， $B_1$ 是 $\overline{A_0 D_0}$ 跟 $\overline{C_0 F_0}$ 旋轉後的交點、 $C_1$ 是 $\overline{A_0 D_0}$ 跟 $\overline{B_0 E_0}$ 旋轉後的交點。我們將這個過程稱為進行一次變換。



圖二：將三線分別以其與邊或邊的延長線的三個交點為旋轉中心，同時旋轉 $\theta$ 角後，得到新的三條旋轉後的直線(三條粉紅色的線)，這三條直線可圍成新的三角形

四、五種變換：如圖二，根據三線選擇的不同，我們定義下列五種變換：

(一)三中線(重心)變換：將三中線分別以三邊中點為旋轉中心同時旋轉的變換。

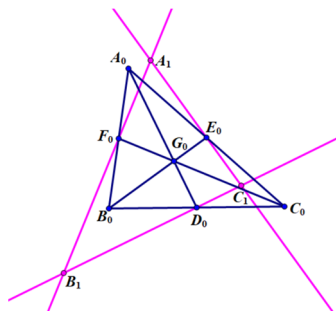
(二)三中垂線(外心)變換：將三中垂線分別以三邊中點為旋轉中心同時旋轉的變換。

(三)三高(垂心)變換：將三高分別以三垂足為旋轉中心同時旋轉的變換。

(四)三內角平分線(內心)變換：將三內角平分線分別以其與三邊的交點為旋轉中心同時旋轉的變換。

(五)兩外角平分線及一內角平分線(旁心)變換：將兩外角平分線及一內角平分線分別以其與三邊或邊的延長線的交點為旋轉中心同時旋轉的變換。

五、變換  $n$  次後的三角形：設  $n$  為 2 以上的正整數，對  $\Delta A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$  進行一次變換後，得到的新三角形稱為  $\Delta A_nB_nC_n$ 。



圖三： $\Delta A_0B_0C_0$  作一次變換後形成  $\Delta A_1B_1C_1$

六、下標  $n$ ：與  $\Delta A_nB_nC_n$  相關的物件，例如  $a_n$ 、 $b_n$ 、 $c_n$  表示  $\Delta A_nB_nC_n$  三邊、 $G_n$  表示  $\Delta A_nB_nC_n$  的重心。

七、 $\gamma$ ：中線  $\overline{A_0D_0}$  與邊長  $\overline{B_1C_1}$  長度之比值。

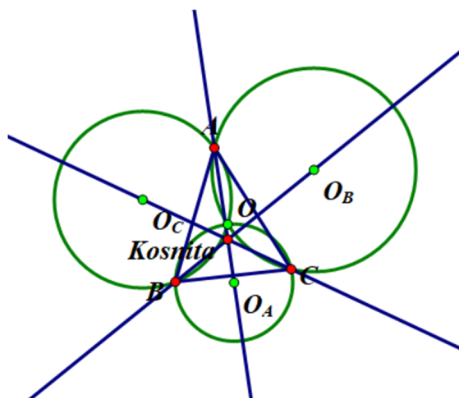
八、變換後的對應點： $P_{n-1}$  到  $\overline{B_{n-1}C_{n-1}}$ 、 $\overline{A_{n-1}C_{n-1}}$ 、 $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$  的距離比例為  $x:y:w$ ，

變換後到  $\overline{B_nC_n}$ 、 $\overline{A_nC_n}$ 、 $\overline{A_nB_n}$  的距離比例亦為  $x:y:w$  的點  $P_n$ ，

稱為  $P_{n-1}$  變換後的對應點。

九、點列：將變換前與變換後的點  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  收集起來形成一個序列，稱為點列，記做  $\{P_n\}$ 。

十、Kosnita 點：在  $\Delta ABC$  中， $O$  為其外心， $\Delta OBC$ 、 $\Delta AOC$  與  $\Delta ABO$  外接圓圓心分別為  $O_A$ 、 $O_B$  與  $O_C$  直線  $AO_A$ 、直線  $BO_B$  與直線  $CO_C$  三線交於一點，該點稱為  $\Delta ABC$  的 Kosnita 點。



圖四： $\Delta ABC$  的 Kosnita 點

## 肆、研究結果

(一)以  $\theta$  為變數，將共點的三線，特別是三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線變換一次，形成新的三角形。探討隨著  $\theta$  改變時三角形的性質

在 Crux Mathematicorum 第 49 卷 10 期[1]的文獻中， $\Delta A_0 B_0 C_0$  的三中線分別以三邊中點為旋轉中心旋轉了  $90^\circ$  得到  $\Delta A_1 B_1 C_1$ 。今考慮本研究的變換，若以旋轉角度  $\theta$  為變數，則  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的三個頂點將隨著  $\theta$  改變位置，三角形的形狀也隨之改變。

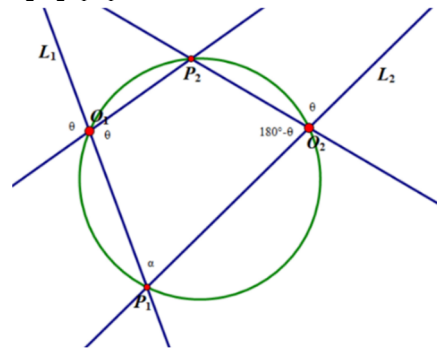
在此情境中，頂點實際上是由兩條旋轉的直線交會而得，因此可以由此開始尋找頂點的軌跡：

引理 1：給定平面上的兩條不平行直線  $L_1$ 、 $L_2$ ，分別在其之上各取一定點  $O_1$ 、 $O_2$ ，以定點為旋轉中心，旋轉通過它的直線，則兩直線的交點軌跡為一個圓。

證明：

給定平面上的兩條不平行直線  $L_1$ 、 $L_2$ ，其中  $L_1$  通過  $O_1$ 、 $L_2$  通過  $O_2$ ，且兩線相交於  $P_1$ 。將  $L_1$  與  $L_2$  分別以  $O_1$ 、 $O_2$  為中心同時旋轉  $\theta$  角，旋轉後兩直線交點為  $P_2$ 。

因為  $\angle P_2 O_2 P_1 + \angle P_2 O_1 P_1 = 180^\circ$ ，所以  $P_2 O_2 P_1 O_1$  四點共圓。■



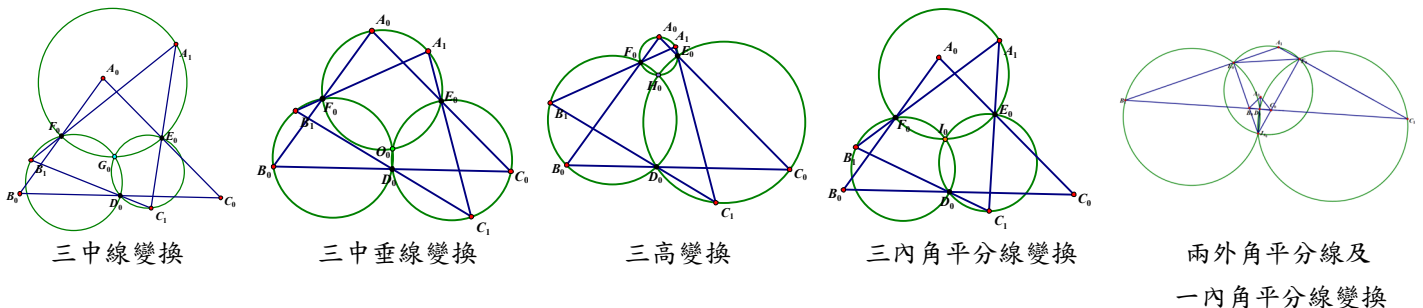
圖五： $P_2 O_2 P_1 O_1$  四點共圓

將引理 1 應用在本研究的變換情境中，我們可以得到以下的性質 2：

性質 2： $\Delta A_0 B_0 C_0$  變換一次後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，其三頂點  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的軌跡為共用同一個參數  $\theta$  的三個圓。

證明：

由引理 1，取  $E_0$ 、 $F_0$  為定點，可得到  $A_1$  軌跡為圓；取  $F_0$ 、 $D_0$  為定點，可得到  $B_1$  軌跡為圓；取  $D_0$ 、 $E_0$  為定點，可得到  $C_1$  軌跡為圓。■



圖六：變換一次後的  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的軌跡共圓

既然  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的軌跡均為圓，我們想探討與三角形有關的某些點，是否也有類似的性質。為了在後續的描述中使用，我們先看下列的定理 3：

定理 3：給定固定比例  $x:y:w$ ， $\Delta A_0 B_0 C_0$  變換一次後，隨著  $\theta$  改變，  
到  $\Delta A_1 B_1 C_1$  三邊距離的比例恆為固定比例  $x:y:w$  的點  $P$  之軌跡為一圓。

證明：

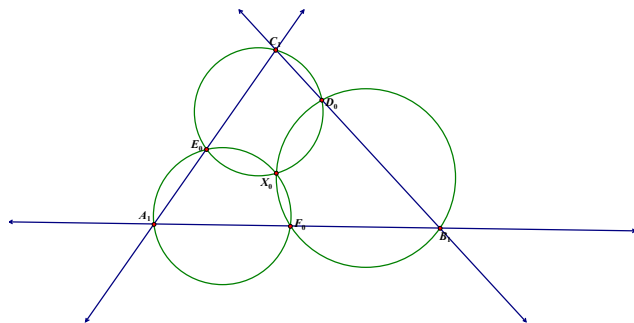
設  $X_0$  為變換前的三線交點。

當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時，設此時的  $A_1 = A'_1$ ，根據性質 2，我們可以得到  $\overline{X_0 A'_1}$  為  $A_1$  軌跡的直徑。

而在一般情況下，因  $\angle A_1 E_0 X_0 = \theta$  或  $\pi - \theta$ ，故  $\angle A_1 A'_1 X_0 = \theta$  或  $\pi - \theta$ ，又  $\angle A'_1 A_1 X_0 = \frac{\pi}{2}$ 。

故  $\overline{X_0 A_1} = \overline{X_0 A'_1} \sin \theta$ 。

又當  $A_1$  與  $X_0$  在直線  $E_0 F_0$  同側時， $B_1$ 、 $C_1$  恰有一點在射線  $\overrightarrow{A_0 E_0}$  或  $\overrightarrow{A_0 F_0}$  上，可知無論  $\theta$  為何， $\Delta A_1 B_1 C_1$  的三內角均不變，如圖七。



圖七：無論  $\theta$  為何， $\Delta A_1 B_1 C_1$  的三內角均不變

故不失一般性，令  $O(0,0)$ 、

$A_1(r_1 \sin \theta \cos \theta, r_1 \sin^2 \theta)$ 、 $B_1(r_2 \sin \theta \cos(\alpha + \theta), r_2 \sin \theta \sin(\alpha + \theta))$ 、 $C_1(r_3 \sin \theta \cos(\beta + \theta), r_3 \sin \theta \sin(\beta + \theta))$

考慮到隨著  $\theta$  改變，到  $\Delta A_1 B_1 C_1$  三邊距離比例恆為固定比例  $x:y:w$  的點  $P$  之軌跡：

則由三線坐標的性質可得  $P = p_1 A_1 + p_2 B_1 + p_3 C_1$ ，

其中  $p_1 = \frac{a_1 x}{a_1 x + b_1 y + c_1 w}$ ， $p_2 = \frac{b_1 y}{a_1 x + b_1 y + c_1 w}$ ， $p_3 = \frac{c_1 w}{a_1 x + b_1 y + c_1 w}$ ，

且  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  恆為定值，且  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 。

故  $P \begin{pmatrix} p_1 r_1 \sin \theta \cos \theta + p_2 r_2 \sin \theta \cos(\alpha + \theta) + p_3 r_3 \sin \theta \cos(\beta + \theta) \\ p_1 r_1 \sin^2 \theta + p_2 r_2 \sin \theta \sin(\alpha + \theta) + p_3 r_3 \sin \theta \sin(\beta + \theta) \end{pmatrix}$ 。

設  $r = \sqrt{(p_1 r_1 + p_2 r_2 \cos \alpha + p_3 r_3 \cos \beta)^2 + (p_2 r_2 \sin \alpha + p_3 r_3 \sin \beta)^2}$

令  $\cos \phi = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 \cos \alpha + p_3 r_3 \cos \beta}{r}$ 、 $\sin \phi = \frac{p_2 r_2 \sin \alpha + p_3 r_3 \sin \beta}{r}$

有  $p_1 r_1 \sin \theta \cos \theta + p_2 r_2 \sin \theta \cos(\alpha + \theta) + p_3 r_3 \sin \theta \cos(\beta + \theta)$

$= \sin \theta ((p_1 r_1 + p_2 r_2 \cos \alpha + p_3 r_3 \cos \beta) \cos \theta - (p_2 r_2 \sin \alpha + p_3 r_3 \sin \beta) \sin \theta)$

$= \frac{r \sin \theta \cos(\phi + \theta)}{3} = \frac{r(\sin(2\theta + \phi) - \sin \phi)}{6}$

同樣地， $p_1 r_1 \sin^2 \theta + p_2 r_2 \sin \theta \sin(\alpha + \theta) + p_3 r_3 \sin \theta \sin(\beta + \theta)$

$= \sin \theta ((p_2 r_2 \sin \alpha + p_3 r_3 \sin \beta) \cos \theta + (p_1 r_1 + p_2 r_2 \cos \alpha + p_3 r_3 \cos \beta) \sin \theta)$

$= \frac{r \sin \theta \sin(\theta + \phi)}{3} = \frac{r(\cos \phi - \cos(2\theta + \phi))}{6}$

有  $\left( \frac{r(\sin(2\theta + \phi) - \sin \phi)}{6} + \frac{r \sin \phi}{6} \right)^2 + \left( \frac{r(\cos \phi - \cos(2\theta + \phi))}{6} - \frac{r \cos \phi}{6} \right)^2 = \frac{r^2}{36}$

因此  $P$  隨  $\theta$  改變的軌跡為一圓。■



性質 4：設  $X_0$  為變換前的三線交點，考慮變換後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$ 。

$$\text{若 } P_1 = p_1 A_1 + p_2 B_1 + p_3 C_1, \text{ 其中 } p_1 = \frac{a_1 x}{a_1 x + b_1 y + c_1 w}, p_2 = \frac{b_1 y}{a_1 x + b_1 y + c_1 w}, p_3 = \frac{c_1 w}{a_1 x + b_1 y + c_1 w},$$

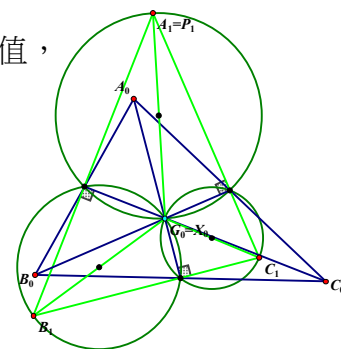
則  $P_1$  隨  $\theta$  改變的軌跡為一圓，且圓心為  $\theta = 90^\circ$  時  $\overline{P_1 X_0}$  的中點、半徑為  $\theta = 90^\circ$  時的  $\frac{\overline{P_1 X_0}}{2}$ 。

證明：

設  $X_0$  為變換前三線交點，考慮到  $P_1 = p_1 A_1 + p_2 B_1 + p_3 C_1$  且  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  恆為定值，根據定理 3 與文獻[2]，變換一次後  $P_1$  點在一圓上。

當  $\theta = 90^\circ$  時，可以看出  $\overline{P_1 X_0}$  恰為半圓的圓周角，故  $\overline{P_1 X_0}$  為此圓的直徑

因此，圓心為當  $\theta = 90^\circ$  時  $\overline{P_1 X_0}$  的中點、半徑為當  $\theta = 90^\circ$  時的  $\frac{\overline{P_1 X_0}}{2}$ 。■



圖八： $\overline{P_1 X_0}$  為直徑

性質 5：變換後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，隨  $\theta$  改變時，其重心  $G_1$ 、外心  $O_1$ 、垂心  $H_1$ 、內心  $I_1$ 、旁心  $J_{A_1}, J_{B_1}, J_{C_1}$  的軌跡均為一圓。

證明：

根據文獻[2]，變換一次後  $\Delta A_1 B_1 C_1$  之五心有下列的性質：

$G_1$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{b_1} : \frac{1}{c_1}$ 。

$O_1$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $\cos A_1 : \cos B_1 : \cos C_1$ 。

$H_1$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $\sec A_1 : \sec B_1 : \sec C_1$ 。

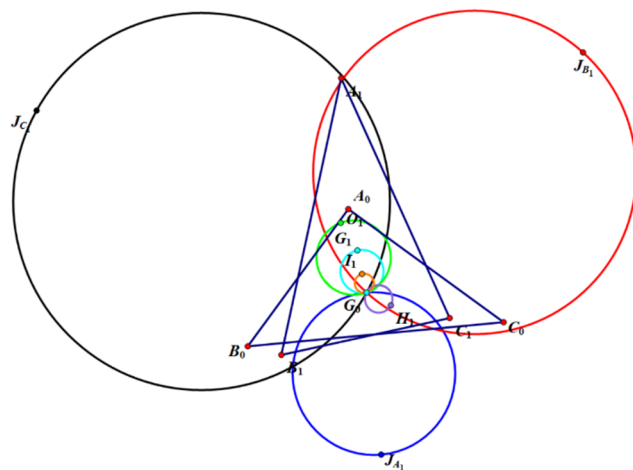
$I_1$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $1:1:1$ 。

$J_{A_1}$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $-1:1:1$ 。

$J_{B_1}$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $1:-1:1$ 。

$J_{C_1}$  到三邊距離比  $x:y:w$  為  $1:1:-1$ 。

根據定理 3，可得  $G_1, O_1, H_1, I_1, J_{A_1}, J_{B_1}, J_{C_1}$  隨著  $\theta$  改變之軌跡均為一圓。■



圖九：軌跡均為一圓

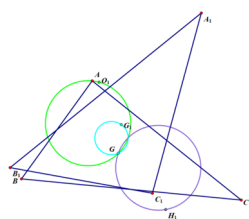
性質 6： $\Delta A_1 B_1 C_1$  的  $O_1, G_1, H_1$  軌跡共根軸。

證明：

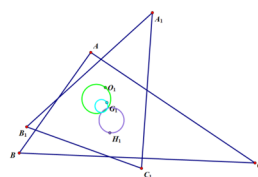
設  $X_0$  為變換前的三線交點。當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時，此時  $\overline{O_1 X_0}$ 、 $\overline{G_1 X_0}$ 、 $\overline{H_1 X_0}$  分別為  $O_1, G_1, H_1$  之直徑，

又因為其三點共線(尤拉線)，故三圓心(或兩圓及一點)共線。

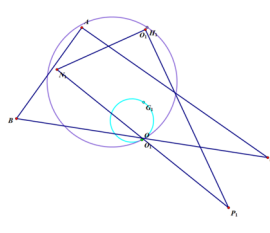
又三圓(或兩圓及一點)有一交點  $X_0$ ，故三圓共根軸。■



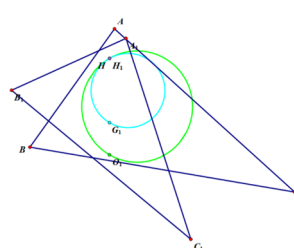
三中線變換



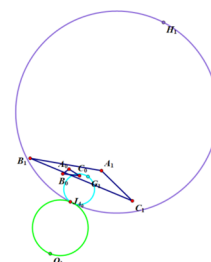
三內角平分線變換



三中垂線變換  
( $O_1$  軌跡為一點)



三高變換  
( $H_1$  軌跡為一點)



兩外角平分線及  
一內角平分線

圖十：性質 6 在任意變換中皆成立

性質 7： $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓上的點以及圓外的八個點使得變換前後的三角形相似，即  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ 。

證明：

由性質 2，我們可以知道，若  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ ，則  $X_0$  同時在某些圓上。

接著分類相似情況討論，有  $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓以及 8 個點：

情況一： $\angle A_1 = \angle A_0$ ， $\angle B_1 = \angle B_0$ ， $\angle C_1 = \angle C_0$  ( $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓與 1 個點，該點恰為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的垂心)

情況二： $\angle A_1 = \angle C_0$ ， $\angle B_1 = \angle A_0$ ， $\angle C_1 = \angle B_0$  (2 個點，其中 1 個恰為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的布洛卡點)

情況三： $\angle A_1 = \angle B_0$ ， $\angle B_1 = \angle C_0$ ， $\angle C_1 = \angle A_0$  (2 個點，其中 1 個恰為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的布洛卡點)

情況四： $\angle A_1 = \angle A_0$ ， $\angle B_1 = \angle C_0$ ， $\angle C_1 = \angle B_0$  (1 個點)

情況五： $\angle A_1 = \angle C_0$ ， $\angle B_1 = \angle B_0$ ， $\angle C_1 = \angle A_0$  (1 個點)

情況六： $\angle A_1 = \angle B_0$ ， $\angle B_1 = \angle A_0$ ， $\angle C_1 = \angle C_0$  (1 個點)

情況一：將  $A_0$ 、 $B_0$  與  $C_0$  分別對直線  $B_0 C_0$ 、直線  $A_0 C_0$  與直線  $A_0 B_0$  對稱，該點稱為  $A_0'$ 、 $B_0'$  與  $C_0'$ 。

則  $X_0$  在  $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓或同時在  $\Delta A_0' B_0 C_0$  外接圓與  $\Delta B_0' A_0 C_0$  外接圓上(非頂點)，

故滿足情況一的  $X_0$  點集為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓(非頂點)與一點，其中該點為垂心。

情況二：作  $\overline{B_0 C_0}$  中垂線，作過  $C_0$  且  $\overline{A_0 C_0}$  垂直的直線，以兩直線交點為圓心，作過  $B_0$ 、 $C_0$  兩點的圓。

若要滿足情況二， $X_0$  必在該圓以及其對  $\overline{B_0 C_0}$  鏡射所形成的圓上。利用同樣的作法作出其他四圓，最多有兩點(非頂點)是三點共圓，兩點接滿足情況二條件，其中一點為第一布洛卡點。

情況三：只有第二布洛卡點與三圓分別對圓內  $\Delta A_0 B_0 C_0$  三邊鏡射，新三圓交點滿足情況三。

情況四：將點  $A_0$  對稱  $\overline{B_0 C_0}$  得到  $A_0'$ ，若要滿足情況四，則  $X_0$  在  $\Delta A_0' B_0 C_0$  外接圓上。點  $B_0$  對稱  $\overline{B_0 C_0}$  的高得到點  $B_0'$ ，接著將  $B_0'$  對稱  $\overline{A_0 B_0}$  得到  $B_0''$ ，若要滿足情況四，則  $X_0$  在  $\Delta A_0 B_0' B_0$  外接圓或  $\Delta A_0 B_0'' B_0$  外接圓上；同樣將點  $C_0$  對稱  $\overline{B_0 C_0}$  的高得到點  $C_0'$ ，接著將  $C_0'$  對稱  $\overline{A_0 B_0}$  得到  $C_0''$ ，若要滿足情況四，則  $X_0$  在  $\Delta A_0 C_0' C_0$  外接圓、 $\Delta A_0 C_0'' C_0$  外接圓上。這樣的  $X_0$  只有一個。

接著我們討論  $X_0$  的三線坐標， $R_0$  表示  $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓半徑。

$$\begin{aligned} \overline{A_0 X_0} &= \frac{2 \left( \frac{b_0}{2 \sin C_0} \right) \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \sin(2A_0)}{\sqrt{\left( \frac{b_0}{2 \sin C_0} \right)^2 + \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{b_0}{2 \sin C_0} \right) \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \cos(2A_0)}} \\ &= \frac{2R_0^2 (2 \sin A_0 \cos A_0)}{\sqrt{\left( \frac{R_0 b_0}{c_0} \right)^2 + \left( \frac{R_0 c_0}{b_0} \right)^2 - 2R^2 \cos(2A_0)}} = \frac{2a_0 \cos A_0}{\sqrt{\left( \frac{b_0}{c_0} \right)^2 + \left( \frac{c_0}{b_0} \right)^2 - 2 \cos(2A_0)}} = \frac{2a_0 b_0 c_0 \cos A_0}{\sqrt{b_0^4 + c_0^4 - 2b_0^2 c_0^2 \cos(2A_0)}} \\ &= \frac{2a_0 b_0 c_0 \cos A_0}{\sqrt{b_0^4 + c_0^4 - 2b_0^2 c_0^2 (2 \cos^2 A_0 - 1)}} = \frac{2a_0 b_0 c_0 \cos A_0}{\sqrt{(b_0^2 + c_0^2)^2 - 4b_0^2 c_0^2 \cos^2 A_0}} = \frac{2a_0 b_0 c_0 \cos A_0}{\sqrt{a_0^2 (b_0^2 + c_0^2 + 2b_0 c_0 \cos A_0)}} \end{aligned}$$

$$\overline{B_0 X_0} = \frac{2R_0 \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \sin A_0}{\sqrt{R_0^2 + \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right)^2 + 2R_0 \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \cos A_0}} = \frac{a_0 c_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + 2b_0 c_0 \cos A_0}}$$

$$\text{同樣地，} \overline{C_0 X_0} = \frac{2R_0 \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \sin A_0}{\sqrt{R_0^2 + \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right)^2 + 2R_0 \left( \frac{c_0}{2 \sin B_0} \right) \cos A_0}} = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + 2b_0 c_0 \cos A_0}}$$



$$\begin{aligned} & \text{而面積比為 } \overline{B_0Y} \cdot \overline{C_0X_0} \sin A_0 : \overline{A_0X_0} \cdot \overline{C_0X_0} \sin C_0 : \overline{A_0X_0} \cdot \overline{B_0X_0} \sin B_0 = \frac{\sin A_0}{\overline{A_0X_0}} : \frac{\sin C_0}{\overline{B_0X_0}} : \frac{\sin B_0}{\overline{C_0X_0}} \\ & = \frac{\sqrt{a_0^2(b_0^2 + c_0^2 + 2b_0c_0 \cos A_0)} \sin A_0}{2a_0b_0c_0 \cos A_0} : \frac{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + 2b_0c_0 \cos A_0} \sin C_0}{a_0c_0} : \frac{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + 2b_0c_0 \cos A_0} \sin B_0}{a_0b_0} \\ & = \frac{a_0}{2b_0c_0 \cos A_0} : \frac{1}{a_0} : \frac{1}{a_0} = a_0^2 : 2b_0c_0 \cos A_0 : 2b_0c_0 \cos A_0, \text{ 故 } X_0 = a_0 \sec A_0 : 2c_0 : 2b_0. \end{aligned}$$

情況五：同理， $X_0 = 2c_0 : b_0 \sec B_0 : 2a_0$  滿足情況五。

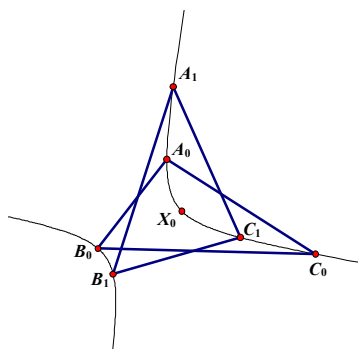
情況六：同理， $X_0 = 2b_0 : 2a_0 : c_0 \sec C_0$  滿足情況六。■

情況一-1：△A <sub>0</sub> B <sub>0</sub> C <sub>0</sub> 外接圓	情況一-2：△A <sub>0</sub> B <sub>0</sub> C <sub>0</sub> 垂心	情況二-1：第一布洛卡點
情況二-2	情況三-1：第二布洛卡點	情況三-2
情況四	情況五	情況六

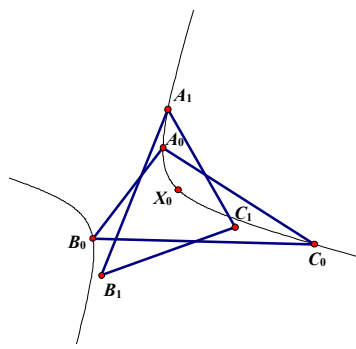
圖十一：八個點使得變換前後的三角形相似

猜測 8\*：本猜測未提出完整證明

設  $X_0$  為三線交點，由  $\triangle A_0B_0C_0$  變換一次後得到  $\triangle A_1B_1C_1$ ，對於  $A_0$ 、 $B_0$ 、 $C_0$ 、 $X_0$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  七點，如果有其中六點在同一個圓錐曲線上，那麼剩下的第七個點也在同一個圓錐曲線上。



圖十二：七點都在同一個圓錐曲線上



圖十三： $B_1$ 、 $C_1$  兩點不在圓錐曲線上

這個有趣的現象可由拉動圖形看到可能會成立，但未提出完整證明，我們將其列為研究展望。

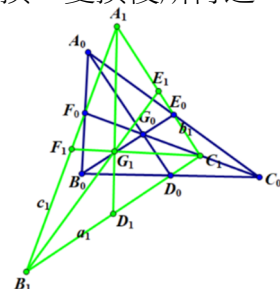
上述性質描述了不論使用何種變換均有的性質。以下我們以 $\theta$ 為變數，分別看以不同特殊直線(共點的三線：三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線)變換一次時，會具有哪些性質。

### 1. 三中線變換

給定 $\Delta A_0 B_0 C_0$ ，其外心為 $O_0$ ，重心為 $G_0$ ，內心為 $I_0$ ，垂心為 $H_0$ 。作 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 的三中線，並將線段延伸為直線 $\overline{A_0 D_0}$ 、 $\overline{B_0 E_0}$ 、 $\overline{C_0 F_0}$ ，對三中線分別以三中點為旋轉中心，將三中線同時逆時針旋轉 $\theta$ 角( $\theta = \angle G_0 D_0 B_1 = \angle G_0 E_0 C_1 = \angle G_0 F_0 A_1$ )，得到三條旋轉後的直線。將這三條旋轉後的直線作為新三角形的三個邊，可以圍成新的封閉三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 。我們將這個過程稱為進行一次三中線變換。變換後所得之三條直線圍成 $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，其重心為 $G_1$ ，外心為 $O_1$ ，內心為 $I_1$ ，垂心為 $H_1$ 。

從圖形中觀察到 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 似乎與 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 相似，  
我們根據這個觀察，逐步推論並證明出以下性質：

圖十四： $\Delta A_0 B_0 C_0$ 與 $\Delta A_1 B_1 C_1$



引理 9：在 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 與 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 中， $\frac{\overline{A_0 G_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0 G_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0 G_0}}{c_1}$ 。

(也就是將 $\overline{A_0 G_0}$ 、 $\overline{B_0 G_0}$ 、 $\overline{C_0 G_0}$ 平移所形成的三角形與 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 相似。)

證明：

在四邊形 $A_1 E_0 G_0 F_0$ 中，有 $\angle A_1 E_0 G_0 + \angle A_1 F_0 G_0 = 180^\circ$ 或 $\angle A_1 E_0 G_0 = \angle A_1 F_0 G_0$ 。

故 $\angle A_1 + \angle E_0 G_0 F_0 = 180^\circ$ 或 $\angle A_1 = \angle E_0 G_0 F_0$ 。

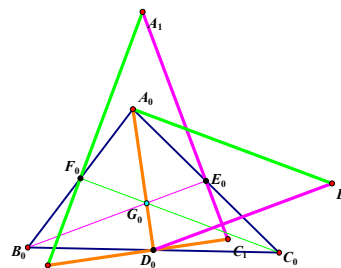
故 $\frac{\overline{A_0 G_0}}{\sin \angle B_0 G_0 C_0} = \frac{\overline{A_0 G_0}}{\sin \angle E_0 G_0 F_0} = \frac{\overline{A_0 G_0}}{\sin A_1}$ ，同理 $\frac{\overline{B_0 G_0}}{\sin \angle A_0 G_0 C_0} = \frac{\overline{B_0 G_0}}{\sin B_1}$ ， $\frac{\overline{C_0 G_0}}{\sin \angle A_0 G_0 B_0} = \frac{\overline{C_0 G_0}}{\sin C_1}$ 。

根據拉密定理有 $\frac{\overline{A_0 G_0}}{\sin \angle B_0 G_0 C_0} = \frac{\overline{B_0 G_0}}{\sin \angle A_0 G_0 C_0} = \frac{\overline{C_0 G_0}}{\sin \angle A_0 G_0 B_0}$ 。

根據正弦定理有 $\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{b_1}{\sin B_1} = \frac{c_1}{\sin C_1}$ 。

將兩式相除有 $\frac{\overline{A_0 G_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0 G_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0 G_0}}{c_1}$ 。■

同樣的我們也有 $\frac{\overline{A_0 D_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0 E_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0 F_0}}{c_1}$ 。



圖十五：平移所形成的三角形與 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 相似

性質 10：在 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 與 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 中，設 $G_0$ 到 $\overline{B_1 C_1}$ 、 $\overline{A_1 C_1}$ 、 $\overline{A_1 B_1}$ 三邊距離為 $x$ 、 $y$ 、 $w$ ，

當三中線同時旋轉 $\theta$ 角時， $\frac{\overline{A_0 D_0}}{x} = \frac{\overline{B_0 E_0}}{y} = \frac{\overline{C_0 F_0}}{w} = 3 \csc \theta$ ，且 $\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{y} = \frac{c_1}{w}$ 。

即 $G_0$ 為 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 的陪位重心。

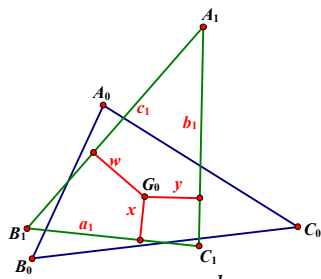
證明：

因 $\theta = \angle G_0 D_0 B_1 = \angle G_0 E_0 C_1 = \angle G_0 F_0 A_1$ ，故 $\frac{\overline{G_0 D_0}}{x} = \frac{\overline{G_0 E_0}}{y} = \frac{\overline{G_0 F_0}}{w} = \csc \theta$ ，故

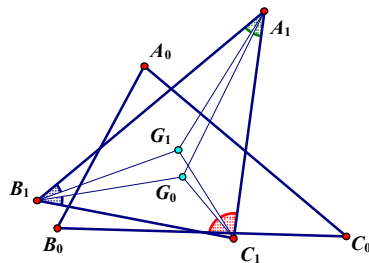
$\frac{\overline{A_0 D_0}}{x} = \frac{\overline{B_0 E_0}}{y} = \frac{\overline{C_0 F_0}}{w} = 3 \csc \theta$ 。

又根據引理 9，我們有 $\frac{\overline{A_0 G_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0 G_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0 G_0}}{c_1}$ ，故 $\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{y} = \frac{c_1}{w}$ 。

故 $G_0$ 在 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 的三線坐標為 $(a_1, b_1, c_1)$ ，根據文獻[2]可知 $G_0$ 為 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 的陪位重心。■



圖十六： $\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{y} = \frac{c_1}{z}$



圖十七： $G_0$  為  $\triangle A_1B_1C_1$  的陪位重心

性質 11：設  $\frac{1}{\gamma} = \frac{\overline{A_0D_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0E_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0F_0}}{c_1}$ ，當三中線同時旋轉  $\theta$  角時， $\frac{1}{\gamma} = \frac{6[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]}{\sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}$ 。

證明：

根據性質 10，我們有  $[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}] = \frac{\sin \theta}{6\gamma} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ ，將其移項得到  $\frac{1}{\gamma} = \frac{6[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]}{\sin \theta (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}$ 。

根據引理 9，令  $\overline{E_0L}$ 、 $\overline{LB_0}$  為  $\overline{A_0D_0}$ 、 $\overline{C_0F_0}$  平移所形成，平移所形成的三角形稱作  $\triangle E_0B_0L$  作  $\overline{B_0K}$  平行  $\overline{G_0A_0}$ ，其中  $K$  在直線  $G_0A_0$  上。

在  $\triangle A_0F_0G_0$  和  $\triangle B_0KF_0$  中：

因為  $\angle A_0F_0G_0 = \angle B_0F_0K$ ， $\angle G_0A_0F_0 = \angle KB_0F_0$ ， $\overline{A_0F_0} = \overline{B_0F_0}$ ，所以  $\triangle A_0F_0G_0 \cong \triangle B_0KF_0$  (ASA)。

故可得  $3[\triangle G_0KB_0 \text{面積}] = [\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]$ 。

因為  $\triangle E_0B_0L \sim \triangle G_0KB_0$  (SSS)，所以  $\frac{9}{4}[\triangle G_0KB_0 \text{面積}] = [\triangle E_0B_0L \text{面積}]$ 。

故可得  $[\triangle E_0B_0L \text{面積}] = \frac{3}{4}[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]$ 。

根據引理 9、中線定理及上述證明，我們可以得到：

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{6\left(\frac{3}{4}[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]\right)}{\sin \theta \left(\frac{1}{2}\left(b_0^2 + c_0^2 - \frac{1}{2}a_0^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_0^2 + c_0^2 - \frac{1}{2}b_0^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_0^2 + b_0^2 - \frac{1}{2}c_0^2\right)\right)} = \frac{6[\triangle A_0B_0C_0 \text{面積}]}{\sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}。 \blacksquare$$

在已知三角形相似的前提下，我們可以進一步探討其邊長的旋轉與伸縮情形如下：

定理 12：當三中線同時旋轉  $\theta$  角時，在  $\triangle A_1B_1C_1$  中， $\overrightarrow{B_1C_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}}{2} \right)$ ，

$$\overrightarrow{C_1A_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{B_0C_0} + \overrightarrow{B_0A_0}}{2} \right)， \overrightarrow{A_1B_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{C_0A_0} + \overrightarrow{C_0B_0}}{2} \right)。$$

證明：

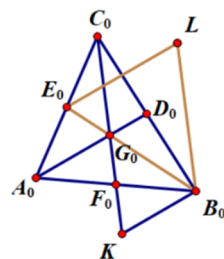
根據性質 11 可以得到  $\left| \overrightarrow{B_1C_1} \right| = \gamma \left( \left| \overrightarrow{A_0D_0} \right| \right)$ 。

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \overrightarrow{A_0D_0} \right) = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}}{2} \right)。$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{C_1A_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{B_0C_0} + \overrightarrow{B_0A_0}}{2} \right)， \overrightarrow{A_1B_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{C_0A_0} + \overrightarrow{C_0B_0}}{2} \right)。 \blacksquare$$

至此我們可以得到：

$\triangle A_1B_1C_1$  為  $\triangle A_0B_0C_0$  三中線分別逆時針旋轉  $\theta$ 、大小縮放為  $\gamma$  倍平移所圍成的封閉三角形。



圖十八：原三角形與  
經由中線平移後形成之三角形

性質 13：給定任意三角形，將其三中線平移所構造的新封閉三角形計算出的  $\gamma$  值，  
與原三角形計算出的  $\gamma$  值相同。

證明：

根據性質 11，可知任意三角形中線構造形成的新的封閉三角形面積為原三角形的  $\frac{3}{4}$

即  $\frac{3}{4}[\Delta A_0 B_0 C_0 \text{面積}] = [\Delta E_0 B_0 L \text{面積}]$ 。

設  $A_0$ 、 $B_0$ 、 $C_0$  對應三中線的線段長為  $d$ 、 $e$ 、 $f$

根據中線定理，我們有： $a_0^2 + b_0^2 = 2f^2 + \frac{c_0^2}{2}$ ， $b_0^2 + c_0^2 = 2d^2 + \frac{a_0^2}{2}$ ， $c_0^2 + a_0^2 = 2e^2 + \frac{b_0^2}{2}$ ，

將三個式子相加，得  $2(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) = 2(d^2 + e^2 + f^2) + \frac{1}{2}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)$

化簡得  $\frac{3}{4}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) = d^2 + e^2 + f^2$

因此新的三角形  $\gamma' = \frac{\sin \theta (d^2 + e^2 + f^2)}{6[\Delta E_0 B_0 L \text{面積}]} = \frac{\frac{3}{4} \times \sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}{\frac{3}{4} \times 6[\Delta A_0 B_0 C_0 \text{面積}]} = \frac{\sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}{6[\Delta A_0 B_0 C_0 \text{面積}]} = \gamma$ 。■

仿照三中線變換的情境，我們續探討以  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的三中垂線及三高做變換的性質。

## 2. 三中垂線變換

以 GSP 作圖觀察時發現，三中垂線變換後的外心仍為同一點(此點為後續研究中，等角螺線的中心)：

定理 14：由三中垂線變換後的外心  $O$  均為同一點，即  $O_0 = O_1$ 。

且當三中垂線同時旋轉  $\theta$  角時， $\Delta A_1 B_1 C_1$  為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  旋轉  $\theta - 90^\circ$ ，縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形。

證明：

因為  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_1 B_1 C_1$  (AA 相似)，

故根據引理 1，如圖十九，我們可以取  $E_0$ 、 $F_0$  兩定點，

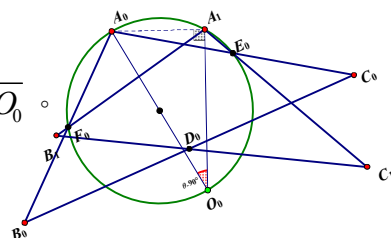
可由對角互補的性質得知  $A_0$ 、 $F_0$ 、 $O_0$ 、 $A_1$ 、 $E_0$  五點共圓，且直徑恰為  $\overline{A_0 O_0}$ 。

又因為  $\angle A_0 A_1 O_0 = 90^\circ$ 、 $\angle O_0 F_0 A_1 = \angle O_0 A_0 A_1 = \theta$ ，故得  $\overline{A_1 O_0} = \overline{A_0 O_0} \sin \theta$

同理  $\overline{B_1 O_0} = \overline{B_0 O_0} \sin \theta$ 、 $\overline{C_1 O_0} = \overline{C_0 O_0} \sin \theta$

又因為  $\overline{A_0 O_0} = \overline{B_0 O_0} = \overline{C_0 O_0}$ ，故  $O_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  外心，即  $O_0 = O_1$ 。

因此  $\Delta A_1 B_1 C_1$  是  $\Delta A_0 B_0 C_0$  以  $O_0$  為中心旋轉  $\theta - 90^\circ$ ，縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形。■



圖十九：原三角形與  
三中垂線變換後  
的三角形外心共點

## 3. 三高變換

定理 15：由三高變換後的垂心  $H$  均為同一點，即  $H_0 = H_1$ 。

且當三高同時旋轉  $\theta$  角時， $\Delta A_1 B_1 C_1$  為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  旋轉  $\theta - 90^\circ$ ，縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形。

證明：

因為  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_1 B_1 C_1$  (AA 相似)，

故根據引理 1，如圖二十，我們可以取  $E_0$ 、 $F_0$  兩定點，

可由對角互補的性質得知  $A_0$ 、 $F_0$ 、 $O_0$ 、 $A_1$ 、 $E_0$  五點共圓，且直徑恰為  $\overline{A_0 H_0}$ 。

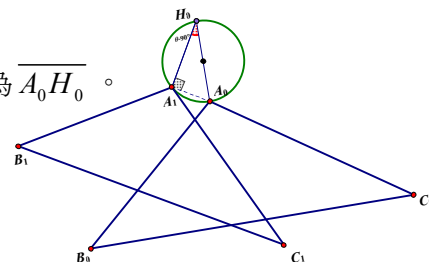
$\Rightarrow \overline{A_0 A_1} \perp \overline{A_1 H_0}$ 、 $\angle H_0 A_0 A_1 = \angle H_0 F_0 A_1 = \theta$

又  $\angle B_1 D_0 H_0 = \theta$ ，所以  $\overline{A_0 A_1} \parallel \overline{B_1 C_1} \perp \overline{A_1 H_0}$ 。

同理可得  $\overline{C_1 A_1} \perp \overline{B_1 H_0}$ 、 $\overline{A_1 B_1} \perp \overline{C_1 H_0}$

$\Rightarrow H_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的垂心  $\Rightarrow H_0 = H_1$

故旋轉角度  $\angle A_0 H_0 A_1 = \theta - 90^\circ$ ，縮放比例  $\frac{\overline{H_0 A_1}}{\overline{H_0 A_0}} = \sin \angle H_0 A_0 A_1 = \sin \theta$ 。■



圖二十：原三角形與  
三高變換後的三角形垂心共點

綜合 2、3. 兩點，我們可以發現三中垂線變換與三高變換，分別具有保持外心及保持垂心位置的性質。因此當我們後續在研究目的(二)中，固定三線同旋轉的角度  $\theta$  進行多次變換時，三中垂線變換的外心或三高變換的垂心，將可以被視為某種變換(旋轉與伸縮的合成)的中心，將與三角形有關的一些點做旋轉並伸縮的線性變換。

#### 4. 三內角平分線變換

當進行三內角平分線變換時，我們發現了類似性質 10 但不同的性質：

定理 16： $I_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。

證明：

$$\vec{A_0 I_0} = \frac{1}{a_0 + b_0 + c_0} \left( b_0 \vec{A_0 B_0} + c_0 \vec{A_0 C_0} \right), \text{ 有 } \left| \vec{A_0 I_0} \right| = \frac{\sqrt{2b_0^2 c_0^2 + 2b_0^2 c_0^2 \cos \alpha_0}}{a_0 + b_0 + c_0} = \frac{2b_0 c_0 \cos \left( \frac{\alpha_0}{2} \right)}{a_0 + b_0 + c_0}, \text{ (因 } \frac{\alpha_0}{2} < \frac{\pi}{2} \text{)}。$$

$$\text{根據內角平分線定理 } \overline{I_0 D_0} = \frac{a_0}{b_0 + c_0} \overline{A_0 I_0}, \text{ 同理 } \overline{I_0 E_0} = \frac{b_0}{a_0 + c_0} \overline{B_0 I_0}, \overline{I_0 F_0} = \frac{c_0}{a_0 + b_0} \overline{C_0 I_0}。$$

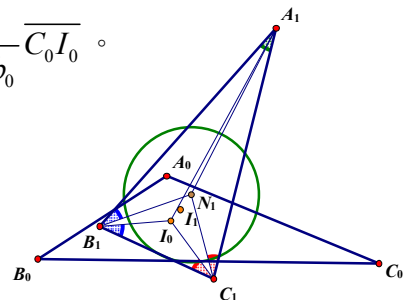
$$\text{故 } \overline{I_0 D_0} : \overline{I_0 E_0} : \overline{I_0 F_0} = \frac{\cos \left( \frac{\alpha_0}{2} \right)}{b_0 + c_0} : \frac{\cos \left( \frac{\beta_0}{2} \right)}{a_0 + c_0} : \frac{\cos \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)}{b_0 + c_0}。$$

$$\text{又根據正弦定理 } \overline{I_0 D_0} : \overline{I_0 E_0} : \overline{I_0 F_0} = \frac{\cos \left( \frac{\alpha_0}{2} \right)}{\sin \beta_0 + \sin \gamma_0} : \frac{\cos \left( \frac{\beta_0}{2} \right)}{\sin \alpha_0 + \sin \gamma_0} : \frac{\cos \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \beta_0 + \sin \gamma_0}$$

$$= \frac{\cos \left( \frac{\alpha_0}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\alpha_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta_0 - \varphi_0}{2} \right)} : \frac{\cos \left( \frac{\beta_0}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\beta_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha_0 - \varphi_0}{2} \right)} : \frac{\cos \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2} \right)}$$

$$= \sec \left( \frac{\beta_0 - \varphi_0}{2} \right) : \sec \left( \frac{\alpha_0 - \varphi_0}{2} \right) : \sec \left( \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2} \right) = \sec(\beta_1 - \varphi_1) : \sec(\alpha_1 - \varphi_1) : \sec(\alpha_1 - \beta_1)。$$

根據文獻[2]，故  $I_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。■



圖二十一：

$I_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。  
(利用九點圓圓心的等角共軛點之三線坐標證明)

#### 5. 兩外角平分線及一內角平分線變換

同樣地，在兩外角平分線與一內角平分線變換有類似的性質。

定理 17：以  $J_{A_0}$  做變換，則  $J_{A_0}$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。

證明：

由外角平分線與邊夾角關係可分成四種情況。

$$\text{分別為 } \frac{\pi - \angle B_0}{2} + \pi - \angle C_0 > \pi \text{ 且 } \frac{\pi - \angle C_0}{2} + \pi - \angle B_0 > \pi,$$

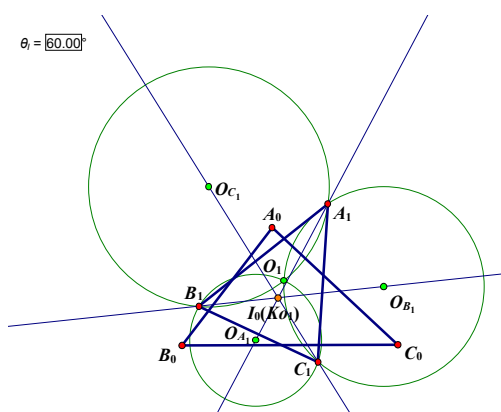
$$\frac{\pi - \angle B_0}{2} + \pi - \angle C_0 > \pi \text{ 且 } \frac{\pi - \angle C_0}{2} + \pi - \angle B_0 < \pi,$$

$$\frac{\pi - \angle B_0}{2} + \pi - \angle C_0 < \pi \text{ 且 } \frac{\pi - \angle C_0}{2} + \pi - \angle B_0 > \pi,$$

$$\text{及 } \frac{\pi - \angle B_0}{2} + \pi - \angle C_0 < \pi \text{ 且 } \frac{\pi - \angle C_0}{2} + \pi - \angle B_0 < \pi$$

第一種情況中， $J_{A_0}$  在  $\Delta A_1 B_1 C_1$  中的三線坐標為  $-\overline{J_{A_0} D_0} : \overline{J_{A_0} E_0} : \overline{J_{A_0} F_0}$

$$= -r_{J_{A_0}} \csc \left( \frac{A_0}{2} + C_0 \right) : r_{J_{A_0}} \csc \left( A_0 - \frac{\pi - C_0}{2} \right) : r_{J_{A_0}} \csc \left( A_0 - \frac{\pi - B_0}{2} \right)$$



圖二十二：

$J_{A_0}$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。

$$= -r_{J_{A_0}} \csc\left(\frac{\pi + C_0 - B_0}{2}\right) : r_{J_{A_0}} \csc\left(\frac{A_0 + \pi - B_0}{2} - \frac{\pi}{2}\right) : r_{J_{A_0}} \csc\left(\frac{A_0 + \pi - C_0}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -r_{J_{A_0}} \sec(B_1 - C_1) : -r_{J_{A_0}} \sec(A_1 - C_1) : -r_{J_{A_0}} \sec(A_1 - B_1) = \sec(B_1 - C_1) : \sec(C_1 - A_1) : \sec(B_1 - A_1)。$$

第二種情況中， $J_{A_0}$  在  $\Delta A_1 B_1 C_1$  中的三線坐標為  $\overline{J_{A_0} D_0} : \overline{J_{A_0} E_0} : -\overline{J_{A_0} F_0}$

$$= r_{J_{A_0}} \csc\left(\frac{A_0}{2} + C_0\right) : r_{J_{A_0}} \csc\left(B_0 - \frac{\pi - C_0}{2}\right) : -r_{J_{A_0}} \csc\left(A_0 - \frac{\pi - B_0}{2}\right)$$

$$= r_{J_{A_0}} \sec(B_1 - C_1) : r_{J_{A_0}} \sec(A_1 - C_1) : (-r_{J_{A_0}})(-\sec(A_1 - B_1)) = \sec(B_1 - C_1) : \sec(C_1 - A_1) : \sec(B_1 - A_1)。$$

同理，第三種情況中， $J_{A_0}$  在  $\Delta A_1 B_1 C_1$  中的三線坐標為  $\sec(B_1 - C_1) : \sec(C_1 - A_1) : \sec(B_1 - A_1)。$

第四種情況  $J_{A_0}$  在  $\Delta A_1 B_1 C_1$  中的三線坐標為  $\overline{J_{A_0} D_0} : \overline{J_{A_0} E_0} : \overline{J_{A_0} F_0}$

$$= r_{J_{A_0}} \csc\left(\frac{A_0}{2} + C_0\right) : r_{J_{A_0}} \csc\left(B_0 - \frac{\pi - C_0}{2}\right) : r_{J_{A_0}} \csc\left(C_0 - \frac{\pi - B_0}{2}\right)$$

$$= r_{J_{A_0}} \sec(B_1 - C_1) : r_{J_{A_0}} \sec(A_1 - C_1) : r_{J_{A_0}} \sec(A_1 - B_1) = \sec(B_1 - C_1) : \sec(C_1 - A_1) : \sec(B_1 - A_1)。$$

故  $J_{A_0}$  是  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。■

若是以  $J_{B_0}$  做變換，則  $J_{B_0}$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點；同理以  $J_{C_0}$  做變換，則  $J_{C_0}$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點。

整理了上述五種變換進行一次變換時的性質後，我們可以固定三線同時旋轉的角度  $\theta$  進行多次變換，觀察這些類型的變換，在進行  $n$  次變換時，三角形及其心會有什麼性質；以及進行  $n$  次變換時，與三角形有關的物件形成的點列是否均落在特殊的曲線上？

## (二) 固定某個旋轉角度 $\theta$ ，進行 $n$ 次變換時，探討變換 $n$ 次後所得的三角形的性質。

### 1. 三中線變換 $n$ 次

當固定中三線同時旋轉的角度  $\theta$  進行多次變換時，

我們可以觀察到三角形序列似乎具有「奇偶分別相似」的狀況：

即  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_2 B_2 C_2 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-2} B_{2k-2} C_{2k-2}$ 、 $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_3 B_3 C_3 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-1} B_{2k-1} C_{2k-1}$ ，其中  $k$  為正整數。

引理 18：三中線變換的  $\Delta A_0 B_0 C_0$  與  $\Delta A_2 B_2 C_2$  相似

證明：

$$\text{根據中線定理有 } 2\left(\frac{9}{4} \overline{A_0 G_0}^2 + \frac{1}{4} a_0^2\right) = b_0^2 + c_0^2, \text{ 故 } \overline{A_0 G_0} = \frac{\sqrt{2b_0^2 + 2c_0^2 - a_0^2}}{3}$$

$$\text{同理 } \overline{B_0 G_0} = \frac{\sqrt{2a_0^2 + 2c_0^2 - b_0^2}}{3}, \overline{C_0 G_0} = \frac{\sqrt{2a_0^2 + 2b_0^2 - c_0^2}}{3},$$

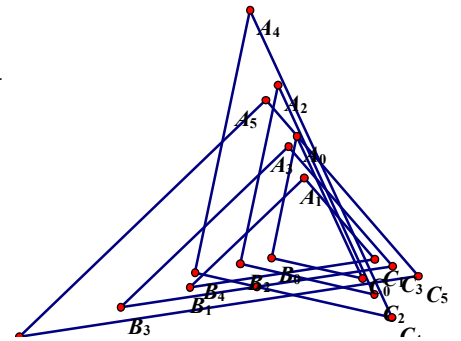
$$\text{根據性質 10, 得 } \frac{\sqrt{2b_0^2 + 2c_0^2 - a_0^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{2a_0^2 + 2c_0^2 - b_0^2}}{b_1} = \frac{\sqrt{2a_0^2 + 2b_0^2 - c_0^2}}{c_1}$$

$$\text{及 } \frac{\sqrt{2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2}}{a_2} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + 2c_1^2 - b_1^2}}{b_2} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + 2b_1^2 - c_1^2}}{c_2}$$

$$\text{因此我們有 } \frac{\sqrt{2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2}}{a_2} = \frac{p\sqrt{2(2a_0^2 + 2c_0^2 - b_0^2)} + 2(2a_0^2 + 2b_0^2 - c_0^2) - (2b_0^2 + 2c_0^2 - a_0^2)}{a_2} = \frac{3pa_0}{a_2},$$

$$\text{同理 } \frac{\sqrt{2a_1^2 + 2c_1^2 - b_1^2}}{b_2} = \frac{3pb_0}{b_2}, \frac{\sqrt{2a_1^2 + 2b_1^2 - c_1^2}}{c_2} = \frac{3pc_0}{c_2}, \text{ 其中 } p \text{ 為一正實數。}$$

$$\text{故 } \frac{a_0}{a_2} = \frac{b_0}{b_2} = \frac{c_0}{c_2}, \text{ 即 } \Delta A_0 B_0 C_0 \text{ 與 } \Delta A_2 B_2 C_2 \text{ 相似 (SSS)。} \blacksquare$$



圖二十三：三角形序列具有奇偶分別相似的性質



應用引理 18，我們可以得到以下的定理 19：

定理 19：經過多次三中線變換後，

$$\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_2 B_2 C_2 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-2} B_{2k-2} C_{2k-2}$$

$$\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_3 B_3 C_3 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-1} B_{2k-1} C_{2k-1} \quad , \text{ 其中 } k \text{ 為正整數}$$

證明：

將引理 18 分別用在  $\Delta A_0 B_0 C_0$ 、 $\Delta A_2 B_2 C_2$ 、 $\dots$ 、 $\Delta A_{2k-2} B_{2k-2} C_{2k-2}$  與  $\Delta A_1 B_1 C_1$ 、 $\Delta A_3 B_3 C_3$ 、 $\dots$ 、

$\Delta A_{2k-1} B_{2k-1} C_{2k-1}$  上，其中  $k$  為正整數

我們可以得到  $\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_2 B_2 C_2 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-2} B_{2k-2} C_{2k-2}$

與  $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_3 B_3 C_3 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-1} B_{2k-1} C_{2k-1}$ ，其中  $k$  為正整數。■

並且我們也可以知道這些相似三角形的邊長比，

應用定理 12，我們可以得到以下的性質 20：

$$\text{性質 20：} \overrightarrow{A_{n+2k} B_{n+2k}} = \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{A_n B_n}$$

$$\overrightarrow{B_{n+2k} C_{n+2k}} = \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{B_n C_n}$$

$$\overrightarrow{C_{n+2k} A_{n+2k}} = \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{C_n A_n}$$

且三中線變換兩次的三角形與原三角形邊長比為  $\frac{3\gamma^2}{4}$

證明：

根據定理 12，我們有

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{B_1 A_1} + \overrightarrow{B_1 C_1}}{2} &= \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{A_0 C_0} + \overrightarrow{B_0 C_0} + \overrightarrow{A_0 B_0} + \overrightarrow{A_0 C_0}}{2} \right) \\ &= \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{3 \overrightarrow{A_0 C_0}}{2} \right) = \frac{3\gamma}{4} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \overrightarrow{A_0 C_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_2 A_2} &= \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{B_1 A_1} + \overrightarrow{B_1 C_1}}{2} \right) \\ &= \left( \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \left( \frac{3\gamma}{4} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \overrightarrow{A_0 C_0} = \frac{3\gamma^2}{4} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{A_0 C_0} \end{aligned}$$

因此三中線變換兩次的三角形與原三角形邊長比為  $\frac{3\gamma^2}{4}$ 、面積比為  $\frac{9\gamma^4}{16}$ 。

又根據定理 19 的相似性質，繼續變換的話可以得到：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{n+2k} B_{n+2k}} &= \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{A_n B_n} \quad , \quad \overrightarrow{B_{n+2k} C_{n+2k}} = \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{B_n C_n} \quad , \\ \overrightarrow{C_{n+2k} A_{n+2k}} &= \left( \frac{-3\gamma^2}{4} \right)^k \begin{bmatrix} \cos 2k\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & \cos 2k\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{C_n A_n} \quad . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

我們可以將上述的定理 12 及定理 19 加以整理，得到性質 21 的結論：

性質 21：

$n$  為偶數時

$$\overrightarrow{A_n B_n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{A_0 B_0}$$

$$\overrightarrow{B_n C_n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{B_0 C_0}$$

$$\overrightarrow{C_n A_n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \overrightarrow{C_0 A_0}$$

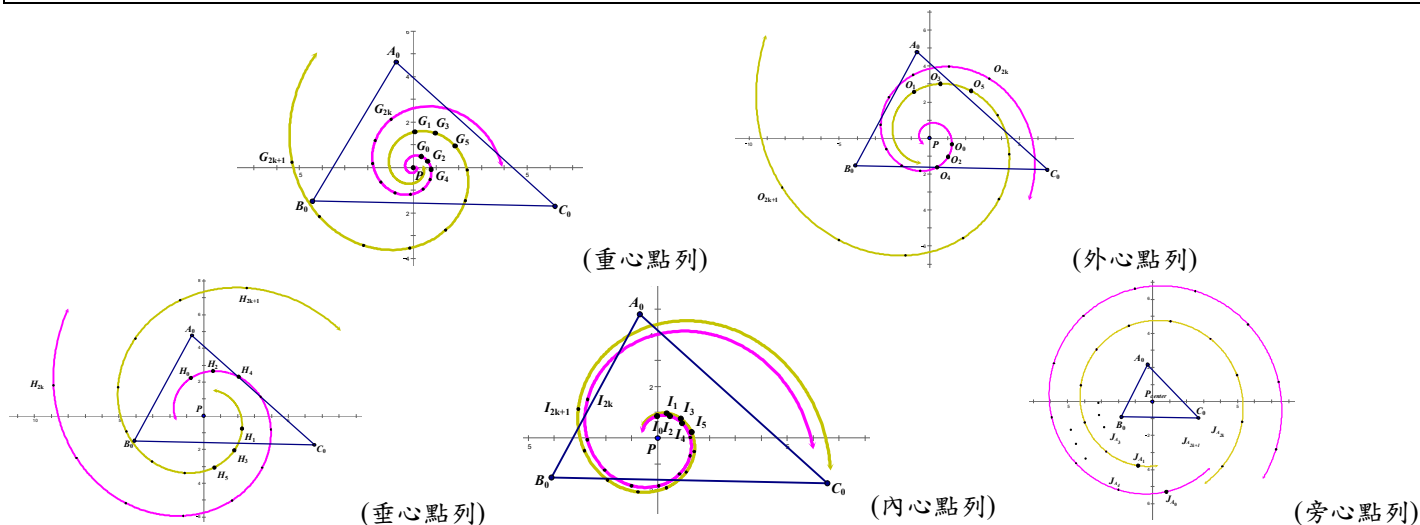
$n$  為奇數時

$$\overrightarrow{A_n B_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} (\overrightarrow{C_0 A_0} + \overrightarrow{C_0 B_0})$$

$$\overrightarrow{B_n C_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} (\overrightarrow{A_0 B_0} + \overrightarrow{A_0 C_0})$$

$$\overrightarrow{C_n A_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} (\overrightarrow{B_0 C_0} + \overrightarrow{B_0 A_0})$$

定理 22：進行三中線變換  $n$  次，則  $\{P_n\}$  點列均位於同一對等角螺線上。



圖二十四：三中線變換的點列均位於同一對等角螺線上

證明：

將圖放至於複數平面上。

不失一般性，取  $n=0$ 。

設  $P_{2k}$  為到  $\Delta A_{2k} B_{2k} C_{2k}$  三邊為比為  $x:y:w$ 、 $P_{2k+1}$  為到  $\Delta A_{2k+1} B_{2k+1} C_{2k+1}$  三邊為比為  $x':y':w'$ ，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。

有  $P_0 - A_0 = p_B (B_0 - A_0) + p_C (C_0 - A_0)$ ，其中  $p_B$ 、 $p_C$  為一定值。

有  $P_1 - A_1 = p'_B (B_1 - A_1) + p'_C (C_1 - A_1)$ ，其中  $p'_B$ 、 $p'_C$  為一定值。

根據性質 10，在  $\Delta A_0 B_0 C_0$  中  $G_1$  為  $G_0$  的陪位重心，故根據文獻[2]

我們有  $G_1 - A_0 = \frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} (B_0 - A_0) + \frac{c_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} (C_0 - A_0)$  及  $G_1 - A_1 = \frac{1}{3} (B_1 - A_1) + \frac{1}{3} (C_1 - A_1)$ 。

故  $G_1 - P_0 = (G_0 - A_0) - (P_0 - A_0) = \left( \frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} - p_B \right) (B_0 - A_0) + \left( \frac{c_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} - p_C \right) (C_0 - A_0)$ ，

$$G_{-1} - P_{-1} = (G_{-1} - A_{-1}) - (P_{-1} - A_{-1}) = \left(\frac{1}{3} - p'_B\right)(B_{-1} - A_{-1}) + \left(\frac{1}{3} - p'_C\right)(C_{-1} - A_{-1})。$$

故根據性質 10 及性質 21，

$$\begin{aligned} G_{-2k-1} - P_{-2k} &= \left(\frac{b_{-2k}^2}{a_{-2k}^2 + b_{-2k}^2 + c_{-2k}^2} - p_B\right)(B_{-2k} - A_{-2k}) + \left(\frac{c_{-2k}^2}{a_{-2k}^2 + b_{-2k}^2 + c_{-2k}^2} - p_C\right)(C_{-2k} - A_{-2k}) \\ &= \left(\frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)^k \left( \left(\frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} - p_B\right)(B_0 - A_0) + \left(\frac{c_0^2}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} - p_C\right)(C_0 - A_0) \right) \\ &= \left(\frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)^k (G_{-1} - P_0)，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。$$

$$G_{-2k-1} - P_{-2k-1} = \left(\frac{1}{3} - p'_B\right)(B_{-1-2k} - A_{-1-2k}) + \left(\frac{1}{3} - p'_C\right)(C_{-1-2k} - A_{-1-2k}) = \left(\frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)^k (G_{-1} - P_{-1})，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。$$

$$P_{-2k-1} - P_{-2k} = \left(\frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)^k (P_{-1} - P_0)，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。$$

$$P_{-2k-2} - P_{-2k} = (P_{-2k-2} - P_{-2k-1}) + (P_{-2k-1} - P_{-2k}) = \left(\frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)^k (P_{-2} - P_0)，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。$$

因此當  $\frac{3\gamma^2}{4} > 1$  時，

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_{-2k} - P_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^k P_{-2j} - P_{-2j+2} \right) = \left( \frac{1}{1 - \frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}} \right) (P_{-2} - P_0) = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) (P_{-2} - P_0)。$$

$$\text{設 } \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-2k} = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) (P_{-2} - P_0) + P_0 = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_{-2} + \left( \frac{4}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_0 = 0，$$

$$\text{有 } \frac{P_0}{P_{-2}} = -\frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4} = \frac{3\gamma^2 e^{(2\theta+\pi)i}}{4}，故  $P_{2k} = \left( \frac{3\gamma^2 e^{(2\theta+\pi)i}}{4} \right)^k P_0。$$$

$$\text{當 } \frac{3\gamma^2}{4} < 1 \text{ 時，} \lim_{k \rightarrow \infty} (P_{2k} - P_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^k P_{2j} - P_{2j+2} \right) = \left( \frac{1}{1 - \frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}}} \right) (P_0 - P_2) = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) (P_0 - P_2)。$$

$$\text{設 } \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k} = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) (P_0 - P_2) + P_2 = \left( \frac{4}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_2 + \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_0 = 0，$$

$$\text{有 } \frac{P_2}{P_0} = -\frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4} = \frac{3\gamma^2 e^{(2\theta+\pi)i}}{4}，故  $P_{2k} = \left( \frac{3\gamma^2 e^{(2\theta+\pi)i}}{4} \right)^k P_0。$$$

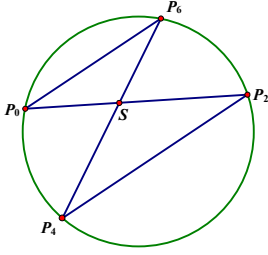
故  $P_{2k}$  與  $P_{2k+1}$  軌跡在等角螺線上，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。

當  $\frac{3\gamma^2}{4} = 1$  時，不失一般性，考慮  $P_0$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 、 $P_6$ 。

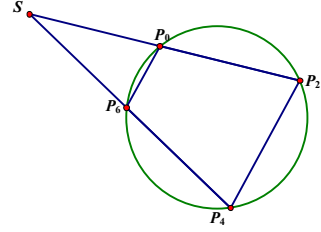
當  $\theta = \frac{k\pi}{6}$  時，其中  $k \in \mathbb{Z}$ ， $P_6 = P_0$ 。當  $\theta \neq \frac{k\pi}{6}$  時，其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。

$$\text{根據 } P_{-2k-2} - P_{-2k} = \left( \frac{4}{-3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right)^k (P_{-2} - P_0)。$$

設直線  $P_0P_2$  與直線  $P_4P_6$  交於一點  $S$ ，如圖二十五與圖二十六：



圖二十五：  $S$  在圓內



圖二十六：  $S$  在圓外

我們有  $\overline{P_0P_2} = \overline{P_2P_4} = \overline{P_4P_6}$  以及  $\angle P_0P_2P_4 = \angle P_2P_4P_6 = 2\theta$ 。

故  $\overline{SP_2} = \overline{SP_4}$ ，故  $\overline{SP_0} = \overline{SP_6}$ ，又  $\angle P_2SP_4 = \angle P_0SP_6$ 。

故  $\Delta P_2SP_4 \sim \Delta P_0SP_6$ 。

故  $\angle P_0P_6S = \angle P_6P_0S = \angle P_0P_2P_4 = \angle P_2P_4P_6$ 。

故  $P_0$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 、 $P_6$  四點共圓。

根據數學歸納法， $\forall k \in \mathbb{Z}$ ， $P_{2k}$  共圓。

同樣地  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ， $P_{1+2k}$  共圓。■

備註 1：

從定理 22 的證明過程中，我們可以發現螺線中心為  $P_{Center} = \left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_{-2} + \left( \frac{4}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_0$

當  $\frac{3\gamma^2}{4} = 1$  時，則螺線會形成一對圓，其中：

$P_{2k}$  在圓半徑  $R = \left| \frac{P_0 - P_2}{2 \cos(2\theta)} \right|$ ，圓心為  $\left( \frac{R}{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right|} \right) \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) + \left( \frac{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right| - R}{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right|} \right) P_2$  的圓上；

$P_{2k+1}$  在圓半徑  $R = \left| \frac{P_0 - P_2}{2 \cos(2\theta)} \right|$ ，圓心為  $\left( \frac{R}{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right|} \right) \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) + \left( \frac{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right| - R}{\left| P_2 - \left( \frac{P_0 + P_4}{2} \right) \right|} \right) P_2$  的圓上，

其中  $k \in \mathbb{Z}$ 。■

備註 2：

不失一般性，令  $A_0(x, y), B_0(0, 0), C_0(1, 0)$ 。

我們有  $[\Delta A_0 B_0 C_0 \text{面積}] = \frac{y}{2}$ 、 $a^2 = 1$ 、 $b^2 = (1-x)^2 + y^2$ 、 $c^2 = x^2 + y^2$ 。

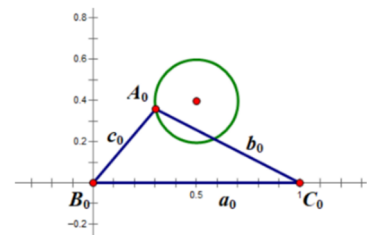
考慮  $\gamma$  為一定值  $\gamma'$  時。

$$\gamma' = \frac{\sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}{6[\Delta A_0 B_0 C_0 \text{面積}]} = \frac{\sin \theta (1 + (1-x)^2 + y^2 + x^2 + y^2)}{3y} = \frac{\sin \theta (2 + 2x^2 + 2y^2 - 2x)}{3y}。$$

$$\text{有 } 1 + x^2 + y^2 - x = \frac{3\gamma' y}{2 \sin \theta}。$$

$$\text{整理後得到 } \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{3\gamma'}{4 \sin \theta} \right)^2 = \frac{9\gamma'^2}{16 \sin^2 \theta} - \frac{3}{4}。$$

故  $A_0$  位在圓心為  $\left( \frac{1}{2}, \frac{3\gamma'}{4 \sin \theta} \right)$ ，半徑為  $\sqrt{\frac{9\gamma'^2}{16 \sin^2 \theta} - \frac{3}{4}}$  的圓上。■



圖二十七：  $A_0$  位於一圓上

## 2. 三中垂線變換 $n$ 次

定理 23：進行三中垂線變換  $n$  次，則  $\{P_n\}$  點列均位於同一條等角螺線上。

證明：

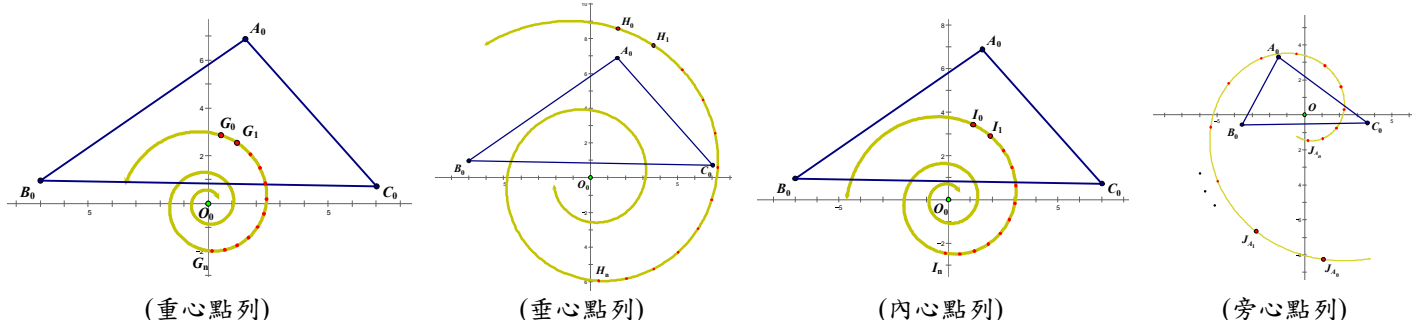
將圖形置於複數平面上， $O$  為原點，

考慮  $P_n = p_1 A_n + p_2 B_n + p_3 C_n$  且  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  恆為定值。

根據定理 14， $\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  為  $\Delta A_n B_n C_n$  由原點為旋轉中心旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$  並縮放  $\sin \theta$  倍，

可以整理出  $P_{n+1} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} P_n \sin \theta$ ，得到  $P_{n+1} = e^{ni(\theta - \frac{\pi}{2})} P_1 \sin^n \theta$ 。■

如圖二十八，變換點列所在的等角螺線方程式整理見後續第 4. 點。



圖二十八：三中垂線變換的點列均位於同一條等角螺線上

## 3. 三高變換 $n$ 次

定理 24：進行三高變換  $n$  次，則  $\{P_n\}$  點列均位於同一條等角螺線上。

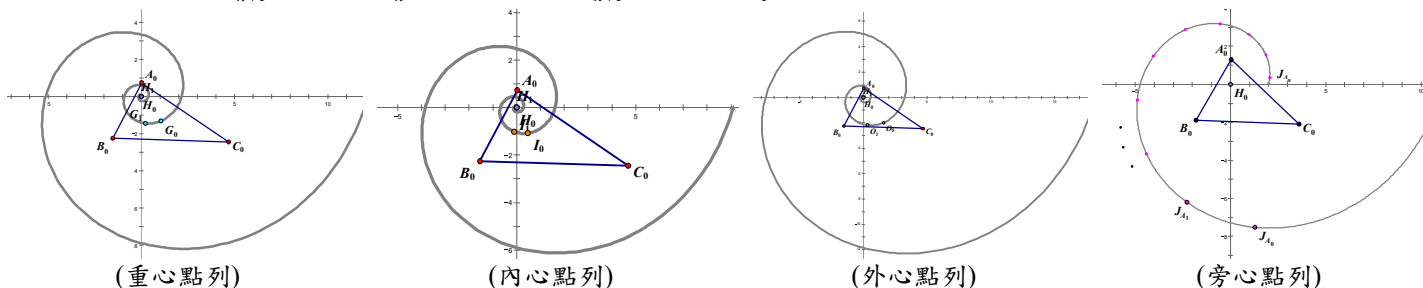
證明：

將圖形至於複數平面上， $O$  為原點，

考慮  $P_n = p_1 A_n + p_2 B_n + p_3 C_n$  且  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  恆為定值。

根據定理 15， $\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  為  $\Delta A_n B_n C_n$  由原點為旋轉中心旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$  並縮放  $\sin \theta$  倍，

我們可以整理出  $P_{n+1} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} P_n \sin \theta$ ，得到  $P_{n+1} = e^{ni(\theta - \frac{\pi}{2})} P_1 \sin^n \theta$ 。■



圖二十九：三高變換的點列均位於同一對等角螺線上

如圖二十九，變換  $n$  次形成的點列所在的等角螺線方程式整理見後續第 4 點。

## 4. 變換 $n$ 次形成的點列所在的等角螺線方程式

前面我們已經證明出以三中垂線  $2k$  次變換後  $P_{2k}$ ，其中  $k \in \mathbb{Z}$ ，在一等角螺線上； $2k+1$  次變換後  $P_{2k+1}$ ，其中  $k \in \mathbb{Z}$ ，在一條等角螺線上(兩點所在等角螺線可能不是同一條)。以三中垂線或三高變換  $n$  次後， $P_n$  在一等角螺線上，其中  $n \in \mathbb{N}$ 。現在來討論螺線的方程式。

首先根據前面所得到的性質，我們考慮平面上一點列  $\{Q_n\}$ ，其中  $n \in \mathbb{N}$ ，以原點  $O$  為中心伸縮  $t$  倍，旋轉  $\alpha$  徑，設  $\theta_n$  為以  $x$  軸正向為始邊， $\overline{OQ_n}$  為終邊的有向角， $r_n = \overline{OQ_n}$ ，其中  $n \in \mathbb{N}$ 。

我們有  $\begin{cases} r_n = r_0 t^n \\ \theta_n = \theta_0 + n\alpha \end{cases}$ ，其中  $n \in \mathbb{N}$ 。

故  $n = \frac{\theta_n - \theta_0}{\alpha}$  ,  $r_n = r_0 t^{\frac{\theta_n - \theta_0}{\alpha}} = r_0 e^{\frac{(\theta_n - \theta_0) \ln t}{\alpha}}$  , 其中  $\frac{\ln t}{\alpha}$  為一常數, 故  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $\{P_n\}$  在  $r(\Theta) = r_0 e^{\frac{(\Theta - \theta_0) \ln t}{\alpha}}$  上。

接著我們透過上述結論分別給出以三中線變換、三中垂線變換及三高變換的點列在哪條等角螺線上。整理出下表：

表 1： $\{P_n\}$  所在的等角螺線

變換類型	三中線變換		三中垂線變換	三高變換
點的名稱	$P_{2k}$	$P_{2k+1}$	$P_n$	$P_n$
$t$	$\frac{3\gamma^2}{4}$		$\sin \theta$	$\sin \theta$
$\alpha$	$2\theta + \pi$		$\theta - \frac{\pi}{2}$	
螺線中心 $P_{center}$	複數平面上 $\left( \frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_{-2} + \left( \frac{4}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}} \right) P_0$		$O_0$	$H_0$
$r_0$	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $P_0$ 到螺線中心之距離	$\Delta A_1 B_1 C_1$ 中 $P_1$ 到螺線中心之距離	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $\overline{P_0 O_0}$	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $\overline{P_0 H_0}$
$\theta_0$	以 $x$ 軸正向為始邊, $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊, $\overline{P_1 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊, $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊, $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角
以螺線中心 $P_{center}$ 為原點, 點集所在之極坐標方程式( $\Theta$ 為變數)	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta - \theta_0)}{2\theta + \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta - \theta_0)}{2\theta + \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{2\ln(\sin \theta)(\Theta - \theta_0)}{2\theta - \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{2\ln(\sin \theta)(\Theta - \theta_0)}{2\theta - \pi}}$

## 5. 三內角平分線變換 $n$ 次

首先我們先討論三內角平分線變換的性質。

$$\text{引理 25: } \angle A_{n+1} = \frac{\angle B_n + \angle C_n}{2}, \angle B_{n+1} = \frac{\angle C_n + \angle A_n}{2}, \angle C_{n+1} = \frac{\angle A_n + \angle B_n}{2}$$

證明：

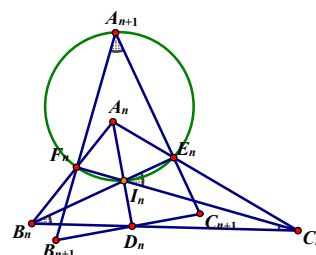
根據引理 1 可得  $A_{n+1}$ 、 $E_n$ 、 $I_n$ 、 $F_n$  共圓，

$$\text{因此 } \angle A_{n+1} = \angle C_n I_n E_n = \frac{\angle B_n + \angle C_n}{2}$$

圖三十：變換前後三角形的角度關係

同理

$$\angle A_{n+1} = \frac{\angle B_n + \angle C_n}{2}, \angle B_{n+1} = \frac{\angle C_n + \angle A_n}{2}, \angle C_{n+1} = \frac{\angle A_n + \angle B_n}{2}。 \blacksquare$$



$$\text{定理 26: } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle C_n = \frac{\pi}{3}。$$

證明：

設  $\angle B_n A_n C_n = \alpha_n$ 、 $\angle A_n B_n C_n = \beta_n$ 、 $\angle A_n C_n B_n = \varphi_n$ 。

根據引理 25，我們有  $\alpha_1 = \angle B_0 I_0 C_0 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \varphi_0)$ ，同理  $\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \varphi_0)$ 、 $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)$ 。

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}。$$

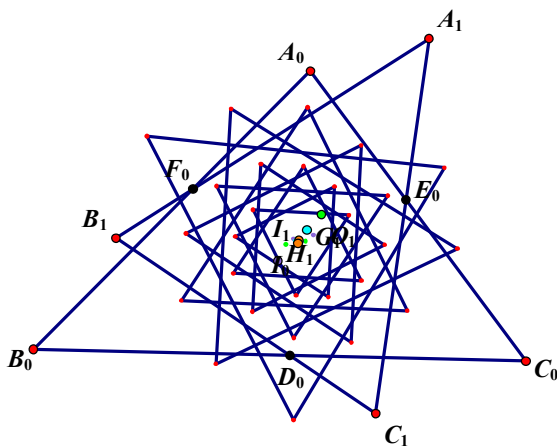


此矩陣特徵值為  $1$ 、 $-\frac{1}{2}$  (重根)。取其特徵向量為  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 、 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 。

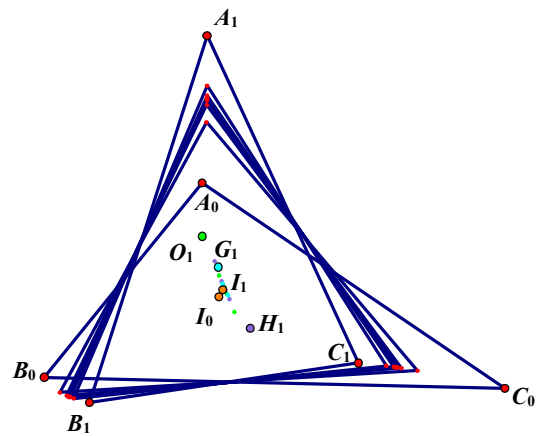
$$\text{設 } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{ 則 } P^{-1} = P^t \text{ (轉置矩陣)}。$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \varphi_n \end{bmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \varphi_0}{3} \\ \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \varphi_0}{3} \\ \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \varphi_0}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

故隨著變換次數增加，三角形最終會趨近於正三角形，如圖三十一與圖三十二。■



圖三十一：當  $\theta \neq 90^\circ$  時，三內角平分線變換  $n$  次



圖三十二：當  $\theta = 90^\circ$  時，三內角平分線變換  $n$  次

引理 27：外接圓直徑為  $2R_n$  的三角形，其 Kosnita 點到三邊距離分別為

$$\frac{2R_n \cdot \gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)}, \frac{2R_n \cdot \gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)}, \frac{2R_n \cdot \gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}。$$

證明：

$$\Delta A_n B_n C_n \text{ 的 Kosnita 點的三線座標為 } Ko_n = \frac{1}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)} : \frac{1}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)} : \frac{1}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

設在外接圓直徑為 1 的三角形中，其 Kosnita 點到三邊距離分別為

$$\frac{\gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)}, \frac{\gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)}, \frac{\gamma_{Ko_n}}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}。$$

而三邊長分別為  $\sin \angle A_n$ 、 $\sin \angle B_n$ 、 $\sin \angle C_n$ 。

我們可以得到

$$2[\Delta A_n B_n C_n \text{面積}] = \sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n = \frac{\gamma_{K_{O_n}} \sin \angle A_n}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)} + \frac{\gamma_{K_{O_n}} \sin \angle B_n}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)} + \frac{\gamma_{K_{O_n}} \sin \angle C_n}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

$$\text{得到 } \frac{1}{\gamma_{K_{O_n}}} = \frac{\frac{\sin \angle A_n}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)} + \frac{\sin \angle B_n}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)} + \frac{\sin \angle C_n}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}}{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n}$$

$$= \frac{\frac{\sin(\angle B_n + \angle C_n)}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)} + \frac{\sin(\angle C_n + \angle A_n)}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)} + \frac{\sin(\angle A_n + \angle B_n)}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}}{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n}$$

$$= \frac{\sin(\angle B_n + \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n) + \sin(\angle C_n + \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n) \cos(\angle B_n - \angle C_n) + \sin(\angle A_n + \angle B_n) \cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n)}{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n \cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

$$= \frac{\sin(\angle B_n + \angle C_n)(\cos(\angle C_n - \angle B_n) - \cos(3\angle A_n)) + \sin(\angle C_n + \angle A_n)(\cos(\angle A_n - \angle C_n) - \cos(3\angle B_n)) + \sin(\angle A_n + \angle B_n)(\cos(\angle B_n - \angle A_n) - \cos(3\angle C_n))}{\frac{1}{2}(\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)) \cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

$$= \frac{(\sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n) - \sin(4\angle A_n) + \sin(2\angle A_n)) + (\sin(2\angle C_n) + \sin(2\angle A_n) - \sin(4\angle B_n) + \sin(2\angle B_n)) + (\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) - \sin(4\angle C_n) + \sin(2\angle C_n))}{(\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)) \cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

$$= \frac{3(\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)) - (\sin(4\angle A_n) + \sin(4\angle B_n) + \sin(4\angle C_n))}{(\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)) \cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\angle B_n - \angle C_n) \cos(\angle C_n - \angle A_n) \cos(\angle A_n - \angle B_n)} \left( 3 - \frac{\sin(4\angle A_n) + \sin(4\angle B_n) + \sin(4\angle C_n)}{\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)} \right)$$

因此外接圓直徑為  $2R_n$  的三角形 Kosnita 點與三邊距離為

$$\frac{2R_n \cdot \gamma_{K_{O_n}}}{\cos(\angle B_n - \angle C_n)}, \frac{2R_n \cdot \gamma_{K_{O_n}}}{\cos(\angle C_n - \angle A_n)}, \frac{2R_n \cdot \gamma_{K_{O_n}}}{\cos(\angle A_n - \angle B_n)}。 \blacksquare$$

性質 28：為  $\Delta A_n B_n C_n$  的三邊長

$$a_n = \frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)} a_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 + 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right),$$

同理可求得  $b_n$ 、 $c_n$ 。(頂點輪換)

證明：

如圖三十三，

$$\text{故 } \overline{B_n I_n} = \frac{\sin\left(\frac{\angle A_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\angle A_n + \angle B_n}{2}\right)} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$\overline{I_n D_n} = \frac{\sin\left(\frac{\angle B_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\angle B_n - \angle C_n}{2}\right)} \cdot \overline{B_n I_n} = \frac{\sin\left(\frac{\angle B_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\angle A_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\angle B_n - \angle C_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\angle C_n}{2}\right)} \cdot \overline{A_n B_n} = \frac{4 \sin\left(\frac{\angle A_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\angle B_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\angle C_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\angle B_n - \angle C_n}{2}\right)} \cdot R_n$$

同理  $\overline{I_n E_n}$ 、 $\overline{I_n F_n}$

這裡同時也驗證了定理 16， $I_n$  為  $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  的 Kosnita 點  $Ko_{n+1}$

$$\begin{aligned}\overline{I_n D_n} : \overline{I_n E_n} : \overline{I_n F_n} &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\angle B_n - \angle C_n}{2}\right)} : \frac{1}{\cos\left(\frac{\angle C_n - \angle A_n}{2}\right)} : \frac{1}{\cos\left(\frac{\angle A_n - \angle B_n}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1})} : \frac{1}{\cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1})} : \frac{1}{\cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})}\end{aligned}$$

根據引理 27，三角形  $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  的外接圓半徑

$$R_{n+1} = \frac{\overline{I_n D_n} \cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1})}{2\gamma_{Ko_{n+1}}} = \frac{\overline{I_n E_n} \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1})}{2\gamma_{Ko_{n+1}}} = \frac{\overline{I_n F_n} \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})}{2\gamma_{Ko_{n+1}}}$$

$$\text{其中 } \frac{1}{2\gamma_{Ko_{n+1}}} = \frac{1}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin(4\angle A_{n+1}) + \sin(4\angle B_{n+1}) + \sin(4\angle C_{n+1})}{\sin(2\angle A_{n+1}) + \sin(2\angle B_{n+1}) + \sin(2\angle C_{n+1})} \right)$$

$$\text{可得外接圓半徑的遞迴式 } R_{n+1} = \frac{\overline{I_n D_n} \cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1})}{2\gamma_{Ko_{n+1}}} \cdot \sin \theta = \frac{2 \sin\left(\frac{\angle A_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\angle B_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\angle C_n}{2}\right) \sin \theta}{\gamma_{Ko_{n+1}}} \cdot R_n$$

其中  $\sin \theta$  為圖形隨著  $\theta$  變化縮放的比例，接著根據定理 26 繼續化簡

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin(4\angle A_{n+1}) + \sin(4\angle B_{n+1}) + \sin(4\angle C_{n+1})}{\sin(2\angle A_{n+1}) + \sin(2\angle B_{n+1}) + \sin(2\angle C_{n+1})} \right) \cdot R_n \\ &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{-\sin(2\angle A_n) - \sin(2\angle B_n) - \sin(2\angle C_n)}{\sin \angle A_n + \sin \angle B_n + \sin \angle C_n} \right) \cdot R_n \\ &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 + \frac{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n}{\cos \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2}} \right) \cdot R_n \\ &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 + 8 \sin \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2} \right) \cdot R_n,\end{aligned}$$

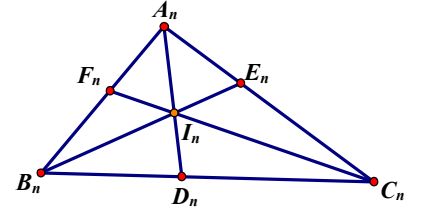
整理得到一般式

$$R_n = R_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 + 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right).$$

最後可以算出邊長的一般式

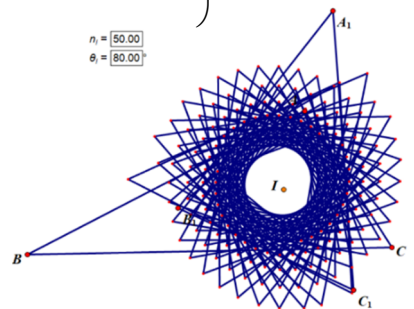
$$a_n = \frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)} a_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 + 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right),$$

同理可求得  $b_n$ 、 $c_n$ 。■



圖三十三：三角形內角平分線與其內心

圖三十四： $\Delta A_n B_n C_n$



性質 29：當  $\theta = 90^\circ$  時， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L > 0$ ；

當  $\theta \neq 90^\circ$  時， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ，故三角形會收斂到一點。

證明：

$$\begin{aligned}
 & \text{由原本的一般式化簡：} R_n = R_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 + 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right) \\
 &= R_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \sin \frac{\angle B_j}{2} \sin \frac{\angle C_j}{2} \cos \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2}}{\cos \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2}} \cdot \frac{1 + 2 \cos \angle A_n + 2 \cos \angle B_n + 2 \cos \angle C_n}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right) \\
 &= R_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\sin \angle A_j \sin \angle B_j \sin \angle C_j}{\sin \angle A_{j+1} \sin \angle B_{j+1} \sin \angle C_{j+1}} \cdot \frac{1 + 2 \cos \angle A_n + 2 \cos \angle B_n + 2 \cos \angle C_n}{4 \cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right) \\
 &= R_0 \cdot \frac{\sin \angle A_0 \sin \angle B_0 \sin \angle C_0}{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n} \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1 + 2 \cos \angle A_n + 2 \cos \angle B_n + 2 \cos \angle C_n}{4 \cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right)
 \end{aligned}$$

首先我們先考慮  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{A_j - B_j}{2}\right)$ 。

$$\text{根據引理 25，} \prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{A_j - B_j}{2}\right) = \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{A_0 - B_0}{(-2)^j}\right) = \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{A_0 - B_0}{2^j}\right)$$

$$\text{在 } A_0 = B_0 \text{ 時，} \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{A_0 - B_0}{2^j}\right) = 1。$$

$$\text{當 } A_0 \neq B_0 \text{ 時，} \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{A_0 - B_0}{2^j}\right) = \frac{\sin\left(\frac{A_0 - B_0}{2^n}\right) \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{A_0 - B_0}{2^j}\right)}{\sin\left(\frac{A_0 - B_0}{2^n}\right)} = \frac{\sin(A_0 - B_0)}{A_0 - B_0} \cdot \frac{A_0 - B_0}{2^n \sin\left(\frac{A_0 - B_0}{2^n}\right)}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{A_j - B_j}{2}\right) = \frac{\sin(A_0 - B_0)}{A_0 - B_0}，$$

$$\text{同理 } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{A_j - C_j}{2}\right) = \frac{\sin(A_0 - C_0)}{A_0 - C_0}，\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{C_j - B_j}{2}\right) = \frac{\sin(C_0 - B_0)}{C_0 - B_0}。$$

$$\text{再來，我們考慮 } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(1 + 2 \cos A_j + 2 \cos B_j + 2 \cos C_j)}{4}。$$

$$\text{有 } \frac{1 + 2 \cos A_j + 2 \cos B_j + 2 \cos C_j}{4} = \frac{3 + 8 \sin \frac{A_j}{2} \sin \frac{B_j}{2} \sin \frac{C_j}{2}}{4}，$$

$$\text{很顯然因三個正弦值皆為正，故 } \frac{3 + 8 \sin \frac{A_j}{2} \sin \frac{B_j}{2} \sin \frac{C_j}{2}}{4} > 0，$$

$$\text{故 } \sin \frac{A_j}{2} \sin \frac{B_j}{2} \sin \frac{C_j}{2} = e^{\ln\left(\sin \frac{A_j}{2} \sin \frac{B_j}{2} \sin \frac{C_j}{2}\right)} = e^{\ln\left(\sin \frac{A_j}{2}\right) + \ln\left(\sin \frac{B_j}{2}\right) + \ln\left(\sin \frac{C_j}{2}\right)}。$$

$$\text{根據詹森不等式 } e^{\ln\left(\sin \frac{A_j}{2}\right) + \ln\left(\sin \frac{B_j}{2}\right) + \ln\left(\sin \frac{C_j}{2}\right)} \leq e^{\frac{3 \ln\left(\frac{1}{3} \left(\sin \frac{A_j}{2} + \sin \frac{B_j}{2} + \sin \frac{C_j}{2}\right)\right)}{3}} \leq e^{\frac{3 \ln\left(\sin \frac{A_j + B_j + C_j}{6}\right)}{3}} = e^{-\ln 8} = \frac{1}{8}，$$

$$\text{故 } \frac{3+8\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{B_j}{2}\sin\frac{C_j}{2}}{4} \leq 1。$$

我們可以得知， $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j)}{4} = e^{\sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right)}$  隨著  $n$  增加而遞減。

由定理 26 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{\pi}{3}$ ，又因  $\cos x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  時連續。

故對任意的正實數  $\epsilon$ ，都存在一正整數  $N$ ，在  $j > N$  時，使得  $\cos A_j$ 、 $\cos B_j$ 、 $\cos C_j \in \left(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon\right)$ 。

故  $j > N$  時， $\ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) \in \left(\ln\left(\frac{2-3\epsilon}{2}\right), 0\right]$ ，設  $s = \frac{1}{\frac{2-3\epsilon}{2} - \ln\left(\frac{2-3\epsilon}{2}\right)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{根據對數函數的凹口性質，} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) &\geq s\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4} - 1\right) \\ &= s\left[\frac{-3+2\left(\frac{1}{2}\cos\left(A_j-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(A_j-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(B_j-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(B_j-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(C_j-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(C_j-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{4}\right] \end{aligned}$$

在  $x \geq 0$ ，我們有  $x \geq \sin x$  以及  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ ，再根據定理 26，我們有

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) &> \frac{s}{4}\left(-3+\left(1-\frac{1}{2}\left(A_j-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)+\left(1-\frac{1}{2}\left(B_j-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)+\left(1-\frac{1}{2}\left(C_j-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)-\sqrt{3}\left(\left|A_j-\frac{\pi}{3}\right|+\left|B_j-\frac{\pi}{3}\right|+\left|C_j-\frac{\pi}{3}\right|\right)\right) \\ &= \frac{s}{4}\left(-\frac{\left(A_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2 \cdot 4^{j-N-1}}-\frac{\left(B_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2 \cdot 4^{j-N-1}}-\frac{\left(C_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2 \cdot 4^{j-N-1}}-\sqrt{3}\left(\frac{\left|A_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right|}{2^{j-N-1}}+\frac{\left|B_j-\frac{\pi}{3}\right|}{2^{j-N-1}}+\frac{\left|C_j-\frac{\pi}{3}\right|}{2^{j-N-1}}\right)\right) \end{aligned}$$

因前後兩項公比分別為  $\frac{1}{4}$  與  $\frac{1}{2}$ ，又因  $\ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right)$  極大值為 0，

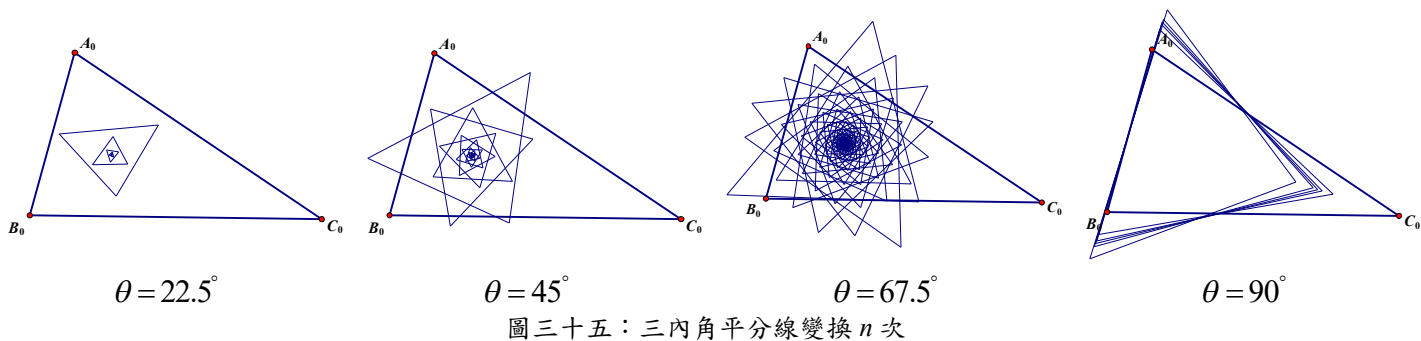
$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{j=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) &= \sum_{j=0}^N \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) \\ &> \sum_{j=0}^N \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right) + \frac{s}{4}\left(-\frac{2}{3}\left(\left(A_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(B_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(C_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)-2\sqrt{3}\left(\left|A_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right|+\left|B_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right|+\left|C_{N+1}-\frac{\pi}{3}\right|\right)\right) \end{aligned}$$

有界，且遞減，故  $\sum_{j=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}\right)$  存在。

故  $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4}$  存在，且  $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1+2\cos A_j+2\cos B_j+2\cos C_j}{4} \neq 0$ 。

故根據性質 28，當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ ，且為正數；

反之  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ，故圖形會收斂到一點，如下圖三十五。■



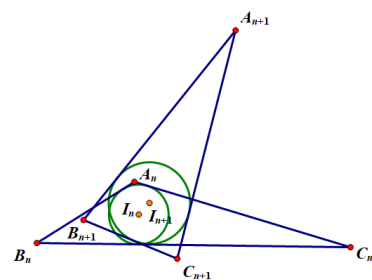
性質 30： $\Delta A_n B_n C_n$  與  $\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  內切圓半徑  $r_n$  與  $r_{n+1}$  滿足  $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\frac{\sin A_{n+1}}{\cos\left(\frac{B_n - C_n}{2}\right)} + \frac{\sin B_{n+1}}{\cos\left(\frac{A_n - C_n}{2}\right)} + \frac{\sin C_{n+1}}{\cos\left(\frac{A_n - B_n}{2}\right)}}{\sin A_{n+1} + \sin B_{n+1} + \sin C_{n+1}} \cdot \sin \theta$ 。

證明：

$$2[\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} \text{面積}] = r_{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}) = \sin \theta (a_{n+1} \overline{I_n D_n} + b_{n+1} \overline{I_n E_n} + c_{n+1} \overline{I_n F_n})$$

$$= r_n \sin \theta \left( a_{n+1} \csc\left(\frac{A_n}{2} + C_n\right) + b_{n+1} \csc\left(\frac{B_n}{2} + A_n\right) + c_{n+1} \csc\left(\frac{C_n}{2} + B_n\right) \right)$$

$$\text{故 } \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\frac{\sin A_{n+1}}{\cos\left(\frac{B_n - C_n}{2}\right)} + \frac{\sin B_{n+1}}{\cos\left(\frac{A_n - C_n}{2}\right)} + \frac{\sin C_{n+1}}{\cos\left(\frac{A_n - B_n}{2}\right)}}{\sin A_{n+1} + \sin B_{n+1} + \sin C_{n+1}} \cdot \sin \theta \quad \blacksquare$$



圖三十六： $r_n$  與  $r_{n+1}$  角度關係

由性質 29，我們知道當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時會收斂到邊長不為零的正三角形，從中我們發現，當  $\angle A_0 = \frac{\pi}{3}$  時，收斂的邊長可以整理如下：

性質 31：當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  且  $\angle A_0 = \frac{\pi}{3}$  時，

$$\text{則 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4a_0(\angle B_0 - \angle C_0)(\angle C_0 - \angle A_0)(\angle A_0 - \angle B_0) \sin \angle B_0 \sin \angle C_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \angle B_0\right)}{\left(\frac{\pi}{3} - \angle B_0\right)^2 \cdot 3 \sin(\angle B_0 - \angle C_0) \sin(\angle C_0 - \angle A_0) \sin(\angle A_0 - \angle B_0)}。$$

同理可求得  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  與  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 。(頂點輪換)

證明：

$$\begin{aligned} \text{由引理 25 知 } 1 + 2 \cos \angle A_j + 2 \cos \angle B_j + 2 \cos \angle C_j &= 2 + 2 \left( \cos \angle B_j + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \angle B_j \right) \right) = 2 + 4 \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \cos \left( \frac{\pi}{3} - \angle B_j \right) \\ &= 2 + 2 \left( 2 \cos^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \angle B_j \right) \right) - 1 \right) = 4 \cos^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \angle B_j \right) \right)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{4a_0 \sin \angle B_0 \sin \angle C_0}{3} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \angle B_j \right) \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \\ &= \frac{4a_0(\angle B_0 - \angle C_0)(\angle C_0 - \angle A_0)(\angle A_0 - \angle B_0) \sin \angle B_0 \sin \angle C_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \angle B_0\right)}{\left(\frac{\pi}{3} - \angle B_0\right)^2 \cdot 3 \sin(\angle B_0 - \angle C_0) \sin(\angle C_0 - \angle A_0) \sin(\angle A_0 - \angle B_0)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

接著我們來討論若其中兩條角平分線為外角平分線的性質。



## 6. 兩外角平分線及一內角平分線變換 $n$ 次

以下性質皆以  $\Delta A_n B_n C_n$  的旁心之一  $J_{A_n}$  為例。

$$\text{性質 32: } \angle A_{n+1} = \frac{\pi + \angle A_n}{2}, \angle B_{n+1} = \frac{\angle C_n}{2}, \angle C_{n+1} = \frac{\angle B_n}{2}。$$

證明：

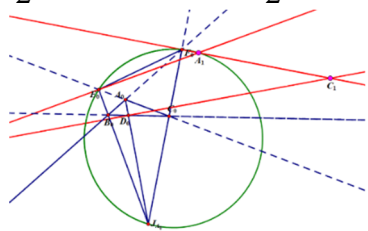
不失一般性，取  $n=0$ 。

首先討論  $\angle A_1$  與  $\angle A_0$  關係，因  $J_{A_0}$ 、 $E_0$ 、 $F_0$ 、 $A_1$  共圓，故  $\angle A_1 = \angle C_0 B_0 J_{A_0} + \angle B_0 C_0 J_{A_0} = \frac{\pi + A_0}{2}$ 。

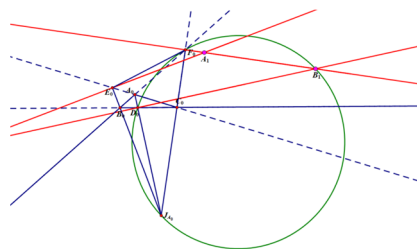
接著討論  $\angle B_1$  與  $\angle C_0$  關係，因  $J_{A_0}$ 、 $D_0$ 、 $F_0$ 、 $B_1$  共圓，

$$\text{故 } \angle B_1 = \angle B_0 J_{A_0} D_0 = \pi - \left( \frac{\angle A_0}{2} + \pi - \frac{\pi - \angle B_0}{2} \right) = \frac{\angle C_0}{2}；\text{同理 } \angle C_1 = \frac{\angle B_0}{2}。$$

$$\text{故 } \angle A_{n+1} = \frac{\pi + \angle A_n}{2}, \angle B_{n+1} = \frac{\angle C_n}{2}, \angle C_{n+1} = \frac{\angle B_n}{2}。 \blacksquare$$



圖三十七： $J_{A_0}$ 、 $E_0$ 、 $F_0$ 、 $A_1$  共圓



圖三十八： $J_{A_0}$ 、 $D_0$ 、 $F_0$ 、 $B_1$  共圓

$$\text{性質 33: } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \pi。$$

證明：

$$\text{由性質 32 可知，} \angle A_n - \pi = \frac{1}{2}(\angle A_{n-1} - \pi)。$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n - \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n (\angle A_0 - \pi) = 0，\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \pi。 \blacksquare$$

性質 34：為  $\Delta A_n B_n C_n$  的三邊長

$$a_n = \frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)} a_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 - 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right)，$$

同理可求得  $b_n$ 、 $c_n$ 。(頂點輪換)

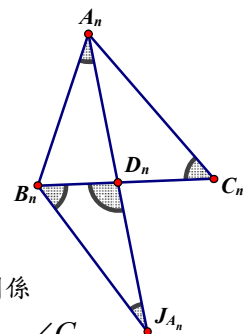
證明：

$$\text{在 } \Delta A_0 B_0 C_0 \text{ 中 } \overline{A_n B_n} = 2R_n \sin \angle C_n、\text{旁心性質 } \angle A_n J_{A_n} B_n = \frac{\angle C_n}{2}，$$

$$\text{因此在 } \Delta A_n B_n J_{A_n} \text{ 中 } \overline{B_n J_{A_n}} = \frac{\sin \frac{\angle A_n}{2}}{\sin \frac{\angle C_n}{2}} \cdot \overline{A_n B_n} = 4R_n \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2}。$$

在  $\Delta B_n J_{A_n} D_n$  中，由  $\overline{B_n J_{A_n}}$  可算出，

$$\overline{J_{A_n} D_n} = \frac{\sin \frac{\pi - \angle B_n}{2}}{\sin \left( \angle B_n + \frac{\angle A_n}{2} \right)} \cdot \overline{B_n J_{A_n}} = 4R_n \frac{\sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2}}{\sin \left( \angle B_n + \frac{\pi - \angle B_n - \angle C_n}{2} \right)} = 4R_n \frac{\sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2}}{\cos \left( \frac{\angle B_n - \angle C_n}{2} \right)}。$$



圖三十九：旁心的角度關係

由定理 16， $J_{A_0}$  為  $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  之 Kosnita 點，

$$\begin{aligned}\overline{D_n J_{A_n}} : \overline{E_n J_{A_n}} : \overline{F_n J_{A_n}} &= \sec\left(\frac{\angle B_n - \angle C_n}{2}\right) : \sec\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\angle A_n}{2}\right) - \frac{\angle C_n}{2}\right) : \sec\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\angle A_n}{2}\right) - \frac{\angle B_n}{2}\right) \\ &= \sec(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) : \sec(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) : \sec(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})\end{aligned}$$

可得出  $\overline{J_{A_n} E_n}$ 、 $\overline{J_{A_n} F_n}$ ，

根據引理 24，三角形  $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  的外接圓直徑  $R_{n+1} = \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\gamma_{Ko_{n+1}}} \cdot R_n$ ，其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_{Ko_{n+1}}} &= \frac{1}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin(4\angle A_{n+1}) + \sin(4\angle B_{n+1}) + \sin(4\angle C_{n+1})}{\sin(2\angle A_{n+1}) + \sin(2\angle B_{n+1}) + \sin(2\angle C_{n+1})} \right) \\ \text{得 } R_{n+1} &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin(4\angle A_{n+1}) + \sin(4\angle B_{n+1}) + \sin(4\angle C_{n+1})}{\sin(2\angle A_{n+1}) + \sin(2\angle B_{n+1}) + \sin(2\angle C_{n+1})} \right) \cdot R_n\end{aligned}$$

接著根據性質 31，

$$\begin{aligned}R_{n+1} &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin(2\angle A_n) + \sin(2\angle B_n) + \sin(2\angle C_n)}{-\sin \angle A_n + \sin \angle B_n + \sin \angle C_n} \right) \cdot R_n \\ &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - \frac{\sin \angle A_n \sin \angle B_n \sin \angle C_n}{\cos \frac{\angle A_n}{2} \sin \frac{\angle B_n}{2} \sin \frac{\angle C_n}{2}} \right) \cdot R_n \\ &= \frac{2 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \sin \theta}{\cos(\angle B_{n+1} - \angle C_{n+1}) \cos(\angle C_{n+1} - \angle A_{n+1}) \cos(\angle A_{n+1} - \angle B_{n+1})} \left( 3 - 8 \sin \frac{\angle A_n}{2} \cos \frac{\angle B_n}{2} \cos \frac{\angle C_n}{2} \right) \cdot R_n,\end{aligned}$$

$$\text{整理得到一般式 } R_n = R_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 - 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right).$$

$$\text{算出邊長 } a_n = \frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)} a_0 \cdot \sin^n \theta \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \left( 3 - 8 \sin \frac{\angle A_j}{2} \cos \frac{\angle B_j}{2} \cos \frac{\angle C_j}{2} \right)}{\cos(\angle B_{j+1} - \angle C_{j+1}) \cos(\angle C_{j+1} - \angle A_{j+1}) \cos(\angle A_{j+1} - \angle B_{j+1})} \right),$$

同理  $b_n$ 、 $c_n$  亦可求得。■

至此我們探討完固定旋轉角度為  $\theta$  時，五種特殊的變換經變換  $n$  次的情形，並可分成兩大類：

(1) 三中線/三中垂線/三高變換皆具有與三角形有關的點列均在等角螺線上的性質。

在三中線變換中，變換奇數次與變換偶數次的三角形分別相似，且與三角形相關的點列均在同一對等角螺線上，且螺線中心為同一點；在三中垂線變換中，變換前後三角形均相似，且這些三角形外心均為同一點，三角形相關點列均在一條等角螺線上；在三高變換中，變換前後三角形均相似，且這些三角形垂心均為同一點，三角形相關點列均在一條等角螺線上。

(2) 在三內角平分線變換中，具有變換前後三內角的角度關係，以及變換多次後三內角的角度均收斂到  $60^\circ$ ，且在  $\theta = 90^\circ$  時，三角形會收斂到邊長一正數的正三角形，反之三角形收斂到一點；在兩外角平分線與一內角平分線中，具有變換前後三內角的角度關係，以及變換多次後作內角平分線的角會收斂到平角。

## 伍、研究結論

(一)以  $\theta$  為變數，將共點的三線，特別是三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線變換一次，形成新的三角形。探討隨著  $\theta$  改變時三角形的性質

1. 我們探討了  $\Delta A_0 B_0 C_0$  經變換一次得到  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，以  $\theta$  為變數時，不分類型的變換所具有的性質：
  - (1)  $\Delta A_0 B_0 C_0$  變換一次後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ， $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的軌跡為共用同一個參數  $\theta$  的三個圓(性質 2)。
  - (2) 給定固定比例  $x:y:w$ ， $\Delta A_0 B_0 C_0$  變換一次後，隨著  $\theta$  改變，到  $\Delta A_1 B_1 C_1$  三邊距離的比例恆為固定比例  $x:y:w$  的點  $P$  之軌跡為一圓(定理 3)。
  - (3) 承上，此圓的直徑為當  $\theta = 90^\circ$  時的  $\overline{PX_0}$  (性質 4)。
  - (4) 特別地包括  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的重心、外心、垂心、內心、旁心的軌跡均為一圓(性質 5)。且重心、外心、垂心的三個軌跡圓共根軸(性質 6)。
  - (5) 我們發現了能使變換前後的三角形相似的點： $\Delta A_0 B_0 C_0$  外接圓上的點以及其他特別的八個點，會使得變換前後的三角形相似，其中包含了垂心及布洛卡點(性質 7)。

接著我們聚焦在五種特別的變換會具有哪些性質。

### 2. 三中線變換：

- (1) 將  $\overline{A_0 G_0}$ 、 $\overline{B_0 G_0}$ 、 $\overline{C_0 G_0}$  平移後所形成的三角形會與  $\Delta A_1 B_1 C_1$  相似(引理 9)。
- (2)  $G_0$  為  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的陪位重心(性質 10)。
- (3) 得到  $\Delta A_0 B_0 C_0$  與  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的邊長關係(性質 11)與方向關係(定理 12)。
- (4) 給定任意三角形，將其三中線平移所構造的新封閉三角形計算出的  $\gamma$  值，與原三角形計算出的  $\gamma$  值相同(性質 13)。

### 3. 三中垂線變換：

- (1) 由三中垂線變換後的外心  $O$  均為同一點，即  $O_0 = O_1$ 。且當三中垂線同時旋轉  $\theta$  角時， $\Delta A_1 B_1 C_1$  為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  旋轉  $90^\circ - \theta$ ，縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形(定理 14)。

### 4. 三高變換：

- (1) 由三高變換後的垂心  $H$  均為同一點，即  $H_0 = H_1$ 。且當三高同時旋轉  $\theta$  角時， $\Delta A_1 B_1 C_1$  為  $\Delta A_0 B_0 C_0$  旋轉  $90^\circ - \theta$ ，縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形(定理 15)。

### 5. 三內角平分線變換：

- (1)  $I_0$  是三內角平分線變換後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點(定理 16)。

### 6. 兩外角平分線一內角平分線變換：

- (1)  $J_{A_0}$  是兩外角平分線一內角平分線變換後的  $\Delta A_1 B_1 C_1$  的 Kosnita 點(定理 17)。

## (二)固定某個旋轉角度 $\theta$ ，進行 $n$ 次變換時，探討變換 $n$ 次後所得的三角形的性質。

關於上述聚焦的五種變換，我們將旋轉角度  $\theta$  固定，進行  $n$  次變換時，得到了以下的性質。

### 1. 三中線變換 $n$ 次：

(1)變換奇數次與偶數次的三角形分別相似(定理 19)。

(2)變換兩次的三角形與變換前的三角形邊長比為  $\frac{3\gamma^2}{4}$  (性質 20)。

(3)變換  $n$  次後的三邊向量以原始  $\Delta A_0 B_0 C_0$  的三邊向量來表示(性質 21)。

### 2. 三中線、三中垂線變換、三高變換 $n$ 次的點列均在等角螺線上：(定理 22、定理 23、定理 24)

變換類型	三中線變換		三中垂線變換	三高變換
點的名稱	$P_{2k}$	$P_{2k+1}$	$P_n$	$P_n$
$t$	$\frac{3\gamma^2}{4}$		$\sin \theta$	$\sin \theta$
$\alpha$	$2\theta + \pi$		$\theta - \frac{\pi}{2}$	
螺線中心 $P_{center}$	複數平面上 $\left(\frac{3\gamma^2 e^{2i\theta}}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)P_{-2} + \left(\frac{4}{4 + 3\gamma^2 e^{2i\theta}}\right)P_0$		$O_0$	$H_0$
$r_0$	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $P_0$ 到螺線中心之距離	$\Delta A_1 B_1 C_1$ 中 $P_1$ 到螺線中心之距離	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $\overline{P_0 O_0}$	$\Delta A_0 B_0 C_0$ 中 $\overline{P_0 H_0}$
$\theta_0$	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_1 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0 P_{center}}$ 為終邊之有向角
以螺線中心 $P_{center}$ 為原點，點集所在之極坐標方程式( $\Theta$ 為變數)	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta - \theta_0)}{2\theta + \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta - \theta_0)}{2\theta + \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{2\ln(\sin \theta)(\Theta - \theta_0)}{2\theta - \pi}}$	$r(\Theta) = r_0 e^{\frac{2\ln(\sin \theta)(\Theta - \theta_0)}{2\theta - \pi}}$

### 3. 三內角平分線變換 $n$ 次：

(1)給出變換前後三角形角度的關係(引理 25)。

(2)隨著變換次數增加， $\Delta A_n B_n C_n$  的形狀會漸漸趨近於正三角形(定理 26)。

(3)給出  $\Delta A_n B_n C_n$  的邊長表示(性質 28)。

(4)當  $\theta \neq 90^\circ$  時，隨著變換次數增加，三角形會收斂到一點(性質 29)；

當  $\theta = 90^\circ$  時，隨著變換次數增加，三角形會收斂到邊長不為 0 的正三角形。並且化簡了若有一個內角為  $60^\circ$  時的邊長長度(性質 31)。

(5)描述了變換前後內切圓半徑的比值(性質 30)。

### 4. 兩外角平分線一內角平分線變換 $n$ 次：

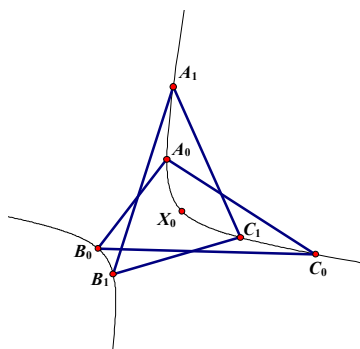
(1)給出變換前後三角形角度的關係(性質 32)。

(2)隨著變換次數增加， $\Delta A_n B_n C_n$  會有一個內角漸漸趨近於平角(性質 34)。

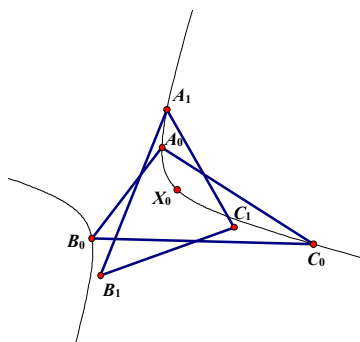
## 陸、研究展望

猜測 8\*：本猜測未提出完整證明

設  $X_0$  為三線交點，由  $\Delta A_0 B_0 C_0$  變換一次後得到  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ，對於  $A_0$ 、 $B_0$ 、 $C_0$ 、 $X_0$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  七點，如果有其中六點在同一個圓錐曲線上，那麼剩下的第七個點也在同一個圓錐曲線上。



圖十二：七點都在同一個圓錐曲線上



圖十三： $B_1$ 、 $C_1$  兩點不在圓錐曲線上

此現象的有趣之處在於「同時」。我們可以任取上述七點中的任五點，得到通過五點的圓錐曲線。當拉動這五個點改變圓錐曲線時，此時第六個點與第七個點似乎會同時落在此圓錐曲線上(如圖十二)、或同時不落在此圓錐曲線上(如圖十三)。

也就是說，似乎不會有僅六個點落在此圓錐曲線上，但第七個點卻落單的情形。

本猜測未提出完整證明，我們後續規劃再尋找研究工具處理。

## 柒、參考文獻

- [1]Shawn Godin and J. Chris Fisher。(2023 年 12 月)。Crux Mathematicorum 49 卷 10 期, pp.539-540
- [2]Wikipedia contributors。Trilinear\_coordinates。 [https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates)
- [3]Dimitris Vartziotis and Doris Bohnet。(2023 年 7 月 26 日)。arXiv, An Angular Transformation of Triangles

## 【評語】 050404

本作品探討三角形的一個特殊的變換：將多種共點三線(如三高、三中垂線、三內角平分線等)，進行幾何變換，比較變換前後的三角形的性質。此外，作者分別連續執行多次三中線變換、三中垂線變換、三垂線變換，得到三角形的三頂點均會落在等角螺線上，且最終收斂到一個點，對於連續執行多次三角平分線變換，作者也能證明三角形會收斂到一個點。整體而言，本作品思路清晰，證明嚴謹，結果充實，是一件好作品。



## 作品海報

三角形內特殊直線變換所構造的軌跡

# 壹、前言

$\Delta A_0B_0C_0$  分別以三線(三中線、三中垂線、三高、三內角平分線或兩外角平分線及一內角平分線，並將線段延伸為直線)與邊或邊的延長線的交點為旋轉中心，將三線同時旋轉  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ )。經上述作圖後得到三條旋轉後的直線(如下圖中三條粉紅色的線)。將這三條旋轉後的直線作為新三角形的三個邊，可以圍成新的封閉三角形  $\Delta A_1B_1C_1$ 。我們將這個過程稱為進行一次變換；...。依此類推，進行  $n$  次變換後，可以得到  $\Delta A_nB_nC_n$ 。我們將變換前與變換後的點  $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$  收集起來形成一個序列，稱為點列，記作  $\{P_n\}$ 。

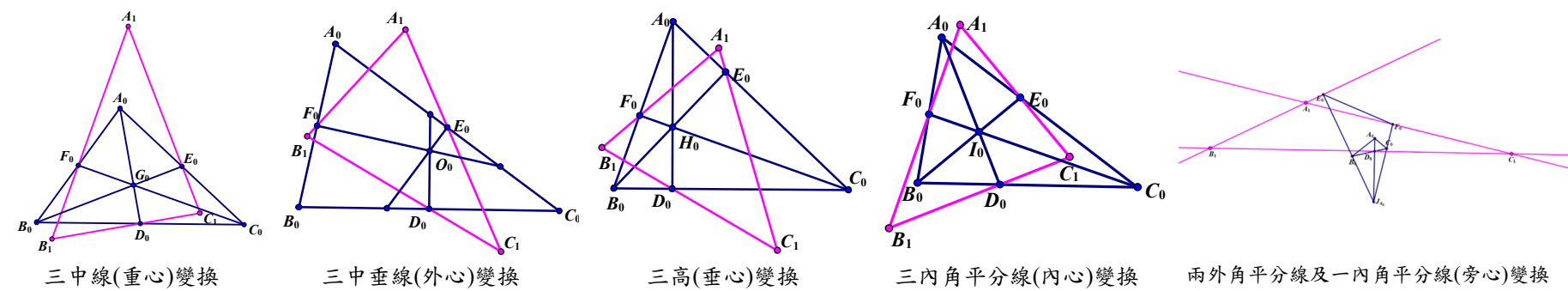


圖 1：五種特殊的變換

- 根據三線選擇的不同，我們定義
1. 三中線(重心)變換：將三中線分別以三邊中點為旋轉中心，同時旋轉的變換。
  2. 三中垂線(外心)變換：將三中垂線分別以三邊中點為旋轉中心，同時旋轉的變換。
  3. 三高(垂心)變換：將三高分別以三垂足為旋轉中心，同時旋轉的變換。
  4. 三內角平分線(內心)變換：將三內角平分線分別以其與三邊的交點為旋轉中心，同時旋轉的變換。
  5. 兩外角平分線及一內角平分線(旁心)變換：將兩外角平分線及一內角平分線分別以其與三邊或邊的延長線的交點為旋轉中心，同時旋轉的變換。

\*本研究之作品說明書及海報的圖表皆由本研究作者團隊自行繪製

# 貳、研究目的

- 一、以  $\theta$  為變數，將共點的三線，特別是三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線變換一次，形成新的三角形。探討隨著  $\theta$  改變時三角形的性質。
- 二、固定某個旋轉角度  $\theta$ ，進行  $n$  次變換時，探討變換  $n$  次後所得的三角形的性質。

# 參、研究結果

- 一、以  $\theta$  為變數，將共點的三線，特別是三中線/三中垂線/三高/三內角平分線/兩外角平分線及一內角平分線變換一次，形成新的三角形。探討隨著  $\theta$  改變時三角形的性質。

性質 2： $\Delta A_0B_0C_0$  變換一次後的  $\Delta A_1B_1C_1$ ，其三頂點  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的軌跡為共用同一個參數  $\theta$  的三個圓。

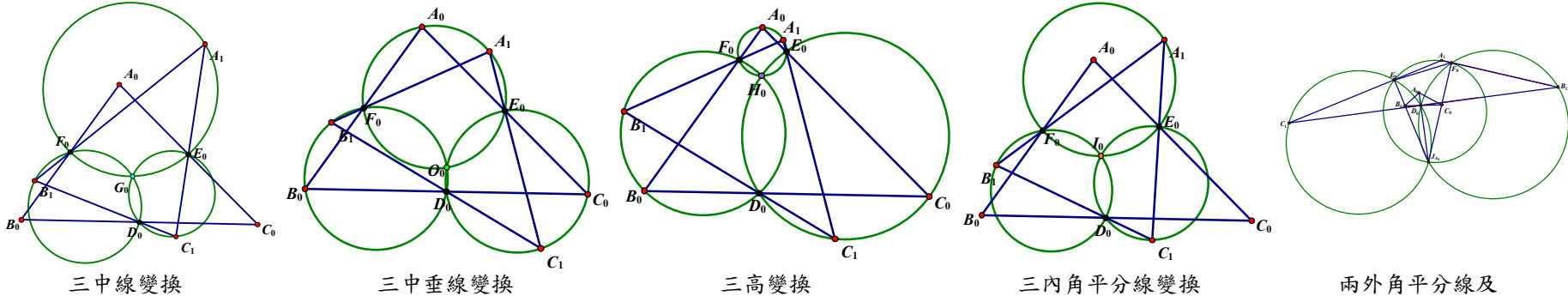


圖 2：變換一次後，三角形三頂點軌跡為共用同一個參數  $\theta$  的三個圓

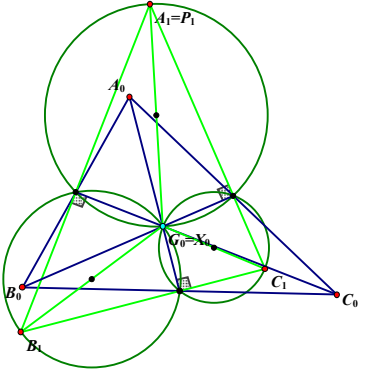
定理 3：給定固定比例  $x : y : w$ ， $\Delta A_0B_0C_0$  變換一次後，隨著  $\theta$  改變，到  $\Delta A_1B_1C_1$  三邊距離比例恆為  $x : y : w$  的點  $P$  之軌跡為一圓。

圖 4： $\overline{P_1X_0}$  為直徑

性質 4：設  $X_0$  為變換前的三線交點，考慮變換後的  $\Delta A_1B_1C_1$ 。

若  $P_1 = p_1A_1 + p_2B_1 + p_3C_1$ ，其中  $p_1 = \frac{a_1x}{a_1x + b_1y + c_1w}$ ,  $p_2 = \frac{b_1y}{a_1x + b_1y + c_1w}$ ,  $p_3 = \frac{c_1w}{a_1x + b_1y + c_1w}$ ，

則  $P_1$  隨  $\theta$  改變的軌跡為一圓，且當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時， $\overline{P_1X_0}$  為圓的直徑。



性質 5：變換後的  $\Delta A_1B_1C_1$ ，隨  $\theta$  改變時，其重心  $G_1$ 、外心  $O_1$ 、垂心  $H_1$ 、內心  $I_1$ 、旁心  $J_{A_1}, J_{B_1}, J_{C_1}$  的軌跡均為一圓。

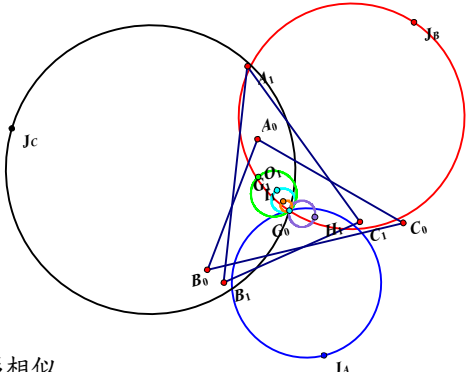


圖 5：軌跡均為一圓

性質 7： $\Delta A_0B_0C_0$  外接圓上的點以及其他的八個點使得變換前後的三角形相似，即  $\Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta A_1B_1C_1$ 。

表一： $\Delta A_0B_0C_0$  外接圓上的點以及其他的八個點使得變換前後的三角形相似

	情況 1-2: $\Delta A_0B_0C_0$ 垂心	情況 2-1: 第一布洛卡點	情況 2-2	情況 3-1: 第二布洛卡點
情況 1-1: $\Delta A_0B_0C_0$ 外接圓上	情況 3-2	情況 4: $X_0 = a_0 \sec A_0 : 2c_0 : 2b_0$	情況 5: $X_0 = 2c_0 : b_0 \sec B_0 : 2a_0$	情況 6: $X_0 = 2b_0 : 2a_0 : c_0 \sec C_0$



1. 三中線變換 1 次

性質 10：  $G_0$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的陪位重心。

性質 11：設  $\frac{1}{\gamma} = \frac{\overline{A_0D_0}}{a_1} = \frac{\overline{B_0E_0}}{b_1} = \frac{\overline{C_0F_0}}{c_1}$ ，當三中線同時旋轉  $\theta$  角時，  
 $\frac{1}{\gamma} = \frac{6[\Delta A_0B_0C_0 \text{面積}]}{\sin \theta (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}$ 。

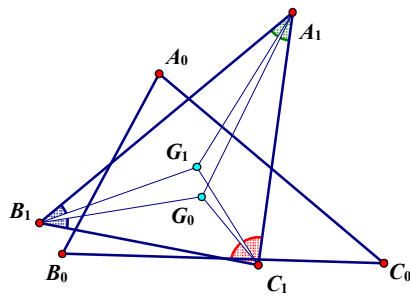


圖 10：  $G_0$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的陪位重心

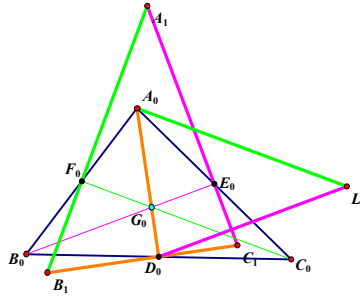


圖 12：變換前後的三角形關係

定理 12：當三中線同時旋轉  $\theta$  角時，在  $\Delta A_1B_1C_1$  中，

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}}{2} \right), \overrightarrow{C_1A_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{B_0C_0} + \overrightarrow{B_0A_0}}{2} \right), \overrightarrow{A_1B_1} = \gamma \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \frac{\overrightarrow{C_0A_0} + \overrightarrow{C_0B_0}}{2} \right)$$

2. 三中垂線變換 1 次

定理 14：三中垂線變換後的外心  $O_n$  均為同一點，且三中垂線同時旋轉  $\theta$  角時，

$\Delta A_1B_1C_1$  為  $\Delta A_0B_0C_0$  旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$  且縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形。

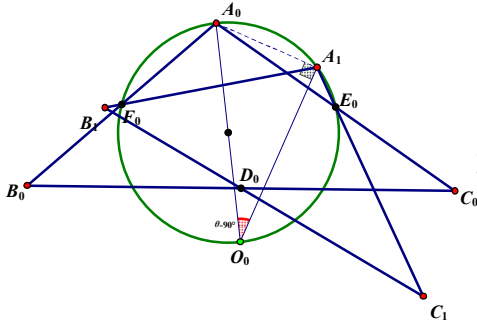


圖 14：外心共點、  
旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$ 、  
縮放為  $\sin \theta$  倍

3. 三高變換 1 次

定理 15：三高變換後的垂心  $H_n$  均為同一點，且三高同時旋轉  $\theta$  角時，

$\Delta A_1B_1C_1$  為  $\Delta A_0B_0C_0$  旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$  且縮放為  $\sin \theta$  倍的三角形。

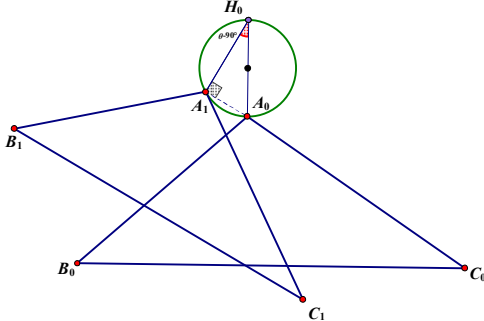


圖 15：垂心共點、  
旋轉  $\theta - \frac{\pi}{2}$ 、  
縮放為  $\sin \theta$  倍

4. 三內角平分線變換 1 次

定理 16：  $I_0$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的 Kosnita 點。

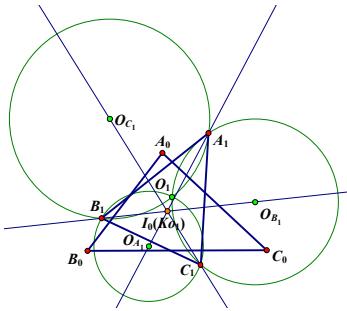


圖 16：  $I_0$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的  
Kosnita 點。

5. 兩外角平分線及一內角平分線變換 1 次

定理 17：以  $J_{A_0}$  做變換，則  $J_{A_0}$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的 Kosnita 點。

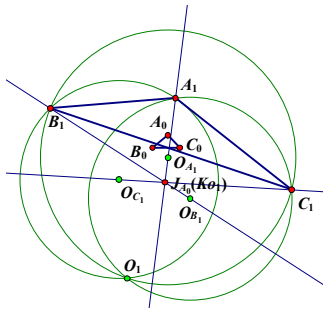


圖 17：  $J_{A_0}$  為  $\Delta A_1B_1C_1$  的  
Kosnita 點。

二、固定某個旋轉角度  $\theta$ ，進行  $n$  次變換時，探討變換後新三角形的性質，及其心形成的點列所在的曲線方程式。

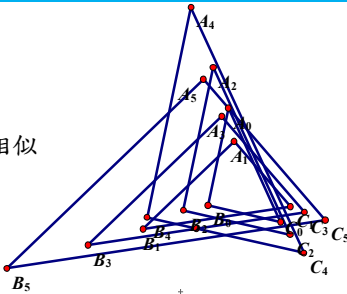
1. 三中線變換  $n$  次

定理 19：經過多次三中線變換後，

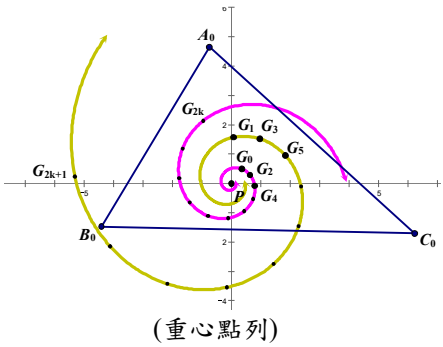
可得  $\Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta A_2B_2C_2 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-2}B_{2k-2}C_{2k-2}$ ：

及  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3 \sim \dots \sim \Delta A_{2k-1}B_{2k-1}C_{2k-1}$ ，其中  $k$  為正整數。

圖 19：奇數次變換的三角形與  
偶數次變換的三角形序列分別相似



定理 22：進行三中線變換  $n$  次，則  $G_n, O_n, H_n, I_n, J_{A_n}$  點列均位於同一對等角螺線上。



設 $\Delta A_nB_nC_n$ 的五心 $G_n,O_n,H_n,I_n,J_{A_n}$ 經變換形成的點列為 $\{P_n\}$ ，表二給出變換的點列分別在哪條等角螺線上。

表二： $\{P_n\}$ 所在的等角螺線

變換類型	三中線變換		三中垂線變換	三高變換
點的名稱	$P_{2k}$	$P_{2k+1}$	$P_n$	$P_n$
三角形的邊長比例 $t$	$\frac{3\gamma^2}{4}$		$\sin\theta$	$\sin\theta$
三角形的旋轉角度 $\alpha$	$2\theta+\pi$		$\theta-\frac{\pi}{2}$	
螺線中心 $P_{center}$	複數平面上 $\left(\frac{3\gamma^2e^{2i\theta}}{4+3\gamma^2e^{2i\theta}}\right)P_{-2}+\left(\frac{4}{4+3\gamma^2e^{2i\theta}}\right)P_0$		$O_0$	$H_0$
螺線方程式的係數 $r_0$	$\Delta A_0B_0C_0$ 中 $P_0$ 到螺線中心 $P_{center}$ 距離	$\Delta A_1B_1C_1$ 中 $P_1$ 到螺線中心 $P_{center}$ 距離	$\Delta A_0B_0C_0$ 中 $\overline{P_0O_0}$ 的長度	$\Delta A_0B_0C_0$ 中 $\overline{P_0H_0}$ 的長度
螺線方程式的起始角 $\theta_0$	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_1P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0P_{center}}$ 為終邊之有向角	以 $x$ 軸正向為始邊， $\overline{P_0P_{center}}$ 為終邊之有向角
以螺線中心 $P_{center}$ 為原點，點列所在之極坐標方程式( $\Theta$ 為變數)	$r(\Theta)=r_0e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta-\theta_0)}{2\theta+\pi}}$	$r(\Theta)=r_0e^{\frac{\ln\left(\frac{3\gamma^2}{4}\right)(\Theta-\theta_0)}{2\theta+\pi}}$	$r(\Theta)=r_0e^{\frac{2\ln(\sin\theta)(\Theta-\theta_0)}{2\theta-\pi}}$	$r(\Theta)=r_0e^{\frac{2\ln(\sin\theta)(\Theta-\theta_0)}{2\theta-\pi}}$

4. 三內角平分線變換  $n$  次

引理 25： $\angle A_{n+1}=\frac{\angle B_n+\angle C_n}{2}$ 、 $\angle B_{n+1}=\frac{\angle C_n+\angle A_n}{2}$ 、 $\angle C_{n+1}=\frac{\angle A_n+\angle B_n}{2}$

定理 26： $\lim_{n\rightarrow\infty}\angle A_n=\lim_{n\rightarrow\infty}\angle B_n=\lim_{n\rightarrow\infty}\angle C_n=\frac{\pi}{3}$ 。

性質 28： $\Delta A_nB_nC_n$  的三邊長

$$a_n=\frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)}a_0\cdot\sin^n\theta\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2\sin\frac{\angle A_j}{2}\sin\frac{\angle B_j}{2}\sin\frac{\angle C_j}{2}\left(3+8\sin\frac{\angle A_j}{2}\sin\frac{\angle B_j}{2}\sin\frac{\angle C_j}{2}\right)}{\cos(\angle B_{j+1}-\angle C_{j+1})\cos(\angle C_{j+1}-\angle A_{j+1})\cos(\angle A_{j+1}-\angle B_{j+1})}\right)$$

，同理可得  $b_n$ 、 $c_n$ 。

性質 29：當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時， $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\lim_{n\rightarrow\infty}b_n=\lim_{n\rightarrow\infty}c_n=L>0$ ；當 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 時， $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\lim_{n\rightarrow\infty}b_n=\lim_{n\rightarrow\infty}c_n=0$ ，故三角形會收斂到一點。

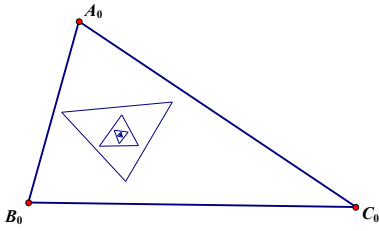


圖 29-1： $\theta=\frac{\pi}{8}$

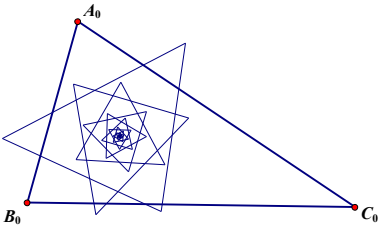


圖 29-2： $\theta=\frac{\pi}{4}$

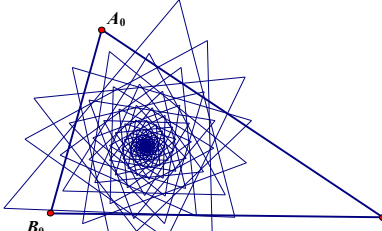


圖 29-3： $\theta=\frac{3\pi}{8}$

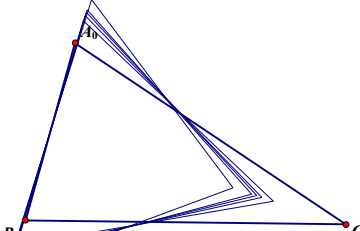


圖 29-4： $\theta=\frac{\pi}{2}$

圖 29：三內角平分線變換  $n$  次

5. 兩外角平分線及一內角平分線變換  $n$  次

性質 32： $\angle A_{n+1}=\frac{\pi+\angle A_n}{2}$ ， $\angle B_{n+1}=\frac{\angle C_n}{2}$ ， $\angle C_{n+1}=\frac{\angle B_n}{2}$ 。

性質 33： $\lim_{n\rightarrow\infty}\angle A_n=\pi$ 。

性質 34： $\Delta A_nB_nC_n$  的三邊長

$$a_n=\frac{\sin(\angle A_n)}{\sin(\angle A_0)}a_0\cdot\sin^n\theta\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2\sin\frac{\angle A_j}{2}\cos\frac{\angle B_j}{2}\cos\frac{\angle C_j}{2}\left(3-8\sin\frac{\angle A_j}{2}\cos\frac{\angle B_j}{2}\cos\frac{\angle C_j}{2}\right)}{\cos(\angle B_{j+1}-\angle C_{j+1})\cos(\angle C_{j+1}-\angle A_{j+1})\cos(\angle A_{j+1}-\angle B_{j+1})}\right)$$

，同理可得  $b_n$ 、 $c_n$ 。

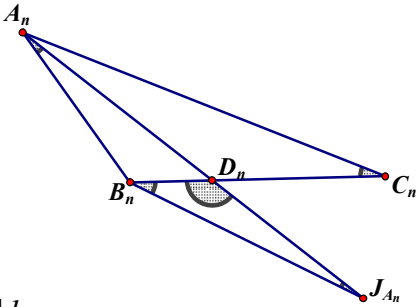


圖 32：變換前後三角形的角度關係

肆、研究結論

- (一) 在變換一次時，我們首先描述五種變換類型共有的性質，隨著 $\theta$ 的變化， $\Delta A_1B_1C_1$ 三頂點軌跡均為圓形(引理 1、性質 2)；得出到 $\Delta A_1B_1C_1$ 三邊距離比例為固定比例的點之軌跡為一圓(定理 3、性質 4)，以及任意心軌跡皆為一圓且其中三心軌跡共根軸(性質 5、性質 6)；發現了能使變換前後的三角形相似的特殊點位置(性質 7)。
- 接著我們分析五種變換類型，發現三中線變換的相關性質(引理 9、性質 10、性質 11、性質 12、性質 13)、三中垂線變換的外心共點與邊長比例及旋轉角度(定理 14)、三高變換的垂心共點與邊長比例及旋轉角度(定理 15)。並於三內角平分線變換、兩外角平分線及一內角平分線的變換中發現 Kosnita 點的性質(定理 16、定理 17)。
- (二) 固定旋轉角度 $\theta$ 進行多次變換時，我們發現三中線變換中奇數次變換與偶數次變換的三角形分別相似(引理 18、性質 19)，計算出邊長的比例以及旋轉角度(性質 20、性質 21)。得到 $\{P_n\}$ 點列均位於同一對等角螺線上(定理 22)；在三中垂線變換及三高變換中亦得到等角螺線(定理 23、定理 24)。最後將等角螺線的中心設為原點，推導出 $\{P_n\}$ 點列所在的等角螺線方程式。
- 我們在三內角平分線變換中發現 $\Delta A_nB_nC_n$ 三內角皆收斂至 $\pi/3$ (引理 25、定理 26)，在兩外角平分線及一內角平分線變換中發現 $\Delta A_nB_nC_n$ 有一個內角收斂至 $\pi$ (性質 32、性質 33)。在這兩種變換得到 $\Delta A_nB_nC_n$ 邊長(引理 27、性質 28、性質 31、性質 34)；證明在三內角平分線變換中當 $\theta=\pi/2$ 時， $\Delta A_nB_nC_n$ 收斂到一個長度不為 0 的正三角形、當 $\theta\neq\pi/2$ 時收斂到一個點(性質 29)。並描述變換前後內切圓半徑的比值關係(性質 30)。

伍、參考文獻

[1] Shawn Godin and J. Chris Fisher。(2023 年 12 月)。Crux Mathematicorum49 卷 10 期, pp.539-540  
[2] Wikipedia contributors。Trilinear\_coordinates。https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear\_coordinates  
[3] Dimitris Vartziotis and Doris Bohnet。(2023 年 7 月 26 日)。arXiv, An Angular Transformation of Triangles