

# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

050403

機器人的華爾滋—轉動角度的變化與組合對封  
閉圖形特性之探討

學校名稱： 臺北市立中山女子高級中學

作者：  高二 劉昕庭  高二 蔡憶芹	指導老師：  林世哲
---------------------------------	------------------

關鍵詞： 正弦定理、多角星、旋轉角度

## 摘要

本研究的概念來自於 110 學年度學測數學的選填題，我們先固定原題的部分變因，探討單一方向並改變單一旋轉角度對圖形特性的影響，並試著求出角數、路徑長、面積等通式；接著嘗試多增加一個旋轉角度形成不同旋轉角度組合和不同方向的旋轉角度組合對圖形特性的影響；最後還試著改變移動距離，找出兩種移動距離組合在旋轉一圈內形成封閉圖形的特性。我們發現一圈內相同旋轉角度組合依規則分割和填補，會形成面積有固定比例的正多邊形；一圈內不論順、逆時針旋轉角度組合，周長和面積公式皆相同；兩圈以上的順、逆時針旋轉角度組合皆會產生多種類型，需要針對各類型分開考慮。

## 壹、前言

### 一、研究動機

我們在尋找研究題目時，對於《110 學年度學測數學的選填題 F》頗有興趣，原題為：「如圖 1，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉  $45^\circ$ ；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉  $90^\circ$ ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉  $45^\circ$ ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉  $90^\circ$ ，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為？」我們發現此問題和三角比及正餘弦定理有關，並好奇如果改變機器人的移動距離、旋轉角度會形成什麼樣的圖形，以及所形成圖形的面積、周長和移動軌跡是否會與移動



圖 1、原題目附圖

(圖片來源：110 數學學測選填題)

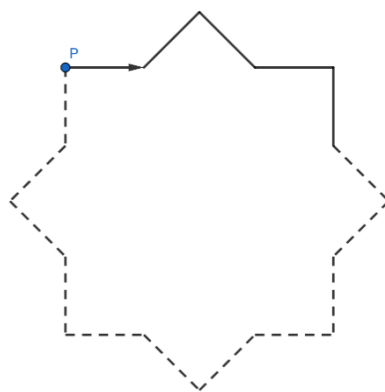


圖 2、題目條件所形成的圖形

(圖片來源：作者自製)

距離和旋轉角度有關。

### 二、研究目的

根據廣義角的定義，若 $\theta$ 為正，則逆時針旋轉；反之當 $\theta$ 為負，則順時針旋轉。

依據機器人不同的旋轉方式進行以下探討：

### (一)單一旋轉角度( $0 < \theta < \pi$ )、單一方向

先將原題條件簡化為固定移動距離、將旋轉兩個角度減為旋轉一個固定角度。

1.  $\theta \times n = 2\pi$  ,  $n \in N$  , 探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。
2.  $\theta \times n = 2\pi$  ,  $n \notin N$  , 探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### (二)兩個旋轉角度組合( $0 < \theta_1 < \pi$ , $0 < \theta_2 < \pi$ , $\theta_1 \neq \theta_2$ )、單一方向

固定移動距離、兩個旋轉角度為相同旋轉方向。

1.  $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$  ,  $n \in N$  , 探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。
2.  $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$  ,  $n \notin N$  , 探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### (三)兩個旋轉角度組合( $-\pi < \theta_1 < 0$ , $0 < \theta_2 < \pi$ , $|\theta_1| < |\theta_2|$ )、不同方向

固定移動距離、兩個旋轉角度為不同旋轉方向。

1.  $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$  ,  $n \in N$  , 探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。
2.  $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$  ,  $n \notin N$  , 探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### (四)兩個移動距離組合( $t_1, t_2$ )、單一旋轉角度( $0 < \theta < \pi$ )

改變移動距離、旋轉一個固定角度。

1.  $2\theta \times n = 2\pi$  ,  $n \in N$  , 探討移動距離與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。

## 貳、研究設備及器材

紙、筆、平板、電腦、Python、GeoGebra

## 參、研究過程或方法

### 一、單一旋轉角度、單一方向( $0 < \theta < \pi$ )

(一) 旋轉  $\theta$ ( $^\circ$ ) ,  $\theta \times n = 2\pi$  ,  $n \in N$  (正多邊形) :

設機器人每次向前移動 $t$ 單位(即 $\overline{AB} = t$ )、旋轉 $\theta$ (徑)，

以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 、 $t = 1$ (圖 3)為例，移動軌跡會形成正八邊形。可知機器人的移動路徑

會形成封閉的正多邊形，則此封閉正多邊形的幾何性質如下：

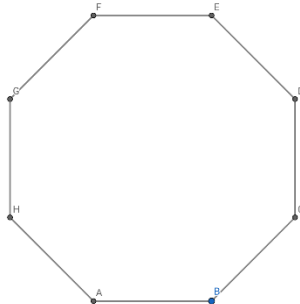


圖 3、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

1. 邊數：由多邊形外角和為  $2\pi$ ，可知正八邊形的邊數為  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

$\Rightarrow$  正 $n$ 邊形的邊數  $n : \frac{2\pi}{\theta}$ 。

2. 周長：邊數乘以邊長，可知正八邊形的周長為  $1 \cdot \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

$\Rightarrow$  正 $n$ 邊形的周長： $t \cdot \frac{2\pi}{\theta}$ 。

3. 面積：以圖 4 為例，作正八邊形的內切圓 $O$ ，將各頂點和 $O$ 相連，可將正八邊形分為 8 個三角形計算面積，

在 $\triangle OBC$ 中， $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$   $\angle BOC = \pi - 2 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

由正弦定理可知  $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{CO}}{\sin \frac{3\pi}{8}} = \frac{\overline{CO}}{\cos \frac{\pi}{8}}$

$\Rightarrow \overline{BO} = \overline{CO} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}}$

$\triangle BOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1^2 \left[ (1 + \cos \frac{\pi}{4}) \right]}{4 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{4}$

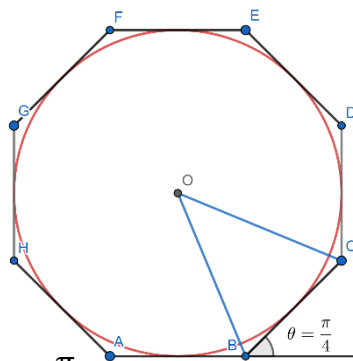


圖 4、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

$$\Rightarrow \text{正八邊形的面積} : 8 \cdot \Delta BOC = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{4} = 2(\sqrt{2} + 1)。$$

**一般化** 以任意旋轉角度  $\theta (0 < \theta < \pi)$  推導面積公式：

$$\text{在 } \Delta OBC \text{ 中, } \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi - \theta}{2}, \angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot \frac{\pi - \theta}{2} = \theta$$

$$\text{由正弦定理可知 } \frac{t}{\sin \theta} = \frac{\overline{BO}}{\sin(\frac{\pi - \theta}{2})} = \frac{\overline{BO}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{BO} = \overline{CO} = \frac{t}{\sin \theta} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\Delta BOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} \cdot \sin \theta = \frac{t^2(1 + \cos \theta)}{4 \cdot \sin \theta}$$

$$\Rightarrow \text{正}n\text{邊形的面積} : \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{t^2(1 + \cos \theta)}{2 \cdot \sin \theta} = \frac{t^2 \pi (1 + \cos \theta)}{2\theta \cdot \sin \theta}。$$

(二) 旋轉  $\theta$  (徑) ( $\theta \times n = 2\pi$ ,  $n \notin \mathbb{N}$ ,  $\theta = \frac{q}{p}\pi$ ,  $(q, p) = 1$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ )

以每次旋轉  $\theta = \frac{4\pi}{5}$ 、 $t = 1$  為例，機器人的移動軌跡會形成正五角星(圖 5)：

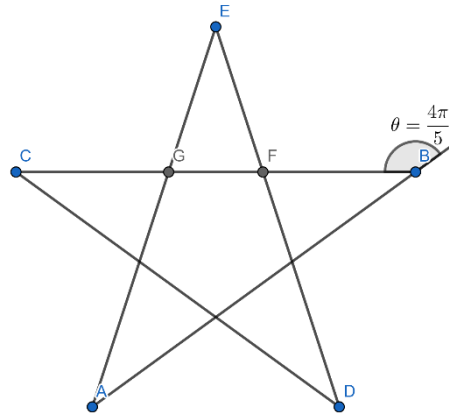


圖 5、 $\theta = \frac{4\pi}{5}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

設機器人每次向前移動  $t$  (即  $\overline{AB} = t$ )、轉動  $\theta$  (徑)

1. 角數：因  $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \notin \mathbb{N}$ ，無法在旋轉一圈 ( $2\pi$  徑) 內形成封閉圖形，而會在旋轉

$\frac{[4,2]}{2} = 2$  圈形成封閉圖形，故正五角星的角數  $m : [4,2] \times \frac{5}{4} = 5$

$\Rightarrow$  正  $m$  角星的角數  $m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$ 。

2. 移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長  $= [4,2] \times \frac{5}{4} \times 1 = 5$

$\Rightarrow$  正  $m$  角星路徑長  $= m \times t$ 。

3. 周長：以圖 6 為例，設  $\overline{EF} = \overline{BF} = a$ 、 $\overline{OB} = r$ 、 $\overline{BE} = x$

將正五角星的周長分為五個部分，每個部份是由兩條長度為  $a$  的線段構成，

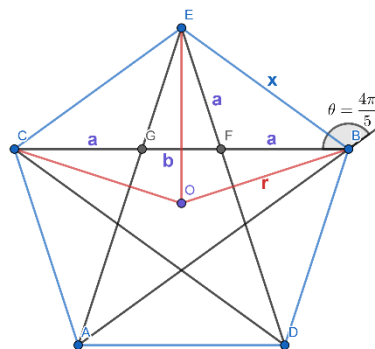


圖 6、圖 5 連接頂點後所形成的圖形

(圖片來源：作者自製)

在  $\triangle OCB$  中， $\angle COB = \frac{2\pi}{[4,2] \times \frac{5}{4}} \times \frac{[4,2]}{2} = \frac{4\pi}{5}$ ， $\angle OCB = \frac{\pi - \frac{4\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{10}$

由正弦定理可知  $\frac{1}{\sin \angle COB} = \frac{r}{\sin \angle OCB} \Rightarrow r = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{4\pi}{5}}$

在 $\triangle OBE$ 中， $\angle BOE = \frac{2\pi}{5}$ ， $\angle OBE = \frac{\pi - \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{3\pi}{10}$

由正弦定理可知  $\frac{r}{\sin \angle OBE} = \frac{x}{\sin \angle BOE}$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{4\pi}{5}} \times \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{3\pi}{10}}$$

在 $\triangle BFE$ 中， $\angle FEB = \frac{\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5}$ ， $\angle BFE = \pi - \frac{\pi}{5} \times 2 = \frac{3\pi}{5}$

由正弦定理可知  $\frac{x}{\sin \angle BFE} = \frac{a}{\sin \angle FEB}$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{3\pi}{10}} \times \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{5}}$$

故周長為： $2a \cdot m = \frac{2m \cdot \sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{5}}$ 。

**一般化** 以任意旋轉角度 $\theta$ ( $\pi$ )推導周長公式：

在 $\triangle OCB$ 中， $\angle COB = \theta$ ， $\angle OCB = \frac{\pi - \theta}{2}$

由正弦定理可知  $\frac{t}{\sin \angle COB} = \frac{r}{\sin \angle OCB} \Rightarrow r = \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}}$

在 $\triangle OBE$ 中， $\angle BOE = \frac{2\pi}{m}$ ， $\angle OBE = \frac{\pi - \frac{2\pi}{m}}{2}$

由正弦定理可知  $\frac{r}{\sin \angle OBE} = \frac{x}{\sin \angle BOE}$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \times \sin \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{\pi - \frac{2\pi}{m}}{2}} = \frac{t \cdot \sin (\frac{\pi}{m})}{\sin (\frac{\theta}{2})}$$

在 $\triangle BFE$ 中， $\angle FEB = \frac{\theta - \frac{2\pi}{m}}{2}$ ， $\angle BFE = \pi - \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)$

由正弦定理可知  $\frac{x}{\sin \angle BFE} = \frac{a}{\sin \angle FEB}$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \sin\frac{\theta - \frac{2\pi}{m}}{2}}{\sin\left[\pi - \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right]} = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow \text{正}m\text{角星的周長} = 2a \cdot m = \frac{m \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}。$$

4. 面積：如圖 6，將正五角星的五個頂角兩兩相連，形成一個正五邊形 $ABCDE$ ，再把五個頂點和點 $O$ 相連，可將正五邊形 $ABCDE$ 分成五個相等的等腰三角形，其腰長為 $r$ ，也將正五角星的面積分為五個部分，每一部份的面積為 $\triangle BOE - \triangle BFE$ 。

**一般化** 以任意旋轉角度 $\theta$ ( $\pi$ )推導面積公式可得：

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \cdot (r \cdot r \cdot \sin \angle BOE - a \cdot a \cdot \sin \angle BFE) \cdot m$$

$$= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{m} - \left( \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \right)^2 \cdot \sin\left[\pi - \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right] \right]$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \text{正}m\text{角星的面積} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right]。$$

5. 性質探討：

封閉圖形(多角星)及  $m$  個頂角兩兩相連所形成的外接正多邊形之間的面積關係：

如圖 6，各頂點和中心點 $O$ 可相圖形分為 $m$ 個部分，透過多角星的其中一部份計算即可得此面積比， $m$ 角星的其中一部份面積( $\triangle BOE - \triangle BFE$ )：外部多邊形的其中一部份( $\triangle BOE$ )

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right] : \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$$



$$= \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right] : \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)$$

$\Rightarrow$  正  $m$  角星和外部正  $m$  邊形面積比

$$= \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right] : \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)$$

$$= \left[ 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi}{m} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \right] : 1 = \left[ 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}{2 \sin\frac{\pi}{m} \cos\frac{\pi}{m} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \right] : 1$$

$$= \left[ 1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}{\cos\frac{\pi}{m} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \right] : 1 = \left[ 1 - \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right) \right] : 1$$

二、兩個旋轉角度組合( $0 < \theta_1 < \pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$ )、單一方向

(一)旋轉角度組合( $\theta_1 + \theta_2$ )且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ,  $n \in N$  :

設機器人每次向前移動 $t$ 單位(即 $\overline{AB} = t$ )、交替旋轉 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ( $0 < \theta_1 < \pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$ )

以 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 、 $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$ 、 $t = 1$  為例(圖 7), 可知機器人的移動路徑會

形成封閉圖形, 則此封閉圖形的幾何性質如下:

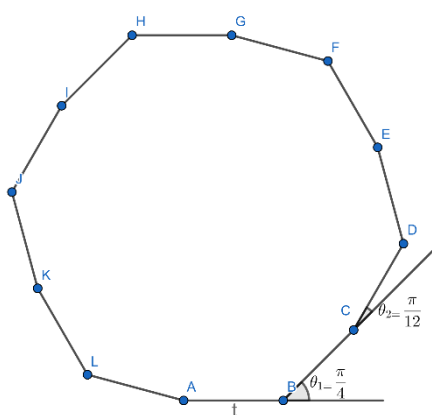


圖 7、 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 、 $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源: 作者自製)

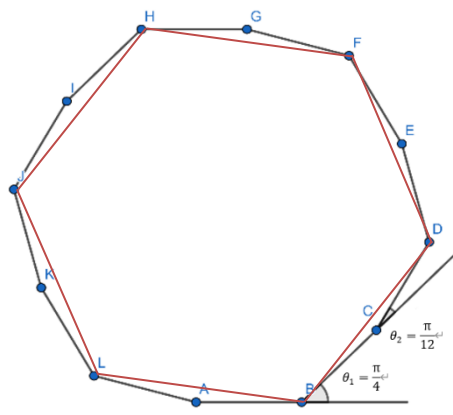


圖 8、連接圖 7 每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 的點所形成的圖形

(圖片來源: 作者自製)

1. 邊數: 由多邊形外角和為  $2\pi$ , 可知此封閉圖形的邊數為  $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)} \times 2 = 12$

$\Rightarrow$  封閉圖形的邊數:  $\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$

2. 周長：邊數乘以邊長，可知此封閉圖形的周長為  $1 \cdot \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)} \times 2 = 12$

$\Rightarrow$  封閉圖形的周長： $t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$

3. 面積：

如圖 8，將此封閉圖形的每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 的點連接，將此封閉圖形分割成一個六邊形外接六個全等三角形，

又其中六邊形內角皆為 $\pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$ ，且六邊等長，得此六邊形為正六邊形：

在 $\triangle BCD$ 中， $\angle BCD = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

由正弦定理可知 $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

得圖形中六個全等三角形總面積為  $3 \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

又由餘弦定理可知 $\overline{BD}^2 = 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，

得封閉圖形中的六邊形面積為  $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)} \cdot \frac{(2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)) \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$   
 $= 2\sqrt{3} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$\Rightarrow$  此封閉圖形面積：

$$2\sqrt{3} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] + 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**一般化**以任意旋轉角度 $\theta_1$ (徑)和 $\theta_2$ (徑)推導公式：

在 $\triangle BCD$ 中， $\angle BCD = \pi - \theta_2$

由正弦定理可知 $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\theta_2)$

得圖形中六個全等三角形總面積為  $\frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\theta_2) = \frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \sin(\theta_2)$

又由餘弦定理可知 $\overline{BD}^2 = 2t^2 - 2t^2 \cos(\pi - \theta_2)$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，得封閉圖形中的六邊形面積為

$$\frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{(2t^2 - 2t^2 \cos(\pi - \theta_2))[1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{4 \sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\pi t^2 [1 + \cos(\theta_2)][1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{(\theta_1 + \theta_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

⇒ 此封閉圖形面積：

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \left\{ \frac{(2t^2 + 2t^2 \cos(\theta_2))[1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{4 \sin(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\theta_2) \right\} \\ = \frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

(二)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ，

$(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$

設機器人每次向前移動 $t$ 單位、交替旋轉 $\theta_1$ 、 $\theta_2$  ( $0 < \theta_1 < \pi$ ， $0 < \theta_2 < \pi$ ， $\theta_1 > \theta_2$ )可知機器人的移動路徑會形成一個封閉圖形(多角星)。因為角度組合不同，透過觀察發現有三種不同類型的圖形，並可以兩種不同算式求其角數、移動路徑長、周長與面積，依照以下方式判別：

I. 設此多角星（圖 9，以 $\theta_1 = \frac{5\pi}{18}$ 、 $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ 、 $t = 1$ 為例）最外圍相鄰兩頂點(B, J)和圓心相連

所圍成的角為 $\alpha$  ( $\angle BOJ$ )，A、B 兩點和圓心此圖形的中心點 $O$ 相連所圍成的角度大小

為 $\beta$  ( $\angle AOB$ )，若 $\frac{\beta}{\alpha}$ 為角數 $m$ 的正因數 $\left(\frac{\beta}{\alpha} \mid m\right)$ ，則所形成的圖形中，轉動 $\theta_1$ 構成的頂點

與中心點 $O$ 的距離比轉動 $\theta_2$ 構成的頂點與 $O$ 的距離遠，且兩個頂點 $B$ 、 $K$ 和 $O$ 會三點共線，符

合此條件的圖形外圍只會由一種角度的頂點組成，此類圖形為第①類，若 $\alpha$ 、 $\beta$ 的關係不符

合此情況 $\left(\frac{\beta}{\alpha} \mid m\right)$ 則進行判別 II。

II. 取多角星（圖 10，以 $\theta_1 = \frac{5\pi}{9}$ 、 $\theta_2 = \frac{7\pi}{36}$ 、 $t = 1$ 為例）中兩條接連旋轉 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 之間的移動

線段（圖 10 中的 $\overline{DE}$ 和 $\overline{IJ}$ ），兩線段的交點 $R$ 和圖形的中心點 $O$ 之間的距離為 $\ell_1$ ，旋轉 $\theta_2$ 時

所形成的頂點和 $O$ 的距離為 $\ell_2$  ( $\overline{OP}$ )，若 $\ell_1 > \ell_2$ ，則所形成圖形為第②類（圖 10），外圍只會

由一種角度的頂點組成，若 $\ell_1 < \ell_2$ ，則圖形為第③類（圖 11），圖形最外圍會由兩種角度的頂點組成。

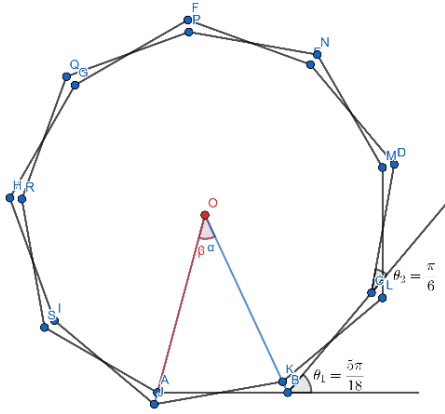


圖 9、第①類

(圖片來源：作者自製)

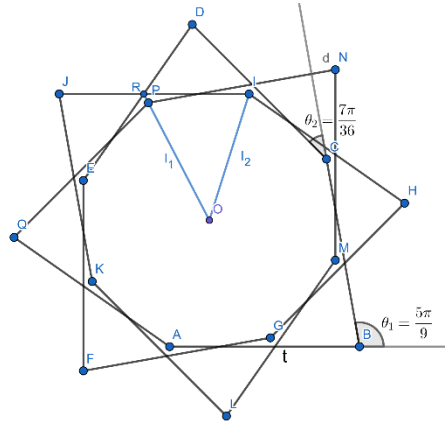


圖 10、第②類

(圖片來源：作者自製)

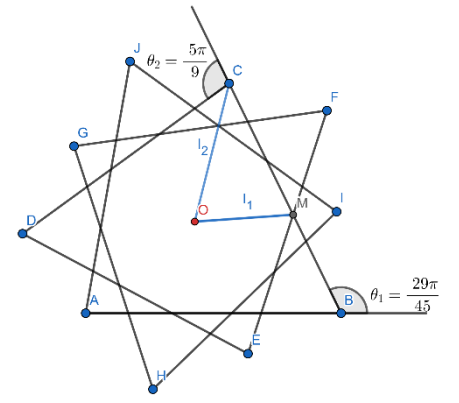


圖 11、第③類

(圖片來源：作者自製)

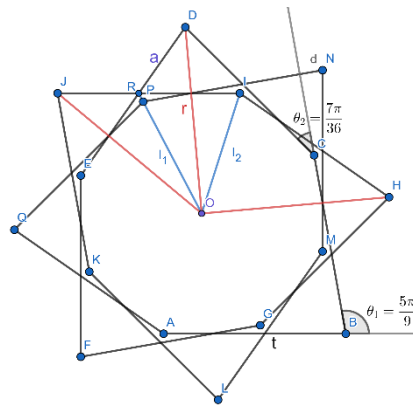


圖 12、 $\theta_1 = \frac{5\pi}{9}$ 、 $\theta_2 = \frac{7\pi}{36}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

其中 $\ell_1$ 及 $\ell_2$ 可透過圖 12 中的邊角關係計算，

$$\overline{OD} = r, \overline{CD} = t, \angle OCD = \frac{\pi - \theta_2}{2}, \angle COD = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

由正弦定理可知，在 $\triangle COD$ 中， $\frac{t}{\sin \angle COD} = \frac{r}{\sin \angle OCD}$

$$r = \frac{t \cdot \sin \angle OCD}{\sin \angle COD} = \frac{t \cdot \sin \frac{\pi - \theta_2}{2}}{\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} = \frac{t \cdot \cos \frac{\theta_2}{2}}{\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} = \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}}$$

在 $\triangle ORD$ 中， $\overline{OR} = \ell_1$ ， $\angle RDO = \frac{\pi - \theta_1}{2}$ ， $\angle ORD = \frac{\pi + \theta_1}{2} - \frac{\pi}{m}$

由正弦定理可知， $\frac{\ell_1}{\sin \angle RDO} = \frac{r}{\sin \angle ORD}$

$$\begin{aligned}\text{可得 } \ell_1 &= \frac{r \cdot \sin \angle RDO}{\sin \angle ORD} = \frac{r \cdot \cos \frac{\theta_1}{2}}{\cos(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_1}{2})} = \frac{t \cdot \cos \frac{\theta_1}{2}}{\cos(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_1}{2})(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2})} \\ &= \frac{t}{(\cos \frac{\pi}{m} + \tan \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{m})(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2})}\end{aligned}$$

$$\text{又在 } \triangle IOH \text{ 中, } \overline{OI} = \ell_2, \overline{IH} = t, \angle IHO = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle IOH = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\text{由正弦定理可知, } \frac{\ell_2}{\sin \angle IHO} = \frac{t}{\sin \angle IOH},$$

$$\ell_2 = \frac{t \cdot \sin \angle IOH}{\sin \angle OIH} = \frac{t \cdot \cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} = \frac{t}{\tan \frac{\theta_1}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2}}$$

第①.②類因最外圍都是由一種旋轉角度的頂點組合而成，故可用相同方式計算其周長、面積，計算方式如下：

1. 角數：因  $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ， $(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$ ，無法在旋轉一

圈( $2\pi$ )內形成封閉圖形，而會在旋轉  $\frac{[q, 2]}{2}$  圈形成封閉圖形，故角數  $m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$

2. 移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長  $= m \times t$

3. 周長：設圖 12 中， $\overline{OD} = r$ ， $\overline{RD} = a$

$$\text{在 } \triangle ORD \text{ 中, } \angle ORD = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_1}{2}), \angle ROD = \frac{\pi}{m},$$

$$\text{由正弦定理可知 } \frac{r}{\sin \angle ORD} = \frac{a}{\sin \angle ROD}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{r \cdot \sin \angle DOR}{\sin \angle ORD} = \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_1}{2}))} \\ &= \frac{t \cdot \sin \frac{\pi}{m}}{\cos(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_1}{2}) \cdot (\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2})} \\ &= \frac{t}{(\cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{m} + \sin \frac{\theta_1}{2}) \cdot (\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2})}\end{aligned}$$

$$\text{故周長：} 2a \cdot m = \frac{2mt}{\left(\cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{m} + \sin \frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

4. 面積：

將圖中每個旋轉 $\theta_1$ 的頂點和中心點 $O$ 相連，會將圖分成 $m$ 個部分，每個部分可由兩個面積相等的三角形組成，以圖 12 為例， $\overline{DO}$ 和 $\overline{JO}$ 構成的部分中，將 $R$ 和中心點 $O$ 相連，可將此部分再分為兩塊三角形（ $\triangle DOR$ 及 $\triangle JOR$ ），故圖形面積為：

$$\begin{aligned} (\triangle DOR + \triangle JOR) \times m &= \triangle DOR \times 2m = \triangle JOR \times 2m = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \ell_1 \cdot \sin \angle DOR \times 2m \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}} \times \frac{t}{\left(\cos \frac{\pi}{m} + \tan \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{m}\right) \left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)} \times \sin \frac{\pi}{m} \times 2m \\ &= \frac{mt^2}{\left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\cot \frac{\pi}{m} + \tan \frac{\theta_1}{2}\right)} \end{aligned}$$

第③類因最外圍是由兩種角度組合而成，其周長、面積計算方式如下：

1. 角數：因 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ， $(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$ ，

無法在旋轉一圈（ $2\pi$ ）內形成封閉圖形，而會在旋轉 $\frac{[q, 2]}{2}$ 圈形成封閉圖形且因外圍會形成兩

種角度，會形成兩種角度，故角數為： $[q, 2] \times \frac{p}{q} \times 2 = 2m$ 。

2. 移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長 =  $2m \times t$ 。

3. 周長：將圖形最外圍分為  $2m$  個部分，每部分由兩條線段構成，將兩線段相加再乘上角數（ $2m$ ）為周長。

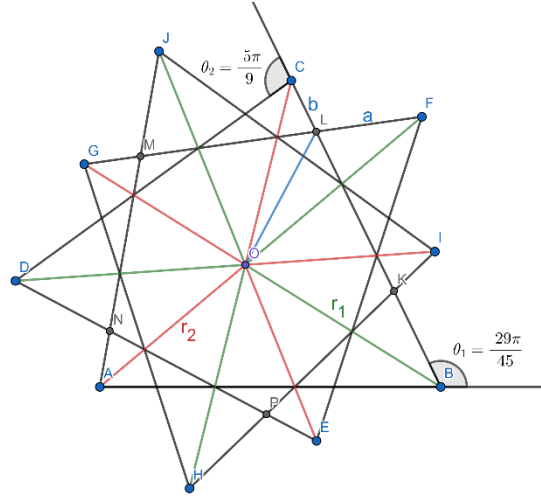


圖 13、 $\theta_1 = \frac{29\pi}{45}$ 、 $\theta_2 = \frac{5\pi}{9}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

設圖 13 中， $\overline{OB} = r_1$ ， $\overline{OA} = r_2$

在 $\triangle AOB$ 中， $\angle OAB = \frac{\pi - \theta_2}{2}$ ， $\angle OBA = \frac{\pi - \theta_1}{2}$ ， $\angle AOB = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

由正弦定理可知  $\frac{t}{\sin \angle AOB} = \frac{r_1}{\sin \angle OAB} = \frac{r_2}{\sin \angle OBA}$

$$\Rightarrow r_1 = t \cdot \frac{\sin \angle OAB}{\sin \angle AOB} = \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}} \quad , \quad r_2 = \frac{t}{\cos \frac{\theta_2}{2} \cdot \tan \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2}}$$

在 $\triangle FOL$ 中， $\angle OLF = \frac{1}{2} \left( 2\pi - \frac{2\pi}{2m} - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \frac{\pi - \theta_2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}$

$$\angle FOL = \pi - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right) = \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}$$

令 $\overline{FL} = a$ ， $\overline{CL} = b$

由正弦定理可知  $\frac{r_1}{\sin \angle OLF} = \frac{a}{\sin \angle FOL}$

$$\Rightarrow a = \frac{r_1 \cdot \sin \angle FOL}{\sin \angle OLF} = \frac{r_1 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)} = \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4} \right)}{(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)}$$

在 $\triangle COL$ 中， $\angle OLC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}$ ， $\angle COL = \frac{\pi}{m} - \angle FOL = \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}$

由正弦定理可知  $\frac{r_2}{\sin \angle OLC} = \frac{b}{\sin \angle COL}$

$$\Rightarrow b = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}\right)}{\left(\sin\frac{\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_2}{2} \cdot \tan\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)}$$

$$\text{故周長} = (\overline{FL} + \overline{CL}) \times 2m = (a + b) \times 2m$$

$$= \left[ \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}\right)}{\left(\sin\frac{\theta_1}{2} + \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} + \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}\right)}{\left(\sin\frac{\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_2}{2} \cdot \tan\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} \right] \times 2m$$

4. 面積：將圖形分為  $2m$  個部分，每個部份由兩個三角形組成，可得出圖形面積

$$= (\Delta FOL + \Delta COL) \times 2m = \frac{1}{2} \cdot 2m \times (r_1 \cdot a \cdot \sin \angle LFO + r_1 \cdot b \cdot \sin \angle LCO)$$

$$= mr_1 \times (a \cdot \sin \angle LFO + b \cdot \sin \angle LCO)$$

$$\angle LFO = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle LCO = \frac{\pi - \theta_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{面積} &= m \cdot \frac{t}{\sin\frac{\theta_1}{2} + \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2}} \\ &\quad \cdot \left[ \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}\right) \cdot \cos\frac{\theta_1}{2}}{\left(\sin\frac{\theta_1}{2} + \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}\right) \cdot \cos\frac{\theta_2}{2}}{\left(\sin\frac{\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_2}{2} \cdot \tan\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} \right] \end{aligned}$$

三、兩個旋轉角度組合( $-\pi < \theta_1 < 0, 0 < \theta_2 < \pi, |\theta_1| < |\theta_2|$ )、不同方向

(一) 旋轉角度組合( $\theta_1 + \theta_2$ )且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi, n \in N$ ：

設機器人每次向前移動 $t$ 單位(即 $\overline{AB} = t$ )、交替旋轉 $\theta_1, \theta_2$ ( $-\pi < \theta_1 < 0, 0 < \theta_2 < \pi, |\theta_1| < |\theta_2|$ )

以 $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, t = 1$ (圖 14)為例。可知機器人的移動

路徑會形成封閉圖形，則此封閉圖形的幾何性質如下：

1. 邊數：旋轉一圈的弧度為  $2\pi$ ，可知此封閉圖形的邊數為  $\frac{2\pi}{\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} \times 2 = 8$



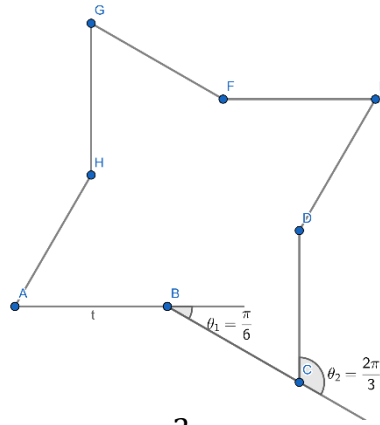


圖 14、 $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ 、 $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

1. 邊數：旋轉一圈的弧度為  $2\pi$ ，可知此封閉圖形的邊數為  $\frac{2\pi}{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} \times 2 = 8$

$\Rightarrow$  封閉圖形的邊數： $\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$ 。

2. 周長：邊數乘以邊長，可知此封閉圖形的周長為  $1 \cdot \frac{2\pi}{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} \times 2 = 8$

$\Rightarrow$  封閉圖形的邊數： $t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$

3. 面積：

如圖 15，將此封閉圖形的每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 的頂點連接，將此封閉圖形分割成一個四邊形外

接四個全等三角形，又其中四邊形外角皆為  $\pi + (-\frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ，且四邊等長

，得此四邊形為正方形：

在 $\triangle BCD$ 中， $\angle BCD = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

由正弦定理可知 $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

得圖形中四個全等三角形總面積為 $\sqrt{3}$

又由餘弦定理可知 $\overline{BD}^2 = 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cos(\frac{\pi}{3}) = 1$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，

$$\text{得封閉圖形中的四邊形面積為} \frac{2\pi}{\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

⇒ 此封閉圖形面積：

$$\frac{\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

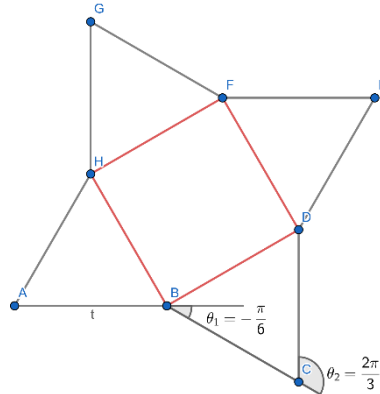


圖 15、連接圖 14 的旋轉 $\theta_1$ 頂點所形成的圖形

(圖片來源：作者自製)

**一般化** 以任意旋轉角度 $\theta_1$ (徑)和 $\theta_2$ (徑)推導公式：

在 $\triangle BCD$ 中， $BCD = \pi - \theta_2$

$$\text{由正弦定理可知} \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\pi - \theta_2) = \frac{t^2}{2} \cdot \sin(\theta_2)$$

$$\text{得圖形中四個全等三角形總面積為} \frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\pi - \theta_2) = \frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \sin(\theta_2)$$

$$\text{又由餘弦定理可知} \overline{BD}^2 = 2t^2 - 2t^2 \cos(\pi - \theta_2) = 2t^2(1 + \cos\theta_2)$$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，得封閉圖形中的四邊形面積為

$$\frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{(2t^2 - 2t^2 \cos(\pi - \theta_2))[1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{4 \sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\pi t^2 [1 + \cos\theta_2][1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{(\theta_1 + \theta_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

⇒ 此封閉圖形面積：

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \left\{ \frac{(2t^2 + 2t^2 \cos(\theta_2))[1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{4 \sin(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\theta_2) \right\} \\ &= \frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

#### 4.性質探討：

如圖 16，分別將此封閉圖形的每個相鄰旋轉 $\theta_1 \left( = -\frac{\pi}{6} \right)$ 、 $\theta_2 \left( = \frac{2\pi}{3} \right)$ 的頂點連接，令此封閉圖形外接圖形 ACEG 且內嵌圖形 BDFH，又兩圖形分別與封閉圖形劃分出四個全等三角形，圖形 ACEG 和圖形 BDFH 皆為正方形。

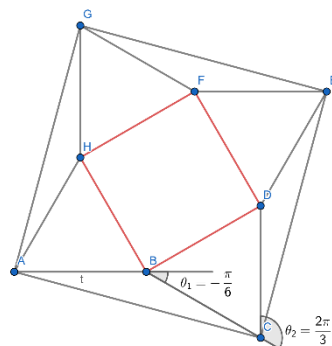


圖 16、連接圖 15 的旋轉 $\theta_2$ 頂點所形成的圖形

(圖片來源：作者自製)

根據研究目的(一)的正多邊形面積公式： $\frac{t^2 \pi (1 + \cos \theta)}{2\theta \cdot \sin \theta}$

得□ACEG 和□BDFH 面積比=□ACEG 和□BDFH 的邊長平方比

$$= \left( 2 - 2\cos \frac{5\pi}{6} \right) : \left( 2 - 2\cos \frac{\pi}{3} \right) = \left( 1 - \cos \frac{5\pi}{6} \right) : \left( 1 - \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

⇒ 將此封閉圖形的每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的點連接，所形成的外接圖形和內嵌圖形的面積比

$$= [1 - \cos(\pi + \theta_1)] : [1 - \cos(\pi - \theta_2)] = (1 + \cos \theta_1) : (1 + \cos \theta_2)$$

(二)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ，

$$(q, p) = 1, p, q \in N$$

設機器人每次向前移動 $t$ 單位(即 $\overline{AB} = t$ )、交替旋轉 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ( $-\pi < \theta_1 < 0$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ,  $|\theta_1| < |\theta_2|$ )

以 $\theta_1 = \frac{-4\pi}{45}$ 、 $\theta_2 = \frac{8\pi}{9}$ 、 $t = 1$  為例(圖 17)，可知機器人的移動路徑會形成封

閉圖形，則此封閉圖形的幾何性質如下：

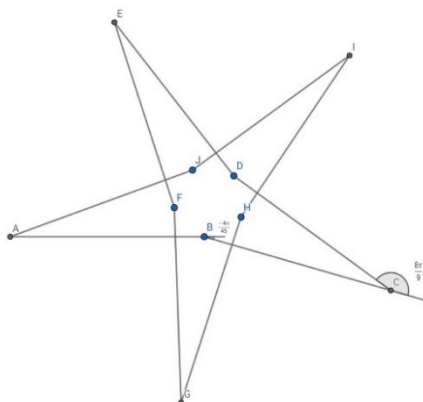


圖 17、 $\theta_1 = \frac{-4\pi}{45}$ 、 $\theta_2 = \frac{8\pi}{9}$ 、 $t = 1$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)

1. 角數：因 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin \mathbb{N}$ ，無法在旋轉一圈( $2\pi$ )內形成封閉圖形

，而會在旋轉 $\frac{[q, 2]}{2}$ 圈形成封閉圖形，故依此規則所形成的  $m$  角星的角數為

$$m : [q, 2] \times \frac{p}{q}$$

2. 移動路徑長：每次移動長度乘以角數的 2 倍，故路徑長  $= 2m \times t$

3. 周長：

因為 $\frac{[q, 2]}{2}$ 所得值的奇偶不同，會形成兩種不同類型的圖形，可以兩種方式求其周長

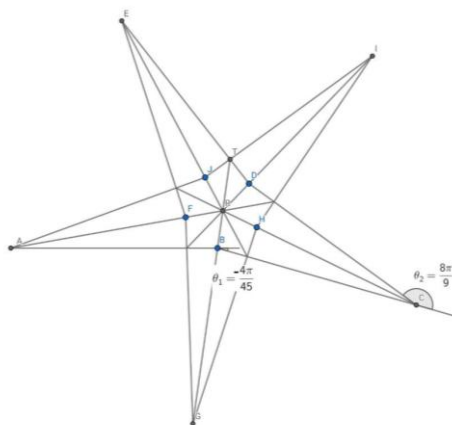


圖 18、連接圖 17 每個旋轉 $\theta_i$ 的頂點和圖形的中心點 R

(圖片來源：作者自製)

I. 若  $\frac{[q, 2]}{2}$  的值為偶數：

連接圖 17 中每個旋轉  $\theta_2$  的頂點和圖形的中心點 R (圖 18)

在  $\triangle ERD$  和  $\triangle ERT$  中，

$$\angle EDR = \frac{2\pi - (\pi + \theta_1)}{2} = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle ETR = \pi - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \frac{\pi - \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

在  $\triangle ERD$  中，由正弦定理可知  $\frac{\overline{ER}}{\sin \left[ \pi - \left( \frac{\pi + \theta_1}{2} \right) \right]} = \frac{\overline{DE}}{\sin \left( \frac{2\pi}{m} \right)}$

$$\overline{ER} = \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi - \theta_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} = \frac{t \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)}$$

在  $\triangle ERT$  中，由正弦定理可知  $\frac{\overline{ER}}{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2} \right)} = \frac{\overline{ET}}{\sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}$

$$\begin{aligned} \overline{ET} &= \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi - \theta_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sin \left[ \pi - \left( \frac{\pi}{m} \right) - \left( \frac{\pi - \theta_2}{2} \right) \right]} = \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi - \theta_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2} \right)} \\ &= \frac{t \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2} \right)} \end{aligned}$$

則多角星周長為  $\overline{ET} \times 2m$

$$\Rightarrow \frac{t \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2} \right)} \cdot 2m = \frac{2mt \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sin \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2} \right)}$$

II. 若  $\frac{[q, 2]}{2}$  的值為奇數：

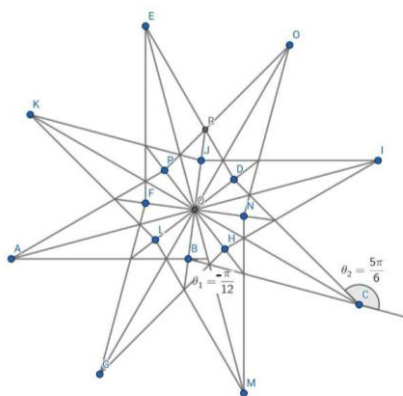


圖 19 ·  $\theta_1 = \frac{-\pi}{12}$  ·  $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$  ·  $t = 1$  連接每個旋轉  $\theta_2$  的頂點和圖形的中心點 S

(圖片來源<sup>20</sup>作者自製)

以 $\theta_1 = \frac{-\pi}{12}$ 、 $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ 、 $t = 1$  為例，連接每個旋轉 $\theta_2$ 的頂點和圖形的中心點 S(圖 19)

在 $\triangle OPQ$ 和 $\triangle ORQ$ 中，

$$\angle OPQ = \frac{2\pi - (\pi + \theta_1)}{2} = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle OQP = \pi - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \frac{\pi - \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

在 $\triangle OPQ$ 中，由正弦定理可知
$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)} = \frac{t}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$$

$$\overline{OQ} = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$$

在 $\triangle ORQ$ 中，由正弦定理可知
$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2}\right)} = \frac{\overline{OR}}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$$

$$\overline{OR} = \frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

則多角星周長為 $\overline{OR} \times 2m$

$$\Rightarrow \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot 2m = \frac{2mt \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

4. 面積：因為 $\frac{[q, 2]}{2}$ 所得值的奇偶不同，會形成兩種不同類型的圖形，可以兩種

方式求其面積：

I. 若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為偶數：(圖 18)

在 $\triangle ERD$ 和 $\triangle ERT$ 中，

$$\angle EDR = \frac{2\pi - (\pi + \theta_1)}{2} = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle ERT = \pi - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \frac{\pi - \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

在 $\triangle ERD$ 中，由正弦定理可知
$$\frac{\overline{ER}}{\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi + \theta_1}{2}\right)\right]} = \frac{\overline{DE}}{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}$$

$$\overline{ER} = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$$

在 $\Delta ERT$ 中，由正弦定理可知 $\frac{\overline{ER}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2}\right)} = \frac{\overline{ET}}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$

$$\overline{ET} = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{m}\right) - \left(\frac{\pi - \theta_2}{2}\right)\right]} = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

得 $\Delta ERT$ 的面積為

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{ET} \cdot \overline{ER} \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_2}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \cdot \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ &= \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

又封閉圖形的面積是由  $2m$  個與 $\Delta ERT$ 全等的三角形所構成

故此圖形面積為：

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot 2m \\ = mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

II. 若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為奇數：(圖 19)

在 $\Delta OPQ$ 和 $\Delta ORQ$ 中，

$$\angle OPQ = \frac{2\pi - (\pi + \theta_1)}{2} = \frac{\pi - \theta_1}{2}, \angle ORQ = \pi - \frac{\pi - \theta_1}{2} - \frac{\pi - \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

在 $\Delta OPQ$ 中，由正弦定理可知 $\frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)} = \frac{t}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$

$$\overline{OQ} = \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$$

在 $\Delta ORQ$ 中，由正弦定理可知 $\frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2}\right)} = \frac{\overline{OR}}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$

$$\overline{OR} = \frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi - \theta_2}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

得 $\Delta ORQ$ 的面積為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OQ} \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \cdot \frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ &= \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

又封閉圖形是由  $2m$  個與 $\Delta ORQ$ 全等的三角形所構成

故此圖形面積為

$$\begin{aligned} & \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot 2m \\ &= mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  不論是哪種所得面積一般式皆為：

$$mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2$$

四、兩個移動距離組合( $t_1, t_2$ )、單一旋轉角度( $0 < \theta < \pi$ )

(一) 旋轉  $\theta$ (徑)， $2\theta \times n = 2\pi$ ，交替移動  $t_1$ 和 $t_2$ ， $t_1, t_2 > 0$ 、 $n \in N$ ：

設機器人交替移動  $t_1$ 、 $t_2$ 單位、旋轉 $\theta$ (徑)，

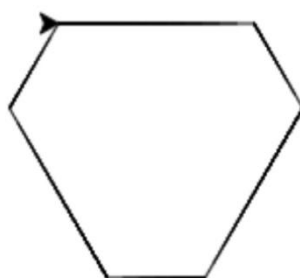


圖 19、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $t_1 = 1$ 、 $t_2 = 2$  所形成的封閉圖形

(圖片來源：作者自製)



以  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $t_1 = 1$ 、 $t_2 = 2$ (圖 19)為例，此封閉正多邊形的幾何性質如下：

1. 邊數：由多邊形外角和為  $2\pi$ ，可知此封閉圖形的邊數為  $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} \times 2 = 6$

$\Rightarrow$  封閉圖形的邊數： $\frac{2\pi}{\theta}$

2. 周長：邊數乘以邊長，可知此封閉圖形的周長為  $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} \times (2 + 1) = 9$

$\Rightarrow$  封閉圖形的周長： $(t_1 + t_2) \cdot \frac{\pi}{\theta}$

3. 面積：

如圖 20，將此封閉圖形的間隔旋轉點相連接，將此封閉圖形分割成一個三角形外接三個

全等三角形，又其中中央三角形內角皆為  $\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ ，

且三邊等長，得此中央三角形為正三角形：

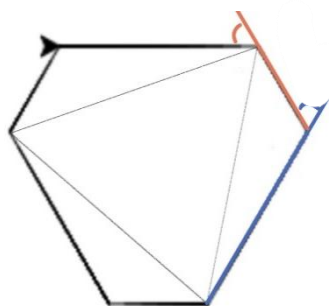


圖 20、連接圖 19 的間隔旋轉點所形成的圖形

(圖片來源：作者自製)

根據面積公式，單個外圍三角形面積為  $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

得外圍三個全等三角形面積和： $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，得中央三角形面積為

$$\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{\left(1 + \cos \frac{2\pi}{3}\right) \left(5 + 2 \times 2 \cos \frac{\pi}{3}\right)}{4 \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow$  此封閉圖形面積： $\frac{7\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{4}$

**一般化**以任意旋轉角度 $\theta$ ( $\theta$  徑)、移動距離 $t_1$ 和 $t_2$  推導公式：

根據面積公式，單個外圍三角形面積為  $\frac{1}{2} \times t_1 \times t_2 \times \sin(\pi - \theta) = \frac{t_1 \times t_2}{2} \times \sin \theta$

可推得外圍所有全等三角形面積和： $\frac{2\pi}{2\theta} \times \frac{t_1 \times t_2}{2} \times \sin \theta = \frac{(t_1 \times t_2)\pi}{2\theta} \times \sin \theta$

再根據研究目的(一)的正多邊形公式，中央正多邊形面積為：

$$\frac{2\pi}{2\theta} \times \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2 \times t_1 \times t_2 \times \cos \theta)}{4\sin 2\theta}$$

$$= \frac{\pi}{4\theta} \times \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos \theta)}{\sin 2\theta}$$

$\Rightarrow$  此封閉圖形面積：

$$\frac{(t_1 \times t_2)\pi}{2\theta} \times \sin \theta + \frac{\pi}{4\theta} \times \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos \theta)}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{\pi}{4\theta} \left[ 2t_1 t_2 \sin \theta + \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos \theta)}{\sin 2\theta} \right]$$

## 肆、研究結果

### 一、單一旋轉角度、單一方向

	$\theta \times n = 2\pi$ , $n \in N$ (正多邊形)	$\theta \times n = 2\pi$ , $n \notin N$ (正多角星形) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ , $(q, p) = 1$ , $p, q \in N$
邊/角數	$n = \frac{2\pi}{\theta}$	$m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$
路徑長	$t \cdot n$	$t \cdot m$
周長	$t \cdot n$	$\frac{m \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}$
面積	$n \cdot \frac{t^2(1 + \cos \theta)}{4 \cdot \sin \theta}$	$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) \right]$

表格一 (作者自製)

### 二、兩個旋轉角度組合、單一方向

	$(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ , $n \in N$
--	---

邊/角數	$\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$
路徑長	$t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$
周長	$t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$
面積	$\frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos (\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$
	$(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi, n \notin N$ (第 I 類) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi, (q, p) = 1, p, q \in N$
邊/角數	$m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$
路徑長	$t \cdot [q, 2] \times \frac{p}{q}$
周長	$\frac{2mt}{\left(\cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{m} + \sin \frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)}$
面積	$\frac{mt^2}{\left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\cot \frac{\pi}{m} + \tan \frac{\theta_1}{2}\right)}$
	$(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi, n \notin N$ (第 II 類) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi, (q, p) = 1, p, q \in N$
邊/角數	$2m = [q, 2] \times \frac{p}{q} \times 2$
路徑長	$t \cdot 2m$
周長	$\left[ \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4} \right)}{\left( \sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)} + \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4} \right)}{\left( \sin \frac{\theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_2}{2} \cdot \tan \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)} \right] \times 2m$
面積	$m \cdot \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}} \cdot \left[ \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4} \right) \cdot \cos \frac{\theta_1}{2}}{\left( \sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)} + \frac{t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4} \right) \cdot \cos \frac{\theta_2}{2}}{\left( \sin \frac{\theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_2}{2} \cdot \tan \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \right)} \right]$

表格二 (作者自製)

### 三、兩個旋轉角度組合、不同方向

	$(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi, n \in N$	$(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi, n \notin N$ $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi, (q, p) = 1, p, q \in N$
邊 / 角數	$\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$	$m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$
路徑長	$t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$	$m \times t$
周長	$t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$	$\frac{t \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot 2m$
面積	$\frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$	$mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$

表格三 (作者自製)

### 四、兩個移動距離組合、單一旋轉角度

	$\theta \times n = 2\pi, \text{交替移動 } t_1 \text{ 和 } t_2, t_1, t_2 > 0, n \in N$
邊數	$\frac{2\pi}{\theta}$
周長	$(t_1 + t_2) \cdot \frac{\pi}{\theta}$
面積	$\frac{\pi}{4\theta} \left[ 2t_1 t_2 \sin\theta + \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos\theta)}{\sin 2\theta} \right]$

表格四 (作者自製)

## 伍、討論

一、在任何單一角度、以相同方向旋轉所形成的封閉圖形，皆可以找出角數、路徑長、周長及面積的一般式，其中超過一圈( $2\pi$ )形成封閉的正多角星圖形之路徑長和周長是不同算法。

二、在任意兩個角度組合、以相同方向旋轉所形成的封閉圖形，皆可找出角數、路徑長、周長及面積一般式，其中超過一圈形成封閉的圖形，不同角度組合的情況可以分為兩類，會有

不同的算法。

三、在任意兩個角度組合、以不同方向旋轉所形成的封閉圖形，皆可找出角數、路徑長、周長及面積一般式，其中超過一圈形成封閉的圖形，不同角度組合的情況可以分為兩類，計算過程會不同但得到的一般式是相同的。

四、任意兩種移動距離組合、單一旋轉角度在一圈內所形成的封閉圖形，皆可找出角數、路徑長、周長及面積一般式。

五、在研究目的三、(一)點中，有提到封閉圖形內接正多邊形面積和封閉圖形外接正多邊形面積的關係，未來希望能將此關係推廣為定理，並在其他情況形成的圖形找出其面積和內部多邊形面積的關係。

## 陸、結論

一、相同方向、固定一個旋轉角度不在一圈內形成的圖形，其面積計算方式和其他條件形成的圖形計算面積方式不同，研究目的一、(二)是將圖形補成一個正多邊形再扣掉多於三角形面積，而其他研究目的是將圖形分割成不同形狀做計算。

二、研究目的一、(一)中使用封閉圖形的內切圓圓心和各頂點相連，將圖形分為數個全等三角形，再將和封閉圖形邊長相切的圓半徑當作高，計算面積。

三、未來展望：

(一)將研究變因推廣至三個或三個以上的旋轉角度組合，求其形成的封閉圖形之特性。

(二)求出研究目的一、(二)中形成圖形，各頂點相連成的正多邊形和內部的正多邊形以及特定角度下會形成的內部多角星之間的面積關係。

(三)找出研究目的四中旋轉超過一圈所形成的圖形類型，進行分類和計算特性通式。

## 柒、參考文獻資料

- 高柳茜さん. (2018 年 3 月). 丸にとらわれたお星さま!? ファンタジックで美しい数学. つくばサイエンスエッジ 2018.
- 張志基. (2023). 奧數揭密 五邊形與五角星. 香港文匯報.

- 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育群、彰宮明. 於數學第二冊 (第二版). 臺南市: 翰林出版事業.176-230.
- 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育群、彰宮明. 於數學第三冊 (第二版). 臺南市: 翰林出版事業.18-63.

## 【評語】 050403

本作品從機器人運動模式出發，將「旋轉運動」與「封閉圖形」做幾何建模與分析。更進一步探究不同角度、不同方向、不同移動距離所構成封閉路徑進行研究，在任意兩個角度組合、以相同以及不同方向旋轉所形成的封閉圖形的情形下，找出角數、路徑長、周長及面積一般式。更進一步探究不同角度、不同方向、不同移動距離所構成封閉路徑的一般結果。整體而言，有仔細的討論比較初步的一些情形，若是能夠有更深入的討論會是不錯的作品。

作品海報



# 機器人的華爾滋

轉動角度的變化與組合對封閉圖形特性之探討



## 壹、研究動機

我們在尋找研究題目時，對於《110學年度學測數學的選填題F》頗有興趣，原題為：「機器人在地面上從一點P出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉45°；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉90°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉45°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉90°，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為?」我們發現此問題和三角比及正餘弦定理有關，並好奇如果改變機器人的移動距離、旋轉角度會形成什麼樣的圖形，以及所形成圖形的面積、周長和移動軌跡是否會與移動距離和旋轉角度有關。

## 貳、研究目的

根據廣義角的定義，若 $\theta$ 為正，則逆時針旋轉；反之當 $\theta$ 為負，則順時針旋轉。

依據機器人不同的旋轉方式進行以下探討：

### 一、單一旋轉角度( $0 < \theta < \pi$ )、單一方向

先將原題條件簡化為固定移動距離、將旋轉兩個角度減為旋轉一個固定角度。

(一) $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ，探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。

(二) $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### 二、兩個旋轉角度組合( $0 < \theta_1 < \pi$ , $0 < \theta_2 < \pi$ , $\theta_1 \neq \theta_2$ )、單一方向

固定移動距離、兩個旋轉角度為相同旋轉方向。

(一) $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ，探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。

(二) $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### 三、兩個旋轉角度組合( $-\pi < \theta_1 < 0$ , $0 < \theta_2 < \pi$ , $|\theta_1| < |\theta_2|$ )、不同方向

固定移動距離、兩個旋轉角度為不同旋轉方向。

(一) $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ，探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。

(二) $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，探討旋轉角度與移動軌跡、封閉圖形周長、面積的關係。

### 四、兩個移動距離組合( $t, 2t$ )、單一旋轉角度( $0 < \theta < \pi$ )

(一) $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ，探討旋轉角度與封閉圖形邊數、周長、面積的關係。

## 參、研究過程

### 一、單一旋轉角度、單一方向( $0 < \theta < 2\pi$ )

(一)旋轉 $\theta$ ( $\pi$ )， $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \in N$  (正多邊形)：

以每次轉動 $\theta = \frac{\pi}{4}$ (圖1)為例，幾何性質如下：

1.邊數：由多邊形外角和為 $2\pi \Rightarrow$  正 $n$ 邊形的邊數 $n$ ： $\frac{2\pi}{\theta}$

2.周長：邊數乘以邊長  $\Rightarrow$  正 $n$ 邊形的周長： $t \cdot \frac{2\pi}{\theta}$

3.面積：作封閉圖形的內切圓 $O$ ，將各頂點和圓心 $O$ 相連(圖2)，將圖形分為 $n$ 個三角形：在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCO$ 中，由正弦定理可知 $\overline{AO}$ 、 $\overline{BO}$ ，亦可知 $\triangle ABO$ 的面積，正 $n$ 邊形的面積： $\frac{t^2\pi(1 + \cos \theta)}{2\theta \cdot \sin \theta}$

(二)旋轉 $\theta$ ( $\pi$ )， $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta = \frac{q}{p}\pi$ ， $(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$

以每次轉動 $\theta = \frac{4\pi}{5}$ 形成封閉圖形為例(圖3)：

1.角數：因 $\theta \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，無法在旋轉一圈( $2\pi$  $\pi$ )內形成封閉圖形，而會在旋轉 $\frac{[q, 2]}{2}$ 圈形成封閉圖形，故正 $m$ 角星的角數 $m = [q, 2] \times \frac{p}{q}$

2.移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長  $= [q, 2] \times \frac{p}{q} \times t = mt$

3.周長：將正 $m$ 角星的外圍分為 $m$ 個部分，每個部份是由兩長度為 $a$ 的線段構成，透過 $\triangle OCB$ 、 $\triangle OBE$ 、 $\triangle BFE$ 中的邊角關係可求出 $a$ 再將此長度乘上 $2m$ 可求出周長  $= a \cdot 2m \frac{m \cdot t \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m} \right)}$

4.面積：將正 $m$ 角星的 $m$ 個頂角兩兩相連，形成一個正 $m$ 邊形，再把各頂點和點 $O$ 相連，可將正 $m$ 邊形分成 $m$ 個全等的等腰三角形，其腰長為 $r$ ，也將正 $m$ 角星的面積分為 $m$ 個部分其中一部份的面積為 $\triangle BOE - \triangle BFE$ ，利用三角形面積公式計算可得

$$\text{面積} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{t}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{m} \right) - \frac{\left( \frac{\pi}{m} \right)}{\left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m} \right)} \cdot \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{m} \right) \right]$$

5.性質探討：封閉圖形(多角星)及 $m$ 個頂角兩兩相連所形成的外接正多邊形之間的面積關係(圖4)：

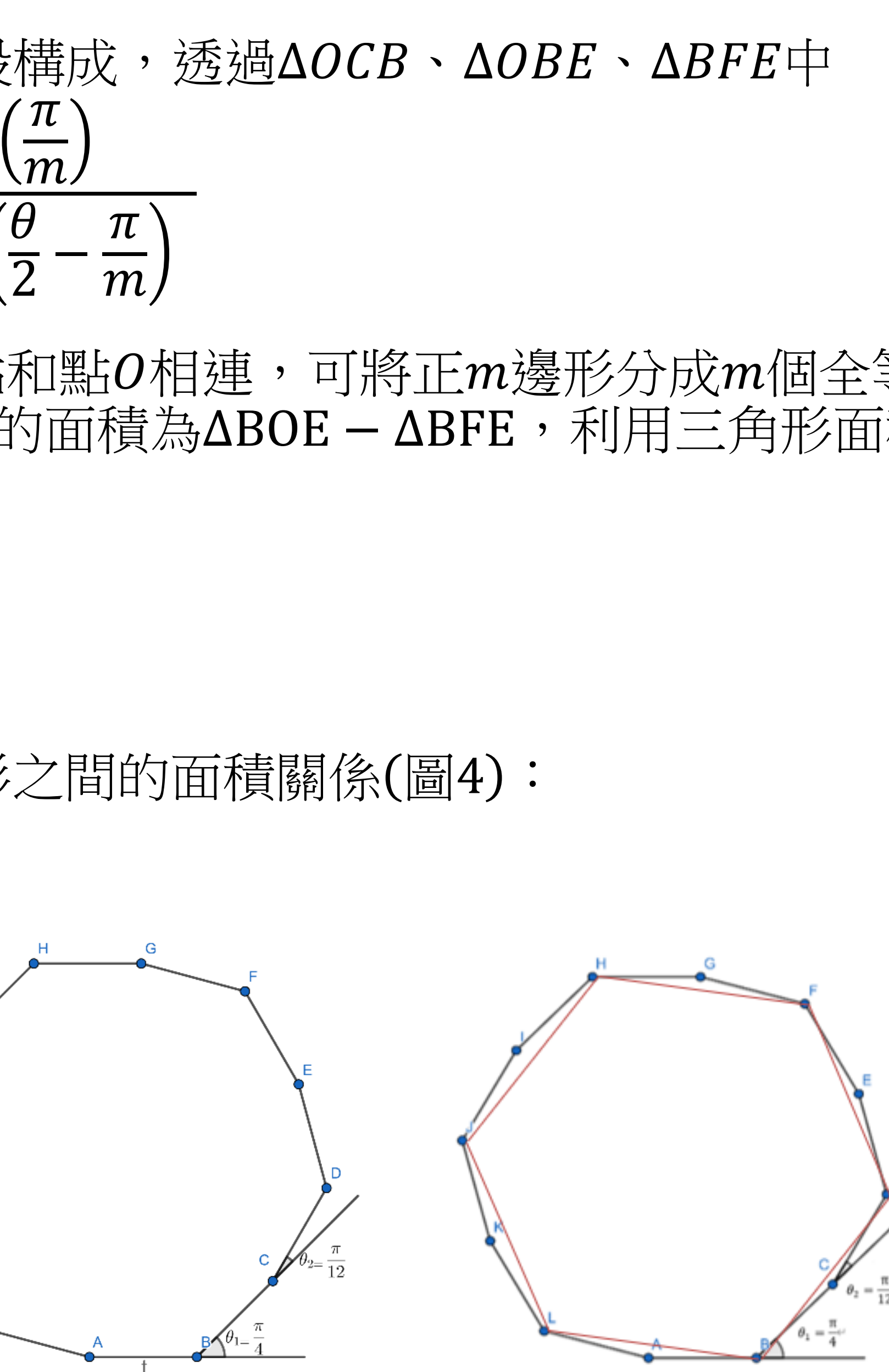
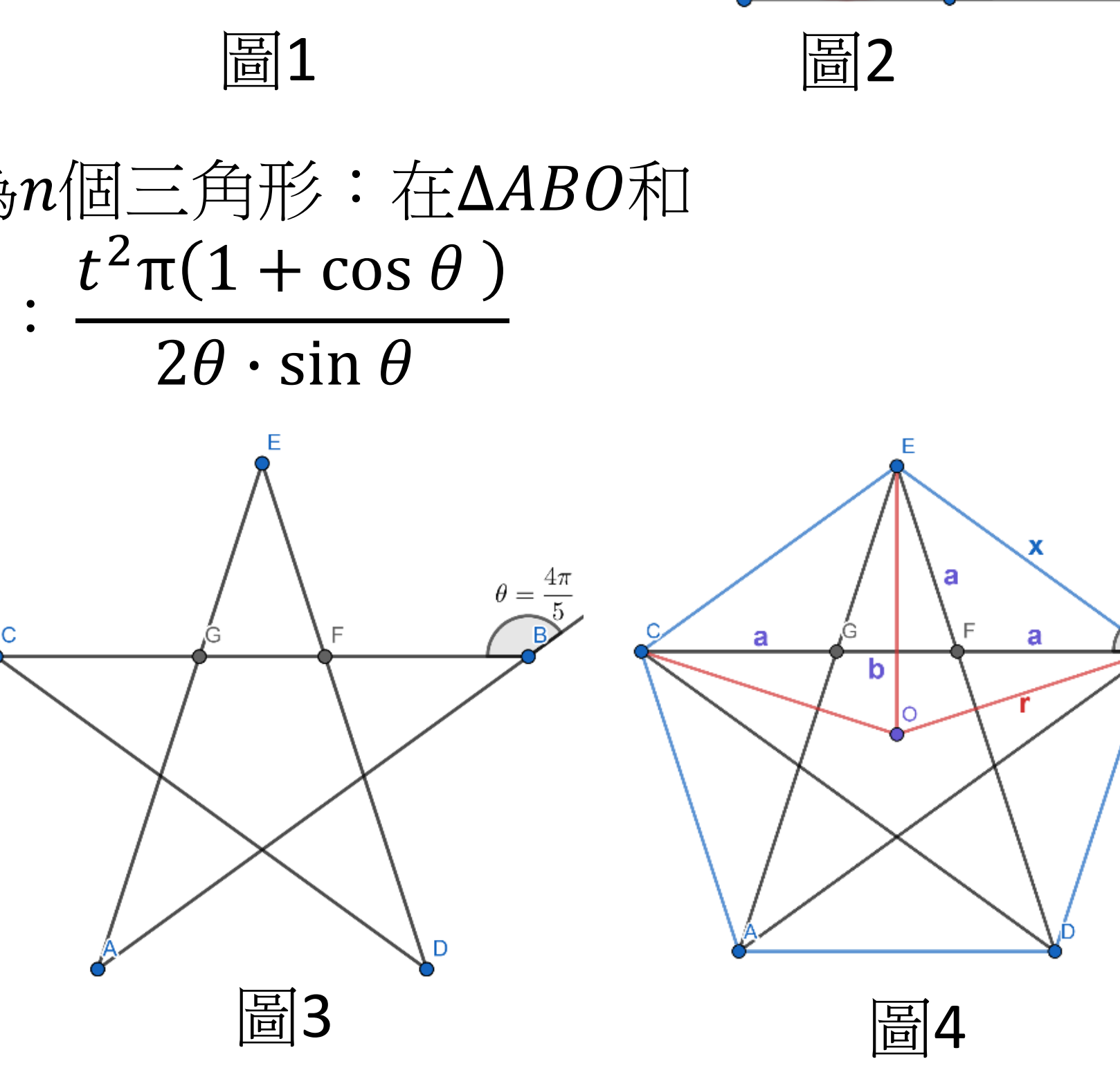
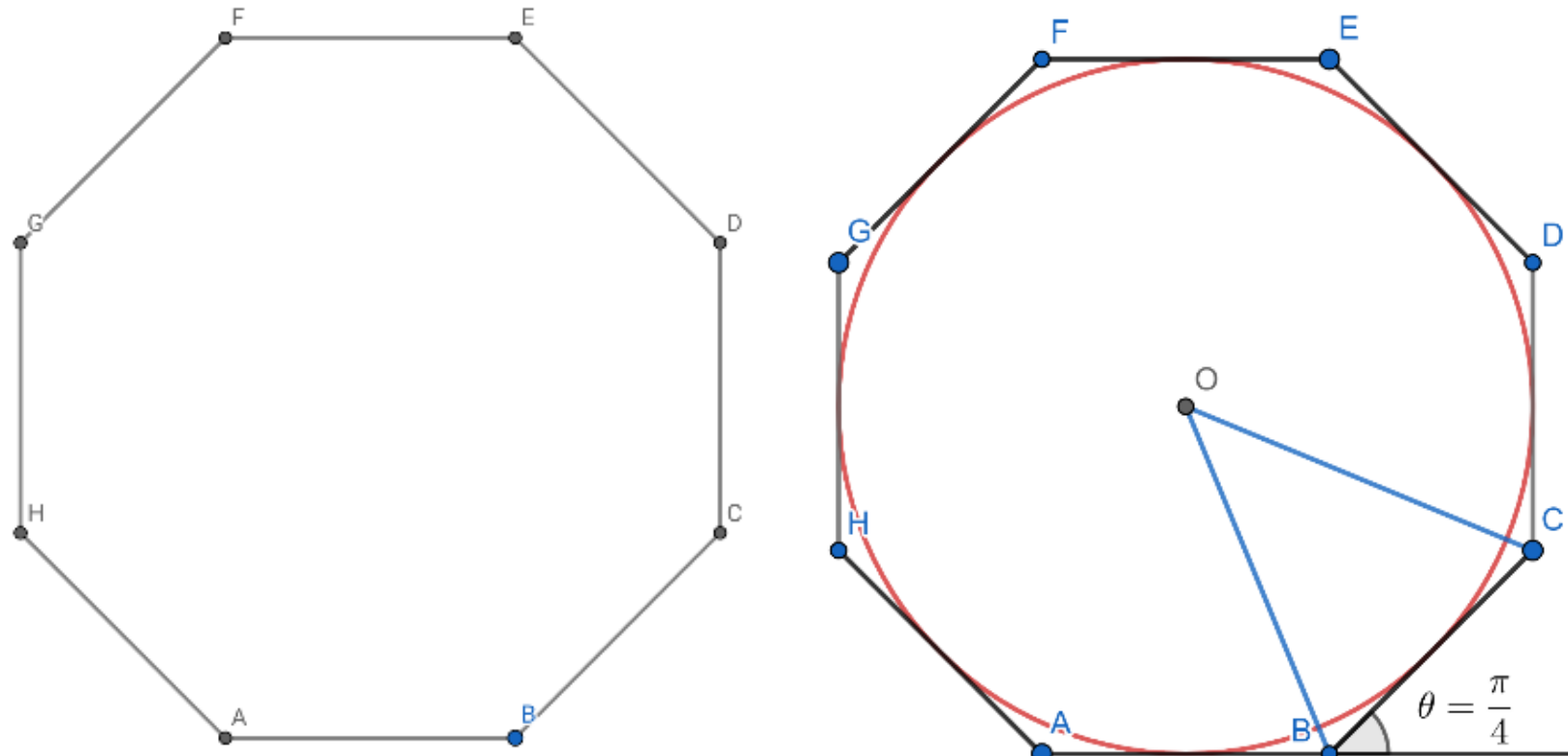
$$\Rightarrow \text{正}m\text{角星和外部正}m\text{邊形面積比} = \left[ 1 - \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{m}\right) \right] : 1$$

### 二、兩個旋轉角度組合( $0 < \theta_1 < \pi$ , $0 < \theta_2 < \pi$ , $\theta_1 \neq \theta_2$ )單一方向

(一)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ：

以交替旋轉 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 、 $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$ 為例(圖5)，幾何性質如下：

1.邊數：由多邊形外角和為 $2\pi \Rightarrow$  邊數： $\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$





2.周長：邊數乘以邊長  $\Rightarrow$  周長： $t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$

3.面積：如圖6，將此封閉圖形的每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 的點連接，將此封閉圖形分割成一個六邊形外接六個全等三角形由正弦定理、面積公式得全部三角形面積，又由餘弦定理可知中央正多邊形邊長，再根據研究目的(一)的面積公式得中央圖形面積

$\Rightarrow$  此封閉圖形面積:  $\frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \left\{ \frac{(2t^2 + 2t^2 \cos(\theta_2))[1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{4 \sin(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sin(\theta_2) \right\}$

(二)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ， $(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$

因為角度組合不同，透過觀察發現有三種不同類型的圖形，並可以兩種不同算式求其角數、移動路徑長、周長與面積，依照以下方式判別：

I.設此多角星(圖7)最外圍相鄰兩頂點(B, J)和圓心相連所圍成的角為 $\alpha$  ( $\angle BOJ$ )，A、B兩點和圓心此圖形的中心點 $O$ 相連所圍成的角度大小為 $\beta$  ( $\angle AOB$ )，若 $\frac{\beta}{\alpha}$ 為角數m的正因數 $\left(\frac{\beta}{\alpha} \middle| m\right)$ ，則所形成的圖形中，轉動 $\theta_1$ 構成的頂點與中心點 $O$ 的距離比轉動 $\theta_2$ 構成的頂點與 $O$ 的距離遠，且兩個頂點 $B$ 、 $K$ 和 $O$ 會三點共線，符合此條件的圖形外圍只會由一種角度的頂點組成，此類圖形為第1類，若 $\alpha$ 、 $\beta$ 的關係不符合此情況 $\left(\frac{\beta}{\alpha} \middle| m\right)$ 則進行判別II。

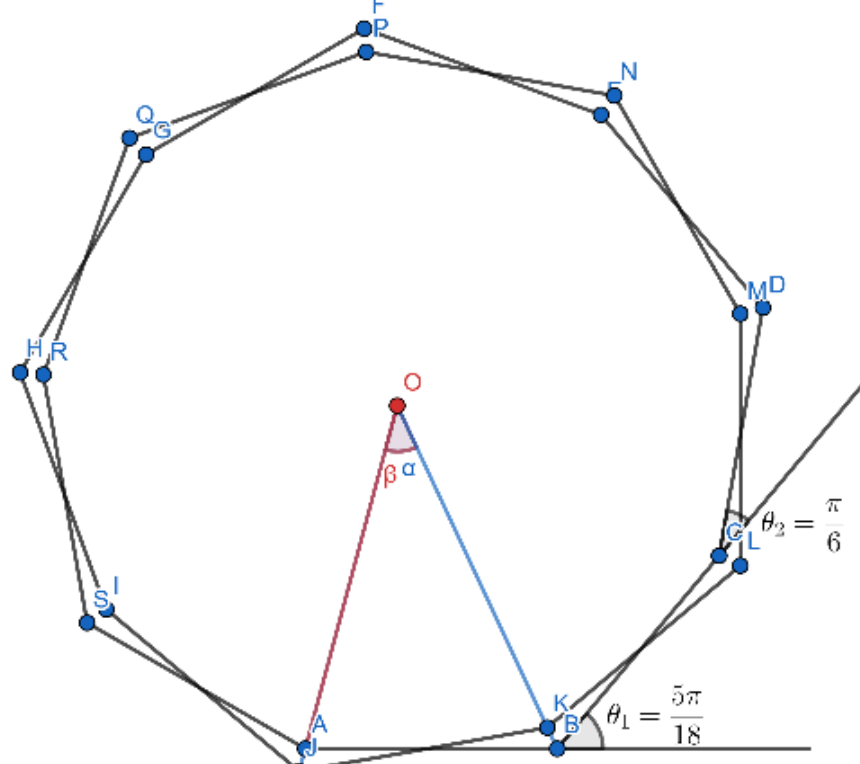


圖7

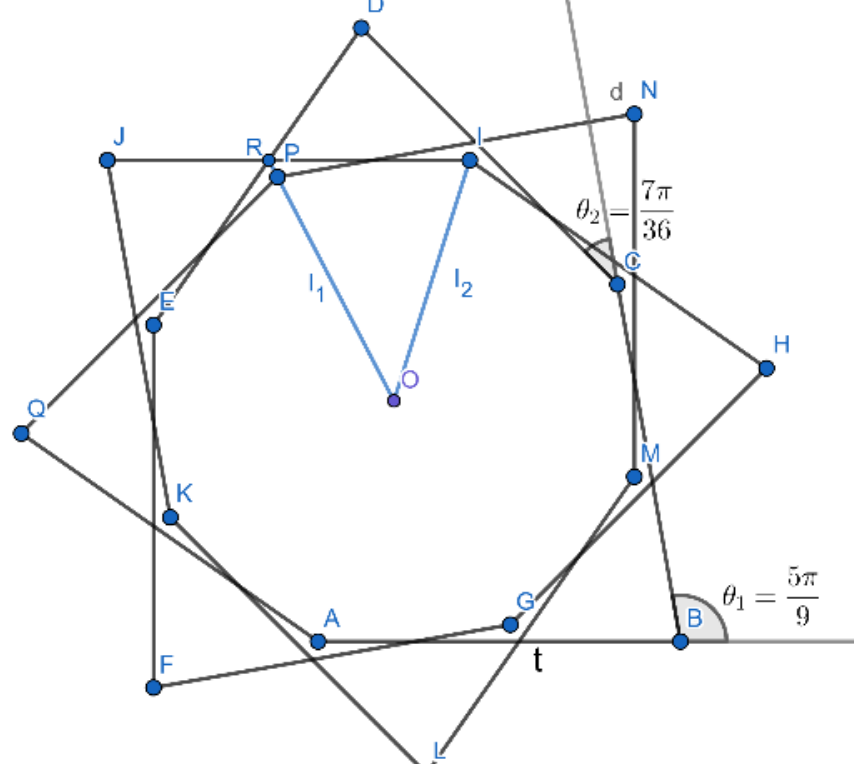


圖8

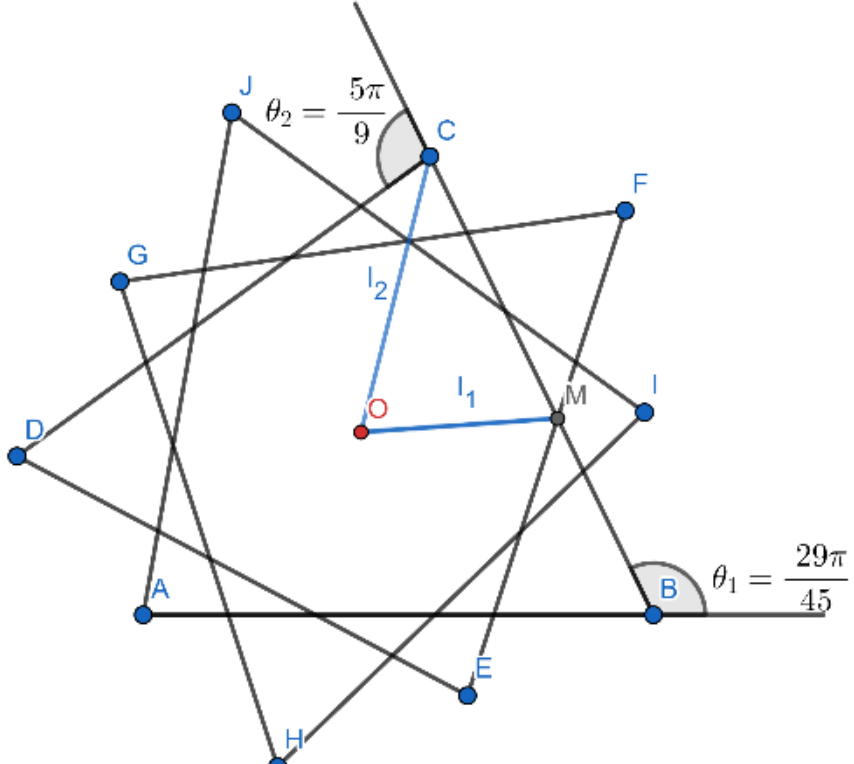


圖9

II.取多角星(圖8)中兩條接連旋轉 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 之間的移動線段(圖8中的 $\overline{DE}$ 和 $\overline{IJ}$ )，兩線段的交點 $R$ 和圖形的中心點 $O$ 之間的距離為 $\ell_1$ ，旋轉 $\theta_2$ 時所形成的頂點和 $O$ 的距離為 $\ell_2(\overline{OP})$ ，若 $\ell_1 > \ell_2$ ，則所形成圖形為第2類(圖8)，外圍只會由一種角度的頂點組成，若 $\ell_1 < \ell_2$ ，則圖形為第3類(圖9)，圖形最外圍會由兩種角度的頂點組成。

第**1.2**類因最外圍都是由一種旋轉角度的頂點組合而成，故可用相同方式計算其周長、面積，計算方式如下：

- 角數：因 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，無法在旋轉一圈( $2\pi$ )內形成封閉圖形，故角數  $= [q, 2] \times \frac{p}{q} = m$
- 移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長  $= m \times t$
- 周長：設圖10中， $\overline{OD} = r$ ， $\overline{RD} = a$ ，利用 $\Delta ORD$ 中的邊角關係可求出 $r.a$ 再求出

$$\text{周長} = \frac{2mt}{\left(\cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{m} + \sin \frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

- 面積：將圖中每個轉動 $\theta_1$ 的轉折點和中心點 $O$ 相連，會將圖分成 $m$ 個部分，每個部分可由兩個全等的三角形組成

$$\text{，故圖形面積} = \frac{mt^2}{\left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\cot \frac{\pi}{m} + \tan \frac{\theta_1}{2}\right)}$$

第**3**類最外圍是由兩種角度組合而成，計算方式如下：

- 角數：因 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ，無法在旋轉一圈( $2\pi$ )內形成封閉圖形，且因外圍會形成兩種角度，故角數  $= [q, 2] \times \frac{p}{q} \times 2 = 2m$
- 移動路徑長：每次移動長度乘以角數，故路徑長  $= 2m \times t$

- 周長：設圖11中， $\overline{OB} = r_1$ ， $\overline{OA} = r_2$ ，將圖形最外圍分為十個部分，每部分由兩條線段構成，將兩線段相加再乘上兩倍角數為周長，透過 $\Delta AOB$ 、 $\Delta FOL$ 、 $\Delta COL$ 中之邊角關係可求得周長

$$= \left[ \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}\right)}{\left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} + \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}\right)}{\left(\sin \frac{\theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_2}{2} \cdot \tan \frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} \right] \times 2m$$

- 面積：將圖形分為 $2m$ 個部分，每個部份由兩個三角形組成，得出面積

$$= m \cdot \frac{t}{\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}} \cdot \left[ \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}\right) \cdot \cos \frac{\theta_1}{2}}{\left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cdot \tan \frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} + \frac{t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{4}\right) \cdot \cos \frac{\theta_2}{2}}{\left(\sin \frac{\theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_2}{2} \cdot \tan \frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}\right)} \right]$$

三、兩個旋轉角度組合 $(-\pi < \theta_1 < 0, 0 < \theta_2 < \pi, |\theta_1| < |\theta_2|)$ 、不同方向

(一)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \in N$ ：

以每次轉動 $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ 、 $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ (圖12)為例：

- 邊數：由多邊形外角和為 $2\pi \Rightarrow$  邊數： $\frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$
- 周長：邊數乘以邊長  $\Rightarrow$  周長： $t \cdot \frac{4\pi}{(\theta_1 + \theta_2)}$

- 面積：如圖13，連接每個相鄰旋轉 $\theta_1$ 的點，將圖形分割成四邊形外接全等三角形。又因四邊形外角相同，此四邊形為正四邊形：由正弦定理、面積公式可得全部三角形面積，又由餘弦定理可知中央正多邊形邊長，再根據研究目的(一)的面積公式

$$\text{得中央圖形面積} \Rightarrow \text{此封閉圖形面積：} \frac{\pi t^2}{(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \frac{1 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

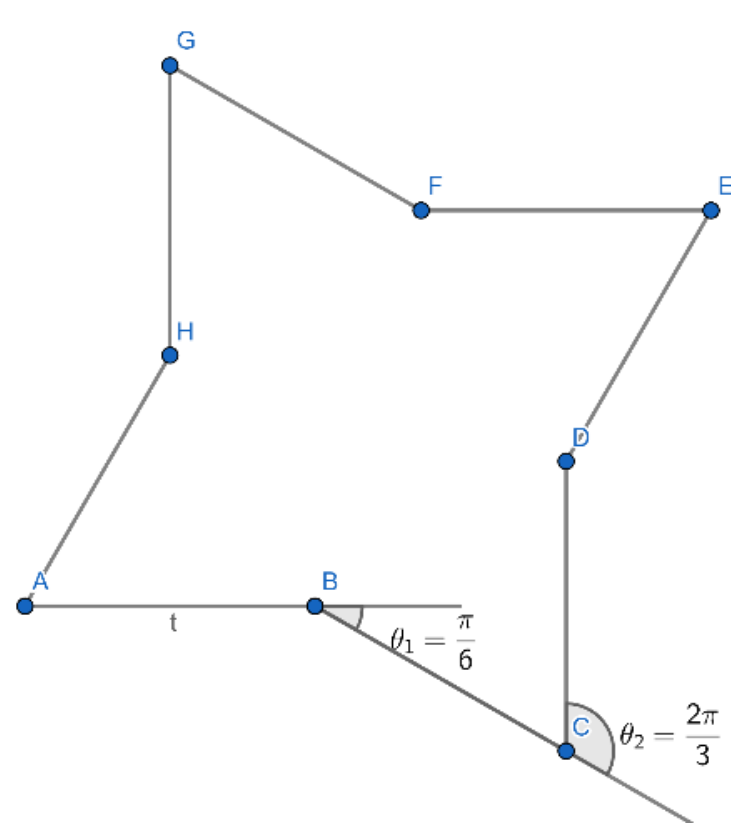


圖12

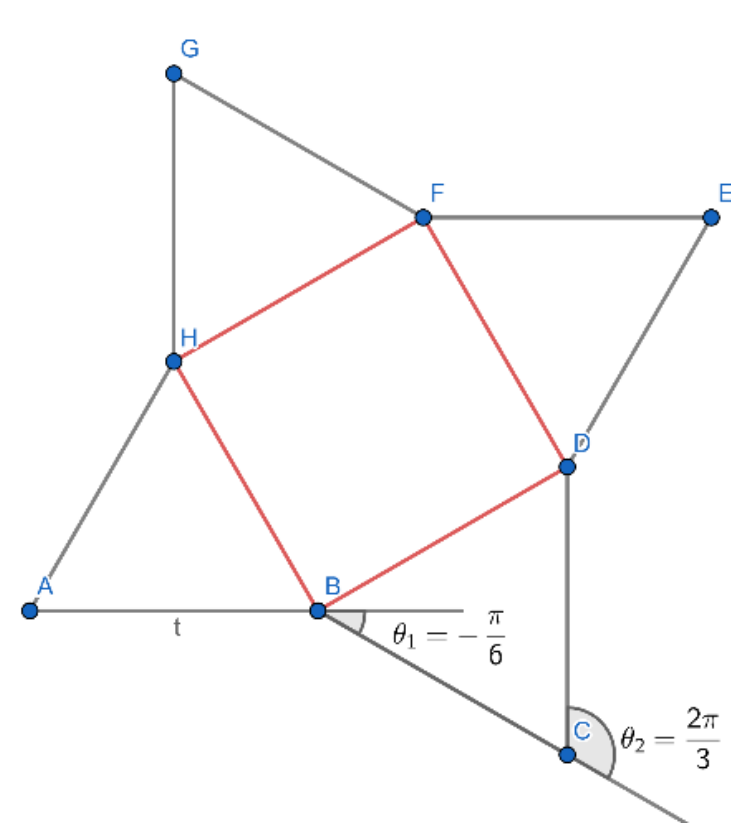


圖13

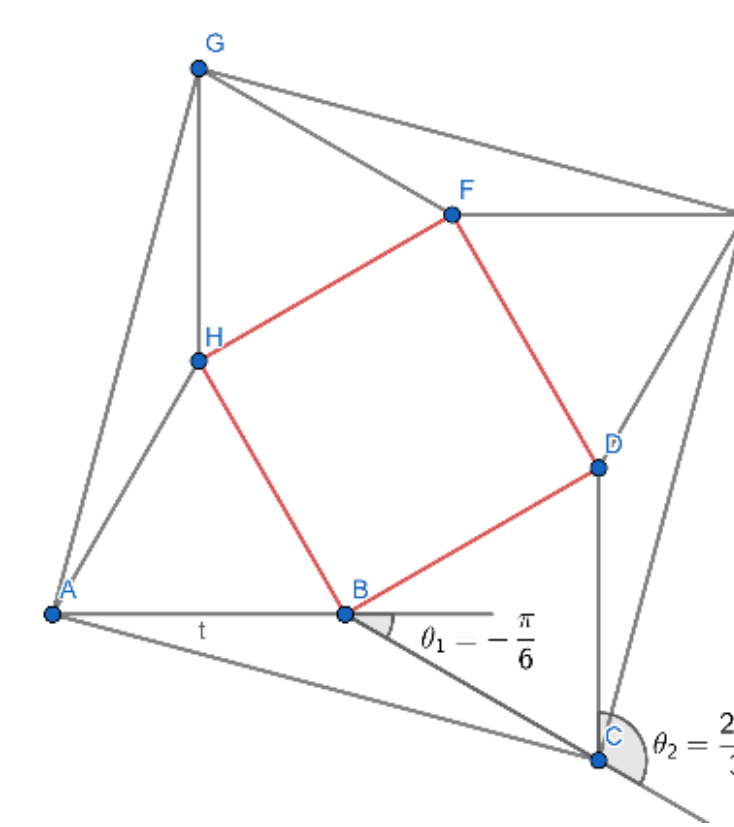


圖14



4.特性探討：如圖14，分別連接相鄰旋轉 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的點，得兩正四邊形。根據研究目的面積公式，得兩正n邊形面積比 =  $(1 + \cos\theta_1):(1 + \cos\theta_2)$

(二)旋轉角度組合 $(\theta_1 + \theta_2)$ 且 $(\theta_1 + \theta_2) \times n = 2\pi$ ， $n \notin N$ ， $\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p}\pi$ ， $(q, p) = 1$ ， $p, q \in N$

以每次轉動 $\theta_1 = \frac{-4\pi}{45}$ 、 $\theta_2 = \frac{8\pi}{9}$ 為例(圖15)，則封閉圖形的幾何性質如下：

1.角數：因無法在旋轉一圈 $(2\pi)$ 內形成封閉圖形，而會在旋轉 $\frac{[q, 2]}{2}$ 圈形成封閉圖形，故角數為m： $[q, 2] \times \frac{p}{q}$

2.移動路徑長：每次移動長度乘以角數的2倍，故路徑長 =  $2m \times t$

3.周長：因為 $\frac{[q, 2]}{2}$ 所得值的奇偶不同，會形成兩種不同類型的圖形，可以兩種方式求周長：

I.若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為偶數：連接圖15中每個旋轉 $\theta_2$ 的頂點和圖形的中心點R(圖16)，在 $\Delta ERD$ 和

$\Delta ERT$ 中，由正弦定理可得 $\overline{ET}$ ，故多角星周長為：
$$\frac{2mt \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

II.若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為奇數：以 $\theta_1 = \frac{-\pi}{12}$ 、 $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ 形成圖形為例，連接每個旋轉 $\theta_2$ 的頂點和圖形的中心點S(圖17)，在 $\Delta OPQ$ 和 $\Delta ORQ$ 中，由正弦定理可知 $\overline{OR}$ ，

故多角星周長為：
$$\frac{2mt \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)}$$

3.面積：因為 $\frac{[q, 2]}{2}$ 所得值的奇偶不同，會形成兩種不同類型的圖形，可以兩種方式求面積：

I.若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為偶數：以 $\theta_1 = \frac{-4\pi}{45}$ 、 $\theta_2 = \frac{8\pi}{9}$ 為例(圖15)，做此封閉圖形的對稱軸(圖16)

在 $\Delta ERD$ 和 $\Delta ERT$ 中，由正弦定理可知 $\overline{ER}$ 、 $\overline{ET}$ ，再由面積公式得 $\Delta ERT$ 的面積。

⇒ 此封閉圖形面積：
$$mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

II.若 $\frac{[q, 2]}{2}$ 的值為奇數：以 $\theta_1 = \frac{-\pi}{12}$ 、 $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ 為例，做此封閉圖形的對稱軸(圖17)

在 $\Delta OPQ$ 和 $\Delta ORQ$ 中，由正弦定理可知 $\overline{ER}$ 、 $\overline{ET}$ ，再由面積公式得 $\Delta ORQ$ 的面積。

⇒ 此封閉圖形面積：
$$mt^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

#### 四、兩個移動距離組合 $(t, 2t)$ 、單一旋轉角度 $(0 < \theta < \pi)$

(一)旋轉 $\theta$ ( $\pi$ )， $\theta \times n = 2\pi$ ，交替移動 $t_1$ 、 $t_2$ ， $t$ 、 $n \in N$ ：

以 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $t_1 = 1$ 、 $t_2 = 2$ (圖18)為例，此封閉正多邊形的幾何性質如下：

1.邊數：由多邊形外角和為 $2\pi \Rightarrow$  封閉圖形的邊數： $\frac{2\pi}{\theta}$

2.周長：邊數乘以邊長  $\Rightarrow$  封閉圖形的周長： $(t_1 + t_2) \cdot \frac{\pi}{\theta}$

3.面積：如圖19，連接每個第奇數個旋轉點，將此封閉圖形分割成一個三角形外接三個全等三角形，又其中中央三角形內角相等，且三邊等長，得此中央三角形為正三角形：根據面積公式、研究目的(一)的面積公式

⇒ 此封閉圖形面積：
$$\frac{\pi}{4\theta} \left[ 2t_1 t_2 \sin\theta + \frac{(1 + \cos 2\theta)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos \theta)}{\sin 2\theta} \right]$$

#### 肆、結論

一、研究目的一、(一)中使用封閉圖形的內切圓圓心和各頂點相連，將圖形分為數個全等三角形，再將和封閉圖形邊長相切的圓半徑當作高，計算面積。

二、相同方向、固定一個旋轉角度不在一圈內形成的圖形，其面積計算方式和其他條件形成的圖形計算面積方式不同，研究目的一、(二)是將圖形補成一個正多邊形再扣掉多於三角形面積，而其他研究目的是將圖形分割成不同形狀做計算。

三、研究發現在一個或兩個固定旋轉角度的組合之下，皆可形成規則性的封閉圖形並找到圖形的周長和面積推導公式；在兩種不同的移動距離搭配下，也可找到在一圈內形成封閉圖形的規律及面積公式。

四、未來展望：

(一)將研究變因推廣至三個或三個以上的旋轉角度組合，求其形成的封閉圖形之特性。

(二)求出研究目的一、(二)中形成圖形，各頂點相連成的正多邊形和特定角度下形成的內部多角星之間的面積關係。

(三)找出研究目的四中旋轉超過一圈所形成的圖形類型，進行分類和計算特性通式。

#### 伍、參考資料及其他

- 高柳茜さん. (2018年3月). 丸にとらわれたお星さま!? ファンタジックで美しい数学. つくばサイエンスエッジ 2018.
- 張志基. (2023). 奧數揭密 五邊形與五角星. 香港文匯報
- 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育群、彰宮明. 於數學第二冊 (第二版). 臺南市: 翰林出版事業.176-230.
- 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育群、彰宮明. 於數學第三冊 (第二版). 臺南市: 翰林出版事業.18-63.

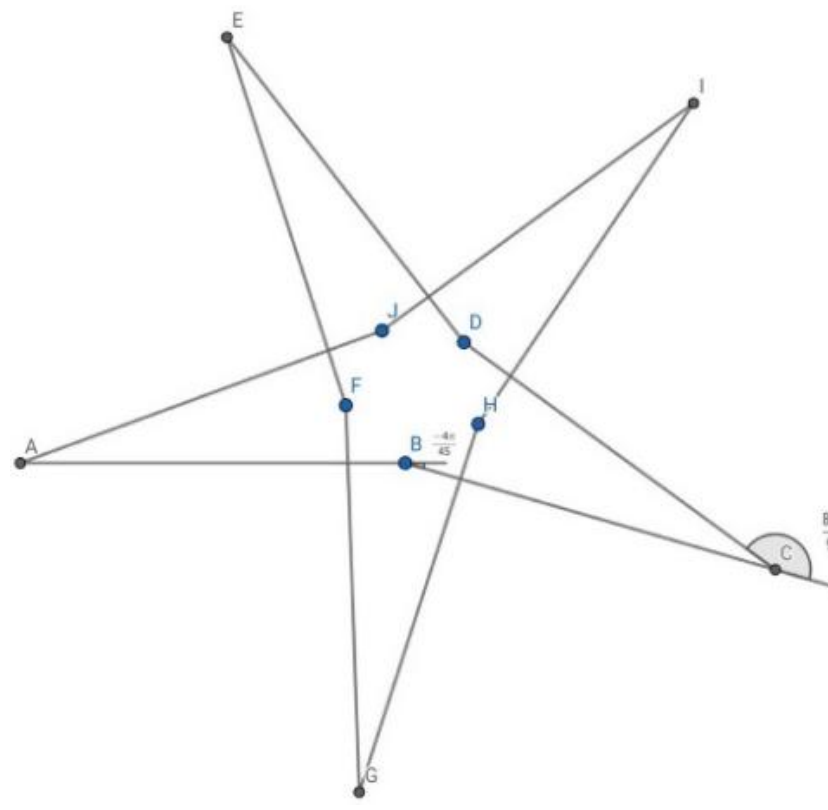


圖15

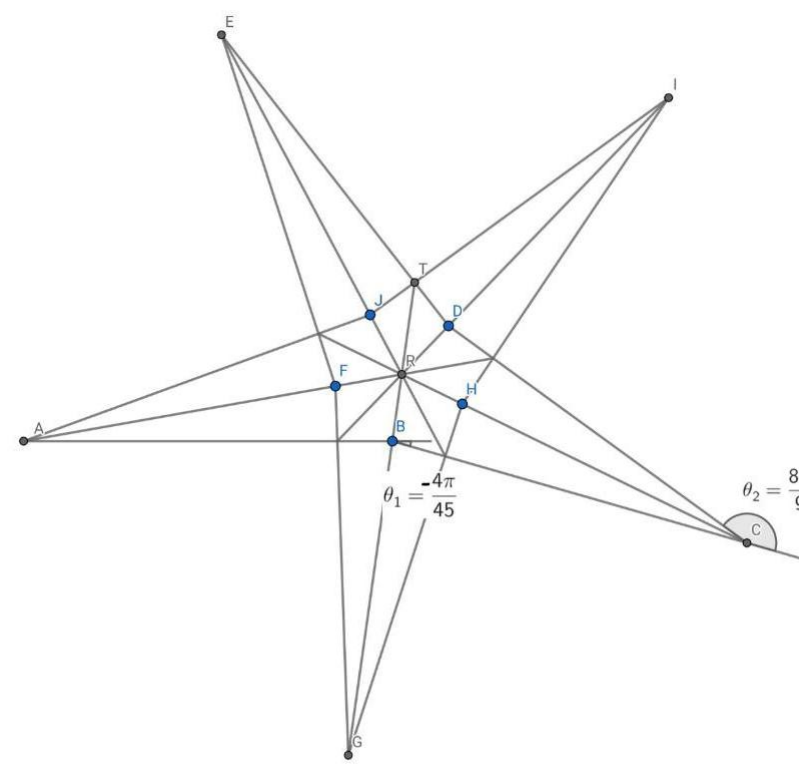


圖16

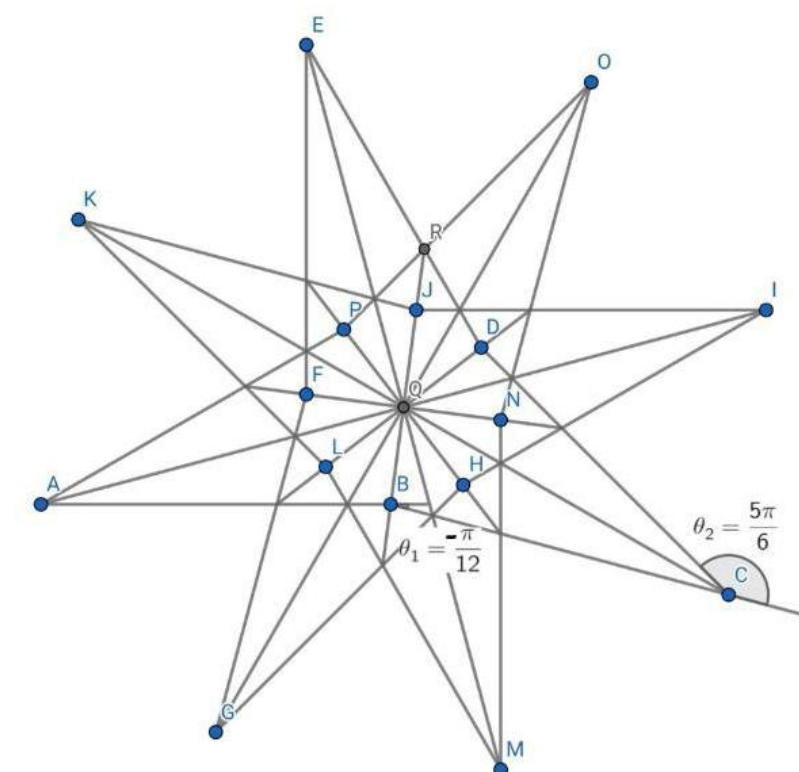


圖17

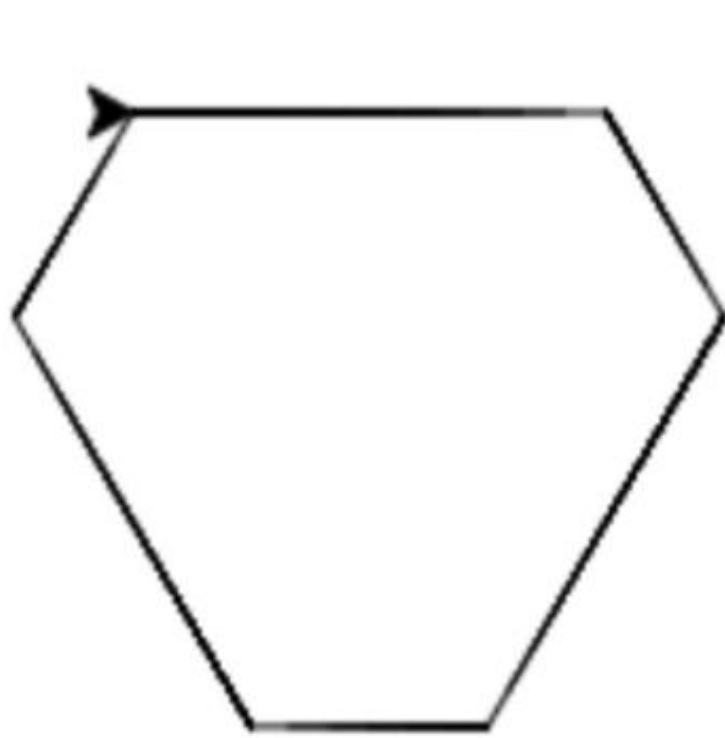


圖18

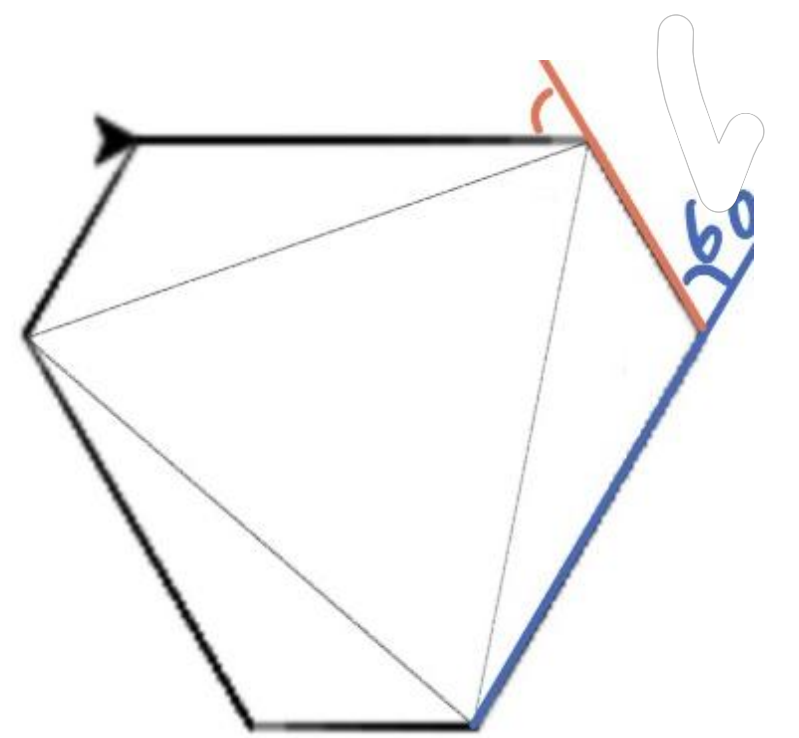


圖19