

# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

高級中等學校組 數學科

050402

遨尤四海——原三角形和頂垂三角形的尤拉線  
性質探討

學校名稱： 國立中興大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高二 呂翊瑋	許竣堡
高二 謝舒帆	
高二 徐廣澄	

關鍵詞： 尤拉線、頂垂三角形、共圓

## 摘要

本研究以圓內接多邊形為主題，探討其幾何結構中的尤拉線特性，重點分析原三角形與頂垂三角形之間的幾何關係，以及原三角形與六邊形尤拉線的關係。

研究首先針對原三角形與頂垂三角形的尤拉線，分析其是否具有特殊的性質與規則。接著研究延伸至由原三角形與頂垂三角形組成的六邊形，探索其與原三角形尤拉線的幾何關係。此外，本研究還分析了三角形換心之間的互換特性，驗證疊作的規律。

本研究的成果不僅有助於深化對多邊形內部幾何結構的理解，亦為未來尤拉線與高維幾何研究奠定基礎，進一步揭示幾何中普遍的規律性與應用價值。

### 壹、研究動機

高一時，我們學習到尤拉線是一條特殊的直線，由三角形的外心、重心與垂心所構成。而在「圓內接多邊形的歐拉線」這篇文章中我們也了解到圓內接多邊形也有尤拉線的性質，在深入研究「換心手術」及「多邊形疊作之性質探討」這兩篇科展作品後，發現其存在密切的關聯。因此，我們以此為題材進行一系列的研究。

### 貳、研究目的

- 一、三心軌跡
- 二、尤拉線交角
- 三、疊作的換心與循環性質的探討

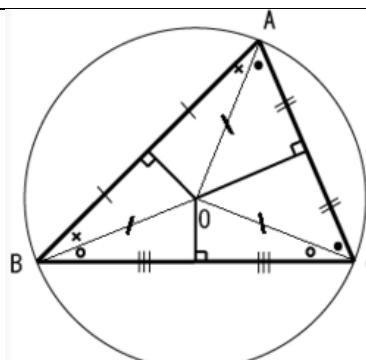
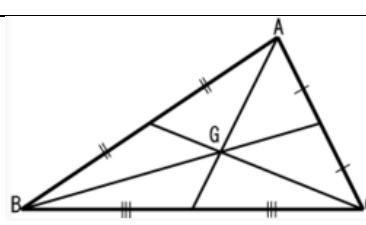
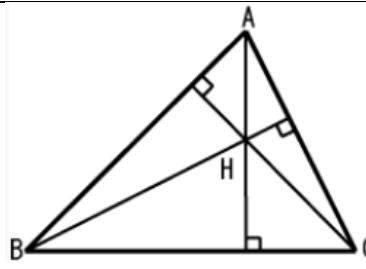
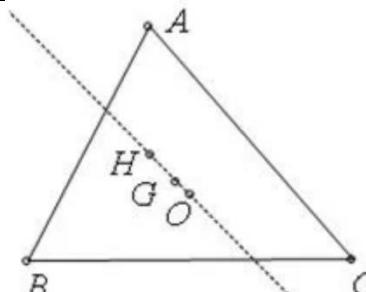
### 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、geogebra 繪圖軟體

## 肆、名詞解釋及文獻探討

### 一、三角形的三心及其尤拉線定義

#### (一)定義:

名稱	定義	圖示
外心 O	三條中垂線的交點，同時也是外接圓圓心。	 <p>(圖 1.出自維基百科)</p>
重心 G	三條中線的交點，在平面座標上，同時也是三項點座標和除以三。	 <p>(圖 2.出自維基百科)</p>
垂心 H	三條垂線的交點。	 <p>(圖 3.出自維基百科)</p>
尤拉線	過外心、垂心、重心三點的一條直線，且 $\overline{HG} = 2\overline{GO}$	 <p>(圖 4.出自維基百科)</p>

## (二)三角形尤拉線共線證明(參考資料 6):

1.設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三頂點坐標分別為 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$ , 其外接圓半徑為 $r$ , 外心為 $O(0,0)$ , 則 $x_1^2+y_1^2=r^2, x_2^2+y_2^2=r^2, x_3^2+y_3^2=r^2$ 。

2.已知 $A_1$ 和 $A_2$ 中點為 $M_3(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ , 由前面三角形重心的定義可知:

$$\triangle A_1A_2A_3 \text{的重心 } G = \frac{2}{3}(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) + \frac{1}{3}(x_3, y_3) = (\frac{x_1+x_2+x_3}{2}, \frac{y_1+y_2+y_3}{2})。$$

3.設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心 $H$ 為 $(x, y)$ , 由三角形垂心的定義可知: $\overrightarrow{A_1H} \cdot \overrightarrow{A_3A_2} = 0, \overrightarrow{A_2H} \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = 0, \overrightarrow{A_3H} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = 0$ , 推得: $(x-x_1)(x_2-x_3) + (y-y_1)(y_2-y_3) = 0, (x-x_2)(x_1-x_3) + (y-y_2)(y_1-y_3) = 0, (x-x_3)(x_1-x_2) + (y-y_3)(y_1-y_2) = 0$ 。

4.又 $(x_2+x_3)(x_2-x_3) + (y_2+y_3)(y_2-y_3) = 0 \Leftrightarrow (x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2) = 0, (x_1+x_3)(x_1-x_3) + (y_1+y_3)(y_1-y_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2+y_1^2)-(x_3^2+y_3^2) = 0, (x_1+x_2)(x_1-x_2) + (y_1+y_2)(y_1-y_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2) = 0$ 。

5.由上述推導可知: $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心 $H = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$ 。

6.因為 $\overrightarrow{OG} = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ ,  $\overrightarrow{OH} = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$ , 可推得:  $\overrightarrow{OG} \parallel \overrightarrow{OH}$ , 且

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = (\frac{2(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{2(y_1+y_2+y_3)}{3})$$

$= 1:2$ 。

## 二、圓內接多邊形的三心及其尤拉線定義

### (一)定義(參考資料 1):

名稱	定義
外心	外接圓圓心即是外心, 所以圓內接多邊形必有外心。
重心	定義 $(n+1)$ 邊形的中線為連接 $(n+1)$ 邊形的頂點與其餘 $n$ 個頂點所構成的 $n$ 邊形重心之線段。 $(n+1)$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ 的所有中線都交於同一點, 而且由頂點算起每條中線被這個點分成 $n:1$ 的線段, 因此就定義 $(n+1)$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ 的重心為 $(n+1)$ 條中線的交點。
垂心	假設已經定義了一定圓 $S$ 之 $n$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的垂心, 且給定 $S$ 的內接 $(n+1)$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ 。用 $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$ 分別表示 $(n+1)$ 個 $n$ 邊形 $A_2A_3 \dots A_{n+1}$ , $A_1A_3 \dots A_{n+1}, \dots, A_1A_2 \dots A_n$ 的垂心。則與圓 $S$ 有相同半徑, 且圓心在 $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$ 的圓都交於同一點 $H$ , 這個點就叫 $(n+1)$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ 的垂心。
尤拉線	外心、垂心、重心三點所連成的一條直線, 且 $\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{GH} = 1:n-1$ 。

(二)圓內接多邊形尤拉線證明(以圓內接四邊形為例) (參考資料 6):

1.設圓內接四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  的頂點坐標分別為  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4)$ ，其外接圓半徑為  $r$ ，外心為  $O(0,0)$ 。

2.已知三角形的重心為  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ，而圓內接四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  的重心  $G =$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) + \frac{1}{4}(x_4, y_4) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)。$$

由上述推導及多邊形重心定義可知:圓內接  $n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  的重心  $G =$

$$\frac{n-1}{n}\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n-1}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n-1}\right) + \frac{1}{n}(x_n, y_n) = \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right)。$$

由數學歸納法得證此重心公式為真。

3.已知圓內接四邊形  $A_1A_2A_3A_4$ ， $\Delta A_2A_3A_4$ 、 $\Delta A_1A_3A_4$ 、 $\Delta A_1A_2A_4$ 、 $\Delta A_1A_2A_3$  的垂心分別表示為  $H_1(x_2 + x_3 + x_4, y_2 + y_3 + y_4)$ 、 $H_2(x_1 + x_3 + x_4, y_1 + y_3 + y_4)$ 、

$H_3(x_1 + x_2 + x_4, y_1 + y_2 + y_4)$ 、 $H_4(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$ ，則由這四個三角形垂心坐標之關係可知圓內接四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  的垂心  $H = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$ ，且  $\overline{HH_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r$ 、 $\overline{HH_2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r$ 、 $\overline{HH_3} = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = r$ 、 $\overline{HH_4} = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = r$ 。

由上述推導及多邊形垂心定義可知:圓內接  $n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  的垂心  $H =$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n, y_1 + y_2 + \dots + y_n)，且 \overline{HH_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r、\overline{HH_2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r、\dots、\overline{HH_n} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = r。$$

由數學歸納法得證此垂心公式為真。

4.因為  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right)$ ， $\overrightarrow{OH} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n, y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ ，

可推得  $\overrightarrow{OG}/\overrightarrow{OH}$ ，且  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{n-1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n, y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ ，故

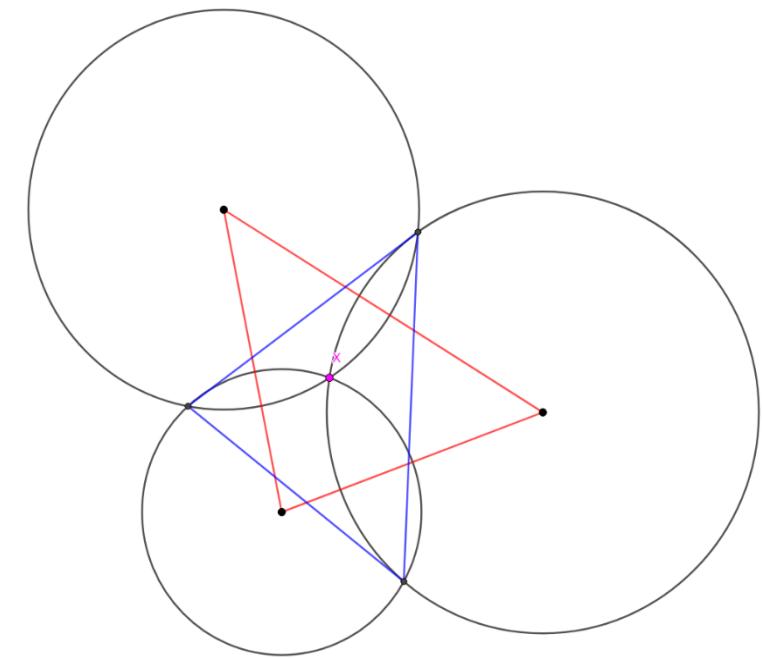
圓內接  $n(n \geq 3)$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  也有尤拉線( $O$ 、 $G$ 、 $H$  三心共線)，且  $\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{GH} =$

$$\frac{1}{n} : \frac{n-1}{n} = 1 : (n-1)。$$

### 三、頂心三角形

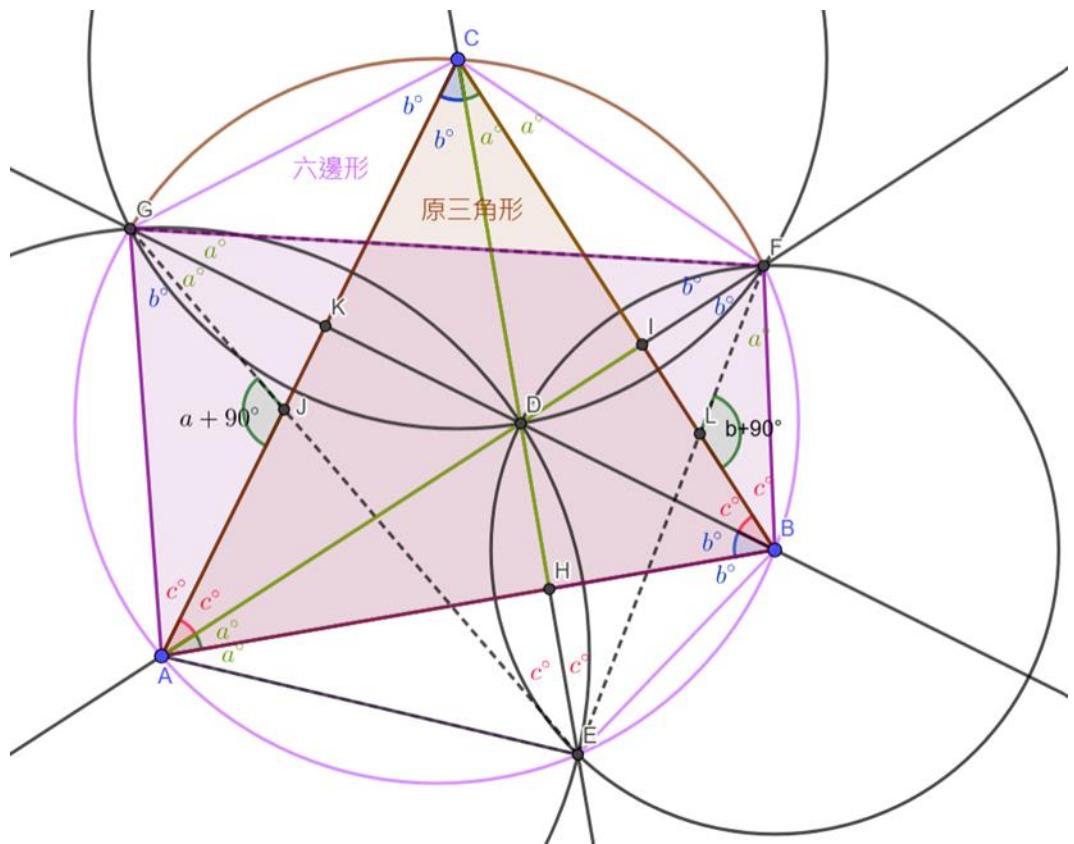
定義:取一三角形(紅)及任意一點  $X$ ，以三頂點為圓心，以頂點到  $X$  的距離作半徑畫圓，

三圓的交點(不包含  $X$ )連線便是頂心三角形(藍)。



(圖 5.出自第一作者)

#### 四、原三角形和頂垂三角形的頂點共圓證明



(圖 6.出自參考資料 2)

1.  $\angle CDI = \angle ADH$  (對頂角)、 $\angle CID = \angle AHD = 90^\circ$

$\triangle CID \sim \triangle AHD$  (AA 相似)

2.  $\overline{AD}=\overline{AE}$ (圓 A 半徑)、 $\overline{DE}$ 為圓 A 之弦

$\Delta ADE$  為等腰三角形

$\overline{AD}=\overline{AE}$ 、 $\overline{BD}=\overline{BE}$

四邊形 ADBE 為等腰梯形

四邊形 ADBE 為等腰梯形

連心線  $\overline{AB}$  為  $\angle EAD$  之角平分線

令  $\angle ICD=\angle HAD=a^\circ$

連心線  $\overline{AB}$  為  $\angle EAD$  之角平分線

$\angle HAD=\angle HAE=a^\circ$  且  $\angle EAD=\angle HAD+\angle HAE=2a^\circ$

(同理可證， $\angle DCF=2a^\circ$  )

3.  $\angle EAD=\angle DCF=2a^\circ$

弧長  $ED=$  弧長  $FD=2a^\circ$

4.  $\angle DGE$  為弧長  $ED$  之圓周角， $\angle DGF$  為弧長  $FD$  之圓周角

$\angle DGE=\angle DGF=a^\circ$

由 4. 可知， $\overline{GD}$  為  $\angle EGF$  之角平分線(同理  $\overline{ED}$ 、 $\overline{FD}$  分別為  $\angle GEF$ 、 $\angle GFE$  之角平分線)

得證:  $\angle DGE=\angle DGF$ 、 $\angle DFG=\angle DFE$ 、 $\angle DEF=\angle DEG$

1. 由上述證明可知， $\angle DCB=\angle DAB=a^\circ$  (同理  $\angle DCA=\angle DBA=b^\circ$  、 $\angle CBD=\angle DAC=c^\circ$  )，而同時由於圓周角相等， $\angle DEG=\angle DEF=c^\circ$  (同理  $\angle DFG=\angle DFE=b^\circ$  、 $\angle DGF=\angle DGE=a^\circ$  )

2.  $\overline{AC}$  為 A、C 兩圓之連心線、 $\overline{GD}$  為兩圓之弦

$\overline{AC} \perp \overline{GD}$

$\overline{AC} \perp \overline{GD}$ 、 $\overline{CG}=\overline{CD}$ (圓 C 半徑)、 $\overline{AG}=\overline{AD}$ (圓 A 半徑)

四邊形 ADCG 為菱形

3. 四邊形 ADCG 為菱形

$\angle GCA=\angle DCA=b$ (其他角同理)

4.  $\angle JGK+\angle GKJ=\angle GJA$

$\angle GJA=a+90$ (其他角同理)

5.  $\angle GJA=a+90$ 、 $\angle CBG=c$ ，又  $2a+2b+2c=180$

$\angle AGJ=b$ (其他角同理)

7. 先證四邊形 AGFB 四頂點共圓：

四邊形 AGFB:  $\angle A + \angle F = 180^\circ$  、  $\angle G + \angle B = 180^\circ$

四邊形 AGFB 為圓內接四邊形

(同理可證四邊形 CGBF、GFEA)

得證: A、B、C、E、F、G 六點共圓

## 五、疊作循環與換心

(一)、第 m 層和第(m+3)層相似

觀察一：任意點位於圖形內

已知:  $\triangle A_0B_0C_0$  為原圖形，

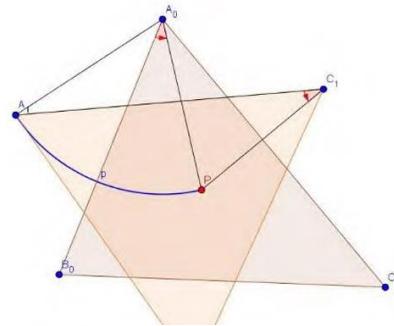
$\triangle A_1B_1C_1$  為第一層圖形

求證:  $\angle B_0A_0P = \angle A_1C_1P$

證明:  $\angle A_1C_1P = \frac{1}{2}\widehat{A_1P} = \frac{1}{2}\angle A_1A_0P$

$\angle A_1C_1P = \frac{1}{2}\angle A_1A_0P = \angle B_0A_0P$

故  $\angle B_0A_0P = \angle A_1C_1P$



觀察二：任意點位於邊外

已知:  $\triangle A_0B_0C_0$  為原圖形，

$\triangle A_1B_1C_1$  為第一層圖形

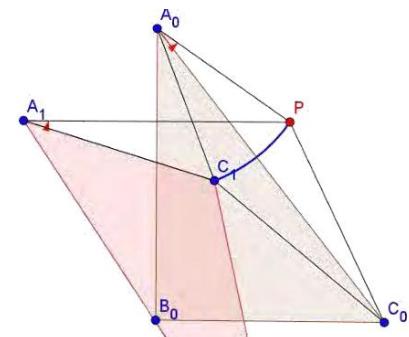
求證:  $\angle C_0A_0P = \angle C_1A_1P$

證明:  $\angle C_1A_1P = \frac{1}{2}\widehat{C_1P} = \angle C_0A_0P$

( $A_0C_1C_0P$  為一箏形)

$\angle C_1A_1P = \frac{1}{2}\angle C_1A_0P = \angle C_0A_0P$

故  $\angle C_1A_1P = \angle C_0A_0P$



觀察三：任意點位於點外

已知:  $\triangle A_0B_0C_0$  為原圖形，

$\triangle A_1B_1C_1$  為第一層圖形

求證:  $\angle RA_1B_1 = \angle C_0A_0P$

證明:  $\angle PA_1B_1 = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1 = \frac{1}{2}\widehat{PB_1}$

$\because \triangle PB_1A_0, \triangle PB_1C_0$  為共底等腰三角形

$\therefore \triangle PB_1A_0, \triangle PB_1C_0$  高共線

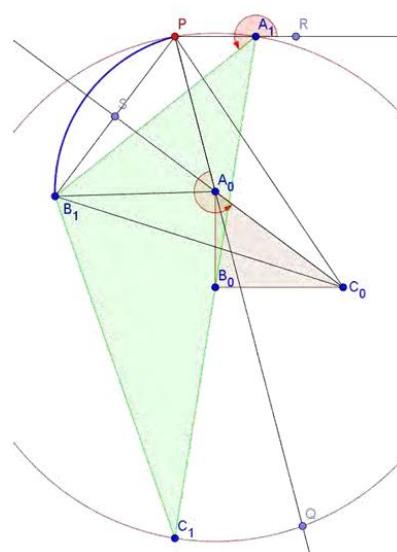
$\overrightarrow{C_0A_0}$  平分  $\angle PA_0B_1$

$\therefore \angle QA_0C_0 = \angle PA_0S$

$\therefore \angle PA_0S = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1$

$\therefore \angle QA_0C_0 = \angle PA_0S = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1 = \frac{1}{2}\widehat{PB_1} = \angle PA_1B_1$

故  $\angle RA_1B_1 = \angle C_0A_0P$



## 性質二之證明

步驟一：證明原圖形相似於第三層圖形

1. 原圖形與第一層疊作頂圓三角形

藉由觀察一、二、三可得

(由上圖到下圖為圖 7~9，皆出自於參考資料 5)

$$\begin{aligned}
 \angle C_0 A_0 P &= \angle 1 = \angle C_1 A_1 P \\
 \angle P A_0 B_0 &= \angle 2 = \angle P C_1 A_1 + 180^\circ \\
 \angle A_0 B_0 P &= \angle 3 = \angle A_1 B_1 P \\
 \angle P B_0 C_0 &= \angle 4 = \angle P A_1 B_1 \\
 \angle B_0 C_0 P &= \angle 5 = \angle B_1 C_1 P + 180^\circ \\
 \angle B_0 C_0 P &= \angle 6 = \angle P C_1 A_1
 \end{aligned}$$

## 2.第一層與第二層重複疊作頂圓三角形

同 1. 的方法可得

$$\begin{aligned}
 \angle C_1 A_1 P &= \angle 1 = \angle C_2 A_2 P \\
 \angle P C_1 A_1 + 180^\circ &= \angle 2 = \angle P B_2 C_2 \\
 \angle A_1 B_1 P &= \angle 3 = \angle A_2 B_2 P + 180^\circ \\
 \angle P A_1 B_1 &= \angle 4 = \angle P C_2 A_2 + 180^\circ \\
 \angle B_1 C_1 P + 180^\circ &= \angle 5 = \angle B_2 C_2 P \\
 \angle P C_1 A_1 &= \angle 6 = \angle P A_2 B_2
 \end{aligned}$$

### 3.第二層與第三層重複疊作頂圓三角形

同 1. 的方法可得

$$\begin{aligned}
 \angle C_2 A_2 P &= \angle 1 = \angle C_3 A_3 P \\
 \angle P B_2 C_2 &= \angle 2 = \angle P B_3 C_3 \\
 \angle A_2 B_2 P + 180^\circ &= \angle 3 = \angle A_3 B_3 P \\
 \angle P C_2 C_2 + 180^\circ &= \angle 4 = \angle P B_3 C_3 \\
 \angle B_2 C_2 P &= \angle 5 = \angle B_3 C_3 P \\
 \angle P A_2 B_2 &= \angle 6 = \angle P C_3 A_3
 \end{aligned}$$

4. 在 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$ 中

$$\begin{aligned}
 & \because \angle C_0 A_0 P = \angle C_1 A_1 P = \angle C_2 A_2 P = \angle C_3 A_3 P = \angle 1 \\
 & \angle P A_0 B_0 = \angle P C_1 A_1 + 180^\circ = \angle P B_2 C_2 = \angle P B_3 C_3 = \angle 2 \\
 & \angle A_0 B_0 P = \angle A_1 B_1 P = \angle A_2 B_2 P + 180^\circ = \angle A_3 B_3 P = \angle 3 \\
 & \angle P B_0 C_0 = \angle P A_1 B_1 = \angle P C_2 C_2 + 180^\circ = \angle P B_3 C_3 = \angle 4 \\
 & \angle B_0 C_0 P = \angle B_1 C_1 P + 180^\circ = \angle B_2 C_2 P = \angle B_3 C_3 P = \angle 5 \\
 & \angle B_0 C_0 P = \angle P C_1 A_1 = \angle P A_2 B_2 = \angle P C_3 A_3 = \angle 6 \\
 & \therefore \angle B_0 C_0 A = 360^\circ - (\angle C_0 A_0 P + \angle P A_0 B_0) = 360^\circ - 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\angle C_3 A_3 P + \angle A_3 B_3 P) = \angle B_3 A_3 C_3 \\ & \angle A_0 B_0 C_0 = 720^\circ - (\angle A_0 B_0 P + \angle P B_0 C_0) = 720^\circ - \end{aligned}$$

$$(\angle A_3B_3P + \angle PB_3C_3) = \angle C_3B_3A_3$$

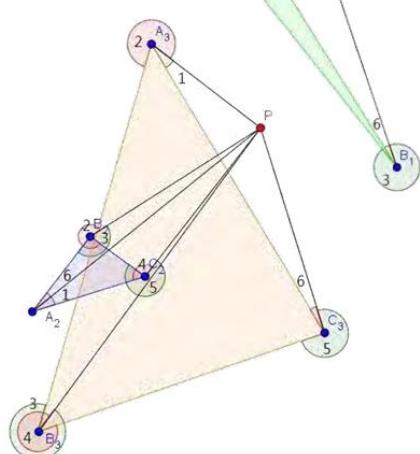
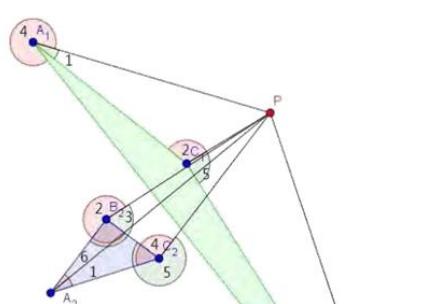
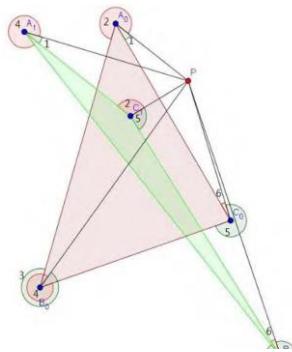
$$\angle A_0C_0B_0 = 360^\circ - (\angle B_0C_0P + \angle PC_0A_0) = 360^\circ - (\angle B_3C_3P + \angle PC_3A_3) = \angle A_3C_3B_3$$

$\Rightarrow \triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle A_3B_3C_3$  (AAA 相似)，故原圖

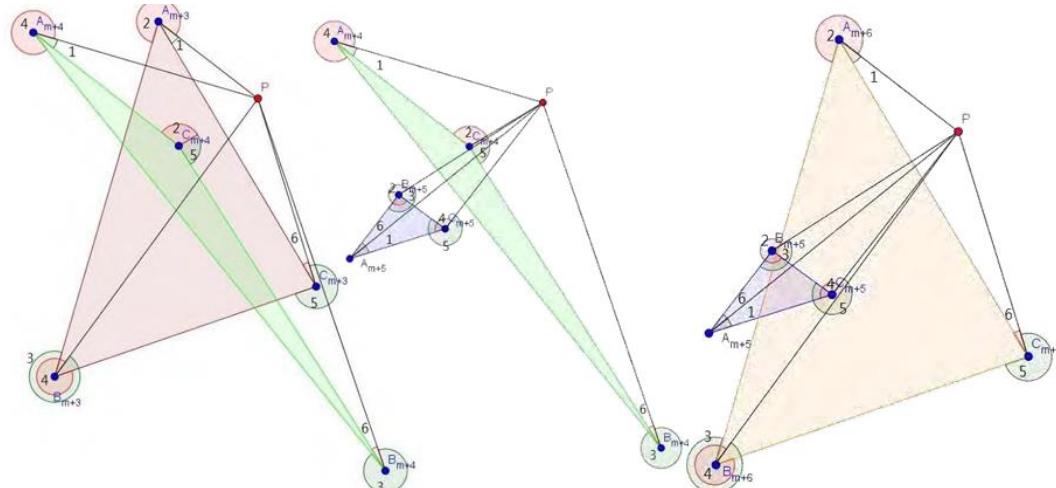
步驟二：假設第  $m$  層圖形~第  $(m+3)$  層圖形成立

驟三:證明第 $(m+3)$ 層圖形~第 $(m+6)$ 層圖形  
如下圖， $P$  為第 $(m+3)$ 層圖形的任意點，對其重複疊作，與步驟一同理，得到第 $(m+3)$ 層圖形與第 $(m+6)$ 層圖形之各對應角相等，故可得第 $(m+3)$ 層圖形~第 $(m+6)$ 層圖形(△△相似)。

由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法可得第  $m$  層圖形~第 $(m+3)$ 層圖形，得證。



(由上圖到下圖為圖 10~12，皆出自於參考資料 5)

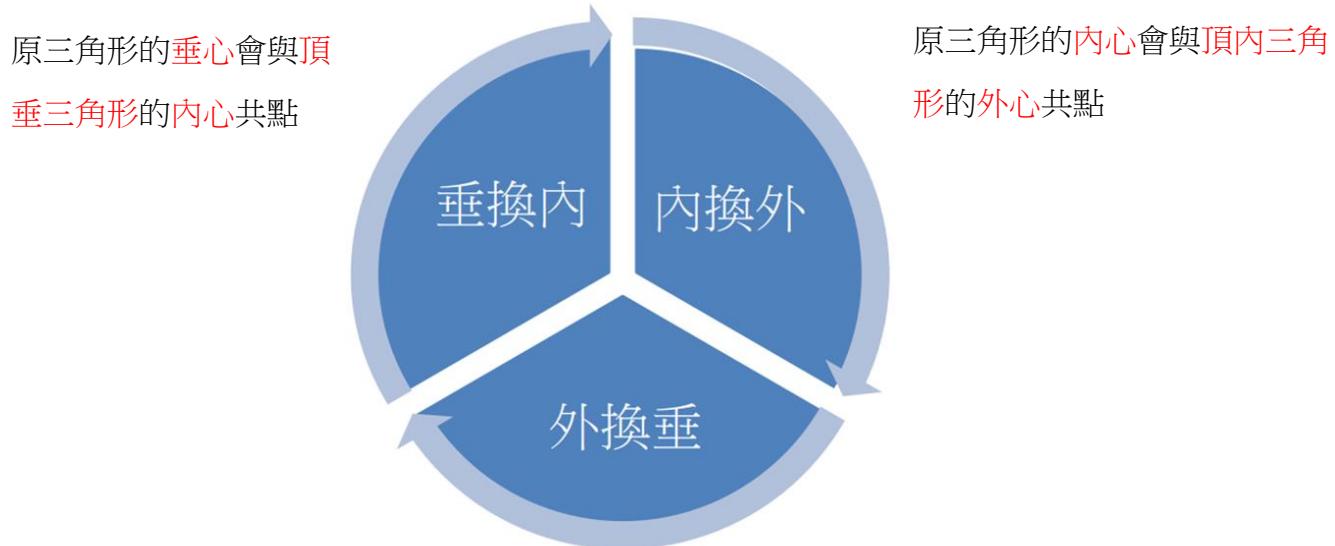


(由上圖到下圖為 13~15，皆出自於參考資料 5)

經整理可得頂圓三角形角度規律如下：

第 $m$ 層	內角 $\angle A_m$	內角 $\angle B_m$	內角 $\angle C_m$
第 $m+0$ 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$
第 $m+1$ 層	$\angle A_1 = (\angle 1 + 180^\circ) + (\angle 4 + 180^\circ)$ 之同界角	$\angle B_1 = \angle 3 + \angle 6$	$\angle C_1 = \angle 5 + \angle 2$
第 $m+2$ 層	$\angle A_2 = \angle 1 + (\angle 6 + 180^\circ)$ 之同界角	$\angle B_2 = \angle 3 + \angle 2$	$\angle C_2 = (\angle 5 + 180^\circ) + \angle 4$ 之同界角
第 $m+3$ 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$

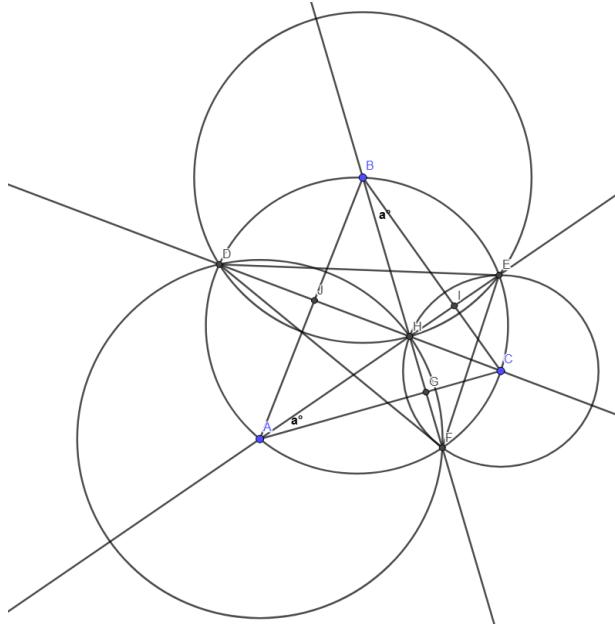
(二)、換心性質(銳角)



(圖 16，出自於參考資料 2)

原三角形的外心會與頂外三角形的垂心共點

## 1. 垂換內

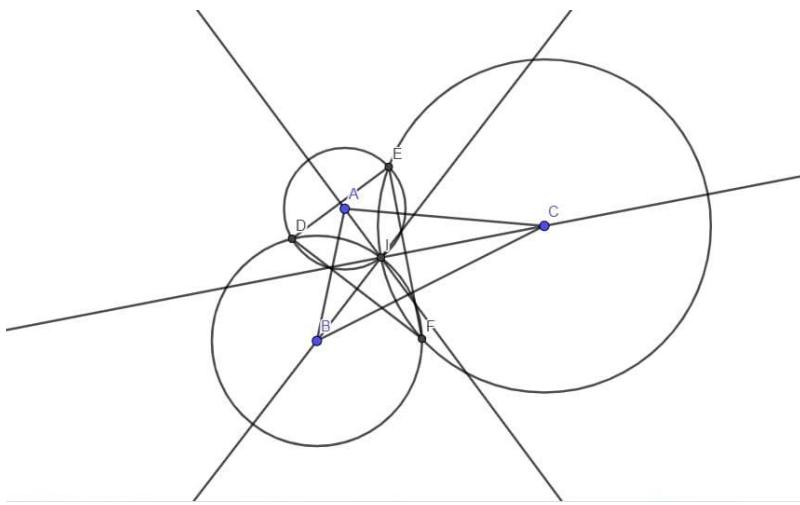


(圖 17.出自第一作者)

證明：

1.  $\angle BHI = \angle AHG$  (對頂角)、 $\angle BIH = \angle AGH = 90^\circ$ 、 $\triangle BIH \sim \triangle AGH$  (AA 相似)
2.  $\overline{AH} = \overline{AF}$  (圓 A 半徑)、 $\overline{HF}$  為圓 A 之弦
3.  $\overline{CH} = \overline{CF}$  (圓 C 半徑)，四邊形 AHCF 為等腰梯形，連心線  $\overline{AC}$  為  $\angle FAH$  之角平分線，令  $\angle IBH = \angle GAH = a^\circ$
4. 同理可知， $\overline{DH}$ 、 $\overline{CH}$ 、 $\overline{BH}$  為分別為  $\triangle DEF$  之三條角平分線
5. 其交點 H 也是  $\triangle DEF$  之內心

## 2. 內換外



(圖 18.出自第二作者)

先畫出 $\triangle ABC$  並畫出其内心 D 點

分別以 A、B、C 為圓心， $\overline{AI}$ 、 $\overline{BI}$ 、 $\overline{CI}$ 為半徑畫出三個圓並交於 D、E、F 點

1. 觀察 A、D、E、I 四點：

因為 $\overline{DE}$ 是以 $\overline{AI}$ 為半徑所畫出來的圓的弦

又 $\overline{AI}$ 通過圓心 A 點

所以 $\overline{AI}$ 為 $\overline{DE}$ 之中垂線

2. 觀察 B、D、F、I 四點：

因為 $\overline{DF}$ 是以 $\overline{BI}$ 為半徑所畫出來的圓的弦

又 $\overline{BI}$ 通過圓心 B 點

所以 $\overline{BI}$ 為 $\overline{DF}$ 中垂線

3. 觀察 C、E、F、I 四點：

因為 $\overline{EF}$ 是以 $\overline{CI}$ 為半徑所畫出來的圓的弦

又 $\overline{CI}$ 通過圓心 C 點

所以 $\overline{CI}$ 為 $\overline{EF}$ 中垂線

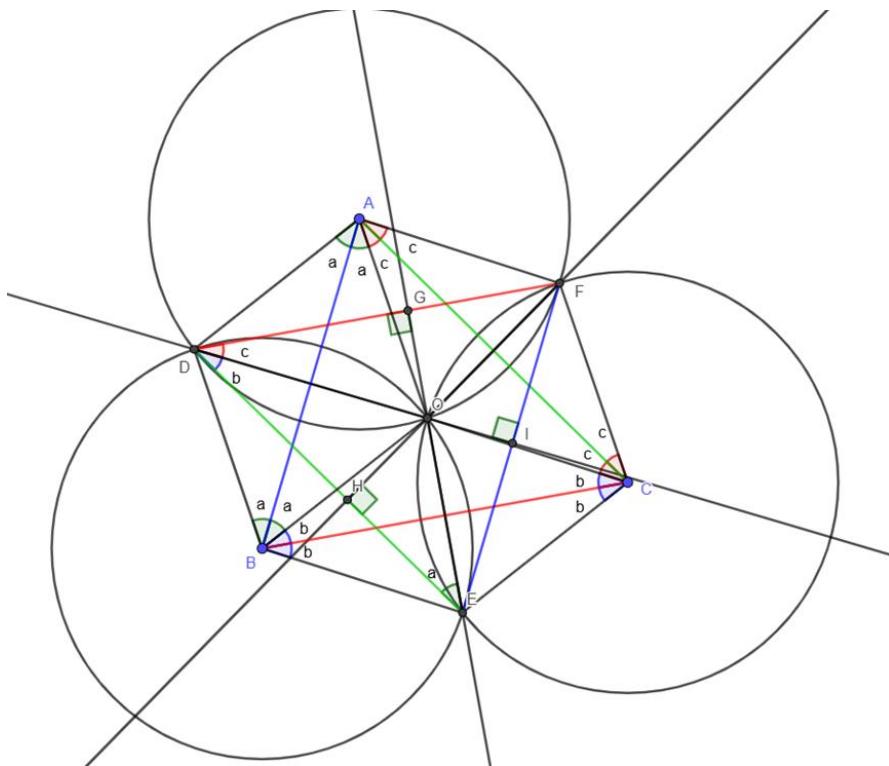
4. 可證 I 為 $\triangle DEF$ 之外心

3. 外換垂

已知：X 為 $\triangle ABC$  之外心、 $\triangle DEF$  之垂心且 $\triangle DEF$  為 $\triangle ABC$  之頂外三角形

發現： $\triangle ABC$  之外心與 $\triangle DEF$  之垂心共點

證明目標： $\angle DGE = \angle FHE = \angle DIF = 90^\circ$



(圖 19.出自第三作者)

1. 連接  $\overline{AD}$ 、 $\overline{DB}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{EC}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{FA}$
2.  $\overline{AB}$ 為圓 A、B 之連心線、 $\overline{DO}$ 為兩圓之弦

$$\overline{AB} \perp \overline{DO}$$

(同理可證  $\overline{BC} \perp \overline{EO}$ 、 $\overline{AC} \perp \overline{FO}$ )

3.  $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$  (外心至三頂點等距)

圓 A、B、C 半徑相同

$$\text{故 } \overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{FA}$$

4.  $\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{FA}$ 、 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$  且  $\overline{AB} \perp \overline{DO}$ 、 $\overline{BC} \perp \overline{EO}$ 、 $\overline{AC} \perp \overline{FO}$

四邊形 ADBO、四邊形 BOCE、四邊形 COAF 為菱形

5. 令  $\angle DBA = \angle ABO = \angle OAB = \angle DAB = \angle a$ 、 $\angle OBC = \angle CBE = \angle ECB = \angle BCO = \angle b$ 、 $\angle OCA = \angle ACF = \angle FAC = \angle CAO = \angle c$

6.  $\angle DEO$  為圓 B 之圓周角，又  $\angle DBO$  為圓 B 之圓心角

$$\angle DEO = a$$

(同理  $\angle EDC = b$ ， $\angle FDC = c$ )

7.  $\Delta ABC$  內角  $2a + 2b + 2c = 180^\circ$

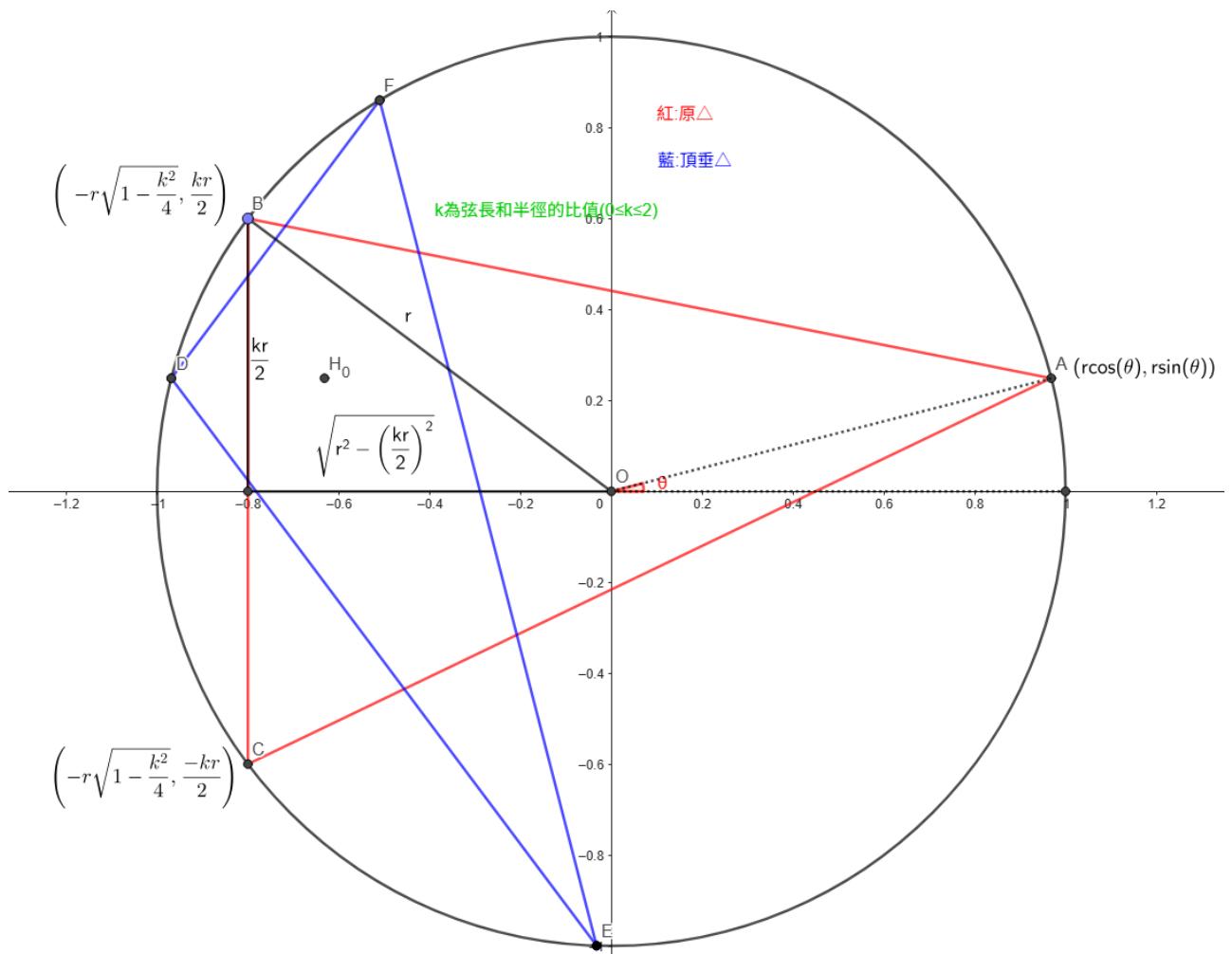
$$\angle DGE = a + b + c + \angle DGE = 180^\circ$$

故  $\angle DGE = 90^\circ$

(同理  $\angle FHE = \angle DIF = 90^\circ$  )

## 伍、研究過程或方法

為方便討論，設  $\triangle ABC$  外接圓半徑為  $r$ ，外心為  $O(0,0)$ ，固定一垂直  $x$  軸的弦長  $\overline{BC}$  為  $kr$ ， $A$  點為沿外接圓逆時鐘旋轉的動點 ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )，可得  $A = (r\cos(t), r\sin(t))$ ， $B = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, \frac{kr}{2}\right)$ ， $C = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, -\frac{kr}{2}\right)$ 。 $0 \leq k \leq 2$ ，為弦長與半徑的比值， $0 \leq t \leq 2\pi$ ，為  $A$  點與  $x$  軸正向的夾角，如此可探討所有三角形的可能性。



(圖 20.出自第一作者)

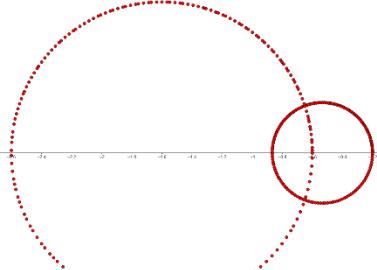
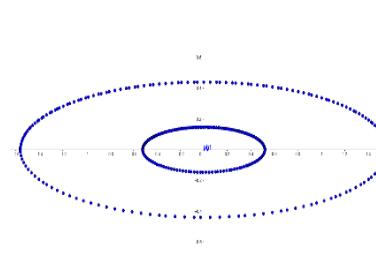
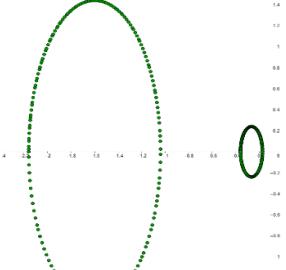
由前面證明已知頂垂三角形的頂點為原三角形的垂心對其邊長做對稱的點，因此我們定  $D$  點為以  $\overline{BC}$  做對稱的點， $E$  點為以  $\overline{AC}$  做對稱的點， $F$  點為以  $\overline{AB}$  做對稱的點。

	原三角形	頂垂三角形	頂垂六邊形
點 座 標	$A = (r\cos(t), r\sin(t))$ $B = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, \frac{kr}{2}\right)$ $C = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, -\frac{kr}{2}\right)$	$D = (-r\cos(t), r\sin(t))$ $E = \begin{pmatrix} r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} \right), \\ r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} \right) \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} \right), \\ r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right) \end{pmatrix}$	$A = (r\cos(t), r\sin(t))$ $B = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, \frac{kr}{2}\right)$ $C = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, -\frac{kr}{2}\right)$ $D = (-r\cos(t), r\sin(t))$ $E = \begin{pmatrix} r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} \right), \\ r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} \right) \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} \right), \\ r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right) \end{pmatrix}$
外 心		$\text{原點}(0,0)$	
重 心	$G_0$ $= \left( \frac{-2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} + r\cos(t)}{3}, \frac{r\sin(t)}{3} \right)$	$G_1$ $= \left( \frac{r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} + \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} \right)}{3}, \frac{3r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} + \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right)}{3} \right)$	$G_2$ $= \left( \frac{2r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} + \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} - 1 \right)}{6}, \frac{6r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} + \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right)}{6} \right)$
垂 心	$H_0$ $= \left( -2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} + r\cos(t), \frac{r\sin(t)}{3} \right)$	$H_1$ $= \left( r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} + \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} \right), \frac{3r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} + \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right)}{3} \right)$	$H_2$ $= \left( 2r\cos(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} + \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2} - 1 \right), \frac{4r\sin(t) + 2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \left( \frac{2bd}{b^2 + d^2} + \frac{2ad}{a^2 + d^2} \right)}{4} \right)$

註:  $a = \frac{kr}{2} - r\sin(t)$  ,  $b = -\frac{kr}{2} - r\sin(t)$  ,  $c = \sqrt{r^2 - \left(\frac{kr}{2}\right)^2} - r\cos(t)$  ,  $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{kr}{2}\right)^2} + r\cos(t)$

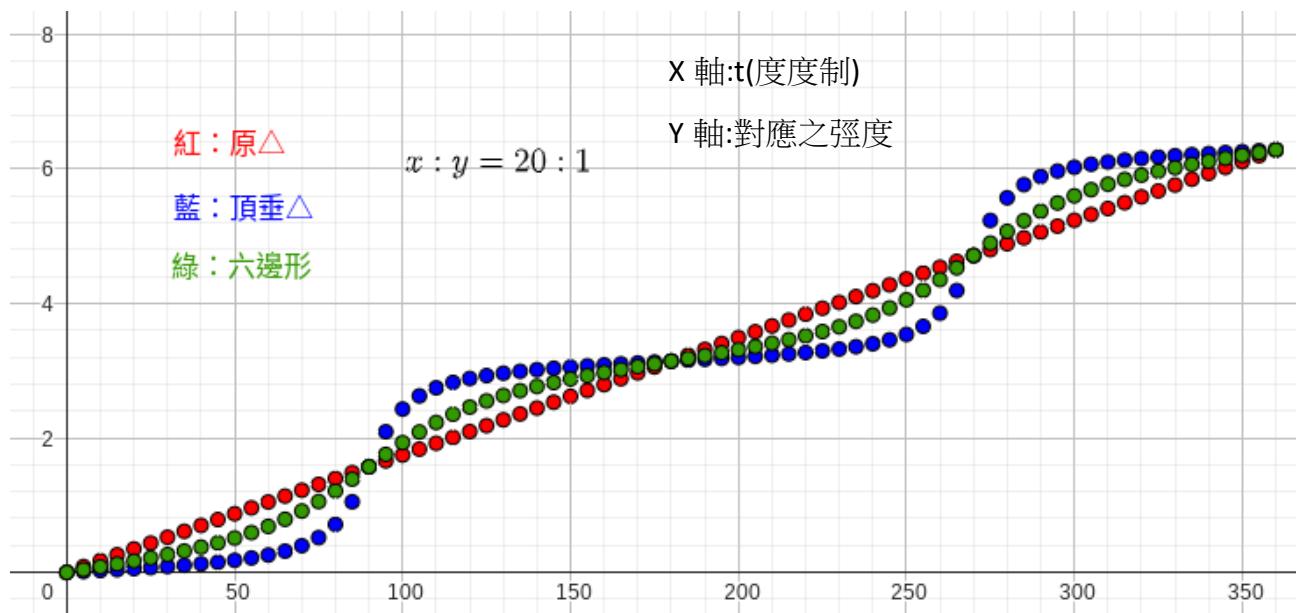
## 一、三心軌跡

我們已經知道圓內接多邊形都有尤拉線，再加上頂垂三角形的性質，所以想探討它的三心和原三角形有沒有運動的關係或不同之處。由研究方法可看出因為固定了外心在原點，所以不會出現移動軌跡，而因為尤拉線的性質，外心到重心的距離與外心到垂心的距離成比例，圖形會相似。

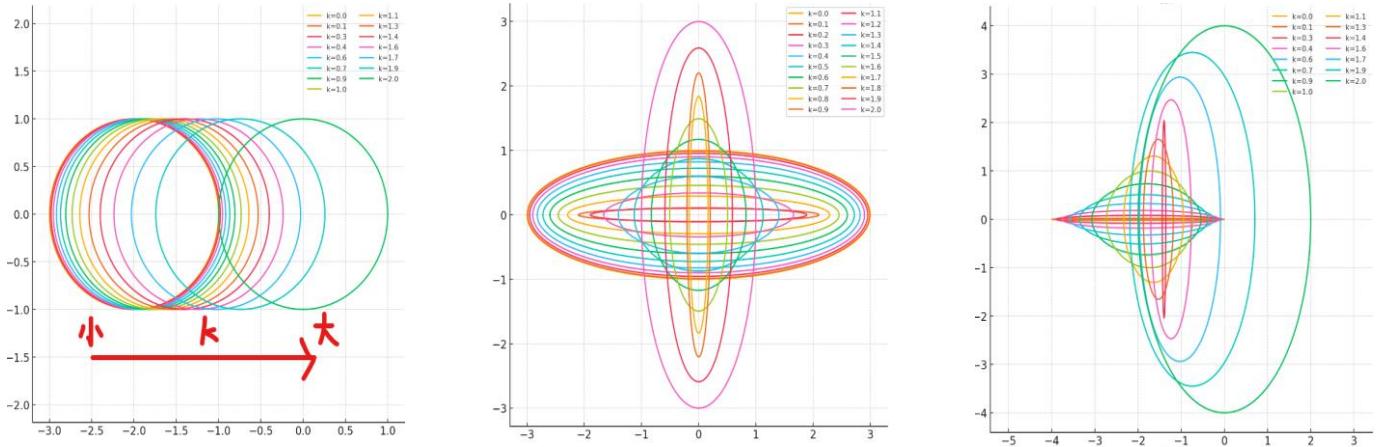
	原三角形	頂垂三角形	頂垂六邊形
圖形	 <p>(圖 21.出自第一作者) 大圓為垂心移動軌跡 小圓為重心移動軌跡</p>	 <p>(圖 22.出自第一作者) 大橢圓為垂心移動軌跡 小橢圓為重心移動軌跡</p>	 <p>(圖 23.出自第一作者) 大橢圓為垂心移動軌跡 小橢圓為重心移動軌跡</p>
外心	O 在原點，所以不會有軌跡圖形。		
重心	<p>1.軌跡形狀:圓形</p> <p>2.軌跡參數式:</p> $\left( \frac{-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + r\cos(t)}{3}, \frac{r\sin(t)}{3} \right)$ <p>3.移動情形:逆時鐘等速圓周運動。</p>	<p>1.軌跡形狀:</p> <p>(1)橢圓</p> <p>(2)直線(<math>k = 1</math> 或 <math>\sqrt{3}</math>)</p> <p>2. 軌跡參數式:</p> $\left( \frac{(k^2r-3r)\cos(\alpha)}{3}, \frac{(k^2r-r)\sin(\alpha)}{3} \right)$ <p>3.移動情形:</p> <p><math>0 \leq k &lt; 1</math> 、 <math>\sqrt{3} &lt; k \leq 2</math> 為逆時鐘， <math>1 &lt; k &lt; \sqrt{3}</math> 為順時鐘，中心與重心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。</p>	<p>1.軌跡形狀</p> <p>(1)橢圓</p> <p>(2)直線(<math>k = 0</math> 或 <math>\sqrt{2}</math>)</p> <p>2. 軌跡參數式:</p> $\left( \frac{-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + (k^2r-2r)\cos(\beta)}{6}, \frac{k^2r\sin(\beta)}{6} \right)$ <p>3.移動情形:</p> <p><math>0 &lt; k &lt; \sqrt{2}</math> 為順時鐘， <math>\sqrt{2} &lt; k \leq 2</math> 為逆時鐘，中心與重心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。</p>

垂心	<p>1.軌跡形狀:圓形</p> <p>2.軌跡參數式:</p> $\begin{pmatrix} -2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + r\cos(t), \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ <p>3.移動情形:逆時鐘等速圓周運動。</p>	<p>1.軌跡形狀</p> <p>(1)橢圓</p> <p>(2)直線(<math>k = 1</math> 或 <math>\sqrt{3}</math>)</p> <p>2. 軌跡參數式:</p> $\begin{pmatrix} (k^2r - 3r)\cos(\alpha), \\ (k^2r - r)\sin(\alpha) \end{pmatrix}$ <p>3.移動情形:</p> <p><math>0 \leq k &lt; 1</math>、<math>\sqrt{3} &lt; k \leq 2</math>為逆時鐘，<math>1 &lt; k &lt; \sqrt{3}</math>為順時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。</p>	<p>1.軌跡形狀</p> <p>(1)橢圓</p> <p>(2)直線(<math>k = 0</math> 或 <math>\sqrt{2}</math>)</p> <p>2. 軌跡參數式:</p> $\begin{pmatrix} -2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + (k^2r - 2r)\cos(\beta), \\ k^2r\sin(\beta) \end{pmatrix}$ <p>3.移動情形:</p> <p><math>0 &lt; k &lt; \sqrt{2}</math>為順時鐘，<math>\sqrt{2} &lt; k \leq 2</math>為逆時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。</p>
----	---	---	--

註:  $\alpha$  、  $\beta$  分別為頂垂三角形和頂垂六邊形和 x 軸所交的角度，因為其非等速，目前無法和 t 的關係。



(圖 24.  $t$  、 $\alpha$  、 $\beta$ 的關係圖，出自第一作者)



(由左至右分別為圖 25~27.  $k$  對軌跡圖形的關係，出自 ChatGPT)

## 二、尤拉線夾角:

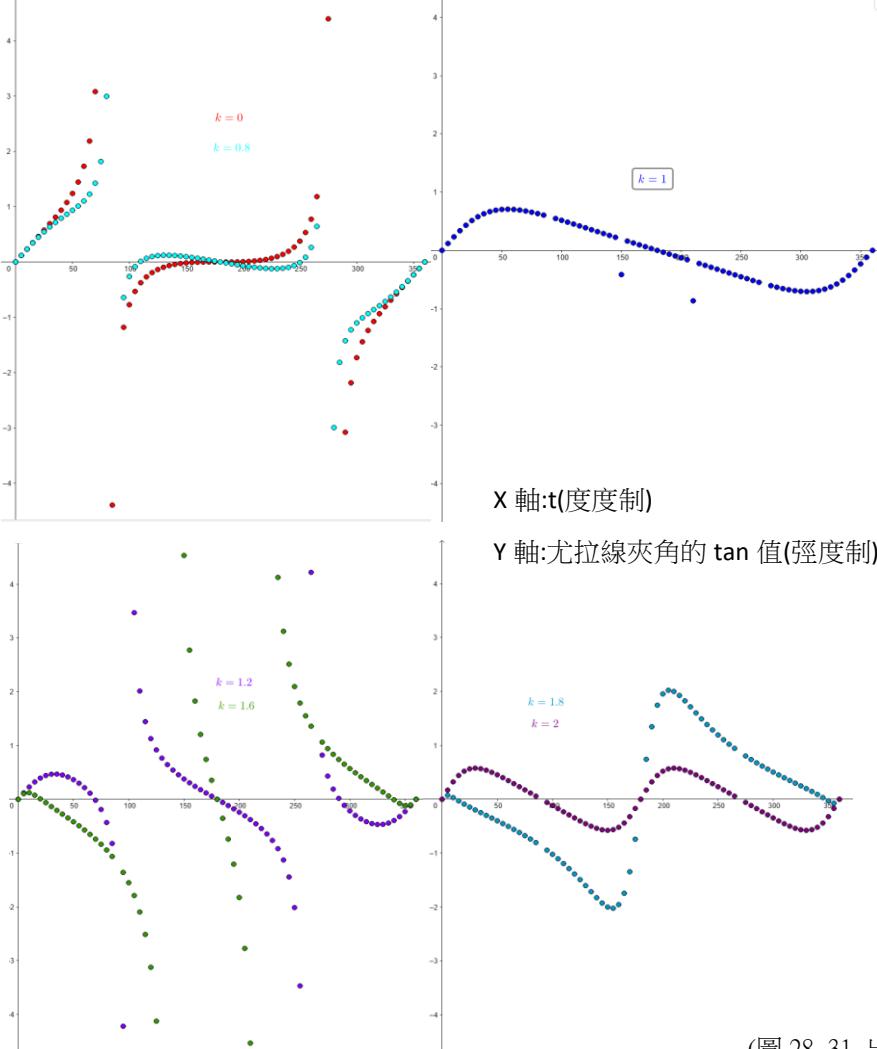
由前面的研究我們知道六邊形的三心移動軌跡和原三角形並不相同，所以它的尤拉線必定也遵循著某種移動準則，因此我們研究它與原三角形尤拉線之間的關係。我們用交角來表示他們之間的關係，其中一種是利用斜率，利用差角得出  $\tan$  的夾角，另一種是向量內積除以長度，可得到  $\cos$  的夾角。

尤拉線方程式:

$$\text{原三角形: } y = \frac{\sin(t)}{-2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + \cos(t)} x, \text{ 頂垂三角形: } y = \frac{(1-k^2)\sin(\alpha)}{(3-k^2)\cos(\alpha)} x, \text{ 頂垂六邊形: } y = \frac{-3k^2\sin(\beta^\circ)}{\left(2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} - k^2 + 2\right)rcos(\beta^\circ)} x$$

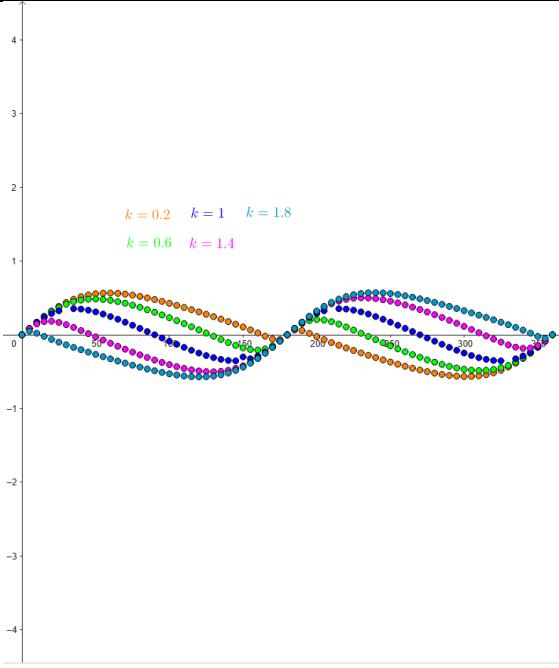
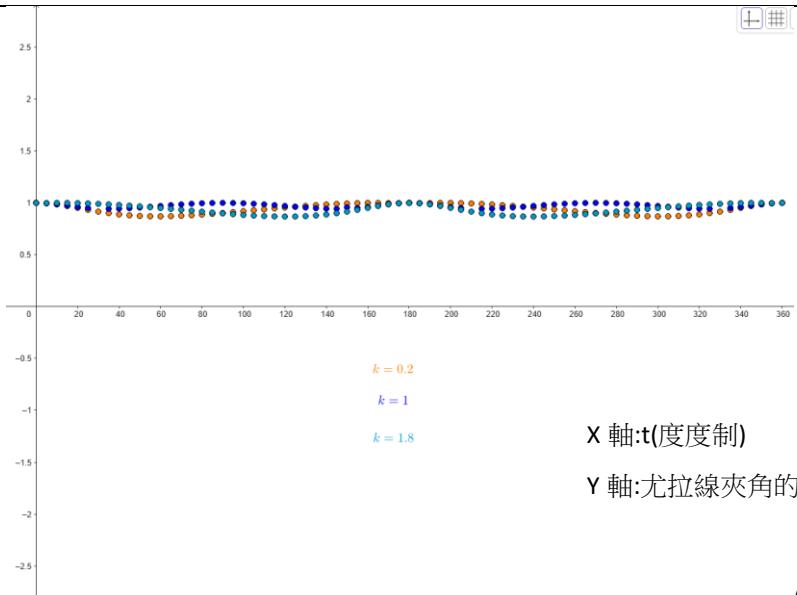
註:我們將三心軌跡為直線時稱轉折點

## (一)、原三角形和頂垂三角形

原三角形&頂垂三角形	
正切 (tan)	 <p>X 軸:t(度度制)</p> <p>Y 軸:尤拉線夾角的 tan 值(強度制)</p>
說明	第 1 個轉折點前後皆無臨界點，所交角度不限，越靠近轉折點越平緩。通過第 2 個轉折點後圖形可看到臨界點，也就是有交角限制，越遠離轉折點越平緩。

餘弦 (cos)	  <p style="text-align: center;"><b>X 軸:t(度度制)</b> <b>Y 軸:尤拉線夾角的 cos 值(強度制)</b></p>  
說明	<p>整體呈現盆地型，過了第 1 個轉折點後越遠離邊緣曲率越高，但交角並無限制。</p> <p>通過第 2 個轉折點後圖形變得接近雙谷的形狀，有中心隆起的傾向，越遠離轉折點越平緩，圖形均在 x 軸上方，有交角限制。</p>

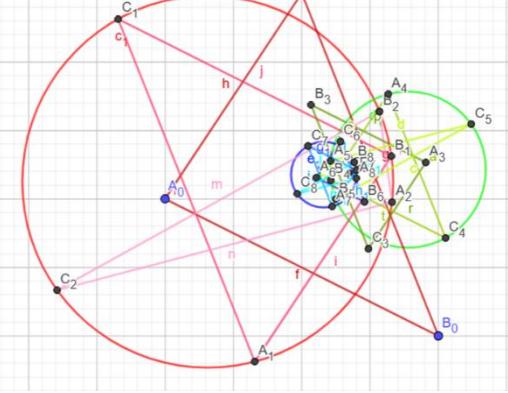
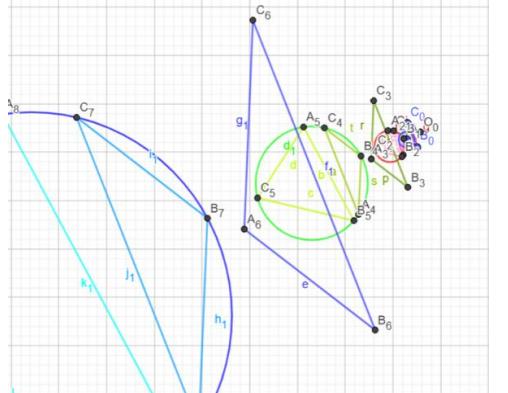
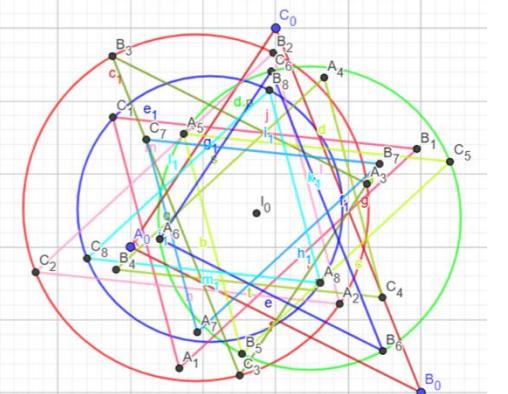
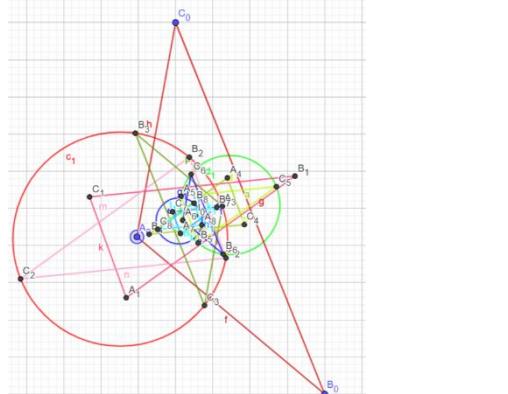
## (二)、原三角形和頂垂六邊形

原三角形&頂垂六邊形	
正切 (tan)	 <p>X 軸:t(度度制) Y 軸:尤拉線夾角的 tan 值(強度制)</p> <p>(圖 36.出自第一作者)</p>
說明	交角和轉折點並無太大的關係， $k$ 等於 1 時正好位於各條波形的中間狀態，而且能看到 $k$ 無論多少皆有其角度限制。
餘弦 (cos)	 <p>X 軸:t(度度制) Y 軸:尤拉線夾角的 cos 值(強度制)</p> <p>(圖 37.出自第一作者)</p>
說明	整體趨於平緩， $k$ 等於 1 時同樣也在各條波形的中間狀態，cos 值偏向 1 可知交角普遍偏小。

### 三、疊作

定義:依頂心三角形的定義，取任意點  $P$ ，頂點到  $P$  的距離為半徑畫圓取交點可得新三角形，以此類推用新的三角形頂點繼續疊作。定義原三角形為第 0 層，經過觀察後發現第  $m$  層和第  $(m+3)$  層相似，其邊長會成固定比例。同時我們也在思考，既然第 0 層和第 1 層的頂點共圓時為垂心，那我們是否能找到讓第 1 層和第 2 層、第 2 層和第 3 層的頂點共圓，以及其所作的點是否有什麼意義。

銳角	鈍角
頂垂	
(圖 38.)，出自第一作者	
(圖 39.)，出自第一作者	

頂外		
頂內		

結論:若是銳角三角形的情況下，剛好符合參考資料 2 的換心性質，皆可在相對應的層數得到頂點共圓(垂心為第  $m$  層和第  $m+1$  層，外心為第  $m+1$  層和第  $m+2$  層，內心為第  $m+2$  層和第  $m+3$  層)。

## 陸、結論

### (一)、三心軌跡:

1.外心:  $O$  在原點，所以不會有軌跡圖形。

2.重心:

(1)原三角形:逆時鐘等速圓周運動，半徑為  $\frac{r}{3}$ ，參數式為  $\left( \frac{-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + r\cos(t)}{3}, \frac{r\sin(t)}{3} \right)$ 。

(2)頂垂三角形:  $0 \leq k < 1$ 、 $\sqrt{3} < k \leq 2$  為逆時鐘， $1 < k < \sqrt{3}$  為順時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。除了  $k = 1$  或  $\sqrt{3}$  時為直線，其

餘情形為橢圓。橫半軸為 $\left|\frac{k^2r-3r}{3}\right|$ ，豎半軸為 $\left|\frac{k^2r-r}{3}\right|$ ，參數式為 $\left(\frac{(k^2r-3r)\cos(\alpha)}{3}, \frac{(k^2r-r)\sin(\alpha)}{3}\right)$ 。

(3)頂垂六邊形:  $0 < k < \sqrt{2}$ 為順時鐘， $\sqrt{2} < k \leq 2$ 為逆時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。除了 $k = 0$  或 $\sqrt{2}$ 時為直線，其餘情形為橢圓。橫半軸為 $\left|\frac{k^2r-2r}{6}\right|$ ，豎半軸為 $\frac{k^2r}{6}$ ，參數式為 $\left(\frac{-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}+(k^2r-2r)\cos(\beta)}{6}, \frac{k^2r\sin(\beta)}{6}\right)$ 。

3.垂心:

(1)原三角形:逆時鐘等速圓周運動，半徑為 $r$ ，參數式為

$$\left(-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + r\cos(t), r\sin(t)\right)$$

(2)頂垂三角形:  $0 \leq k < 1$ 、 $\sqrt{3} < k \leq 2$ 為逆時鐘， $1 < k < \sqrt{3}$ 為順時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。除了 $k = 1$  或 $\sqrt{3}$ 時為直線，其餘情形為橢圓。橫半軸為 $|k^2r - 3r|$ ，豎半軸為 $|k^2r - r|$ ，參數式為 $((k^2r - 3r)\cos(\alpha), (k^2r - r)\sin(\alpha))$ 。

(3)頂垂六邊形:  $0 < k < \sqrt{2}$ 為順時鐘， $\sqrt{2} < k \leq 2$ 為逆時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。除了 $k = 0$  或 $\sqrt{2}$ 時為直線，其餘情形為橢圓。橫半軸為 $|k^2r - 2r|$ ，豎半軸為 $k^2r$ ，參數式為

$$\left(-2r\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + (k^2r - 2r)\cos(\beta), k^2r\sin(\beta)\right)$$

(二)、尤拉線交角:

1.尤拉線方程式:

$$(1) \text{原三角形: } y = \frac{\sin(t)}{-2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} + \cos(t)} x$$

$$(2) \text{頂垂三角形: } y = \frac{(1-k^2)\sin(\alpha)}{(3-k^2)\cos(\alpha)} x$$

$$(3) \text{頂垂六邊形: } y = \frac{-3k^2\sin(\beta^\circ)}{\left(2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}} - k^2 + 2\right)rcos(\beta^\circ)} x$$

2.原三角形和頂垂三角形的尤拉線夾角:

(1)tan:第 1 個轉折點前後皆無臨界點，所交角度不限，越靠近轉折點越平緩。通過第 2 個轉折點後圖形可看到臨界點，也就是有交角限制，越遠離轉折點越平緩，週期除了  $k=1$  或 2 時為  $\pi$ ，其餘皆為  $2\pi$ 。

(2)cos:整體呈現盆地型，過了第 1 個轉折點後越遠離邊緣曲率越高，但交角並無限制。通過第 2 個轉折點後圖形變得接近雙谷的形狀，有中心隆起的傾向，越遠離轉折點越平緩，圖形均在 x 軸上方，有交角限制，週期皆為  $2\pi$ 。

### 3.原三角形和頂垂六邊形的尤拉線夾角:

(1)tan:交角和轉折點並無太大的關係， $k$  等於 1 時正好位於各條波形的中間狀態，而且能看到  $k$  無論多少皆有其角度限制，週期皆為  $2\pi$ 。

(2)cos:整體趨於平緩， $k$  等於 1 時同樣也在各條波形的中間狀態，cos 值偏向 1 可知交角普遍偏小，週期皆為  $\pi$ 。

## (三)、疊作

1.無論從內心、外心、垂心坐頂心三角形的疊作，即使不符合換心性質(鈍角)，皆可在相對應的層數得到頂點共圓(垂心為第  $m$  層和第  $m+1$  層，外心為第  $m+1$  層和第  $m+2$  層，內心為第  $m+2$  層和第  $m+3$  層)。

## (四)、其他

1.所有尤拉線因為共圓，必有交點於外心。

2.等腰三角形時，其尤拉線會重合。

3.直角三角形時，因為其垂心恰在直角的頂點上，所以沒有頂垂三角形的存在(為一線段)。

4.設原三角形三頂點為  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ ，頂垂三角形三頂點為  $(x_4, y_4)$ 、 $(x_5, y_5)$ 、 $(x_6, y_6)$ ， $G_0$ 、 $G_1$ 、 $G_2$  分別為原三角形、頂垂三角形、頂垂六邊形之重心，已知  $\overrightarrow{OG_0} = \left( \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$ ， $\overrightarrow{OG_1} = \left( \frac{x_4+x_5+x_6}{3}, \frac{y_4+y_5+y_6}{3} \right)$ ， $\overrightarrow{OG_2} = \left( \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6} \right)$ ，可推得  $G_0$ 、 $G_1$ 、 $G_2$  三點共線且  $\overline{G_0G_1} : \overline{G_1G_2} = 1 : 1$ 。

5.設原三角形為  $ABC$ ， $D$  點為以  $\overline{BC}$  做對稱的點， $E$  點為以  $\overline{AC}$  做對稱的點， $F$  點為以  $\overline{AB}$  做對稱的點。 $\overline{BC}$  固定， $A$  點旋轉  $\theta$  時， $E$  點、 $F$  點同樣旋轉  $\theta$ ， $D$  點旋轉  $-\theta$ 。

## 柒、未來展望

- 1.求出軌跡角度( $t$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ )之間的關係。
- 2.疊作是否能找到其他一樣有共圓的點，以及對換心的研究(目前只有銳角相符)。
- 3.目前已知三角形第  $m$  層和第( $m+3$ )層相似，可以找出三組不同層數之間互相共圓，六邊形第  $m$  層和第( $m+6$ )層相似(參考資料 5)，是否可以找出六組不同層數之間互相共圓及其所組成三角形之間的關係。
4. $k$  值對整體圖形的影響，求出  $k$  在何時和  $t$  在何時是否可以找到與之對應的尤拉線交角。
- 5.目前已知夾角之點的數值，希望未來能求出其確切的方程式。
- 6.三維空間的探討。

## 捌、參考資料及其他

- 1.許博宇、黃瀚德、陳又樟(2019)。一線四心---圓內接多邊形的歐拉線。**國立台灣科學教育館，中華民國第 59 屆中小學科學展覽會**。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=15733&sid=15887>
- 2.楊玠霆、賴柏宇(2019)。換心手術—從三角形出發探討  $N$  邊形多心性質之研究。**國立台灣科學教育館，中華民國第 59 屆中小學科學展覽會**。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=15733&sid=15789>
- 3.巫玟瑾(2021)。坐標平面上  $\triangle$  尤拉線的操弄探討。**國立台灣科學教育館，2021 年臺灣國際科學展覽會**。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=17011&sid=17030>
- 4.許倬允、林宥昕(2020)。數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討。**國立台灣科學教育館，中華民國第 60 屆中小學科學展覽會**。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=16344&sid=16416>
- 5.梁力洵、黃暉哲、張竹欣(2017)。頂圓多邊形之性質研究與探討。**國立台灣科學教育館，中華民國第 57 屆中小學科學展覽會**。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=13521&sid=13601>
- 6.楊玉星(2020 年 9 月)。圓內接多邊形的歐拉線。**數學傳播**，44(3)，66-72。  
[https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia/journals/4619?full\\_content\\_cont%5B%5D=%E5%B0%A4%E6%8B%89%E7%B7%9A](https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia/journals/4619?full_content_cont%5B%5D=%E5%B0%A4%E6%8B%89%E7%B7%9A)

## 【評語】050402

此份作品從三角形的尤拉線延拓研究圓內接多邊形的尤拉線性質。並進一步探討六邊形、頂心三角形、疊作與換心等進階結構。作者具有深入探究與一系列性質串聯的能力。

此作品雖然有引用參考資料（如：幾何定義、尤拉線、三心推導、換心性質有標引用出處），但整體而言，對於自身研究結果與既有文獻之比較與對照的呈現方式仍相對薄弱。建議加入「文獻比較分析」段落與表格，強調與之前研究的差異與拓展，會更能凸顯出此作品的亮點。

作品海報

# 遨尤四海--原三角形和頂垂三角形的尤拉線性質探討

# 摘要

本研究以圓內接多邊形為主題，探討其幾何結構中的尤拉線特性，重點分析原三角形與頂垂三角形之間的幾何關係，以及原三角形與六邊形尤拉線的關係。

研究首先針對原三角形與頂垂三角形的尤拉線，分析其是否具有特殊的性質與規則。接著研究延伸至由原三角形與頂垂三角形組成的六邊形，探索其與原三角形尤拉線的幾何關係。此外，本研究還分析了三角形換心之間的互換特性，驗證疊作的規律。

本研究的成果不僅有助於深化對多邊形內部幾何結構的理解，亦為未來尤拉線與高維幾何研究奠定基礎，進一步揭示幾何中普遍的規律性與應用價值。

## 壹、研究動機

高一時，我們學習到尤拉線是一條特殊的直線，由三角形的外心、重心與垂心所構成。而在「圓內接多邊形的歐拉線」這篇文章中我們也了解到圓內接多邊形也有尤拉線的性質，在深入研究換心手術及多邊形疊作之性質探討這兩篇科展作品後，發現其存在密切的關聯。因此，我們以此為題材進行一系列的研究。

## 貳、研究目的

- 一、原三角形與頂垂三角形的尤拉線性質
- 二、原三角形與六邊形的尤拉線的尤拉線性質
- 三、疊作的換心與循環性質的探討

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、geogebra 繪圖軟體

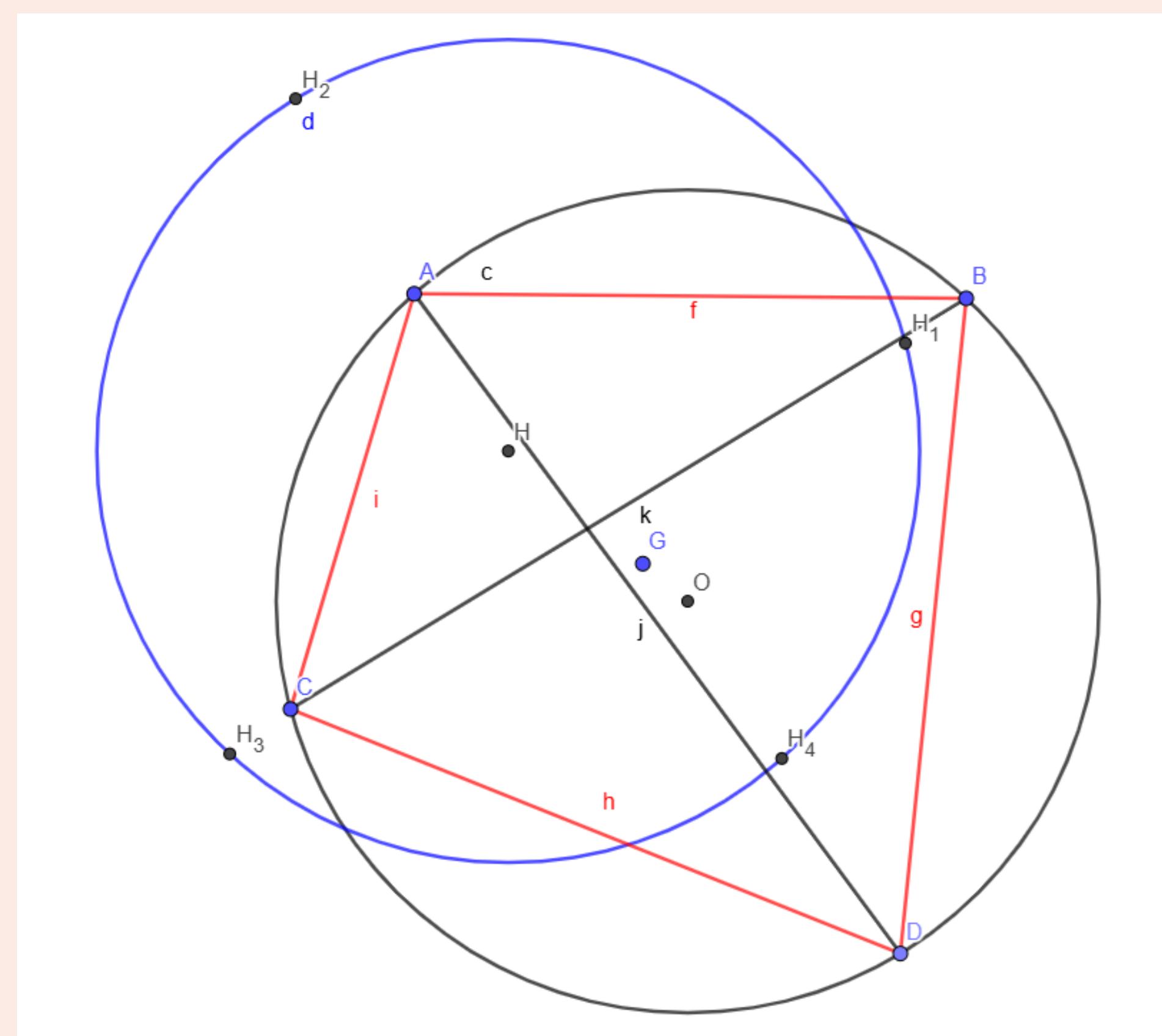
## 肆、名詞界定

**重心(G點):**定義  $n$  邊形的中線為連接  $n$  邊形的頂點線段。 $n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_n$  的所有中線都交於同一點，而且由頂點算起每條中線被這個點分成 $(n-1):1$  的與其餘 $(n-1)$ 個頂點所構成的 $(n-1)$ 邊形的重心之線段，因此就定義  $n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  的重心為  $n$  條中線的交點。

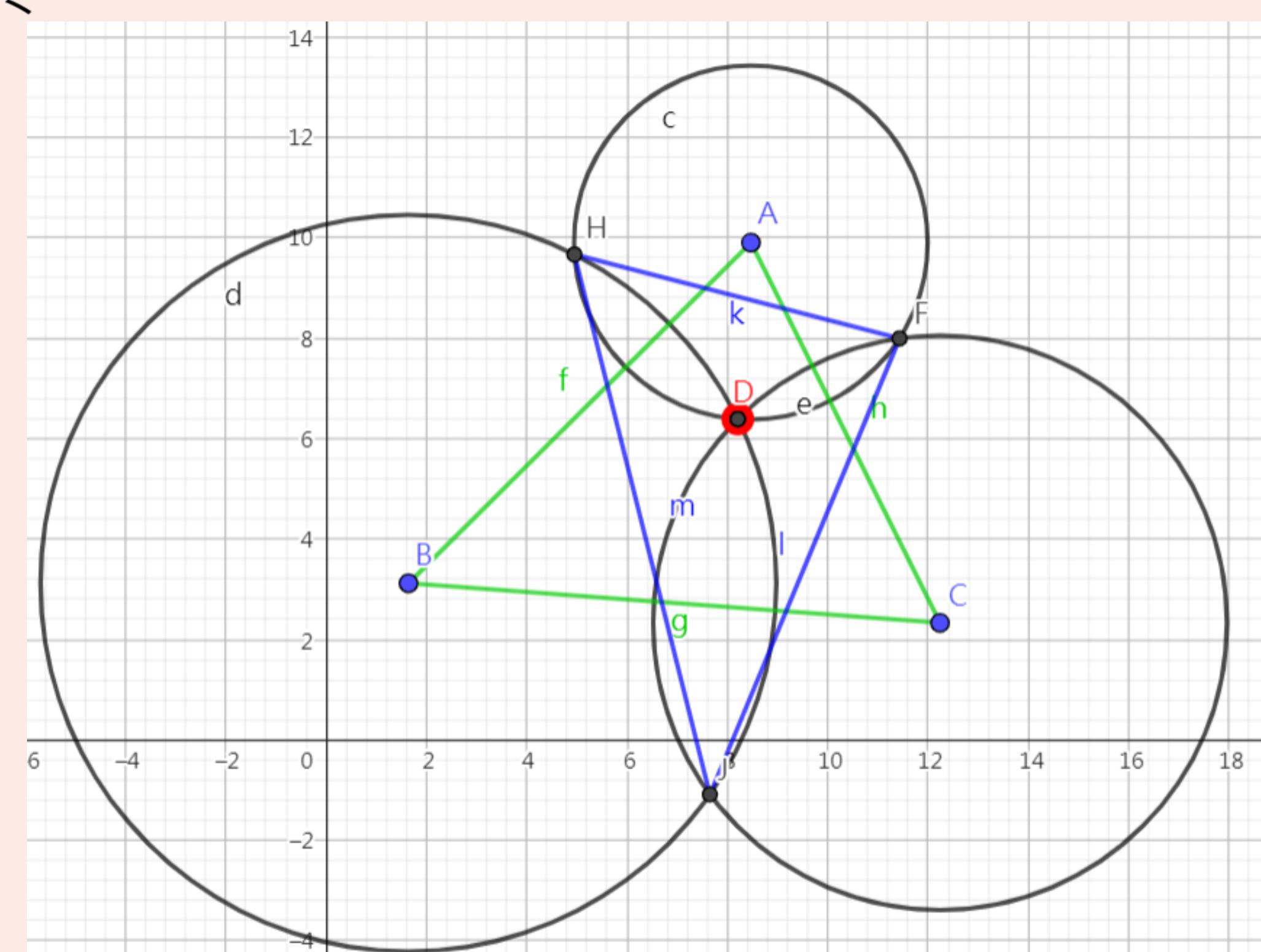
**外心(O點):**外接圓圓心。

**垂心(H點):**假設已經定義了一定圓  $S$  之  $n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_n$  的垂心，且給定  $S$  的內接 $(n+1)$  邊形  $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ 。用  $H_1, H_2 \dots, H_{n+1}$  分別表示 $(n+1)$  個  $n$  邊形  $A_2A_3 \dots A_{n+1}$ ,  $A_1A_3 \dots A_{n+1}$ , ...,  $A_1A_2 \dots A_n$  的垂心。則與圓  $S$  有相同半徑，且圓心在  $H_1, H_2 \dots, H_{n+1}$  的圓都交於同一點  $H$ ，這個點就叫 $(n+1)$  邊形  $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$  的垂心。

**頂垂三角形:**有個原三角形(綠)，以三頂點為圓心，以頂點到垂心(紅)的距離作半徑畫圓，三圓的交點(不包含垂心)連線便是頂垂三角形(藍)。



(▲圖1.圓內接四邊形的垂心)



(▲圖2.頂垂三角形)

## 伍、研究過程與方法

為方便討論，設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 $r$ ，外心為 $O(0,0)$ ，固定一垂直x軸的弦長 $BC$ 為 $kr$ ， $A$ 點為沿外接圓逆時鐘旋轉的動點 $(0 \leq t \leq 2\pi)$ ，可得 $A = (r\cos(t), r\sin(t))$ ， $B = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, \frac{kr}{2}\right)$ ， $C = \left(-r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, -\frac{kr}{2}\right)$ 。 $0 \leq k \leq 2$ ，為弦長與半徑的比值， $0 \leq t \leq 2\pi$ ，為 $A$ 點與x軸正向的夾角，如此可探討所有三角形的可能性。

觀察方式：固定弦 $BC$ ，使 $A$ 點沿著x軸正向逆時針轉一圈

在研究的過程中，我們發現 $A$ 點旋轉 $\theta$ 時， $E$ 點、 $F$ 點同樣旋轉 $\theta$ ， $D$ 點旋轉 $-\theta$ ，因此可將頂垂三角形的頂點簡化。

證明：

利用附圖的對稱點公式帶入(令 $a^2 = r^2 \left(1 - \frac{k^2}{4}\right)$ ， $b = \frac{kr}{2}$ )， $d = -r + \frac{k^2 r}{2}$ ，)

(1) 求起始位置(以 $F$ 點為例)

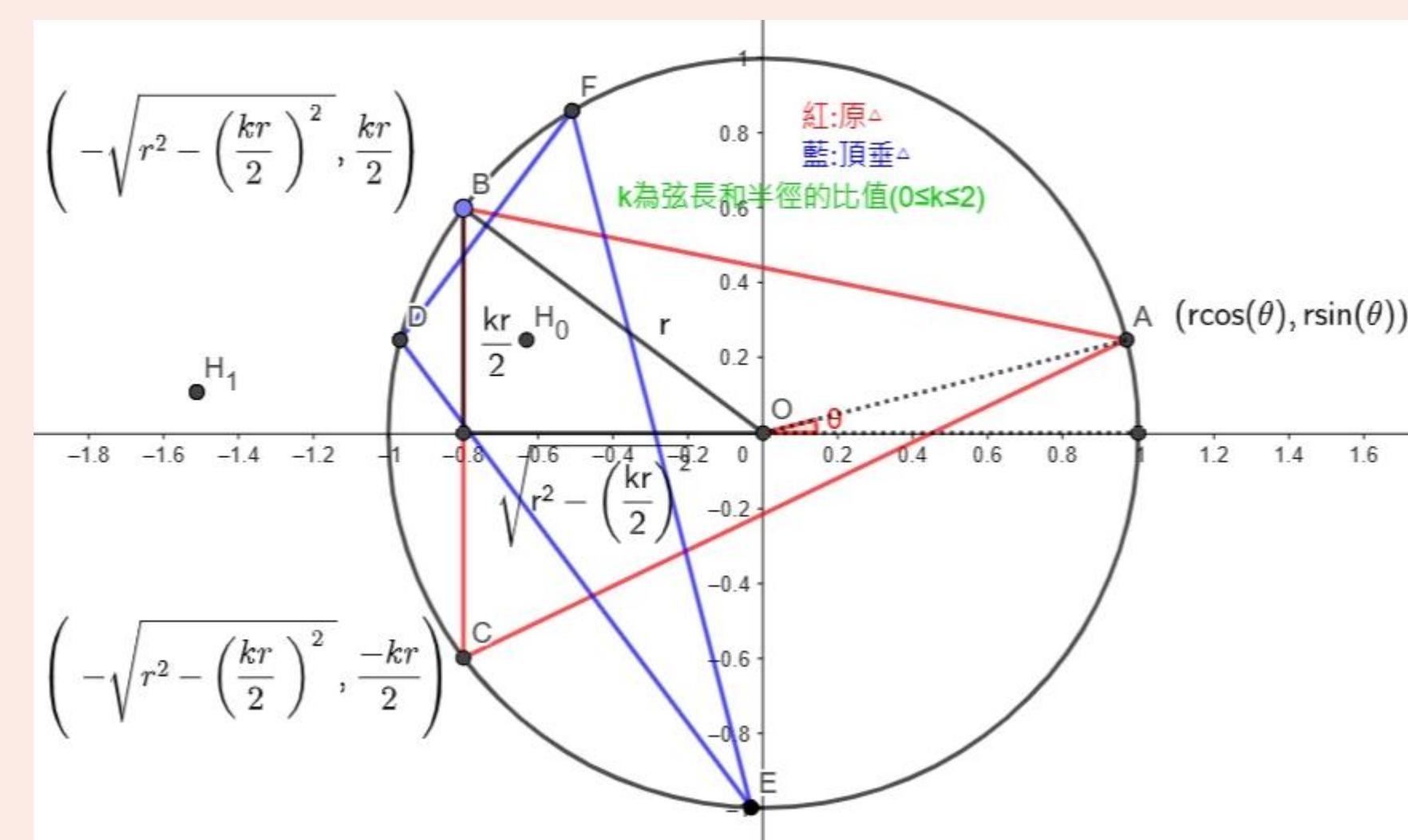
(2) 求證動點(以 $F$ 點的y座標為例)， $T_2 = \frac{-ak + 2a \sin \theta}{2r - kr \sin \theta + 2 \sin \theta}$

$F((r-2a)-2bT, 0-2(r+a)T)$ ， $T_1 = \frac{-ab}{r^2 + ar}$

證 $r \sin \theta - 2(a + r \cos \theta) \frac{-ak + 2 \sin \theta}{2r - kr \sin \theta + 2 \cos \theta} = d \sin \theta + k \cos \theta$

最後可得 $F\left(r\left|1 - \frac{k^2}{2}\right|, ka\right)$

令 $L = (a + r \cos \theta)(2ak - 4 \sin \theta)$ ， $R = (2r - kr \sin \theta + 2 \sin \theta)\left(-2r \sin \theta + \frac{k^2 r}{2} \sin \theta + k \cos \theta\right)$ ，最後化簡可得 $L-R=0$ ，以此類推得證



(▲圖3.A、B、C點的表示法)

## 陸、研究成果

### 一、三心軌跡

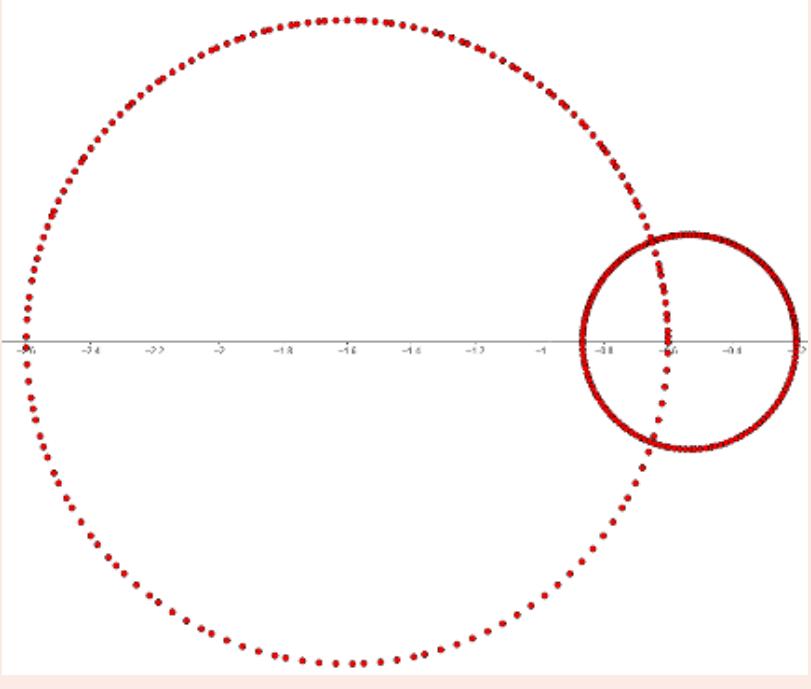
#### 原三角形

垂心：

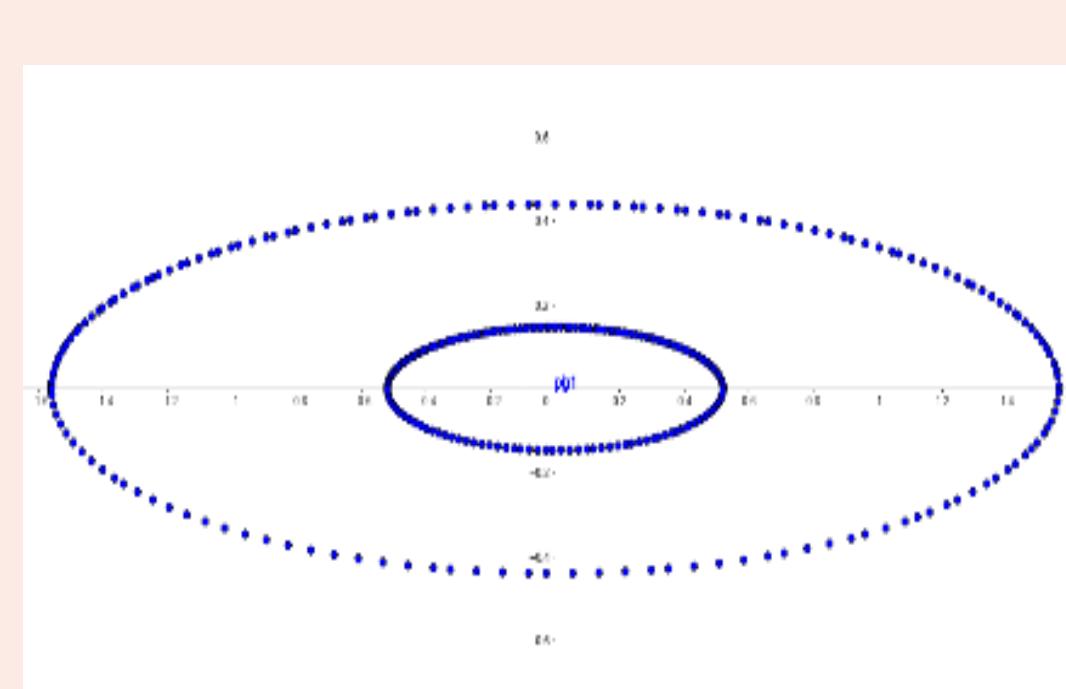
1.軌跡形狀:圓形

2.軌跡參數式: $(-2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} + r\cos(t), r\sin(t))$

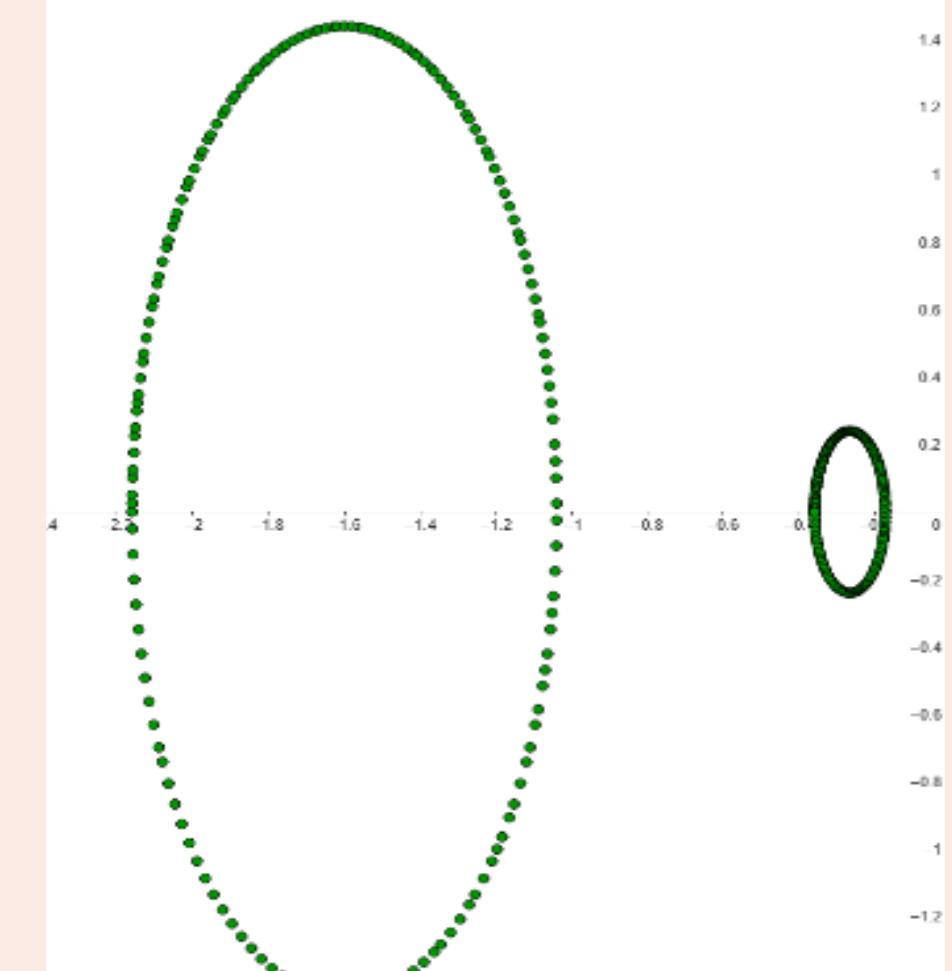
3.移動情形:逆時鐘等速圓周運動。



(▲圖5.大圓為垂心移動軌跡  
小圓為重心移動軌跡)



(▲圖6.大橢圓為垂心移動軌跡  
小橢圓為重心移動軌跡)



(▲圖7.大橢圓為垂心移動軌跡  
小橢圓為重心移動軌跡)

#### 頂垂六邊形

垂心：

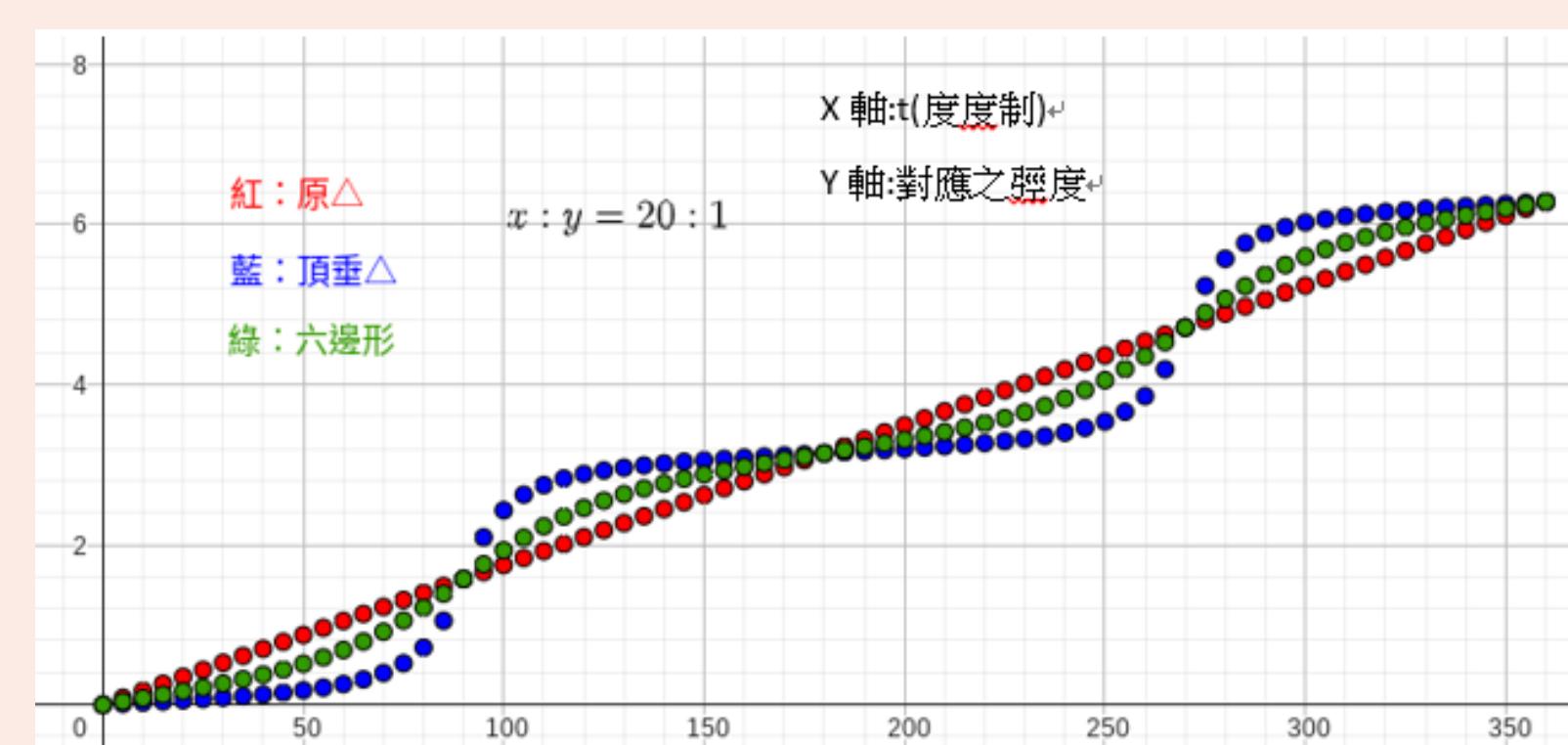
1.軌跡形狀:(1)橢圓(2)直線( $k = 0$ 或 $\sqrt{2}$ )

2. 軌跡參數式: $(-2r\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} + (k^2 r - 2r)\cos(\beta), k^2 r\sin(\beta))$

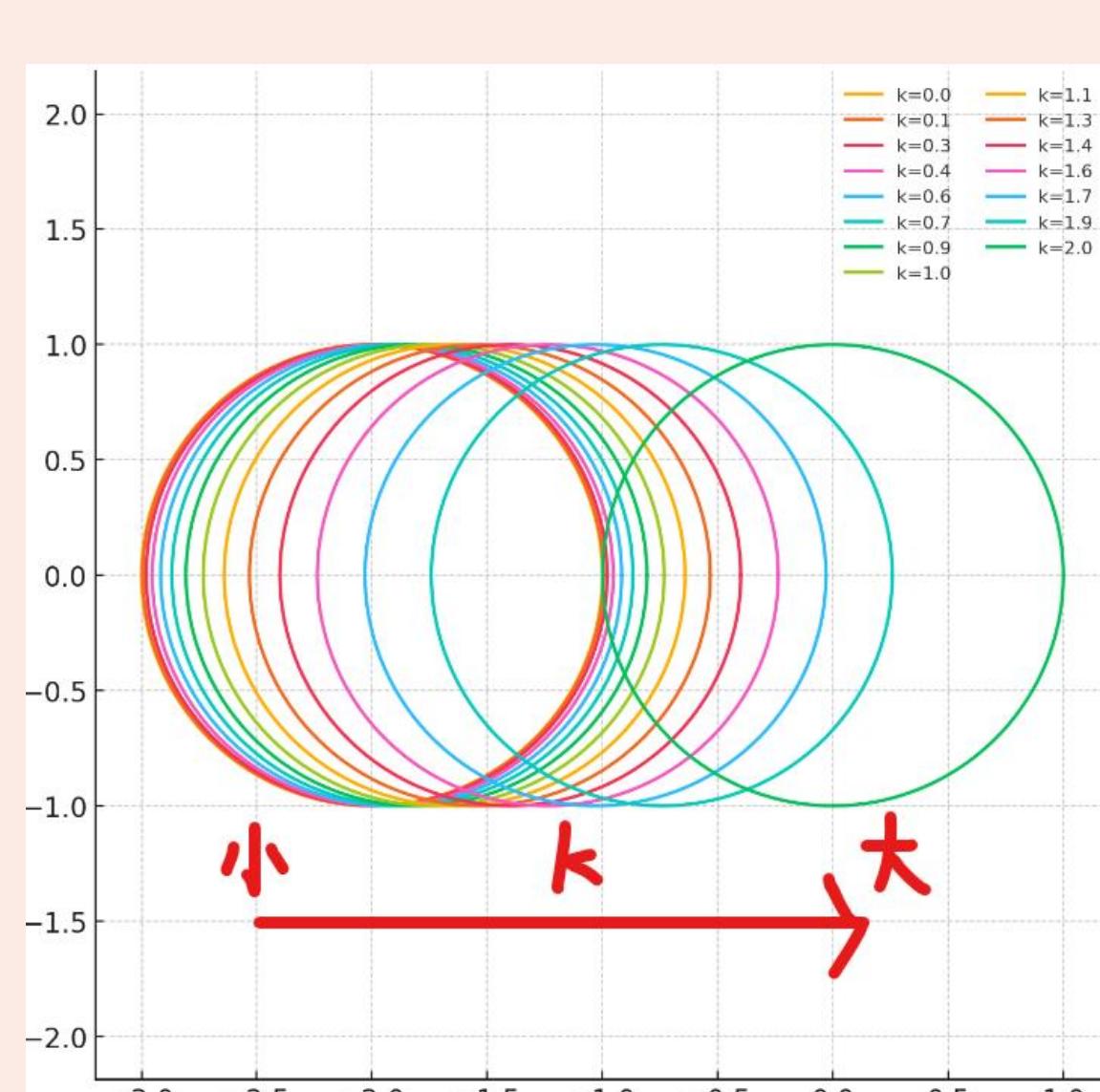
3.移動情形:

$0 < k < \sqrt{2}$ 為順時鐘， $\sqrt{2} < k \leq 2$ 為逆時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。

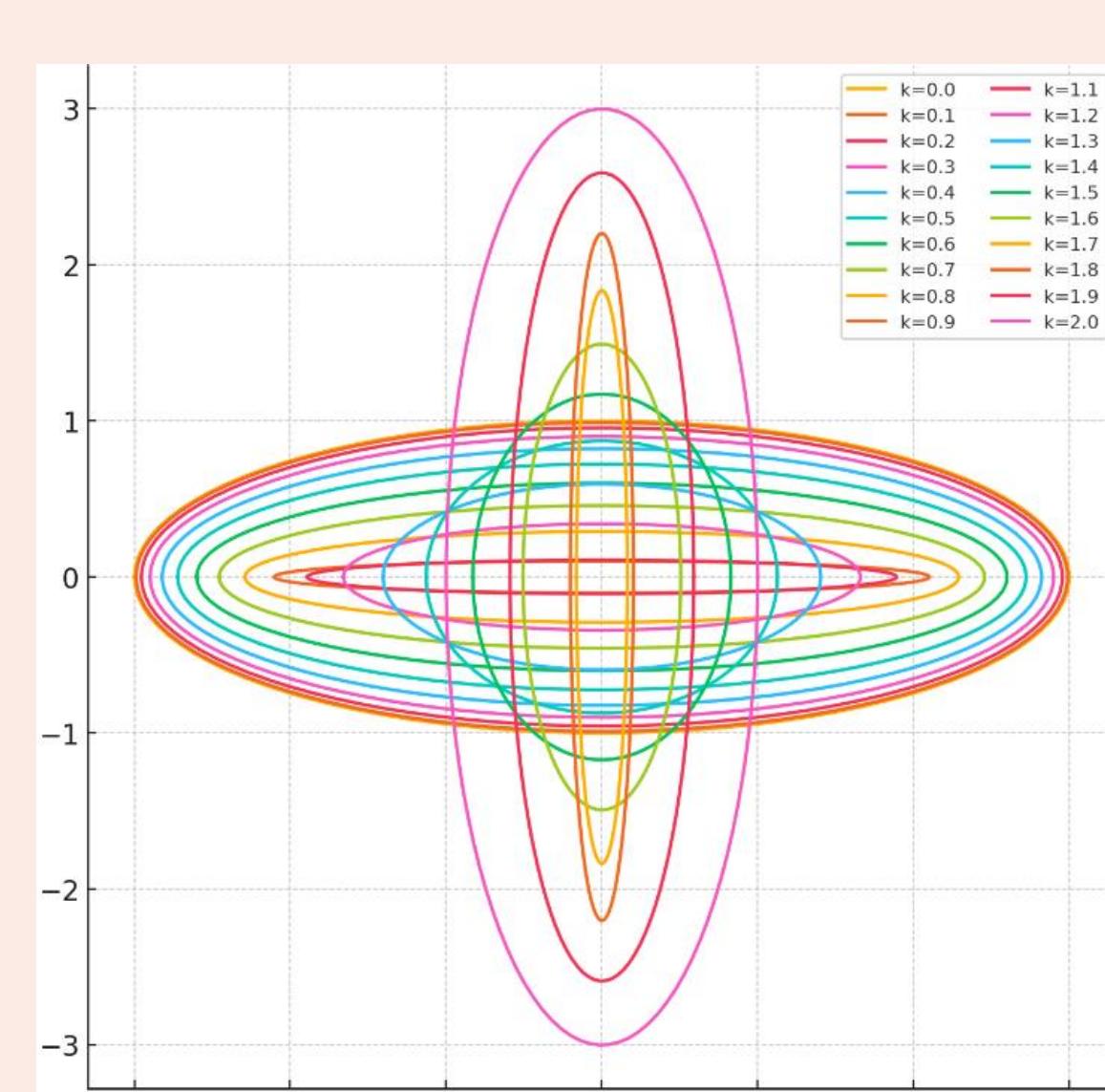
$0 < k < \sqrt{2}$ 為順時鐘， $\sqrt{2} < k \leq 2$ 為逆時鐘，中心與垂心之間的連線在相同時間內會掃過相同的面積(非等速)。



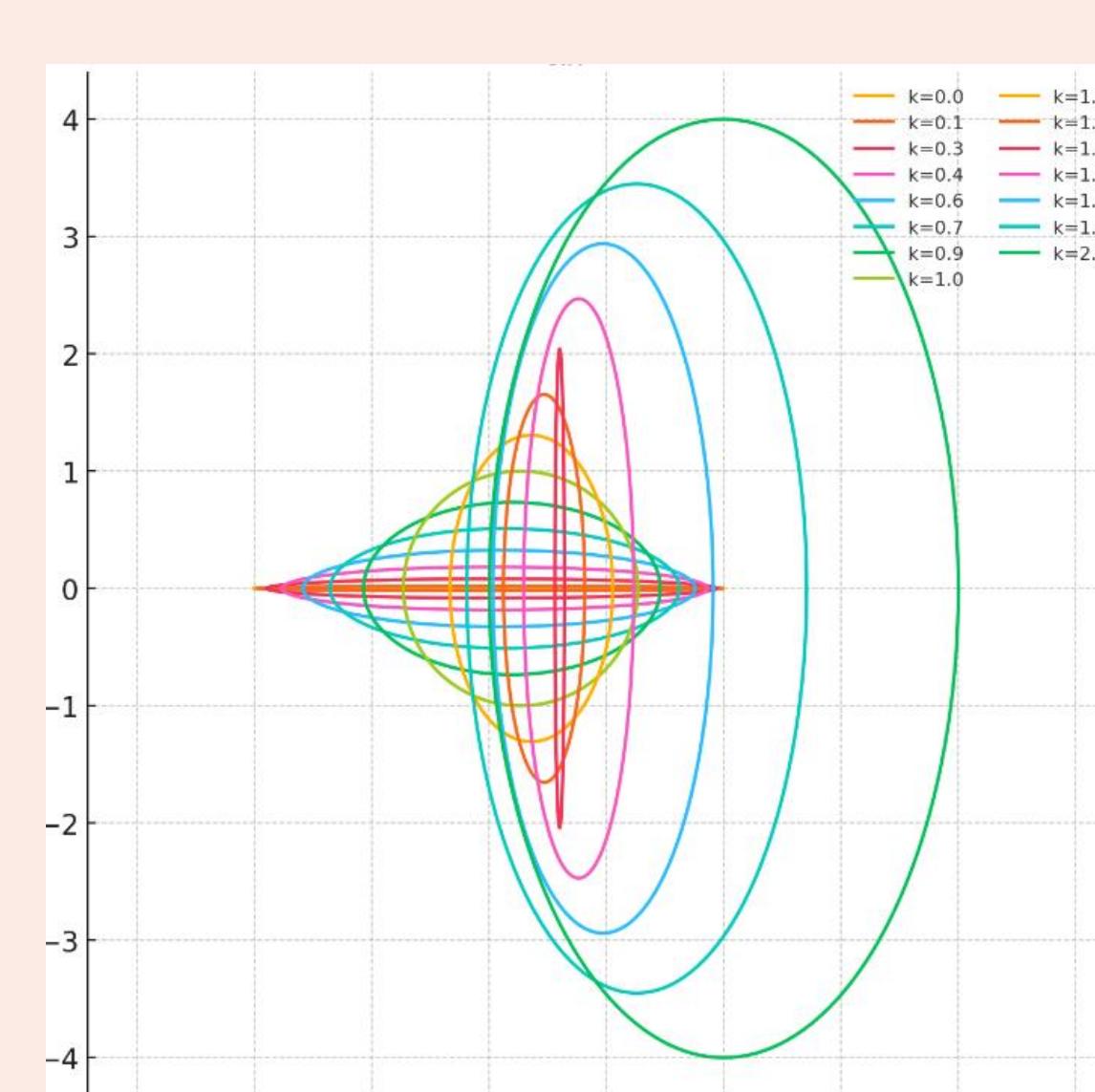
(▲圖8.原三角形、頂垂三角形、頂垂六邊形參數式對應之角度)



(▲圖9.原三角形對應k  
之軌跡變化)



(▲圖10.頂垂三角形對應  
k之軌跡變化)



(▲圖11.頂垂六邊形對應  
k之軌跡變化)

### 二、尤拉線夾角

$\tan$ :利用斜率，也就是 $\tan$ 差角公式

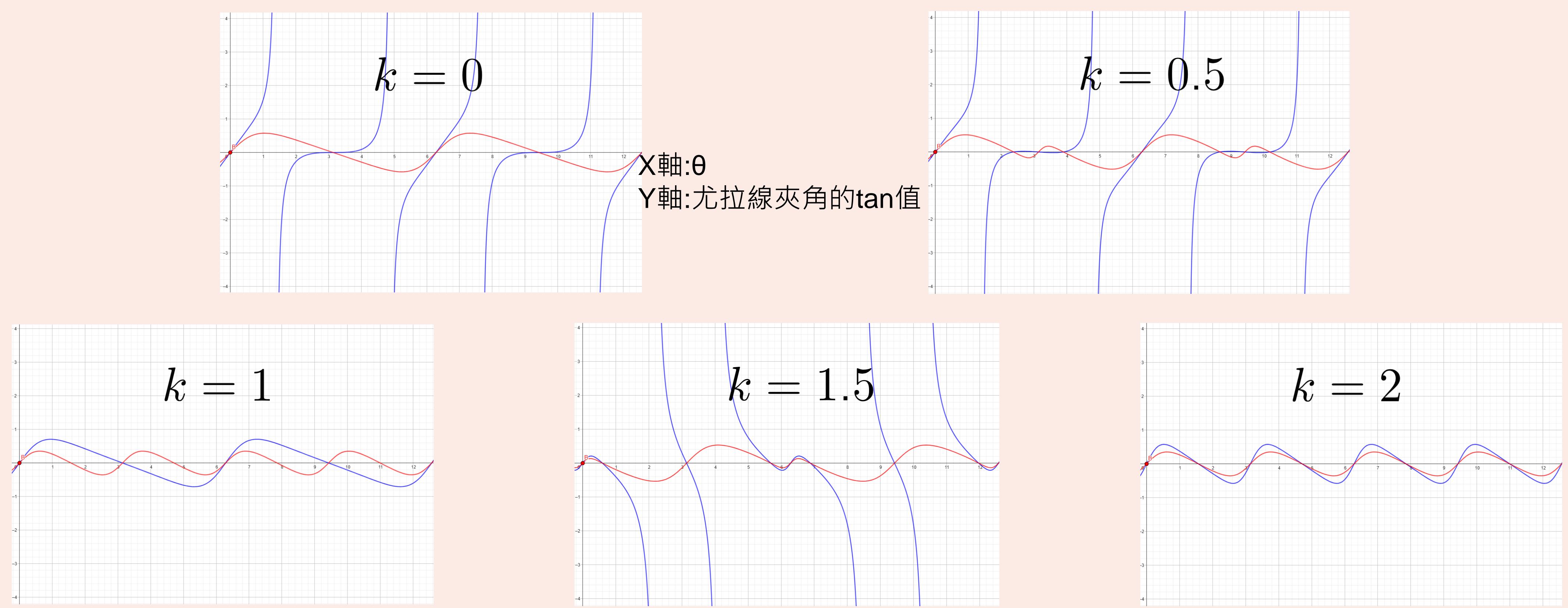
#### 原三角形與頂垂三角形(藍):

第1個轉折點前後皆無臨界點，所交角度不限，越靠近轉折點越平緩。通過第2個轉折點後圖形可看到臨界點，也就是有交角限制，越遠離轉折點越平緩。

註:我們將三心軌跡為直線時稱轉折點

#### 原三角形與頂垂六邊形(紅):

交角和轉折點並無太大的關係， $k$ 等於1時正好位於各條波形的中間狀態，而且能看到 $k$ 無論多少皆有其角度限制。



(▲圖12~16.尤拉線之tan交角)

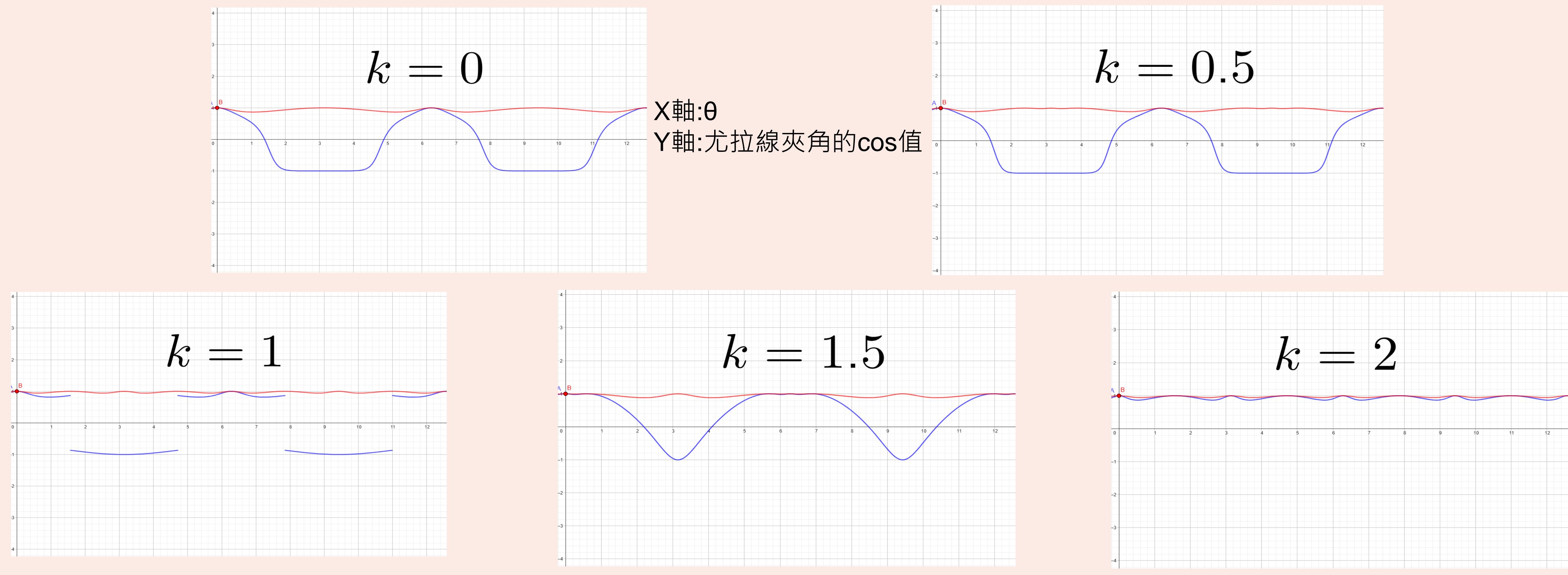
cos:利用向量內積除以長度

原三角形與頂垂三角形(藍):

整體呈現盆地型，過了第1個轉折點後越遠離邊緣曲率越高，但交角並無限制。通過第2個轉折點後圖形變得接近雙谷的形狀，有中心隆起的傾向，越遠離轉折點越平緩，圖形均在x軸上方，有交角限制。

原三角形與頂垂六邊形(紅):

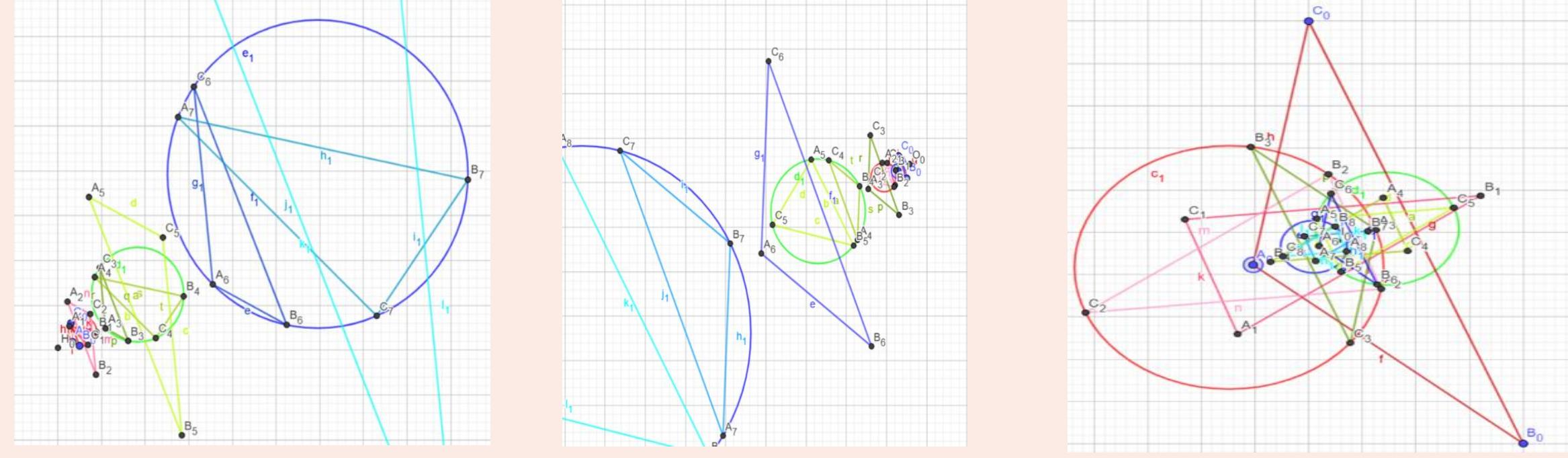
整體趨於平緩， $k$ 等於1時同樣也在各條波形的中間狀態，cos值偏向1可知交角普遍偏小。



(▲圖17~21.尤拉線之cos交角)

### 三、疊作

在做頂垂三角形時，我們好奇如果疊作下去的圖形會長什麼樣，經過觀察後發現第m層和第(m+3)層相似，其邊長會成固定比例。同時我們也在思考，既然第0層和第1層的頂點共圓時為垂心，那我們是否能找到讓第1層和第2層、第2層和第3層的頂點共圓，以及其所作的點是否有什麼意義。



(▲圖22~24以垂心、外心、內心疊作  
做圖在不同層數下頂點共圓)

## 捌、未來展望

- 1.求出軌跡角度之間的關係。
- 2.目前已知三角形第m層和第(m+3)層相似，可以找出三組不同層數之間互相共圓，六邊形第m層和第(m+6)層相似(參考資料5)，是否可以找出六組不同層數之間互相共圓。
- 3.換心性質只有在銳角時才會成立，探討那三組不同層數之間互相共圓的點是否有特性值或意義。
- 4.三維空間的探討。

## 玖、參考資料

- 1.許博宇、黃瀚德、陳又禕(2019)。一線四心---圓內接多邊形的歐拉線。國立台灣科學教育館，中華民國第59屆中小學科學展覽會。<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=15733&sid=15887>
- 2.楊玠霆、賴柏宇(2019)。換心手術—從三角形出發探討N邊形多心性質之研究。國立台灣科學教育館，中華民國第59屆中小學科學展覽會。<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=15733&sid=15789>
- 3.巫玟瑾(2021)。坐標平面上△尤拉線的操弄探討。國立台灣科學教育館，2021年臺灣國際科學展覽會。<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=17011&sid=17030>
- 4.許倬允、林宥昕(2020)。數學畢卡索—多邊形疊作之性質探討。國立台灣科學教育館，中華民國第60屆中小學科學展覽會。<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=16344&sid=16416>
- 5.梁力洵、黃暉哲、張竹欣(2017)。頂圓多邊形之性質研究與探討台灣科學教育館，中華民國第57屆中小學科學展覽會。<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=13521&sid=13601>
- 6.楊玉星(2020年9月)。圓內接多邊形的歐拉線。數學傳播，44(3)，66-72。  
[https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia/journals/4619?full\\_content\\_cont%5B%5D=%E5%B0%A4%E6%8B%89%E7%B7%9A](https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia/journals/4619?full_content_cont%5B%5D=%E5%B0%A4%E6%8B%89%E7%B7%9A)
- 7.投影點與對稱點公式[https://ntu75.blogspot.com/2016/10/blog-post\\_8.html](https://ntu75.blogspot.com/2016/10/blog-post_8.html)

註:圖4由參考資料7提供，其餘圖由第一作者製作