# 中華民國第65屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高級中等學校組　數學科

**佳作**

050401

**割而不捨—正多邊形與任意多邊形的平方重塑**


學校名稱： 南山學校財團法人新北市南山高級中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 高二 王亮鈞 | 潘宗賢 |
| 高二 蘇祐瑞 | 王志偉 |
| 高二 何品學 | |



關鍵詞： 遞迴切割法、等面積三角形置換切割法、優角角平分線

# 摘　要

此次的研究，我們著重在切割法的探討與延伸，先研究正 $n$ 邊形藉由「**長方形切割法**」與「**三角形切割法**」成為正方形，在過程中發現問題並分類探討，最後證明一定能切割成正方形，並且計算兩方法完成後的切割塊數。接著研究邊長相等的正 $n$ 邊形與正$(n+1)$邊形，後者利用前者已切割出的正方形，將多餘的部分切割重組，填補成新的大正方形，建構出**遞迴切割**的關係。最後發想出**等面積三角形置換切割法**，並透過此方法來完成任意凸多邊形切割重組成正方形。再進一步研究任意凹多邊形，研發出**優角角平分線切割法**，將凹多邊形完全切割成數個凸多邊形後，再重組成正方形。

# 壹、 前言

## 一、研究動機

在發想科展題目時，我們注意到一份校內國中數學科展「N面組割」[6]，其主要內容在探討正多邊形沿對角線切割成三角形後，再切割重組成正方形的切割塊數，他們的內容引起我們的興趣，我們嘗試發想：能不能找出切割塊數和邊數的函數關係？又是否存在其他系統化的切割方式？這引發我們強烈的好奇心，促使我們往下深入探究。

## 二、研究目的

(一) 實現將正多邊形切割成正方形的方法。

(二) 計算正多邊形利用「長方形切割法」變成正方形的切割塊數。

(三) 計算正多邊形利用「三角形切割法」變成正方形的切割塊數。

(四) 利用正$n$邊形已轉換出等面積之正方形的條件下，將其擴展出與正$(n+1)$邊形等面積之正方形，其中正$n$邊形與正$(n+1)$邊形的邊長相等。

(五) 實現將任意凸多邊形切割成正方形的方法。

(六) 實現將任意凹多邊形切割成正方形的方法。

## 三、文獻回顧

<table>
<tr><th>文獻名稱</th><th>與研究相關的內容摘要</th><th>對本研究啟發與差異之處</th></tr>
<tr><td>國王的地毯[7]</td><td>主要聚焦在長方形、三角形、梯形與平行四邊形切割重組成正方形的最少刀數，此作品將圖形分成數個類別，並對每個類別都提供最少刀數的切割步驟。</td><td rowspan="2">這兩篇文獻的目標是找到某些特例之下的最少切割步驟。本篇的目標並不追求最少刀數或最少切割塊數，而是找到對於任意圖形皆通用的切割重組步驟。</td></tr>
<tr><td>割「聚」一「方」-切割重組正方形[4]</td><td>給出了正五、六、七、八邊形切割重組成正方形的最少刀數。</td></tr>
<tr><td>N面組割－等角多邊形切割重組正方形之探究[6]</td><td>介紹將三角形切割成指定邊長之長方形的步驟，也介紹當無法將三角形直接切成指定邊長的長方形時所需要的調整方法。</td><td>本篇簡化此切割步驟，使切割出的塊數減少，也提出另一種調整方法，並計算出各個三角形切割成長方形的塊數。</td></tr>
<tr><td>求過任意點作多邊形面積平分線[5]</td><td>提出將凸$n$邊形等面積轉換為凸$(n-1)$邊形的構想。</td><td>本篇延續該構想，提出把凸$n$邊形切割重組成三角形，再切割重組成正方形的方法。</td></tr>
</table>

# 貳、研究設備及器材

紙、筆、筆電、幾何繪圖軟體（GSP、GeoGebra）、Word、Mathtype，且**本作品中的所有圖形皆由作者們以幾何繪圖軟體繪製**。

# 參、研究過程或方法

## 一、符號說明

在此次研究中，我們想要將正多邊形切割重新組合成正方形，藉此研究不同的切割法與切割塊數，並進一步利用固定部分條件的方式去做延伸推廣，在過程中會使用到一些工具，例如三角函數的基本性質、正弦定理、餘弦定理、坐標化測量面積公式、微分公式……等等，都視為先備知識，在此僅說明一些會使用到的符號。

$n$：代表正多邊形的邊數，且$n \geq 5$。

$s$：代表正多邊形的邊長。

$\alpha$：代表正多邊形的面積（為方便呈現，過程中部分地方會用$\alpha = 1$代入）。

先建立面積$\alpha$、邊數$n$、邊長$s$的關係式：

$$\alpha = n \times \left[ \frac{1}{2} \times s \times \frac{\frac{s}{2}}{\tan\frac{\pi}{n}} \right] = \frac{ns^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}$$

## 二、正多邊形利用長方形切割法重新組合成正方形

我們以正多邊形中心出發，先全部切割成直角三角形後，再拼組成長方形，接著利用幾何切割拼補方法[3]成功拼成正方形，並且我們去證明此拼組的長方形必定能經由切割重組成為正方形，之後再去計算這過程中的總切割塊數。

### (一) 正多邊形切割成長方形

將邊長為$s$的正$n$邊形從中心進行等分切割，再將三角形兩兩交疊成長方形，最後將$n$個長方形並排成大長方形【見圖 1】。

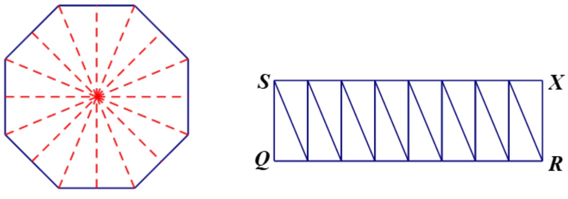



圖 1 正八邊形切割重組成長方形

## (二) 長方形切割成正方形

此部分切割法是參考「廣義畢氏定理之任意正多邊形幾何切割拼補方法」[3]之作法，為了闡述我們後續新增的證明 $\overline{ST} \le \overline{SY}$，故在此用自己的符號重新論述一遍。令長方形 $QRXS$ 的邊長為 $a^2$，$b^2$，且 $a > b > 0$，則切割目標正方形 $QVWP$ 的邊長為 $ab$。令 $Y$ 為 $\overline{SX}$ 與 $\overline{WV}$ 之交點，$U$ 為 $\overline{PR}$ 與 $\overline{WV}$ 之交點，$T$ 為 $\overline{SX}$ 與 $\overline{PR}$ 之交點【見圖 2】。

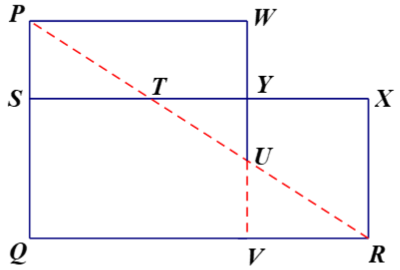



圖 2 長方形切割重組成正方形

因為 $\Delta PST \sim \Delta PQR \sim \Delta UVR$（$AA$相似），所以 $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{ST}} = \dfrac{\overline{UV}}{\overline{VR}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \dfrac{ab}{a^2} = \dfrac{b}{a}$。

又 $\overline{PS} = \overline{PQ} - \overline{SQ} = ab - b^2 = b(a-b)$，可推得 $\overline{ST} = \overline{PS} \times \dfrac{a}{b} = a(a-b)$，

且 $\overline{VR} = \overline{QR} - \overline{QV} = a^2 - ab = a(a-b)$，可推得 $\overline{UV} = \overline{VR} \times \dfrac{b}{a} = b(a-b)$，

所以 $\Delta PST \cong \Delta UVR$（$SAS$）。

又 $\overline{WU} = \overline{WV} - \overline{UV} = ab - b(a-b) = b^2 = \overline{XR}$ 且 $\overline{TX} = \overline{SX} - \overline{ST} = a^2 - a(a-b) = ab = \overline{PW}$，

所以 $\Delta PWU \cong \Delta TXR$（$SAS$）。

所以先沿著 $\overline{TR}$ 切割，將 $\Delta TXR$ 平移至 $\Delta PWU$，再沿著 $\overline{UV}$ 切割，將 $\Delta UVR$ 平移至 $\Delta PST$，即完成將長方形 $QRXS$ 切割成正方形 $QVWP$。但此作法一開始必須滿足 $\overline{ST} \le \overline{SY}$，否則此切割法顯然會不成立【見圖 3】。

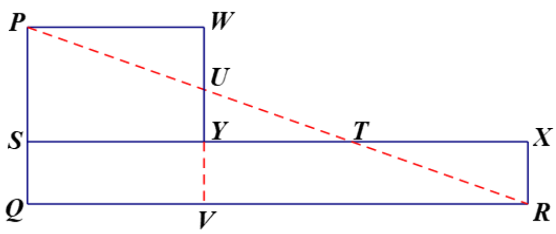



圖 3 $\overline{ST} > \overline{SY}$ 切割法會不成立

因此，以下我們去證明了所有的正多邊形切割重組成長方形後，其$\overline{ST} \le \overline{SY}$必定成立，所以可套用此切割法，將此長方形切割成邊長為$\sqrt{\alpha}$之正方形。

**試證**：所有的正多邊形切割成長方形後，其$\overline{ST} \le \overline{SY}$必定成立。

**【證明】**

1. 令 $f\left(x\right)=x\tan\dfrac{\pi}{x}$ ， $x\ge 5$

   當$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$時，我們知道$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ ，則$\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1<\dfrac{\tan\theta}{\theta}$ ，所以 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)\pi>\pi$

2. $f'\left(x\right)=\tan\dfrac{\pi}{x}+x\sec^2\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{x}-\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\sec^2\dfrac{\pi}{x}$

   又$\dfrac{\tan\frac{\pi}{x}}{\left(\frac{\pi}{x}\right)\sec^2\frac{\pi}{x}}=\dfrac{x}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}=\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)\cos\dfrac{\pi}{x}<\cos\dfrac{\pi}{x}<1$，可得$\tan\dfrac{\pi}{x}<\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\sec^2\dfrac{\pi}{x}$ ，

   因此 $f'\left(x\right)<0$ ，即對於所有不小於5的實數$x$ ， $f\left(x\right)$為嚴格遞減函數。

   所以 $f\left(x\right)\le f\left(5\right)=5\times\tan\dfrac{\pi}{5}\approx 3.633<4$ ，故可得知$\pi<f\left(x\right)=x\tan\dfrac{\pi}{x}<4$ 。

3. 若正多邊形的邊數為$n$與邊長為$s$ ，可得$a^2=\dfrac{ns}{2}$ , $b^2=\dfrac{s}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ ，兩式相除可得

   $\dfrac{a^2}{b^2}=n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ ，由前述證明可知$\pi<\dfrac{a^2}{b^2}=n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)<4$ ，故$a^2<4b^2$ ，則$a<2b$ ，便可推得$a\left(a-2b\right)<0$ ，又$\overline{ST}-\overline{SY}=a\left(a-b\right)-ab=a\left(a-2b\right)$ ，所以$\overline{ST}-\overline{SY}<0$ ，

   即$\overline{ST}\le\overline{SY}$必定成立。

### (三) 正多邊形切割成正方形之切割塊數

首先建立直角坐標系，需先討論斜對角線$L_1$ 、長方形上邊$L_2$與正方形右側邊$L_3$的相交狀況【見圖 4】，再系統性分析切割塊數。

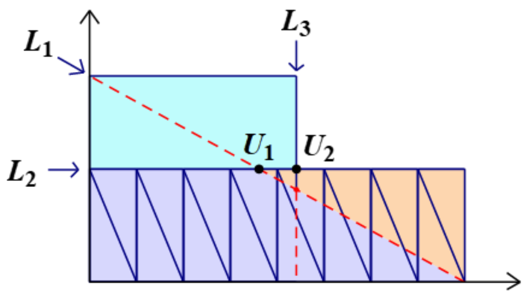



圖 4 坐標化後分析 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 的相交情形

坐標化後 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 的方程式分別為

$$L_1:\frac{x}{\frac{ns}{2}}+\frac{y}{\frac{s}{2}\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}}=1 \quad , \quad L_2: y=\frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}} \quad , \quad L_3:\ x=\sqrt{\alpha}=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}$$

$L_1$ 與 $L_2$ 的交點坐標為 $U_1\left(\frac{s}{2}\times\left(n-\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right), \frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}}\right)$ ,

$L_2$ 與 $L_3$ 的交點坐標為 $U_2\left(\frac{s}{2}\times\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}, \frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}}\right)$

先沿 $L_1$ 切割，塊數會分成三個種類，下列以小塊長方形位於由左至右第 $i$ 塊位置來做說明，出現的符號[ ]為高斯符號。

$U_1$ 落在第 $\left[\frac{\frac{s}{2}\times\left(n-\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right)}{\frac{s}{2}}\right]=\left[n-\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ 塊長方形上邊內，

$U_2$ 落在第 $\left[\frac{\frac{s}{2}\times\left(\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right)}{\frac{s}{2}}\right]=\left[\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ 塊長方形上邊內。

1. $1 \le i \le \left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right]$：切割塊數為 2 ，見圖 5 的橘色區塊。

2. $i = \left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] + 1 \quad or \quad i = n$ ：切割塊數為 3 ，見圖 5 的黃色區塊。

3. $\left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] + 2 \le i \le n-1$ ：切割塊數為 4 ，見圖 5 的綠色區塊。

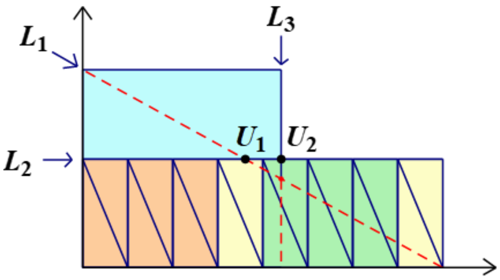



圖 5 沿 $L_1$ 切割的塊數區分為橘、黃、綠三個種類

所以 $L_1$ 切割的總塊數為

$$2\times\left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] + 3\times2 + 4\times\left( (n-1) - \left( \left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] + 2 \right) + 1 \right) = 4n - 2\times\left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] - 6 \text{。}$$

將圖 4 橘色三角形整個往左上平移後，再沿 $L_3$ 切割，增加塊數會再分成兩個種類，會依照兩交點 $U_1$ 與 $U_2$ 所坐落的長方形位置進行討論。

1. $U_1$ 與 $U_2$ 在同一個長方形內：即 $\left[ n - \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right] = \left[ \sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}} \right]$ ，沿 $L_3$ 切割，塊數會增加 2 塊【見圖 6】。

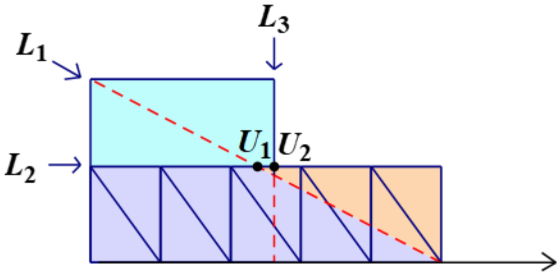



圖 6 $U_1$ 與 $U_2$ 在長方形同邊（以 $n=5$ 為例）

2. $U_1$與$U_2$在兩相異長方形內：即$\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]<\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]$，沿$L_3$切割，塊數有兩種情形，令$U_2$所在之長方形對角線$L_4$：$y=\left(-\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{n}}\right)\times\left(x-\dfrac{s}{2}\times\left(\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]+1\right)\right)$，$L_4$與$L_1$的交點為$U_3$，其$x$坐標為$x=\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}-\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)$。

(1) $U_3$在$L_3$上或右側：即$\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}-\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)\geq\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}$，塊數會增加1塊【見圖 7】。

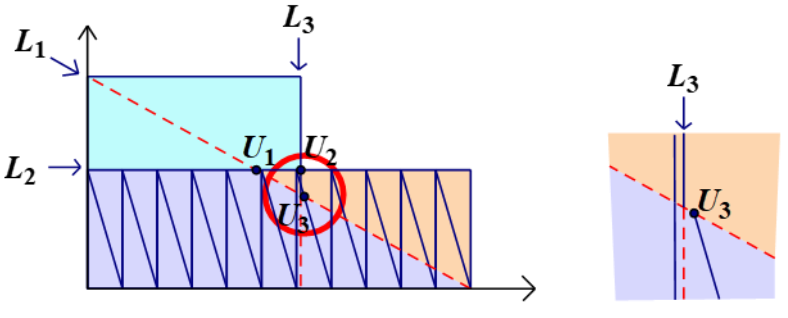



圖 7 $U_3$在$L_3$右側（以$n=11$為例）

(2) $U_3$在$L_3$左側：即$\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}-\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)<\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}$，塊數會增加2塊【見圖 8】。

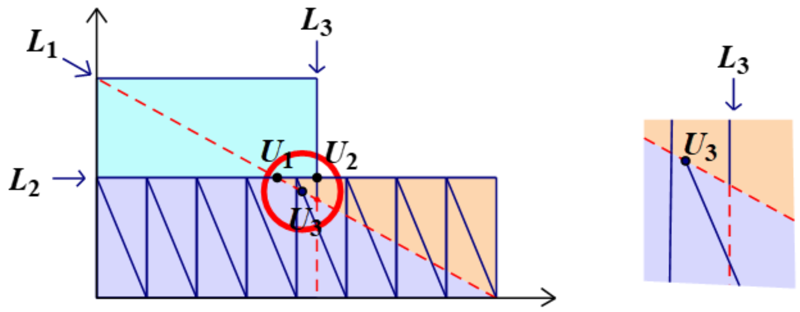



圖 8 $U_3$在$L_3$左側（以$n=8$為例）

總結，『$L_1$切割的塊數』再加上『$L_3$切割的各自增加塊數』，即為最終的總切割塊數。

## 三、正多邊形利用三角形切割法重新組合成正方形

我們把正多邊形沿著對角線切割成不同的三角形，接著將這些三角形分成三個種類討論再分別切割成長方形，若切割過程中有遇到三角形太小無法直接切割時，必須執行倍率策略加以調整，最後再將這些長方形拼接成正方形，我們也同時去計算其切割塊數。

### (一) 正多邊形切割成三角形

先將正多邊形進行對角線切割成不同的三角形，由於左右對稱性，只須研究半邊即可【見圖 9】，在此不失一般性假設$\alpha=1$。而符號$t_i$為正多邊形的對角線長度，當$n$為奇數時，則$0\le i\le\dfrac{n-3}{2}$；當$n$為偶數時，則$0\le i\le\dfrac{n-2}{2}$。$T_i$為在三角形切割法中，三邊長為$s$ 、$t_i$ 、$t_{i+1}$的三角形。

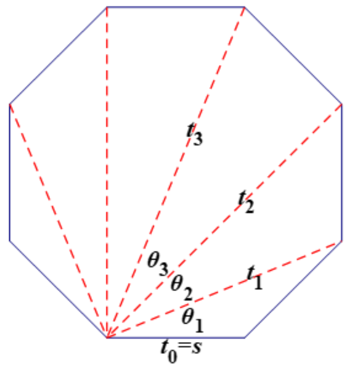



圖 9 正八邊形沿對角線切割成三角形

每個對角線切割角$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$，…均為$\dfrac{\pi}{n}$，由正弦定理可列式$\dfrac{t_i}{\sin\left(\dfrac{n-1-i}{n}\pi\right)}=\dfrac{s}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$，

進一步化簡可得

$$t_i=\frac{s\times\sin\left(\frac{n-1-i}{n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}}\times\sin\left(\frac{i+1}{n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{i+1}{n}\pi\right)}{\sqrt{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}=\frac{2\sin\left(\frac{i+1}{n}\pi\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$$

## (二) 三角形切割成長方形再拼成正方形

1. 三角形切割步驟

對任意 $\Delta ABC$，先過 $A$ 作一指定長度為 $l$ 的線段 $\overline{AD}$，並令該線段為 $L$【見圖 10】，至於指定長度 $l$ 如何得到會在第 3 點會加以闡述，沿著 $L$ 切下後，我們考慮 $L$ 其中一側的三角形 $\Delta ABD$，並針對所有可能情形進行分類切割研究。

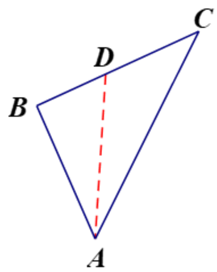



圖 10 任意 $\Delta ABC$ 過某頂點作一指定長度為 $l$ 的線段 $L$

(1) 與 $L$ 相鄰的兩個內角皆為銳角，即 $\angle BAD$ 與 $\angle BDA$ 皆為銳角【見圖 11】:

(i) 令 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DB}$ 中點分別為 $E$ 與 $F$，連接 $\overline{EF}$。

(ii) 過 $B$ 作 $\overline{EF}$ 之垂線，交 $\overline{EF}$ 於 $G$。

(iii) 沿線段 $\overline{BG}$ 與 $\overline{EF}$ 作切割。

(iv) 將 $\Delta BFG$ 繞 $F$ 旋轉$180^\circ$，將 $\Delta BEG$ 繞 $E$ 旋轉$180^\circ$，即形成邊長為 $l$ 的長方形。

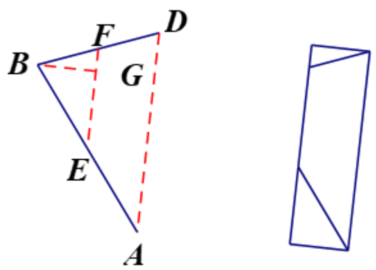



圖 11 $\Delta ABD$ 在情形(1)切割成長方形

(2) 與 $L$ 相鄰的兩個內角為銳角與直角，即 $\angle BAD$ 與 $\angle BDA$ 為一銳角與一直角【見圖 12】:

(i) 令 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DB}$ 中點分別為 $E$ 與 $F$ ，連接 $\overline{EF}$ 。

(ii) 沿線段 $\overline{EF}$ 做切割，將 $\Delta BEF$ 繞 $E$ 旋轉 $180^{\circ}$ ，形成 $\Delta AEF'$ ，即形成邊長為 $l$ 的長方形。

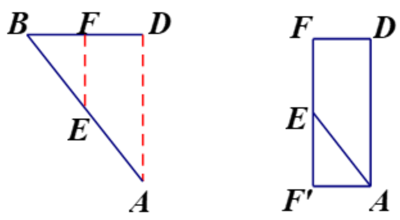



圖 12 $\Delta ABD$ 在情形(2)切割成長方形

(3) 與 $L$ 相鄰的兩個內角為銳角與鈍角，即 $\angle BAD$ 與 $\angle BDA$ 為一銳角與一鈍角【見圖 13】:

(i) 令 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DB}$ 中點分別為 $E$ 與 $F$ ，連接 $\overline{EF}$ 。

(ii) 沿線段 $\overline{EF}$ 做切割，將 $\Delta BEF$ 繞 $E$ 旋轉 $180^{\circ}$ ，形成 $\Delta AEF'$ 。

(iii) 過 $D$ 作 $\overline{EF}$ 之垂線，交 $\overleftrightarrow{EF}$ 於 $G$ 。

(iv) 將 $\Delta GFD$ 平移，使得 $\overline{FD}$ 與 $\overline{F'A}$ 重合，即形成邊長為 $l$ 的長方形。

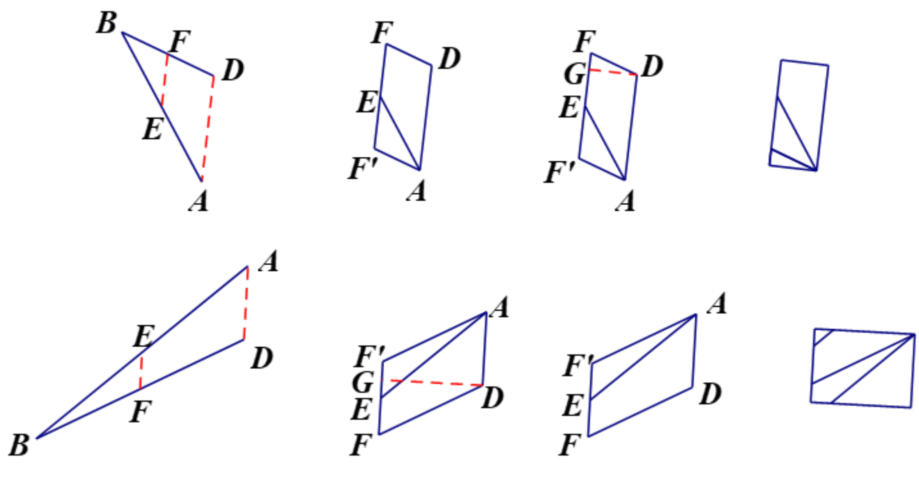



圖 13 $\Delta ABD$ 在情形(3)切割成長方形

2. 三邊長為 $s$ 、$t_i$ 、$t_{i+1}$ 之三角形 $T_i$ 的討論

由於正多邊形的對稱性，僅討論滿足 $t_{i+1} \ge t_i$ 之三角形 $T_i$，則 $i$ 滿足：當 $n$ 為奇數時，$0 \le i \le \dfrac{n-3}{2}$；當 $n$ 為偶數時，$0 \le i \le \dfrac{n-2}{2}$。先將三角形 $T_i$ 以 $\Delta ABC$ 表示，其三邊長 $a=s$、$b=t_i$ 、 $c=t_{i+1}$ ，見第 9 頁圖 9，分別令 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 邊上的高長度為 $h_A$ 、 $h_B$ 、 $h_C$ ，

則 $h_C = b\sin\frac{\pi}{n} = t_i \sin\frac{\pi}{n}$。三角形 $T_i$ 可切割成長邊為 $l=\sqrt{\alpha}$ 之長方形，其中 $\alpha$ 為正多邊形面積且 $l$ 須滿足 $h_C \le l \le c$。

3. 指定長度 $l$ 的討論

有時會遇到 $l=\sqrt{\alpha}>c$ 的情況，即三角形太小無法將其直接切割成長邊為 $\sqrt{\alpha}$ 之長方形，因此需要考慮更小的 $l$ 才能切割出長方形。令 $l=\frac{\sqrt{\alpha}}{r}$，其中 $r$ 為正整數，如此操作的目的是先將三角形切割成長邊為 $\frac{\sqrt{\alpha}}{r}$ 的長方形，再將該長方形沿著短邊均分 $r$ 等分，可得 $r$ 個長邊為 $\frac{\sqrt{\alpha}}{r}$ 的長方形，將這些長方形的短邊拼接在一起，即得到長邊為 $\sqrt{\alpha}$ 之長方形【見圖 14】。而 $r$ 滿足 $h_C \le l = \frac{\sqrt{\alpha}}{r} \le c$，再經化簡可得 $\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{h_C}$，在此不失一般性假設 $\alpha=1$，所以若 $\frac{1}{c} \le r \le \frac{1}{h_C}$，則三角形 $T_i$ 必可切割為長邊為1的長方形。

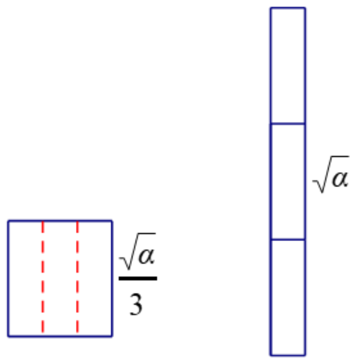



圖 14 $l=\sqrt{\alpha}>c$ 須重設 $l=\frac{\sqrt{\alpha}}{r}$ 的切割法拼接

**【說明】**(1) $\angle C$ 為直角或鈍角：

(i) 若 $\frac{1}{c} \le r \le \frac{1}{b}$，則 $L$ 可以過點 $A$。 (ii) 若 $\frac{1}{c} \le r \le \frac{1}{a}$，則 $L$ 可以過點 $B$。

(iii) 若 $\frac{1}{b} \le r \le \frac{1}{h_C}$，則 $L$ 可以過點 $C$。

(2) $\angle C$ 為銳角：

(i) 若 $\frac{1}{c} \le r \le \frac{1}{h_A}$，則 $L$ 可以過點 $A$。 (ii) 若 $\frac{1}{c} \le r \le \frac{1}{h_B}$，則 $L$ 可以過點 $B$。

(iii) 若 $\frac{1}{b} \le r \le \frac{1}{h_C}$，則 $L$ 可以過點 $C$。

接著證明：對於每個不小於5的正整數$n$，都存在正整數$r$，使得$\frac{1}{c}\le r\le \frac{1}{h_C}$。

**【證明】**

(1) $n=5$：不等式右側 $\frac{1}{h_C}=\frac{1}{t_i\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}}}{2\sin\frac{i+1}{5}\pi\sin\frac{\pi}{5}}>\frac{\sqrt{\frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\approx 1.311>1$

不等式左側 $\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}}}{2\sin\frac{i+2}{5}\pi}\approx 0.811<1$

$i=0$或$i=1$時均滿足上述兩式，故得證存在正整數$r$。

(2) $n\ge 6$：先令 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}}$，令此函數之定義域為$x\in[6,\infty)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}}{2\times\sqrt{\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}}{4\times\sqrt{\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}}}$$

由於 $0<\frac{2\pi}{x}<\frac{\pi}{2}$，可得 $\frac{\sin\frac{2\pi}{x}}{\frac{2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}}=\frac{\tan\frac{2\pi}{x}}{\frac{2\pi}{x}}>1$，

所以 $\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}>0$，即$f'(x)>0$，所以$f\left(x\right)$為遞增函數。

又$x\ge 6$，其 $2\sin\frac{\pi}{x}\le 1$，則不等式右側：

$$\frac{1}{h_C}=\frac{\sqrt{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}}{2\sin\frac{i+1}{n}\pi\sin\frac{\pi}{n}}\ge\sqrt{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}\ge\sqrt{\frac{6}{2}\sin\frac{2\pi}{6}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}>1$$

而不等式左側：

(i) 若$\frac{1}{c}\le 1$，則得證存在正整數$r$。

(ii) 若$\frac{1}{c}>1$，則$\frac{1}{h_C}=\frac{\sqrt{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}}{2\sin\frac{i+1}{n}\pi\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{i+2}{n}\pi}{\sin\frac{i+1}{n}\pi\sin\frac{\pi}{n}}\times\frac{1}{c}$

又 $\sin\frac{\pi}{n}\le\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{1}{h_C}\ge\frac{\sin\frac{i+2}{n}\pi}{\sin\frac{i+1}{n}\pi}\times 2\times\frac{1}{c}\ge\frac{2}{c}$ ，即 $\frac{1}{h_C}-\frac{1}{c}\ge\frac{1}{c}>1$

，因為間隔大於1，所以內部必定存在正整數，故得證存在正整數 $r$ 。

4. 最小 $r$ 值的討論與切割塊數

得證正整數 $r$ 值必定存在後，我們便可以取 $r$ 的最小可能值 $r_0=\left\lceil\frac{1}{c}\right\rceil$ ，這代表 $L$ 的長度為 $l=\frac{1}{r_0}$ ，確定 $L$ 的長度後，也就可以得知 $L$ 可以通過 $\Delta ABC$ 的哪些頂點。回到第10 頁第 1 點三角形切割步驟的各個示意圖， $\Delta ABC$ 中 $L$ 兩側三角形的每個內角會導致切割步驟之不同，進而影響切割塊數，因此為了得到各種情形下切割塊數的公式，我們仿照第 1 點的分類方式，將 $L$ 兩側三角形進行分類。

我們透過求出 $L$ 兩側三角形的三邊長，以判斷其各個內角之大小。又每個 $\Delta ABC$ 的 $L$ 出發點不盡相同，造成討論與列式的困難，故改以 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 來取代原有的三邊長符號 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，並賦予新的定義：設 $x$ 為 $L$ 出發點的對邊， $y$ 、 $z$ 為 $L$ 出發點的兩鄰邊，不失一般性假設 $y\ge z$ 。假設 $L$ 將 $\Delta ABC$ 切割成三邊長為 $l$ , $kx$ , $y$ 與 $l$ , $(1-k)x$ , $z$ ，其中 $0\le k\le 1$ 【見圖 15】。

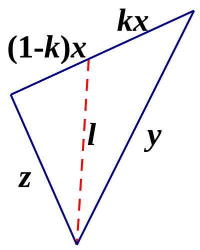



圖 15 $L$ 將 $\Delta ABC$ 切割成兩個三角形

接下來求 $k$ ，由餘弦定理可知 $\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=\frac{k^2x^2+y^2-l^2}{2kxy}$ ，則解得

$k=\frac{x^2+y^2-z^2\pm\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)^2-4x^2\left(y^2-l^2\right)}}{2x^2}$ ，因為當 $l$ 大於 $z$ 時，取加號不合，故取減號，即 $k=\frac{x^2+y^2-z^2-\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)^2-4x^2\left(y^2-l^2\right)}}{2x^2}$ 。得知 $k$ 後，便能以邊長關係判斷 $L$ 任一側三角形之類別，並以 $r_0$ 建立塊數公式。

(1) 與 $L$ 相鄰的兩個內角皆為銳角

切割成邊長為 $l$ 的長方形時，切割塊數為 $3$，將此長方形切割成 $r_0$ 等分後，$(r_0-1)$ 條平分線都會與長方形內兩條線段相交，所以切割塊數為 $3+(2+1)\times(r_0-1)=3r_0$【見圖 16】。

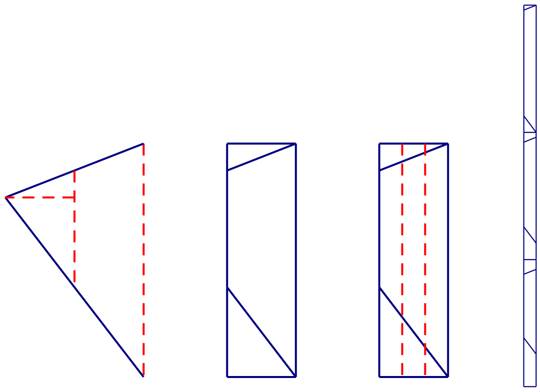


圖 16 情況(1)且 $r_0=3$ 的切割法拼接

(2) 與 $L$ 相鄰的兩個內角為銳角與直角

切割成邊長為 $l$ 的長方形時，切割塊數為 $2$，將此長方形切割成 $r_0$ 等分後，$(r_0-1)$ 條平分線都會與長方形內一條線段相交，所以切割塊數為 $2+(1+1)\times(r_0-1)=2r_0$【見圖 17】。

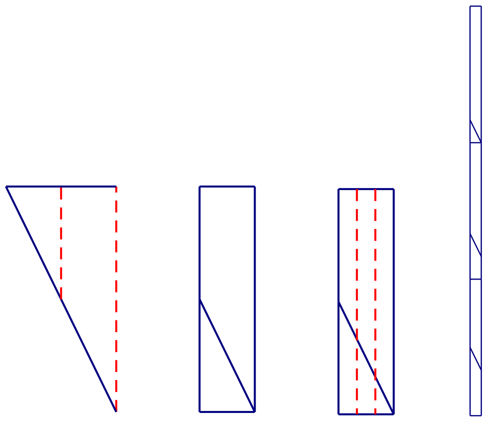


圖 17 情況(2)且 $r_0=3$ 的切割法拼接

(3) 與 $L$ 相鄰的兩個內角為銳角與鈍角

(i) 切割成邊長為 $l$ 的長方形時，若切割塊數為 $3$，則將此長方形切割成 $r_0$ 等分後，$(r_0-1)$ 條平分線都會與長方形內兩條線段相交，所以切割塊數為 $3+(2+1)\times(r_0-1)=3r_0$【見圖 18】。

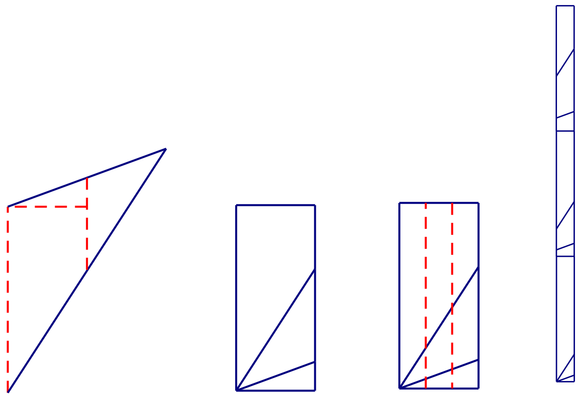


圖 18 情況(3)-(i)且 $r_0=3$ 的切割法拼接

(ii) 切割成邊長為 $l$ 的長方形時，若切割塊數為 $4$ ，則將此長方形切割成 $r_0$ 等分後，除非有一條平分線恰好落在圖 19 的綠色虛線處，否則 $(r_0-1)$ 條平分線都會與長方形內兩條線段相交，所以切割塊數為 $4+(2+1)\times(r_0-1)=3r_0+1$ 【見圖 19】。

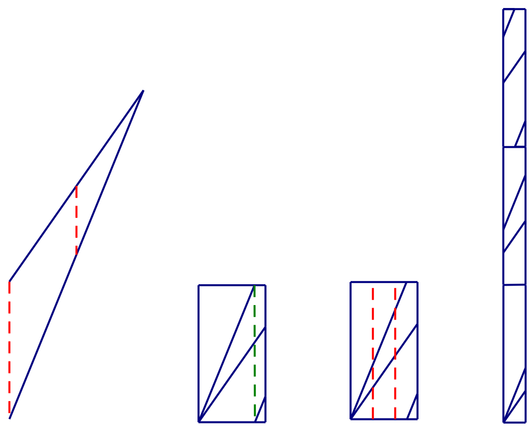


圖 19 情況(3)-(ii)且 $r_0=3$ 的切割法拼接

最後將這些長邊為 $l=\sqrt{\alpha}$ 之長方形疊加起來，便可得到邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 之正方形。

## 四、正多邊形利用遞迴切割法重新組合成正方形

前面兩個方法可以將正多邊形各自直接切割重新組合成正方形，現在繼續延伸，若今有一邊長為 $s$ 的正 $n$ 邊形已切割重組為正方形，我們要將邊長亦為 $s$ 的正 $(n+1)$ 邊形，利用正 $n$ 邊形已完成切割的正方形疊加上去，切割重組為新的正方形，我們稱之為『遞迴切割』【見圖 20】。

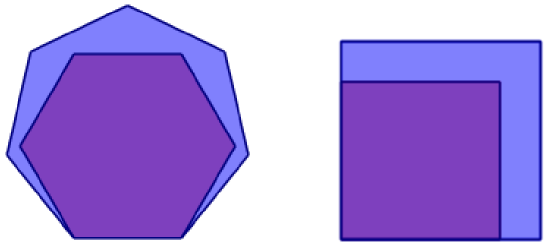


圖 20 正七邊形利用正六邊形遞迴切割成正方形

**(一) 正$n$邊形與正$(n+1)$邊形的對應切割**

邊長為$s$的正$(n+1)$邊形圖形面積必定大於邊長為$s$的正$n$邊形圖形面積，我們將其底重合，重疊的紫色區塊就利用正$n$邊形切割重組為正方形，其餘的藍色區塊連接內外頂點作切割，若$n$為奇數，則可切割出$(n+4)$個有一邊長為$s$的三角形，若$n$為偶數，則可切割出$(n+3)$個有一邊長為$s$的三角形，見圖 21 的紅色虛線。

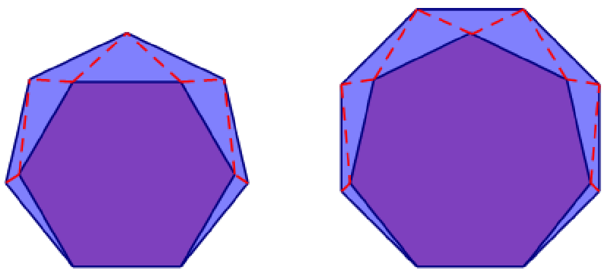


圖 21 藍色區塊連接內外頂點作切割成三角形

又由於正多邊形左右對稱，故左右兩側對應位置的三角形會全等，將其兩兩合併可形成底邊長為$s$的平行四邊形，並且中間會剩餘一個底邊長為$s$的等腰三角形【見圖 22】。

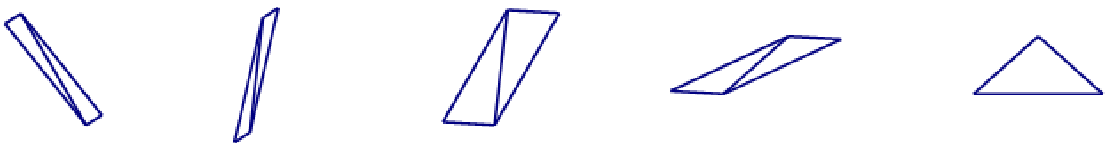


圖 22 三角形兩兩一組各自拼成平行四邊形

在此先簡單將底邊長為$s$的等腰三角形切割成一邊長為$s$的長方形【見圖 23】。

圖 23 中間單獨一個等腰三角形切割重組成長方形

## (二) 底邊長為 $s$ 的平行四邊形切割成一邊長為 $s$ 的長方形

將底邊長為 $s$ 的平行四邊形切割成一邊長為 $s$ 的長方形，會出現下述兩種情形。

1. 側邊中點作垂線落在底邊

將平行四邊形的底邊(長 $s$ )水平放置，由兩側邊中點對上、下邊作垂線，如圖 24 的紅色虛線，將切割出的兩三角形分別對側邊中點旋轉 $180°$，即得出一邊長為 $s$ 的長方形。

圖 24 情況 1.的平行四邊形切割重組成長方形

2. 側邊中點作垂線不落在底邊

若側邊中點作垂線無法落在底邊，則無法單純藉由旋轉得到長方形，因此要先將平行四邊形沿水平方向對半切後平移，使水平邊長變為原來的兩倍，側邊長變為原來的一半。若對側邊中點作垂線仍無法落在底邊，則持續依前述方法調整直到達成為止。然後再用上述 1.的切割法旋轉成長方形，最後將水平邊平分數次並平移，得出一邊長為 $s$ 的長方形【見圖 25】。

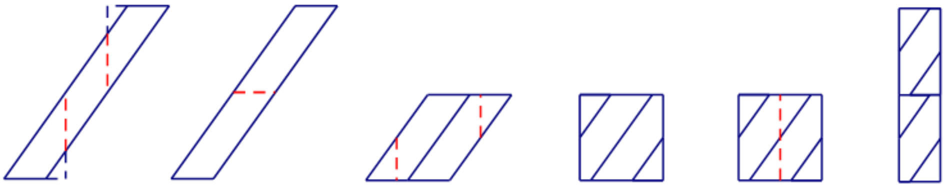


圖 25 情況 2.的平行四邊形切割重組成長方形

## (三) 一邊長為 $s$ 的長方形切割成目標邊長的長方形

邊長為 $s$ 的正 $n$ 邊形，其面積為 $\dfrac{ns^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}$，而邊長為 $s$ 的正 $(n+1)$ 邊形，其面積為 $\dfrac{(n+1)s^2}{4\tan\frac{\pi}{n+1}}$，相差的面積為藍色區塊，其大小為 $\dfrac{(n+1)s^2}{4\tan\frac{\pi}{n+1}}-\dfrac{ns^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}=\dfrac{s^2}{4}\left(\dfrac{(n+1)}{\tan\frac{\pi}{n+1}}-\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)$。

而兩個正多邊形轉換成正方形後，其邊長相差 $\dfrac{s}{2}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{\tan\frac{\pi}{n+1}}}-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right)$【見圖 20】。

現已將所有平行四邊形與一等腰三角形分別切割成$(n-1)$個邊長為$s$的長方形，將這些長方形疊起來合併，可得一邊長為$s$，另一邊長為$\frac{s}{4}\left(\frac{n+1}{\tan\frac{\pi}{n+1}}-\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)$的長方形，而目標邊長的長方形，其長為$\frac{s}{2}\left(\sqrt{\frac{n+1}{\tan\frac{\pi}{n+1}}}+\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right)$、寬為$\frac{s}{2}\left(\sqrt{\frac{n+1}{\tan\frac{\pi}{n+1}}}-\sqrt{\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right)$。

在此說明如何將一長方形切割成另一相異的等面積且符合目標邊長的長方形。

1. 將目標長方形的一邊長作圖到原長方形內部紅色斜線【見圖 26】。
2. 將左下角三角形向右平移成平行四邊形，此時平行四邊形的紅色斜線與目標長方形的一邊長相等。
3. 利用四-(二)將此平行四邊形切割成目標邊長之長方形。

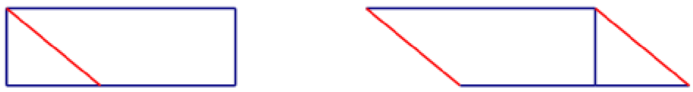


圖 26 將一長方形切割成目標邊長之長方形

最後將目標邊長的長方形，根據兩正方形之邊長沿斜線切割後成兩全等梯形，放入藍色區塊，即完成遞迴切割出新的正方形【見圖 27】。

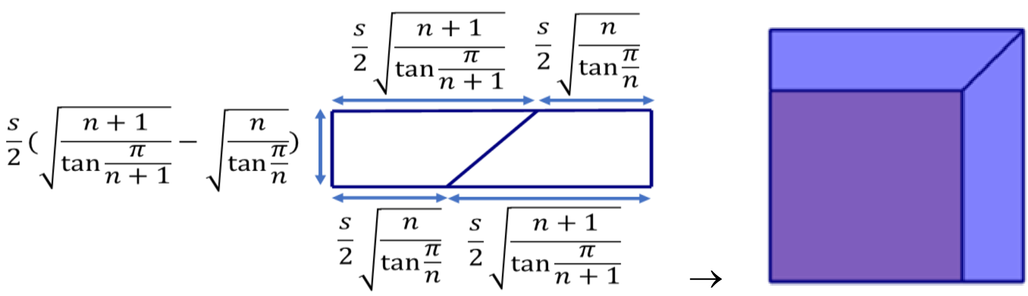



圖 27 將目標邊長的長方形切割成兩全等梯形

此遞迴切割我們可以直接從$n=4$開始，也就是邊長為$s$的正方形，一路遞迴切割正五邊形，再遞迴切割正六邊形一直持續下去。

## 五、凸多邊形切割重組成正方形

先依序給定凸 $n$ 邊形的所有邊長與內角代號，此處令最長邊為 $s_1$，與此最長邊相鄰的兩條邊中，較短的那條邊長令為 $s_2$，其餘沿逆時針或順時針方向依序令邊長為 $s_3$，$s_4$ ,⋯, $s_n$，並令凸 $n$ 邊形的所有內角依序為 $\theta_1$，$\theta_2$ ,⋯, $\theta_n$，最後令所有頂點依序為 $P_1$，$P_2$ ,⋯, $P_n$ 且面積為 $\alpha$【見圖 28】。

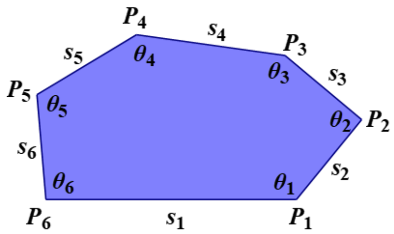



圖 28 凸六邊形的邊角代號

### (一) 凸 $n$ 邊形面積

利用坐標化計算出凸 $n$ 邊形面積 $\alpha$：令 $P_n$ 為原點且將 $\overline{P_nP_1}$ 置於 $x$ 軸正向上，所以可得 $P_1(s_1,0)$，而當 $1\le j\le n-1$ 時，則 $\overrightarrow{P_jP_{j+1}}=\left(s_{j+1}\cos(\sum_{i=1}^{j}(\pi-\theta_i))\text{ , }s_{j+1}\sin(\sum_{i=1}^{j}(\pi-\theta_i))\right)$，此時運用向量加法可得，當 $2\le j\le n-1$ 時，點座標為

$P_j\left(s_1+\sum_{k=2}^{j}s_k\cos(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i))\text{ , }\sum_{k=2}^{j}s_k\sin(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i))\right)$，為了簡化呈現，令

$F_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$，$G_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$，由測量面積公式可得

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & s_1\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s_1 & s_1+F_2\\ 0 & G_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s_1+F_2 & s_1+F_3\\ G_2 & G_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}s_1+F_{n-2} & s_1+F_{n-1}\\ G_{n-2} & G_{n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s_1+F_{n-1} & 0\\ G_{n-1} & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(s_1G_{n-1}+\sum_{j=2}^{n-2}(F_jG_{j+1}-F_{j+1}G_j)\right)$$

### (二) 等面積三角形置換切割法

在切割過程中會需要將兩等面積三角形作固定某角度與特定邊長的切割轉換，故在此先行說明方法以便後續使用。現有一個三角形其一內角為 $\phi$，且該內角兩鄰邊長分別為 $l_1$ 與 $l_2$，我們想將其切割重組成有一內角為 $\phi$，且該內角兩鄰邊長分別為 $l_3$ 與 $\frac{l_1\cdot l_2}{l_3}$ 的三角形【見圖 29】，其切割步驟如下。

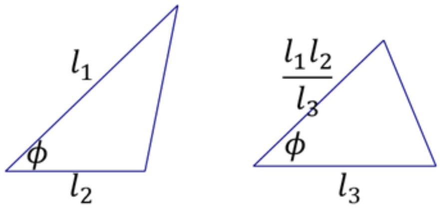



圖 29 兩三角形特定角度與兩邊長轉換

1. 將$l_2$水平放置，並作其餘兩邊的中點連線，將上半部分繞左或右中點旋轉180度，形成一平行四邊形。

2. 使用四-(二)、四-(三)的方法，將平行四邊形切割成長為$l_3$的長方形。

3. 將長度為$\frac{l_1 \cdot l_2}{2l_3}$的線段置入長方形當中，平移後便形成兩邊分別為$l_3$與$\frac{l_1 \cdot l_2}{2l_3}$，且有一角為$\phi$的平行四邊形。

4. 取平行四邊形上底的中點，連接該中點右下角的頂點，再將右半部的三角形繞中點旋轉180度，即形成有一內角為$\phi$，兩鄰邊為$l_3$與$\frac{l_1 \cdot l_2}{l_3}$的三角形【見圖 30】。

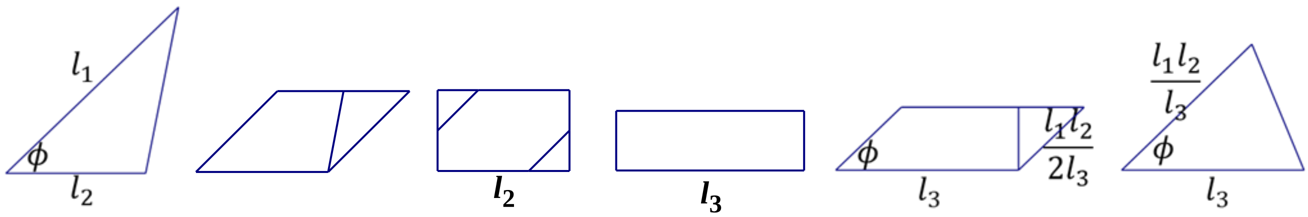



圖 30 兩三角形置換切割法的步驟

### (三) 新頂點$U$與$V$的求取

在三角形置換切割法的過程中，需求取三角形特定邊長才能轉換，我們需要求出$\overline{P_1V}$、$\overline{P_2V}$、$\overline{P_3V}$及$\overline{UV}$【見圖 31】，故延續五-(一)的坐標設定，若能夠求出$U$與$V$的點坐標，即可解決長度問題。

假設$\overrightarrow{P_2U} = \lambda_1 \overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_3U} = \lambda_2 \overrightarrow{P_4P_3}$，

已知$P_2\left(s_1 + F_2\,,\,G_2\right)$，$P_3\left(s_1 + F_3, G_3\right)$，$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(F_3\,,\,G_3\right)$，$\overrightarrow{P_4P_3} = \left(F_3 - F_4\,,\,G_3 - G_4\right)$，

對$\lambda_1$而言，$U\left(s_1 + F_2 + \lambda_1 F_3\,,\,G_2 + \lambda_1 G_3\right)$，

對$\lambda_2$而言，$U\left(s_1 + F_3 + \lambda_2(F_3 - F_4)\,,\,G_3 + \lambda_2(G_3 - G_4)\right)$，

列出 $\lambda_1$ 與 $\lambda_2$ 的聯立方程式 $\begin{cases}\lambda_1 F_3+\lambda_2(F_4-F_3)=F_3-F_2\\ \lambda_1 G_3+\lambda_2(G_4-G_3)=G_3-G_2\end{cases}$ ，再由克拉瑪公式可得

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}F_3-F_2 & F_4-F_3\\ G_3-G_2 & G_4-G_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_3 & F_4-F_3\\ G_3 & G_4-G_3\end{vmatrix}}=\frac{F_2G_4+F_4G_3+F_3G_2-F_3G_4-F_4G_2-F_2G_3}{F_3G_4-F_4G_3}$$ 與

$$\lambda_2=\frac{\begin{vmatrix}F_3 & F_3-F_2\\ G_3 & G_3-G_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_3 & F_4-F_3\\ G_3 & G_4-G_3\end{vmatrix}}=\frac{F_2G_3-F_3G_2}{F_3G_4-F_4G_3}$$ ，如此便可求得 $U$ 點坐標，再求 $\overline{P_1U}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 的交點 $V$ 坐標，進而求出 $\overline{P_1V}$ 、 $\overline{P_2V}$ 、 $\overline{P_3V}$ 及 $\overline{UV}$ 長度來完成五-(二)的兩三角形切割轉換，圖形成為凸 $(n-1)$ 邊形後，$U$ 變成了新圖形的頂點，所以我們仍然已知此凸 $(n-1)$ 邊形的所有頂點坐標，故重複此操作模式，直到切割成三角形為止。

**(四) 凸 $n$ 邊形切割重組成正方形**

1. 連接 $\overline{P_1P_3}$ ，過 $P_2$ 作平行 $\overline{P_1P_3}$ 的直線，並令該直線與 $\overleftrightarrow{P_3P_4}$ 的交點為 $U$ ，再令 $\overline{P_1U}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 的交點為 $V$ ，由於四邊形 $P_1P_2UP_3$ 為梯形，所以 $\Delta P_1P_2V$ 與 $\Delta P_3UV$ 面積相等（梯形的蝴蝶定理）。現在我們用五-(二)與五-(三)的方法把 $\Delta P_1P_2V$ 置換切割成 $\Delta P_3UV$ ，就可以將凸 $n$ 邊形切割成凸 $(n-1)$ 邊形【見圖 31】。
2. 重複 1.的步驟，每作一次，圖形的邊數就會減少 $1$，所以凸 $n$ 邊形經過 $(n-3)$ 次切割重組後，即重組成一個三角形【見圖 31】。
3. 取三角形兩側邊中點並作連線，再將上半部繞左或右中點旋轉 $180$ 度，即形成一個平行四邊形，使用四-(二)與四-(三)的方法，便可以把平行四邊形切割重組成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 的正方形。

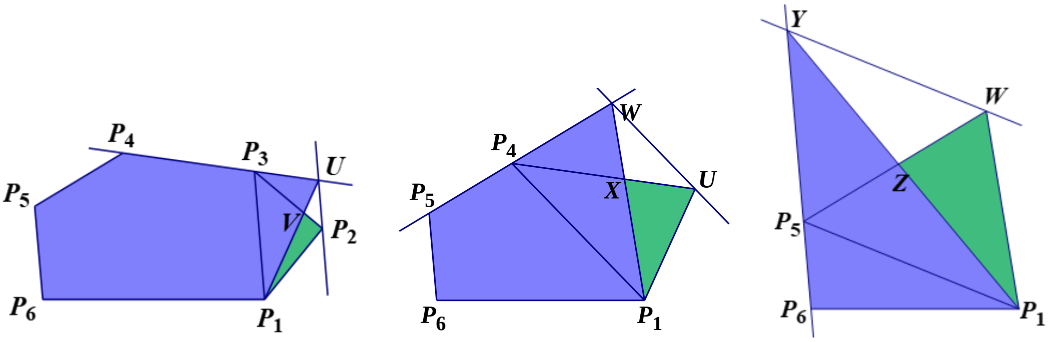



圖 31 凸六邊形經過三次切割重組成三角形

## 六、凹多邊形切割重組成正方形

在找到將凸多邊形切割重組成正方形的方法後，我們想要將討論的對象推廣至任意多邊形，所以接著研究將凹多邊形利用作優角角平分線全部切割成凸多邊形，所有的凸多邊形各自切割成長方形，進一步再拼接成正方形。

### (一) 將有一個凹塊的凹多邊形切割重組成正方形

在介紹切割方法之前，我們先對「凹塊」這名詞給出定義：凹多邊形中的一連續優角($>180°$)分布稱為一個「凹塊」，如圖 32 中的左圖有一個凹塊，中間圖有兩個凹塊。接著討論恰有一個凹塊的多邊形，我們依序給定所有邊長 $s_1$，$s_2$，$\cdots$，$s_n$ 及所有內角 $\theta_1$，$\theta_2$，$\cdots$，$\theta_n$，再設 $P_1$ 與 $P_m$ 為凹塊兩旁首個凸內角所在之頂點，如圖 32 中的右圖，$P_m$ 即為 $P_4$。

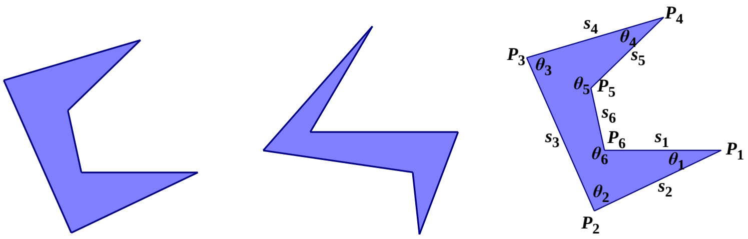



圖 32 定義名詞「凹塊」與邊角代號

為了求出面積 $\alpha$，我們仿照凸多邊形的做法，將 $s_1$ 水平放置，並透過坐標化與面積公式可得 $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(s_1G_{n-1}+\sum_{j=2}^{n-2}(F_jG_{j+1}-F_{j+1}G_j)\right)$，其中 $F_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$ 且 $G_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$，接著討論切割步驟，將凹 $n$ 邊形切割成凹 $(n-1)$ 邊形，直到切割成三角形為止。

1. 過 $P_m$ 作一條平行 $\overline{P_{m-1}P_{m+1}}$ 的直線，並設該直線與 $\overleftrightarrow{P_{m-1}P_{m-2}}$ 的交點為 $U$ ，再設 $\overline{P_{m+1}U}$ 與 $\overline{P_{m-1}P_m}$ 的交點為 $V$ ，透過五-(二)與五-(三)的步驟將 $\Delta P_{m+1}P_mV$ 切割重組成 $\Delta P_{m-1}UV$ ，即能將凹 $n$ 邊形切割重組成凹 $(n-1)$ 邊形。

2. 重複 1.的步驟，每作一次，圖形的邊數就會減少1，所以凹 $n$ 邊形經過 $(n-3)$ 次切割重組後，即重組成一個三角形【見圖 33】。

3. 取三角形兩側邊中點並作連線，再將上半部繞左或右中點旋轉180度，即形成一個平行四邊形，使用四-(二)與四-(三)的方法，便可以把平行四邊形切割重組成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 的正方形。

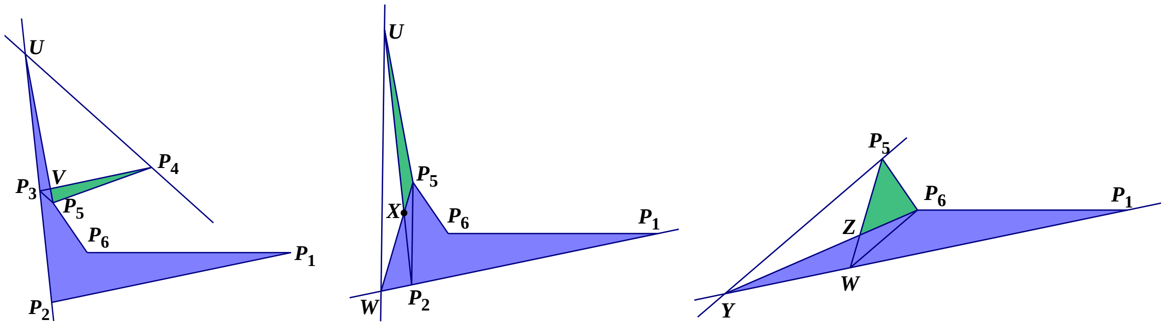



圖 33 將一個凹塊的凹六邊形經過三次切割重組成三角形

## (二) 將有數個凹塊的凹多邊形切割重組成正方形

因為要系統化地利用前面的步驟，把有數個凹塊的凹多邊形切割重組成正方形的過程太過雜亂，所以我們發展出另一種切割方式：對凹多邊形中的每個優角作角平分線段，此線段將從優角頂點出發，另一側的端點則落在凹多邊形的邊界（邊或頂點）上。而當所有優角的角平分線全部作完，必定能將凹多邊形切割成數個凸多邊形【見圖 34】，詳細討論說明如下。

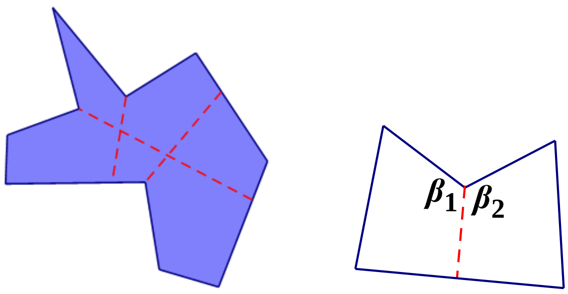



圖 34 凹多邊形的優角角平分線將其切割成數個凸多邊形

1. 對某優角作角平分線段並以此頂點為出發端（始點），則此線段將此優角切割出的兩個角為 $\beta_1$與 $\beta_2$ ，因為 $\beta_1 + \beta_2 < 360°$ 且 $\beta_1 = \beta_2$ ，所以 $\beta_1$、$\beta_2 < 180°$ 【見圖 34】。
2. 某優角角平分線的另一端點（終點）所在位置有下述四種情形：
   (1) 落在凹多邊形的邊上(非頂點)，切割出的兩個角為 $\beta_1$與 $\beta_2$ ，因為 $\beta_1 + \beta_2 = 180°$ ，所以 $\beta_1$、$\beta_2 < 180°$ 【見圖 35(1)】。
   (2) 落在凹多邊形的凸角所在頂點上，切割出的兩個角為 $\beta_1$與 $\beta_2$，因為 $\beta_1 + \beta_2 < 180°$，所以 $\beta_1$、$\beta_2 < 180°$ 【見圖 35(2)】。
   (3) 落在凹多邊形的優角所在頂點上，切割出的三個角分別為 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$ ，因為 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 < 360°$ 且 $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$，可知 $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3 < 180°$，所以 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3 < 180°$【見圖 35(3)】。
   (4) 兩條優角角平分線相交所切割出的四個角分別為 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$、$\beta_4$ ，因為 $\beta_1 + \beta_2 = 180°$ 且 $\beta_3 + \beta_4 = 180°$ ，所以 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$、$\beta_4 < 180°$ 【見圖 35(4)】。而三條或三條以上優角角平分線相交一點所切割出來的角，亦會都小於$180°$ 。

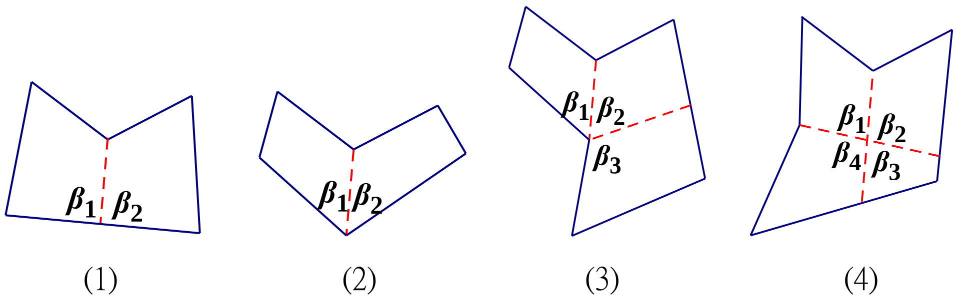



圖 35 凹多邊形的優角角平分線必定能切割成數個凸多邊形

由於所有切割角都會小於$180°$ ，所以凹多邊形沿優角角平分線段切割後所形成的多邊形全部都會是凸多邊形，接著只要用五-(四)的方法，將凸多邊形切割重組成邊長為$\sqrt{\alpha}$ 的長方形，再將這些長方形拼在一起即組成邊長為$\sqrt{\alpha}$ 之正方形。

# 肆、研究結果

## 一、正多邊形利用長方形切割法重新組合成正方形

將邊長為 $s$ 的正 $n$ 邊形從中心進行等分切割，再將三角形兩兩交疊成長方形，最後將 $n$ 個長方形並排成大長方形【見圖 1】，已證明 $\overline{ST} \le \overline{SY}$ ，所以必定可用此切割法【見圖 2】，沿著 $\overline{TR}$ 切割，將 $\Delta TXR$ 平移至 $\Delta PWU$ ，再沿著 $\overline{UV}$ 切割，將 $\Delta UVR$ 平移至 $\Delta PST$ ，完成將長方形 $QRXS$ 切割成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 之正方形 $QVWP$ 。

切割塊數的計算，分成『 $L_1$ 切割的塊數』與『 $L_3$ 切割的各自增加塊數』兩者相加。

當斜線 $L_1$ 切割時，其總塊數為 $4n-2\times\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]-6$ 【見圖 5】；再延 $L_3$ 切割時，若 $\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]=\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ ，則塊數會增加 2 塊【見圖 6】；若 $\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]<\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ ，

則當 $\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\ge\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}$ ，塊數會增加1塊【見圖 7】；

當 $\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)<\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}$ ，塊數會增加 2 塊【見圖 8】。

## 二、正多邊形利用三角形切割法重新組合成正方形

將正多邊形進行對角線切割成不同的三角形 $T_i$ ，每條對角線長度 $t_i=\dfrac{2\sin\left(\frac{i+1}{n}\pi\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$ ，每

個三角形有各自的分類切割方式，過程中已說明三角形$T_i$可切割成長邊為$l=\sqrt{\alpha}$之長方形，其中$\alpha$為正多邊形面積且$l$須滿足$h_C \le l \le c$。但若遇到$l>c$的情況，則須重設$l=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{r}$，其中$r$為正整數，最後再平分拼接成長邊為$\sqrt{\alpha}$之長方形，也證明了正整數$r$必定存在。而三角形$T_i$的切割塊數計算，

1. 若與$L$相鄰的兩個內角皆為銳角，則切割塊數為$3r_0$【見圖 16】。
2. 若與$L$相鄰的兩個內角為銳角與直角，則切割塊數為$2r_0$【見圖 17】。
3. 若與$L$相鄰的兩個內角為銳角與鈍角，則
   (1) 若切割成邊長為$l$的長方形時切割塊數為$3$，則切割塊數為$3r_0$【見圖 18】。
   (2) 若切割成邊長為$l$的長方形時切割塊數為$4$，則切割塊數為$3r_0+1$【見圖 19】。

## 三、正多邊形利用遞迴切割法重新組合成正方形

邊長為$s$的正$(n+1)$邊形，利用遞迴切割法，先將內部邊長為$s$的正$n$邊形切割成正方形，其餘的區塊連接內外頂點，若$n$為奇數，則可切割出$(n+4)$個有一邊長為$s$的三角形，若$n$為偶數，則可切割出$(n+3)$個有一邊長為$s$的三角形【見圖 21】。將左右全等的三角形兩兩合併可形成底邊長為$s$的平行四邊形，並且中間會剩餘一個底邊長為$s$的等腰三角形【見圖 22、23】。將所有平行四邊形與一等腰三角形分別切割成$(n-1)$個邊長為$s$的長方形，將這些長方形疊起來合併，可得一邊長為$s$，另一邊長為$\dfrac{s}{4}\left(\dfrac{n+1}{\tan\dfrac{\pi}{n+1}}-\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}\right)$的長方形，再將此長方形切割成長為$\dfrac{s}{2}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{\tan\dfrac{\pi}{n+1}}}+\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)$、寬為$\dfrac{s}{2}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{\tan\dfrac{\pi}{n+1}}}-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}}\right)$的長方形，最後根據兩正方形之邊長沿斜線切割後成兩梯形，放入藍色區塊，即完成遞迴切割出新的正方形【見圖 27】。

### 四、凸多邊形切割重組成正方形

利用坐標化先計算出凸$n$邊形面積$\alpha=\frac{1}{2}\left(s_1G_{n-1}+\sum_{j=2}^{n-2}(F_jG_{j+1}-F_{j+1}G_j)\right)$，其中$F_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$，$G_j=\sum_{k=2}^{j}s_k\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1}(\pi-\theta_i)\right)$，便可得知重組後的正方形邊長為$\sqrt{\alpha}$。作平行線將兩三角形置換切割後，便可將凸$n$邊形切割成凸$(n-1)$邊形【見圖 31】，經過$(n-3)$次切割重組後組成一個三角形，之後再變成平行四邊形就可以切割重組成邊長為$\sqrt{\alpha}$的正方形。

### 五、凹多邊形切割重組成正方形

凹多邊形的面積計算同凸多邊形，而切割方式在恰只有一個凹塊時，可比照凸多邊形的切割模式進行，但是有數個凹塊時，則不適用，因此我們研發出通用做法，就是對凹多邊形中的所有優角作角平分線段，並證明可順利的將內部全切割成數個凸多邊形【見圖 35】，再將每個凸多邊形各自切割重組成邊長為$\sqrt{\alpha}$的長方形，這些長方形拼在一起即組成邊長為$\sqrt{\alpha}$之正方形。

## 伍、討論

1. 在設計凹多邊形切割重組成正方形的步驟時，我們一開始的作法是將一凹多邊形先切割成數個三角形，並仿照三角形切割法的步驟，把三角形切割成長方形再拼成正方形，但是這個方法存在著些許瑕疵：除了分割成數個三角形的方法不唯一之外，也難以系統性的敘述應作哪幾組頂點的連線【見圖 36】。但遇到問題就得解決問題！我們在過程中不斷的激盪、討論，後來發想出只有唯一一種切割可能的優角角平分線切割法，最後順利地將凹多邊形系統化地完成切割重組為正方形。

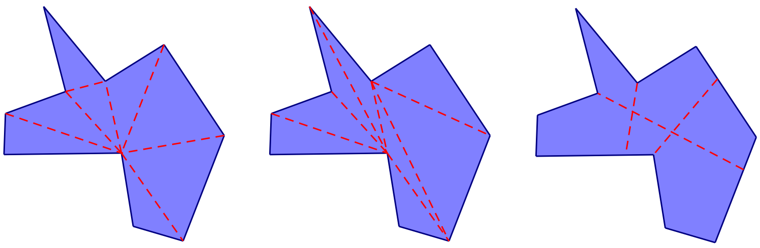


圖 36 凹多邊形利用三角形切割法的不確定性

2. 我們希望這個切割重組的方法能夠對材料工程或工業領域做出些許的貢獻。舉例而言，在材料裁切領域中，往往面臨如何將不規則形狀裁切為標準模組（如正方形或長方形），以便於生產或堆疊。同樣的在建築設計中，許多空間規劃也需要將不規則區域進行模組化。若能將我們的切割方法與建築模組單位整合，有可能發展出更靈活的空間配置工具，並提升空間優化的設計思考。

# 陸、結論

此次的研究一開始將邊長為 $s$、面積為 $\alpha$ 的正 $n$ 邊形，其中 $\alpha=\dfrac{ns^2}{4\tan\dfrac{\pi}{n}}$，分別利用兩種切割法—長方形切割法與三角形切割法，重新組合成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 之正方形，過程中證明均能順利達成目標，並且研究過程中的切割塊數，都整理出不錯的通式。

再來繼續延伸，我們建構了邊長均為 $s$ 的正 $n$ 邊形與正 $(n+1)$ 邊形之間的關係，若正 $n$ 邊形已完成切割成正方形，那麼正 $(n+1)$ 邊形多出來的部分便可重新切割疊加上去，重組為新的正方形。我們直接從 $n=4$ 開始，也就是邊長為 $s$ 的正方形，一路遞迴切割正五邊形變成正方形，再遞迴切割正六邊形變成正方形，可以一直持續下去。

最後擴大延伸，探討任意多邊形切割成正方形的方法，分成凸多邊形與凹多邊形兩種，均可利用坐標化先求出面積。凸多邊形利用作平行線將邊數逐步減少至三角形，過程中我們發現了等面積三角形置換切割法，最後成功的切割成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 之正方形。而凹多邊形則對所有優角作角平分線，可將內部全切割成數個凸多邊形，再利用凸多邊形切割法各自切割重組成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 的長方形，最後拼在一起組成邊長為 $\sqrt{\alpha}$ 之正方形。

# 柒、參考文獻資料

[1] WolframAlpha Contributers . *Simple Polygon.* Rertieved March 29, 2025, from https://www.wolframalpha.com/input?i=simple+polygon&lang=zh

[2] Ryan, K.（2015）. *Explorations on the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem.* Queen's University at Kingston, Kingston, Ontario, Canada. Retrieved August 01, 2024, from https://rak.ac/publication/2015-explorations-on-the-wallace-bolyai-gerwien-theorem/wallace-bolyai-gerwien.pdf

[3] 陳嫵伊（2021）。 **廣義畢氏定理之任意正多邊形幾何切割拼補方法。** 國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。 2024 年 6 月 24 日，取自「台灣博碩士論文知識加值系統」：https://hdl.handle.net/11296/z9mgbk

[4] 張晏滕、杜松岱（2022）。 **割「聚」一「方」-切割重組正方形。** 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會國小組數學科。 2024 年 6 月 3 日，取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-080406.pdf

[5] 華祥志、吳祐德、蔡承儒（2008）。 **求過任意點作多邊形面積平分線。** 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會國中組數學科。 2024 年 5 月 20 日，取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/high/030414.pdf

[6] 黃文駿、王邇潔、陳芃薰（2024）。 **N 面組割－等角多邊形切割重組正方形之探究。** 新北市 112 學年度中小學科學展覽會國中組數學科。 2024 年 5 月 29 日，取自校內老師。

[7] 王愷、葉家宏（2008）。 **國王的地毯。** 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會國中組數學科。 2025 年 4 月 14 日，取自：https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=45&sid=3453

## 【評語】050401

本作品討論多邊形切割重新組合成正方形，用長方形切割法與三角形切割法，將正 n 邊形轉變為正方形。用等面積三角形置換切割法，把凸 n 邊形切割重組成三角形，再切割重組成正方形。也用優角角平分線切割法，將凹多邊形完全切割成數個凸多邊形，再重組成正方形。作者找到對於任意圖形皆通用的切割重組步驟，並計算出各個三角形切割成長方形的塊數。對於一般的凸多邊形以及凹多邊形也有相當仔細的討論，此外文獻探討也相當清楚，整體而言，作品的結論還算有趣。

# 作品海報

# 割而不捨—正多邊形與任意多邊形的平方重塑

# 摘 要


先研究正$n$邊形藉由**「長方形切割法」**與**「三角形切割法」**成為正方形，證明一定能切割成正方形後計算兩方法完成後的切割塊數。接著研究邊長相等的正$n$邊形與正$(n+1)$邊形，後者利用前者已切割出的正方形，將多餘的部分切割重組，填補成新的大正方形，建構出**遞迴切割**的關係。最後發想出**等面積三角形置換切割法**，並透過此方法來完成任意凸多邊形切割重組成正方形。再進一步研究任意凹多邊形，研發出**優角角平分線切割法**，將凹多邊形完全切割成數個凸多邊形後，再重組成正方形。


# 壹、研究目的

(一) 實現將正多邊形切割成正方形的方法。

(二) 計算正多邊形利用「長方形切割法」變成正方形的切割塊數。

(三) 計算正多邊形利用「三角形切割法」變成正方形的切割塊數。

(四) 利用正$n$邊形已轉換出等面積之正方形的條件下，將其擴展出與正$n$邊形等面積之正方形，其中正$n$邊形與正$(n+1)$邊形的邊長相等。

(五) 實現將任意凸多邊形切割成正方形的方法。

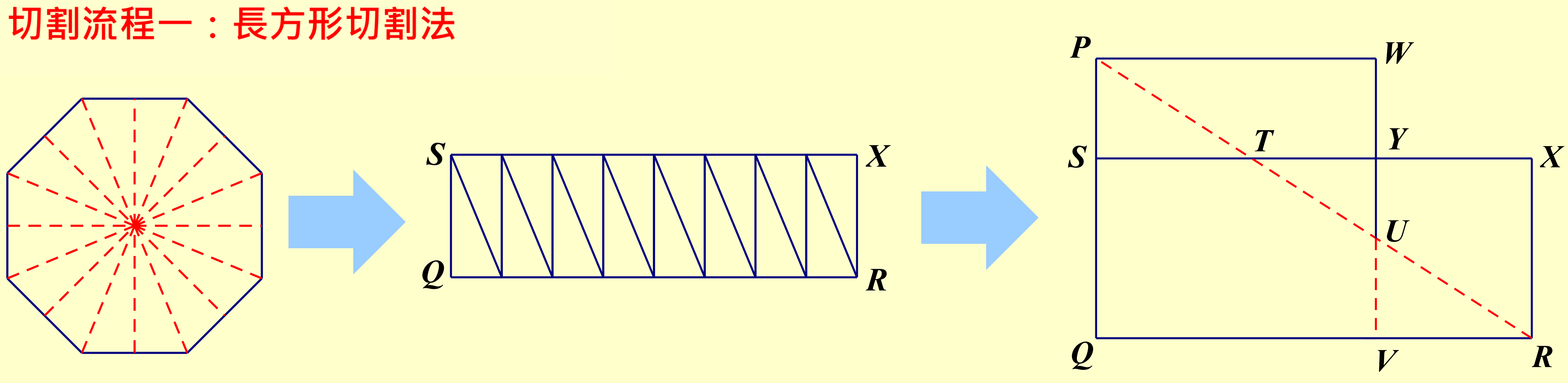
(六) 實現將任意凹多邊形切割成正方形的方法。

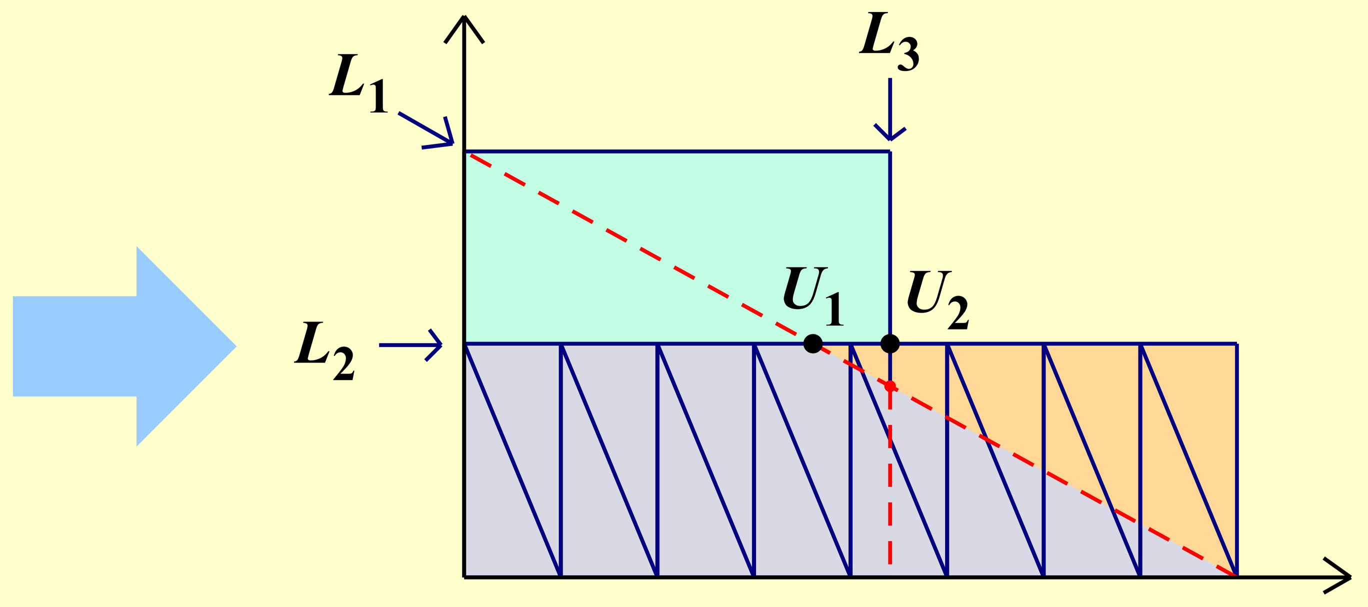
**本作品中的所有圖片皆由作者以幾何繪圖軟體繪製**

# 貳、研究過程方法與結果

## 一、正多邊形利用長方形切割法重新組合成正方形

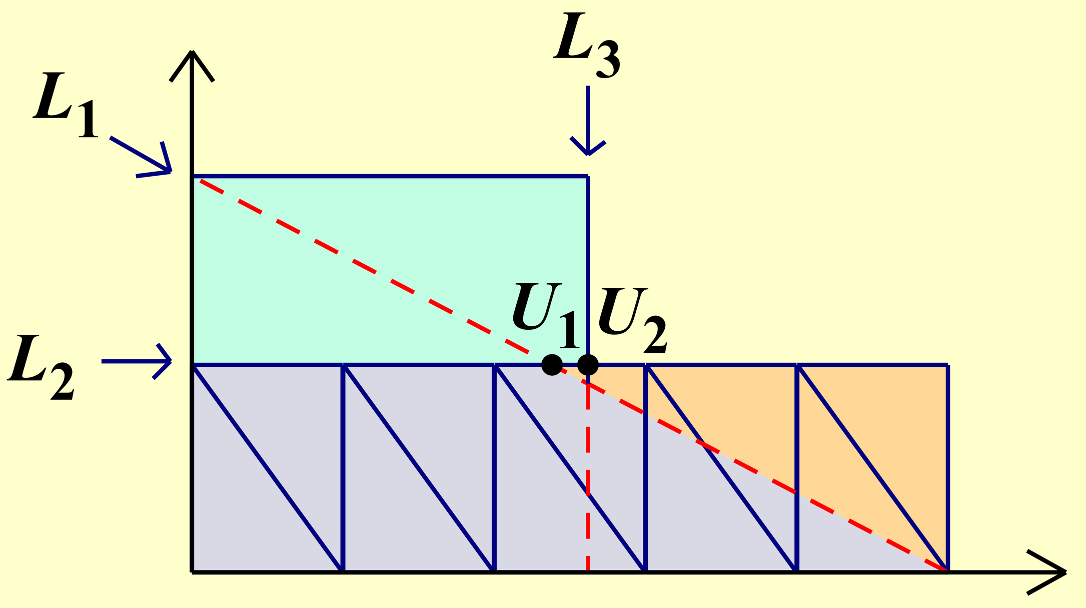
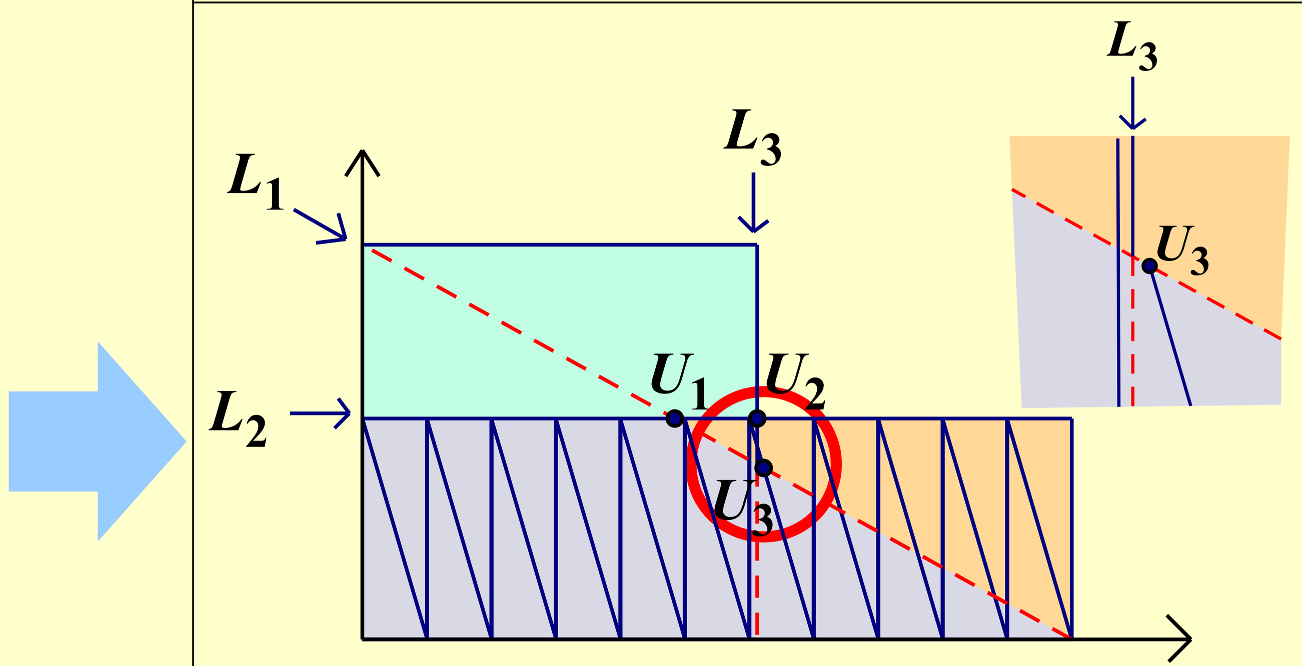
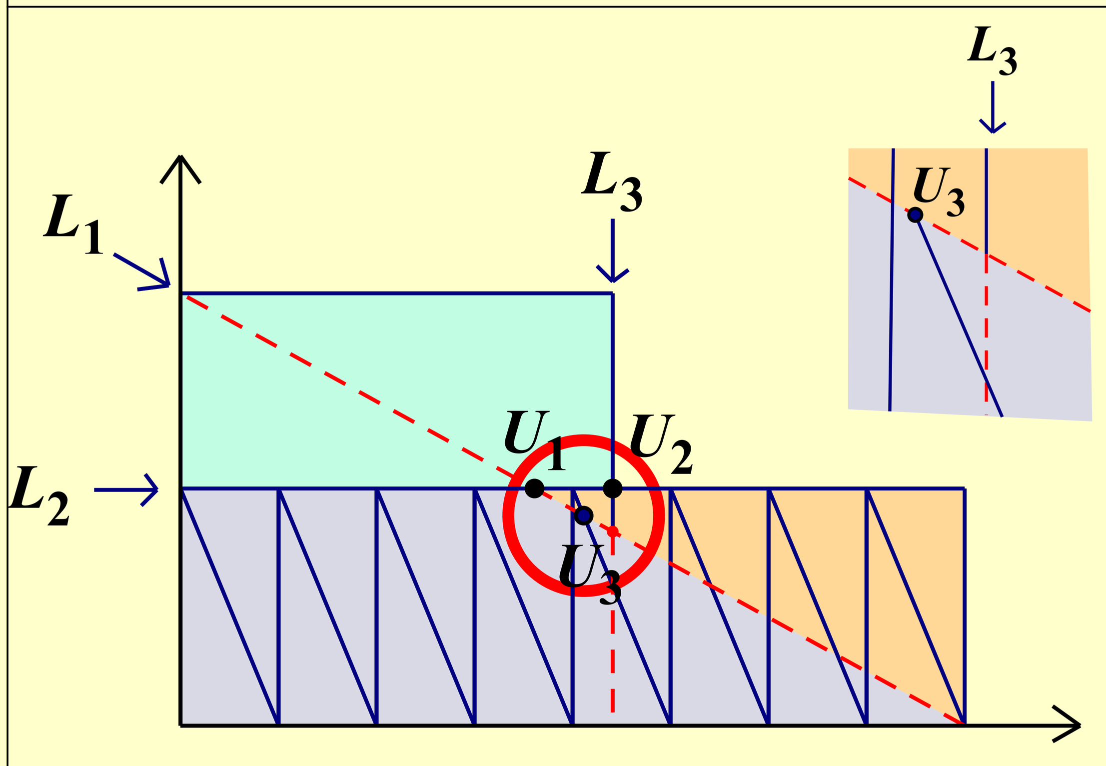
**切割流程一：長方形切割法**



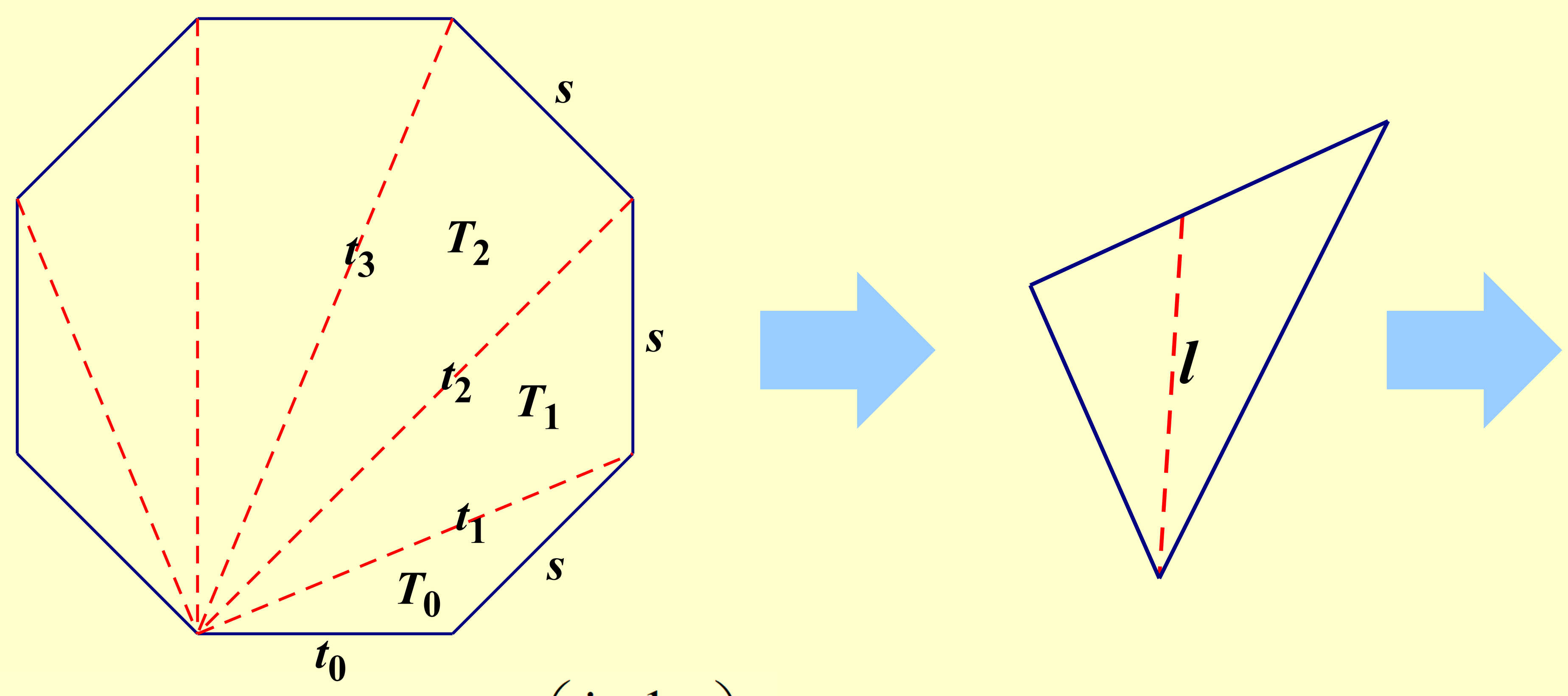

$L_1$切下後，塊數為$4n-2\times\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]-6$

圖 1　長方形切割法示意圖

| | |
|---|---|
|   | $\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]=\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ <br> $L_3$切下後，塊數增加2 |
|   | $\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]<\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ 且 $\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\geq\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}$ <br> $L_3$切下後，塊數增加1 |
|   | $\left[n-\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]<\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]$ 且 $\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)\left(1-\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}\right]+1}{\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}}\right)<\dfrac{s}{2}\sqrt{\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}}$ <br> $L_3$切下後，塊數增加2 |

## 二、正多邊形利用三角形切割法重新組合成正方形

### 切割流程二：三角形切割法



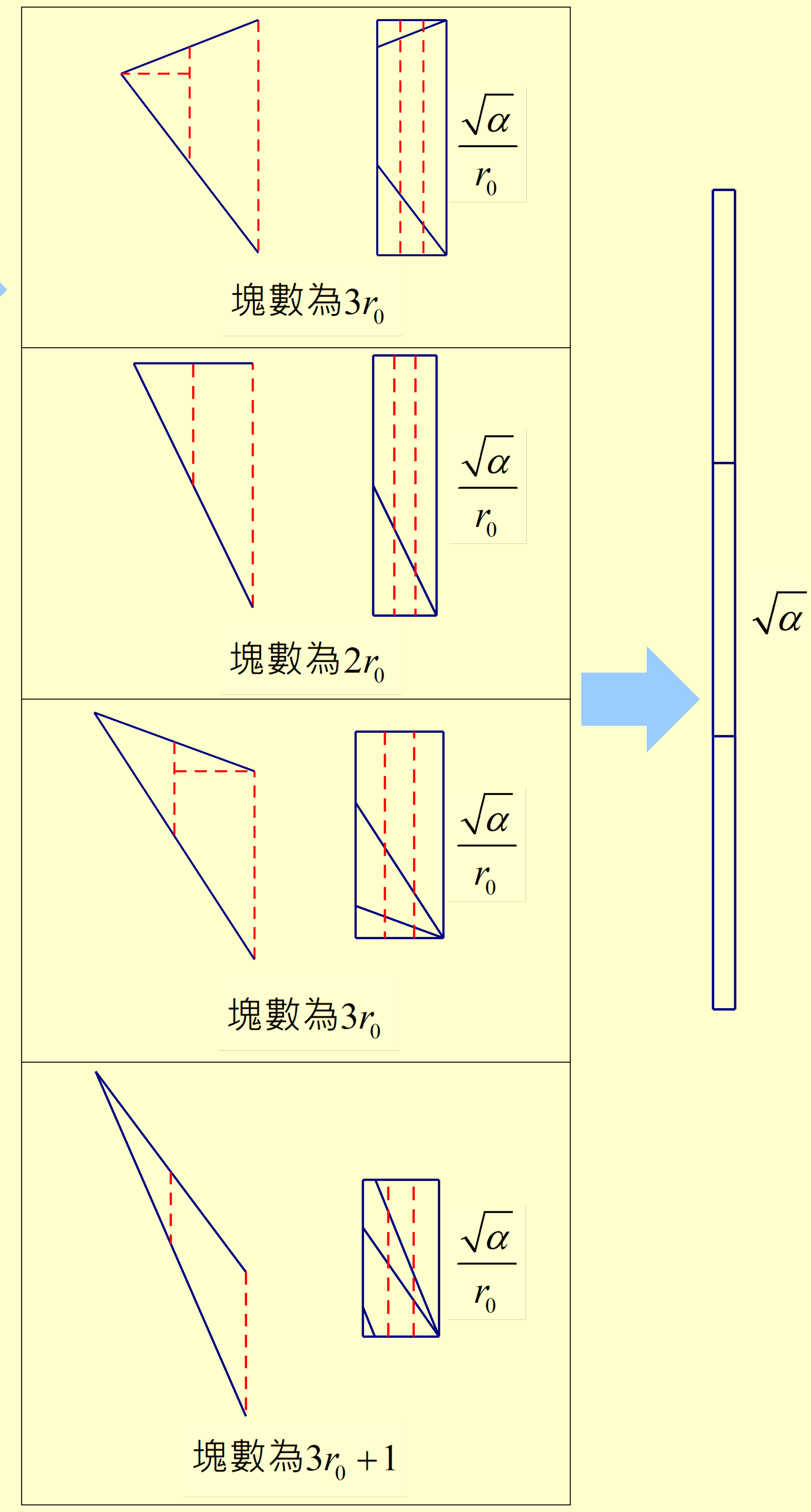




圖 2 三角形切割法示意圖

對角線長公式 $t_i = \dfrac{2\sin\left(\frac{i+1}{n}\pi\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$，$T_i$的三邊長為$s$、$t_i$、$t_{i+1}$

把$T_i$想成$\Delta ABC$，其中$\overline{BC}=s$、$\overline{AC}=t_i$、$\overline{AB}=t_{i+1}$

*Case* 1，$\angle C$為直角與鈍角：

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{b}$，$L$可過點$A$

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{a}$，$L$可過點$B$

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{b} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{h_C}$，$L$可過點$C$

*Case* 2，$\angle C$為銳角：

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{h_A}$，$L$可過點$A$

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{h_B}$，$L$可過點$B$

若$\frac{\sqrt{\alpha}}{b} \le r \le \frac{\sqrt{\alpha}}{h_C}$，$L$可過點$C$

重設$l=\frac{\sqrt{\alpha}}{r}$，證明必定存在正整數$r$使得$h_C \le \frac{\sqrt{\alpha}}{r} \le c$後，

取最小$r$可能值$r_0=\left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil$

## 三、正多邊形利用遞迴切割法重新組合成正方形

### 切割流程三：把平行四邊形切割成等底長的長方形

若側邊中點作垂線落在底邊

若側邊中點作垂線不落在底邊

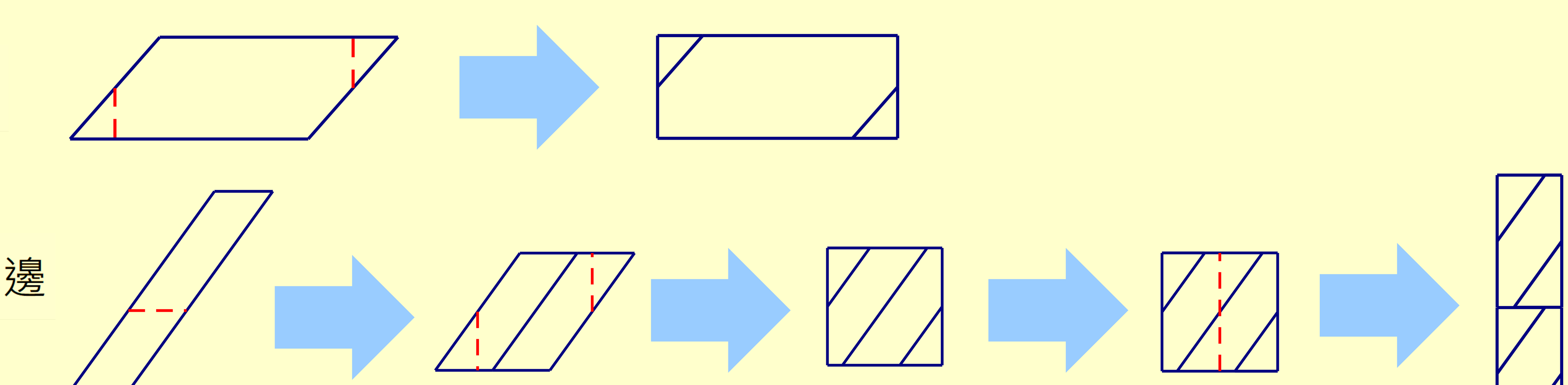


圖 3 把平行四邊形切割成等底長的長方形

### 切割流程四：把長方形切割成有目標邊長的長方形

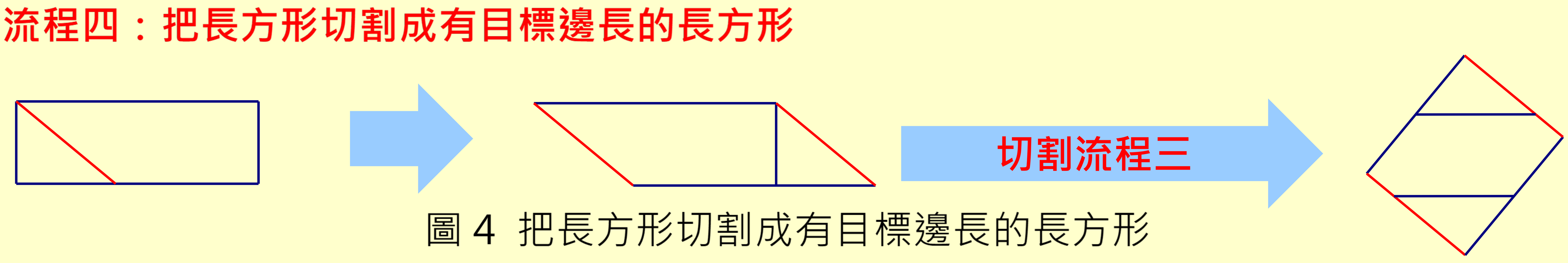



圖 4 把長方形切割成有目標邊長的長方形

### 切割流程五：遞迴切割法

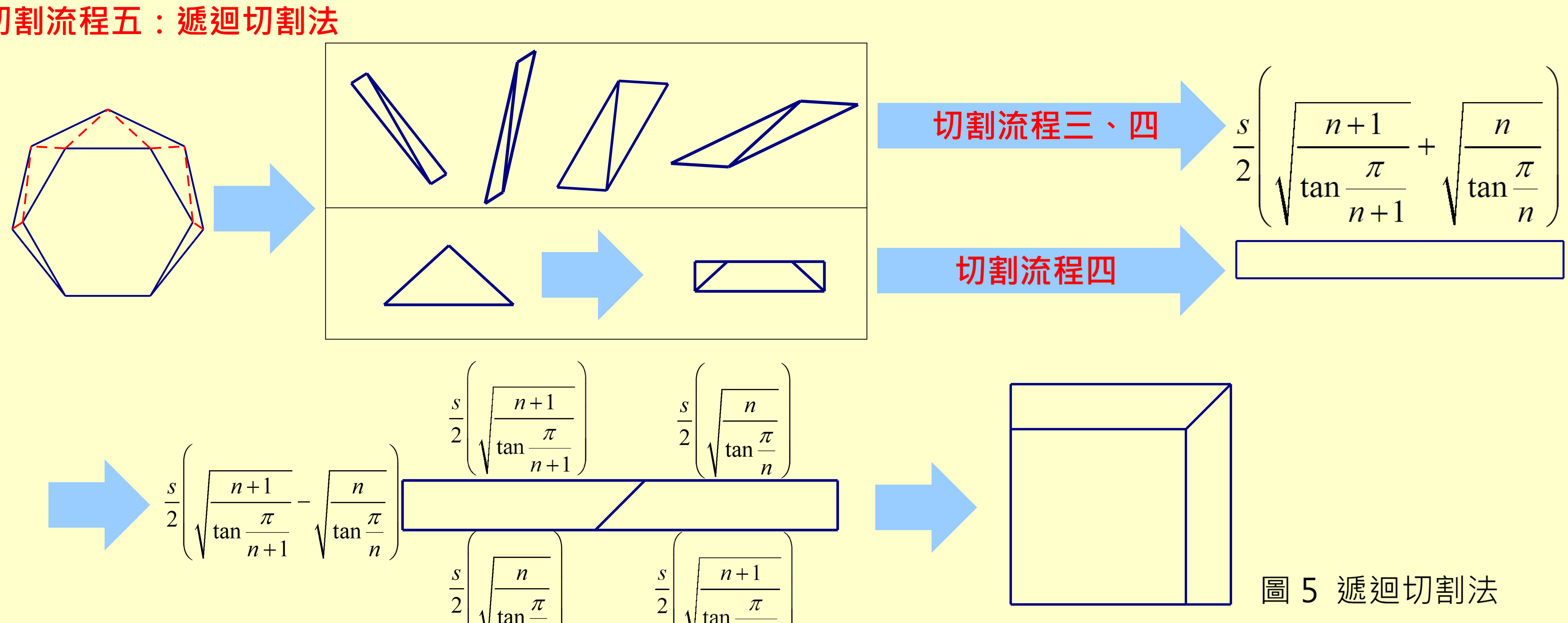



圖 5 遞迴切割法

## 四、凸多邊形切割重組成正方形

### 切割流程六：等面積三角形置換切割法

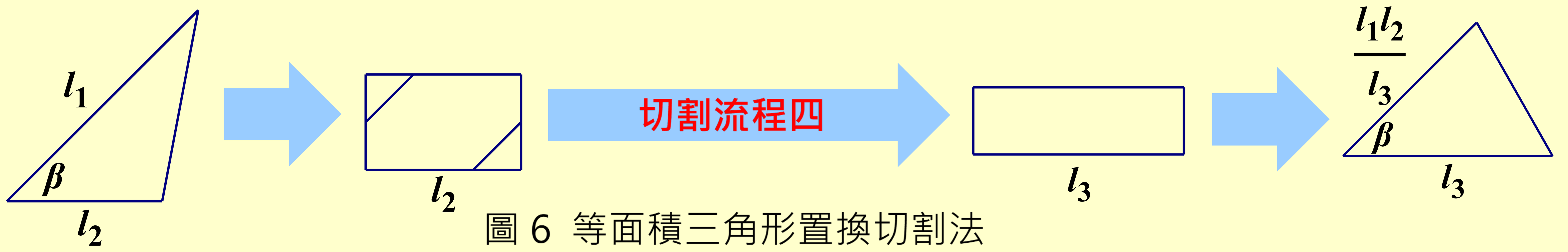



圖 6 等面積三角形置換切割法

### 切割流程七：將凸多邊形切割成正方形

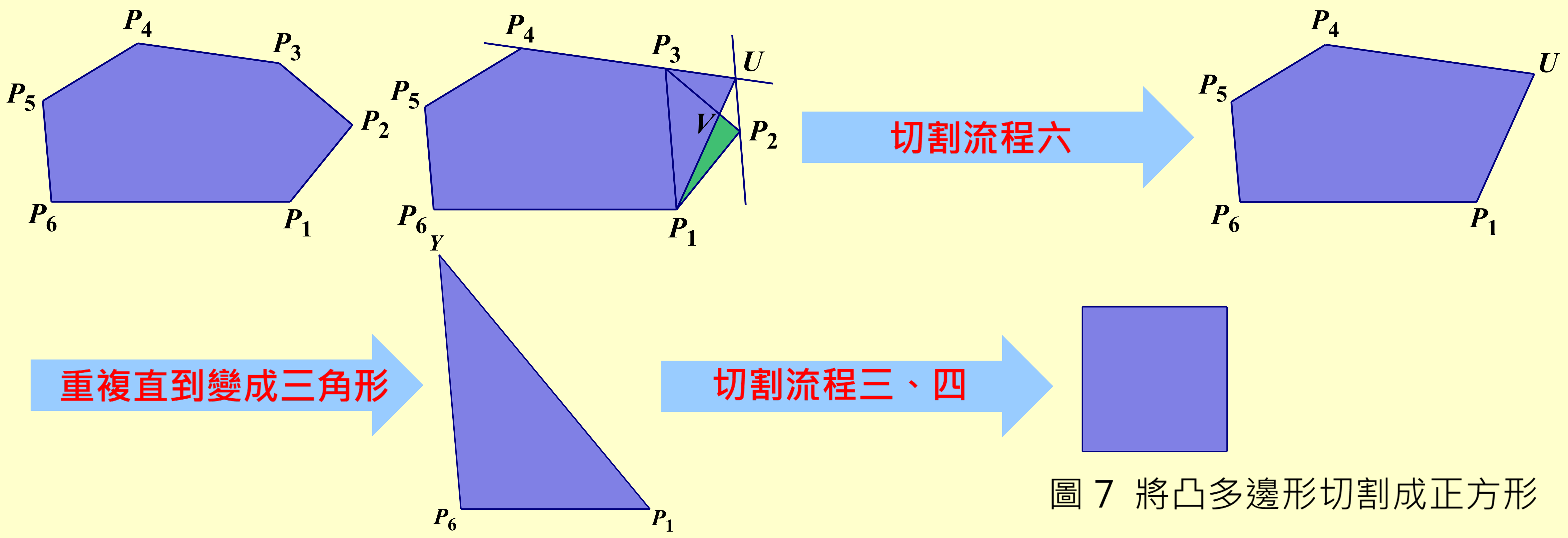



圖 7 將凸多邊形切割成正方形

## 五、凹多邊形切割重組成正方形

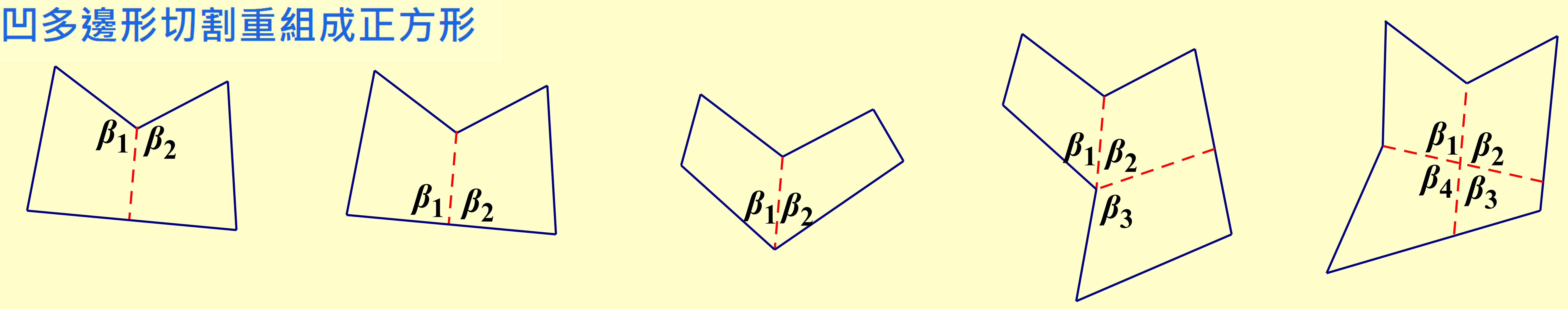


圖 8 優角角平分線相交情形

### 切割流程八：優角角平分線切割法

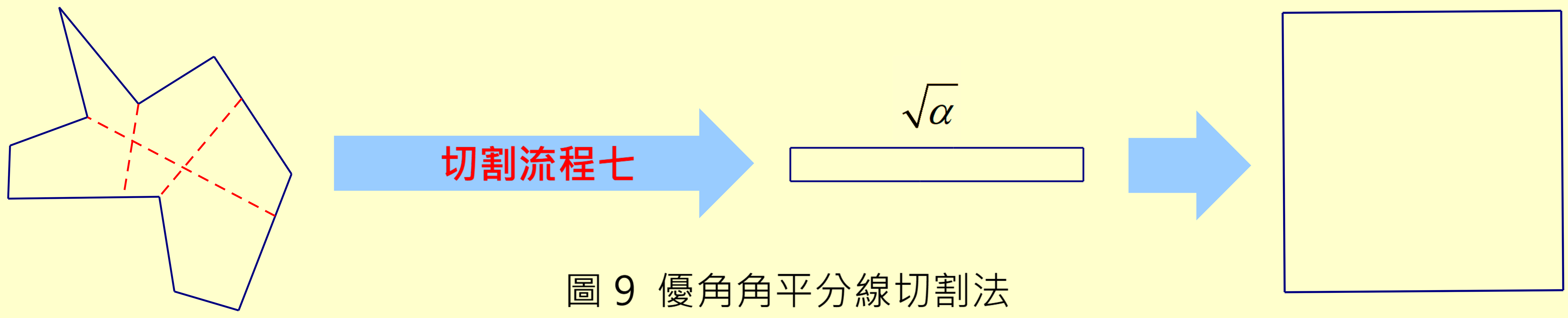



圖 9 優角角平分線切割法

# 參、討論

在設計凹多邊形切割重組成正方形的步驟時，我們一開始的作法是將一凹多邊形先切割成數個三角形，並仿照三角形切割法的步驟，把三角形切割成長方形再拼成正方形，但是這個方法存在著些許瑕疵：除了分割成數個三角形的方法不唯一之外，也難以系統性的敘述應作哪幾組頂點的連線。但遇到問題就得解決問題！我們後來發想出將凹多邊形系統化的切割成正方形之方式。

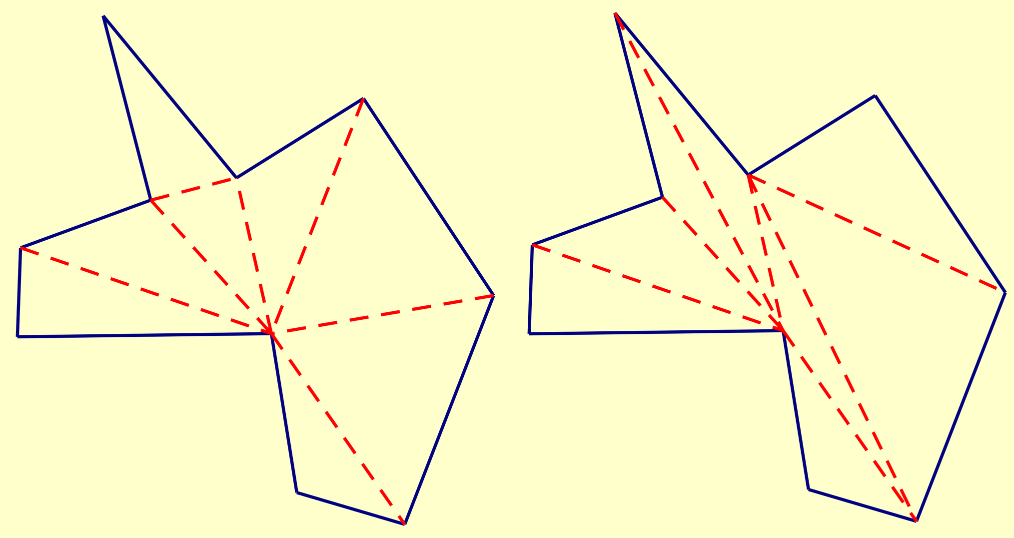


圖 10 凹多邊形分割成數個三角形

# 肆、結論

1. 從參考文獻中發想出「三角形切割法」與「長方形切割法」，證明必定能使用這些方法完成切割，並計算切割塊數。
2. 建構邊長均為$s$的正$n$邊形與正$(n+1)$邊形的遞迴關係，若正$n$邊形可切成正方形，則正$(n+1)$邊形多出來的部分便可重新切割疊加上去。
3. 探討任意凸多邊形和任意凹多邊形，先計算出面積，再分別用等面積三角形置換切割法與優角角平分線切割重組成正方形。

以往有關幾何切割的作品大多都強調如何將特定的圖形以最少刀數或塊數切割重組成正方形，本篇最大的不同在於我們找到了對於任意情況皆能適用的切割法，而非追求特定條件的最佳解。

# 伍、參考文獻資料


1.陳嫣伊（2021）。 **廣義畢氏定理之任意正多邊形幾何切割拼補方法**。 國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。 2024年6月24日，取自「台灣博碩士論文知識加值系統」：https://hdl.handle.net/11296/z9mgbk

2.王愷、葉家宏（2008）。 **國王的地毯**。 中華民國第48屆中小學科學展覽會國中組數學科。 2025年4月14日，取自：https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=45&sid=3453