中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030422

從雞爪定理發想

學校名稱： 新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 廖品華 國二 莊淮棠 國二 高晨祐	蕭偉智

關鍵詞： 連心線三角形、等角共軛、反演

從雞爪定理發想

摘要

本研究發想自常見的競賽解題工具「雞爪定理」──三角形內心與三頂點構成的子三角形之三個外心落在其外接圓上。我們將條件更換為垂心和外心，關注連心線三角形，驚喜發現外心與垂心構圖具有巧妙關聯性！值得一提的是，其本質是三圓交於一點，隨後再將三圓交於一點進行一般化，利用此工具解決了 2024 年加拿大數學雜誌的一道題目。我們將外心、垂心推廣成任意等角共軛點，利用反演變換證明七圓交於一點，此交點恆在原三角形的外接圓上，再利用連心線與公弦互換，給出四個連心線三角形的關聯性──相似與透視。最後迭作連心線三角形，得出其循環相似性質。整體而言，我們創新了研究項目，循序漸進刻劃出獨特且有趣的結果。

壹、　前言

一、 研究動機

雞爪定理（或稱內心／旁心引理 incenter / excenter lemma）常出現於國際數學奧林匹亞試題作為解題的關鍵工具，例如：2024 年第 65 屆國際數學奧林匹亞競賽的第四題。

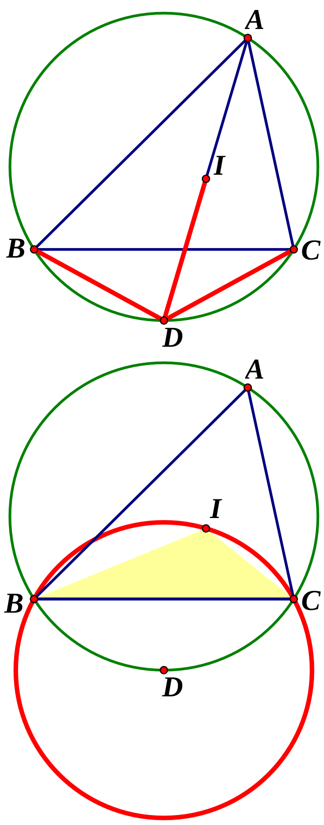


圖 1：雞爪定理（作者自繪）

雞爪定理是指「對於任意 $\triangle ABC$，I 點為其內心，若 $\angle BAC$ 的角平分線交其外接圓 $\odot ABC$ 於 D 點，則 $\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{DI}$」[1]。我們可以換個等價觀點看此定理，即「作 $\triangle BIC$ 的外接圓 $\odot BIC$，其圓心位於原三角形的外接圓 $\odot ABC$ 上」（註：本研究所有圖片皆為作者自行繪製）。

考慮分別作 $\triangle BIC$、$\triangle CIA$、$\triangle AIB$ 的外接圓，約定其圓心為 O_{ai}、O_{bi}、O_{ci}，從而有 O_{ai}、O_{bi}、O_{ci}、A、B、C 六點共圓。我們好奇 $\triangle O_{ai}O_{bi}O_{ci}$ 與 $\triangle ABC$ 是否有關連性呢？我們發現有趣的性質 $\angle O_{ai}=90°-\frac{\angle A}{2}$、

$\angle O_{bi} = 90° - \frac{\angle B}{2}$、$\angle O_{ci} = 90° - \frac{\angle C}{2}$。換句話說，$\triangle O_aO_bO_c$ 相似於原三角形的旁心三角形 $\triangle J_aJ_bJ_c$。

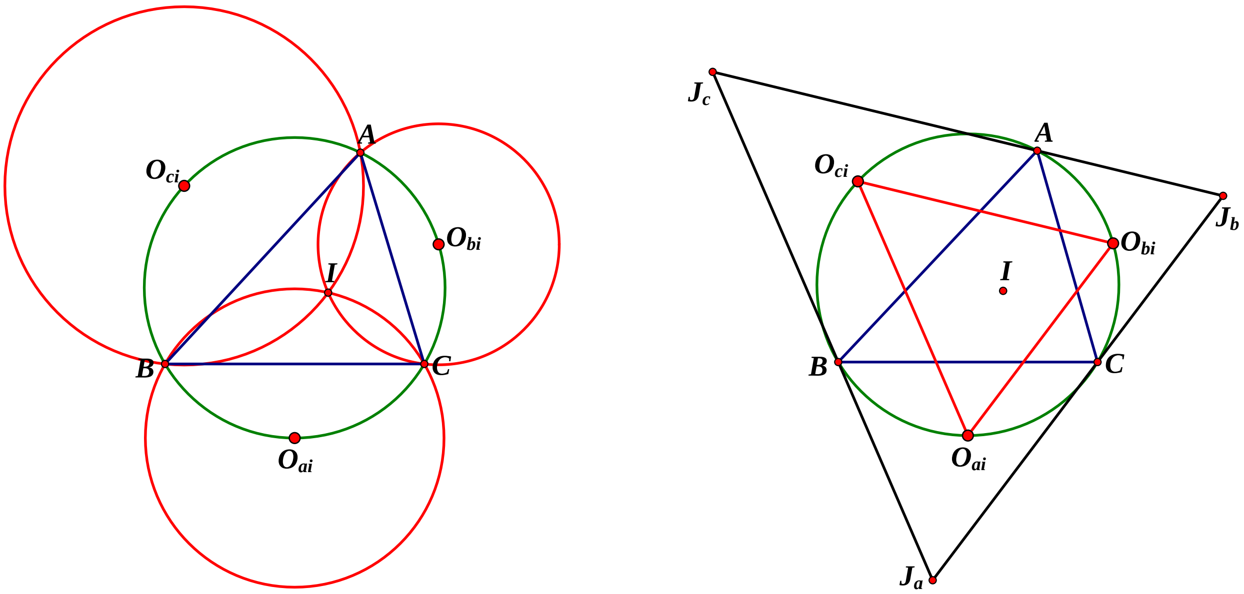


圖 2：$\triangle O_{ai}O_{bi}O_{ci}$ 的性質（作者自繪）

再考慮其他點 X，分別作 $\triangle BXC$、$\triangle CXA$、$\triangle AXB$ 的外接圓，約定其圓心為 O_{ax}、O_{bx}、O_{cx}，如下圖我們實驗了垂心 H 和外心 O，我們發現圓心與 A、B、C 不一定會六點共圓，本研究就不探究六點共圓錐曲線的項目，然而連心線三角形與 $\triangle ABC$ 仍有關連性。如下圖，例如垂心時，$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於原三角形 $\triangle ABC$（後續有證明）。

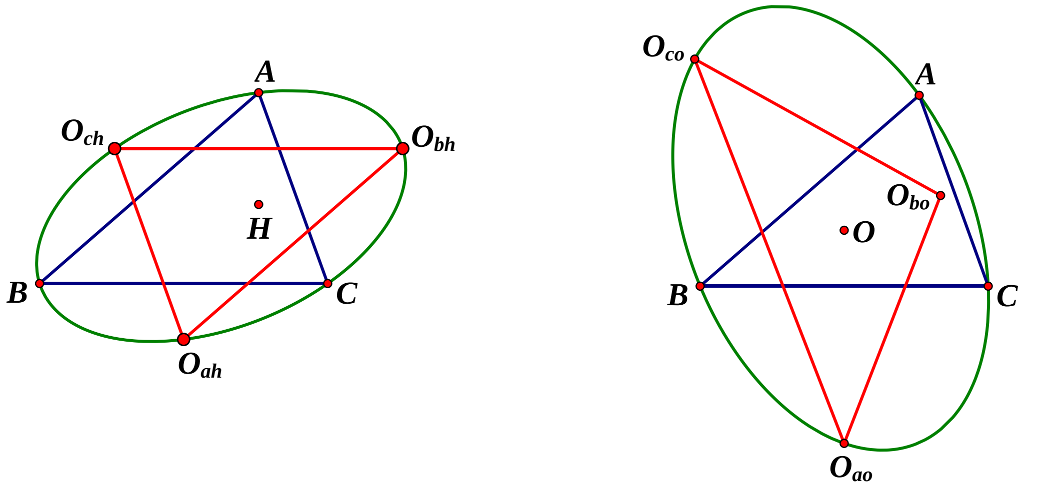
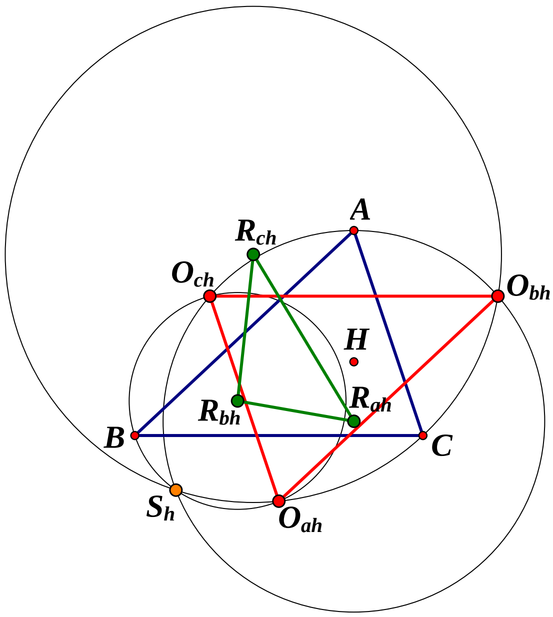


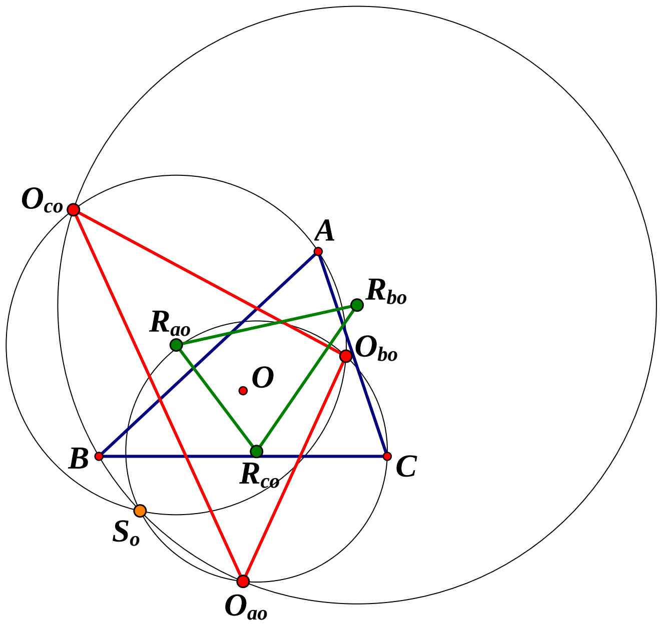
圖 3：垂心與外心條件下的構圖（作者自繪）

進一步考慮 $\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 的圓心 R_{ax}、R_{bx}、R_{cx}，如下圖的垂心 H 和外心 O 條件，我們發現非常有趣的事：首先，三圓交於一點！第二，垂心條件

下的 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 相似於外心條件下的 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$，垂心條件下的 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 相似於外心條件下的 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$（後續有證明）。



垂心條件的構圖



外心條件的構圖

圖 4：兩組相似三角形（作者自繪）

我們先實驗垂心 H 和外心 O 得出漂亮的結果，後續我們企圖刻劃一般性的理論，即「由點 P 和點 Q 條件建構的圖形也具備兩組對應相似三角形，此時點 P 和點 Q 的關係是什麼？」

當然，構圖中還有許多可探討的項目，例如：若取 $\triangle O_{ax}BC$、$\triangle O_{bx}CA$、$\triangle O_{cx}AC$ 的外接圓，是否也會三圓交於一點呢？我們下文繼續探究這個有趣的主題。

二、 研究目的

（一） 垂心與外心條件下，刻劃 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$、$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$的性質。

（二） 垂心與外心條件下，刻劃 $\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 衍伸出的性質。

1. 刻劃 $\odot AO_{bh}O_{ch}$、$\odot BO_{ch}O_{ah}$、$\odot CO_{ah}O_{bh}$（另一組 $\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$）共點。
2. 刻劃連心線三角形 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$、$\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$、$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$、$\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的關聯性。

（三）　一般化三圓交於一點的幾何結構。

（四）　一般化任意等角共軛點 P 與 Q 條件下的多圓構圖定理。

（五）　一般化等角共軛點 P 與 Q 條件下迭作 $\triangle O_a^n O_b^n O_c^n$ 的循環相似性質。

貳、　研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體

參、　預備知識

預備性質 1. (形心角度性質)

(1) 若 $\triangle ABC$ 的內心為 I，則 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$，其餘的角同理。

(2) 若 $\triangle ABC$ 的外心為 O，則 $\angle BOC = 2\angle A$（當 $\angle A$ 為銳角）或 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$（當 $\angle A$ 為鈍角），其餘的角同理。

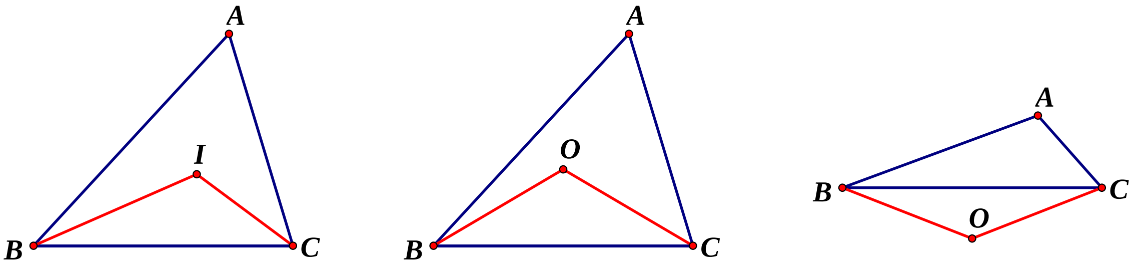


圖 5：內心與外心的角度性質（作者自繪）

(3) 若 $\triangle ABC$ 的垂心為 H，則 $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$（當 $\angle B$ 且 $\angle C$ 為銳角）或 $\angle BHC = \angle A$（當 $\angle B$ 或 $\angle C$ 為鈍角），其餘的角同理。

(4) 若 $\triangle ABC$ 的高對三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 的垂足分別為 H_a、H_b、H_c，則垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的內角 $\angle H_cH_aH_b = 180^\circ - 2\angle A$（當 $\angle A$ 為銳角）或 $\angle H_cH_aH_b = 2\angle A - 180^\circ$（當 $\angle A$ 為鈍角），其餘的角同理。

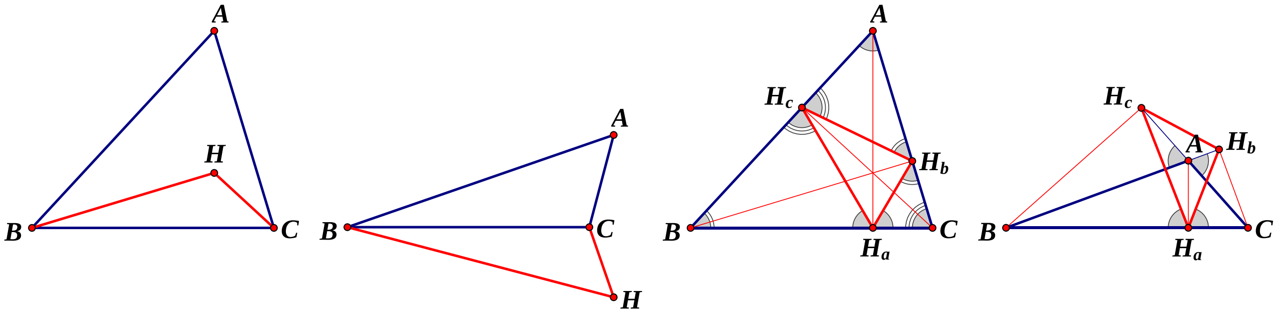


圖 6：垂心與垂足三角形的角度性質（作者自繪）

預備性質 2. (反演 inversion) [3]

以 O 點為圓心，r 為半徑的圓，對平面上任意一點 P，在 $\overrightarrow{OP}$ 上取一點 P'，使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「$P'$ 點為 P 點關於圓 O 的反演點」且「P 點為 P' 點關於圓 O 的反演點」。此時，我們將圓 O 點稱為反演圓、r 稱為反演半徑。

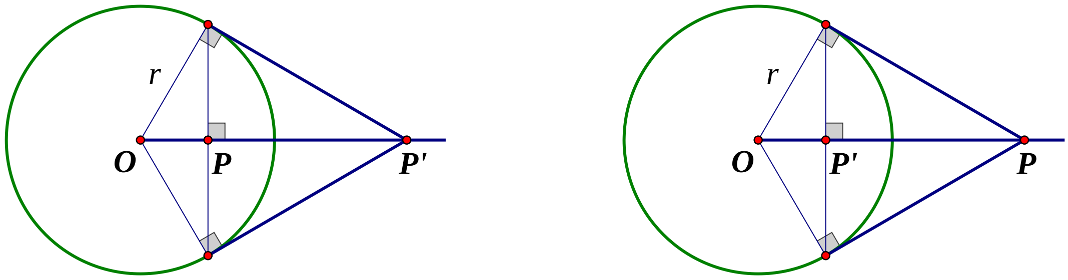


圖 7：反演（作者自繪）

(1) 反演等價定義

給定圓 O，點 P、P' 在直徑 $\overline{AB}$ 所在直線上，且 P 點與 P' 點互為反演點，則

$$
\begin{aligned}
\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2 &\Leftrightarrow (r-\overline{BP})\times(r+\overline{BP'})-r^2=0\\
&\Leftrightarrow r\overline{BP'}-r\overline{BP}-\overline{BP}\times\overline{BP'}=0\\
&\Leftrightarrow 2r\overline{BP'}-2r\overline{BP}-2\overline{BP}\times\overline{BP'}=0\\
&\Leftrightarrow \overline{BP'}\times(2r-\overline{BP})=\overline{BP}\times(2r+\overline{BP'})\\
&\Leftrightarrow \overline{BP'}\times\overline{AP}=\overline{BP}\times\overline{AP'}\\
&\Leftrightarrow \overline{BP}:\overline{BP'}=\overline{AP}:\overline{AP'}
\end{aligned}
$$

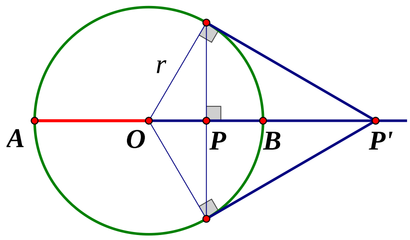


圖 8：反演與四點比例
（作者自繪）

(2) 反演像

I. 通過圓心 O 的直線，經由反演變換變成本身直線。

II. 不通過圓心 O 的圓，經由反演變換變成不通過圓心 O 的圓。

III. 通過圓心 O 的圓，經由反演變換變成不通過圓心 O 的直線。

肆、　研究過程與結果

一、 給定形心而建構的 $\triangle O_aO_bO_c$ 之性質

內心 I 點的構圖，我們在前言已經討論完畢。接下來處理垂心 H，分別作 $\triangle BHC$、$\triangle CHA$、$\triangle AHB$ 的外接圓，其圓心為 O_{ah}、O_{bh}、O_{ch}。

A、B、C、H 四點組成一個垂心組，每個點都是另外三點組成的三角形的垂心。

引理 1：一個垂心組的四點構成四個三角形的外接圓之半徑等長。

證明：$\triangle BHC$ 其垂心為 A 點，再作 A 點關於 $\overline{BC}$ 的對稱點 A'，可得出 $\triangle A'BC \cong \triangle ABC$。又因為 $\angle BHC = 180° - \angle A$ 且 $\angle A' = \angle A$，因此點 A' 在 $\triangle BHC$ 的外接圓上，$\odot A'BC$ 與 $\odot ABC$ 的半徑等長，即 $\odot BHC$ 與 $\odot ABC$ 的半徑等長，其餘同理。

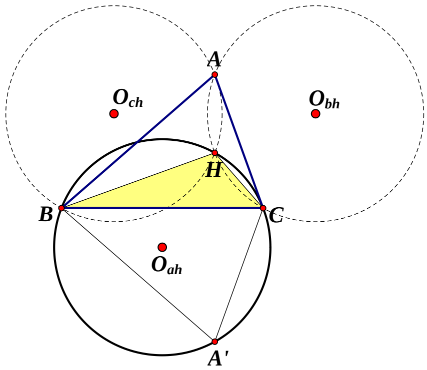


圖 9：垂心組等圓（作者自繪）

■

性質 1：垂心條件下，$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於 $\triangle ABC$。

證明：因 $\angle AHC = 180° - \angle B$，可得 $\angle CO_{bh}A = 2\angle B$，再得 $\angle O_{bh}CA = 90° - \angle B$，同理 $\angle O_{ch}BA = 90° - \angle C$。考慮 $\angle O_{bh}CB + \angle O_{ch}BC = \big((90° - \angle B) + \angle C\big) + \big((90° - \angle C) + \angle B\big) = 180°$，從而有 $\overline{O_{bh}C} \parallel \overline{O_{ch}B}$，又根據引理 1 有 $\overline{O_{bh}C} = \overline{O_{ch}B}$，所以四邊形 $O_{ch}BCO_{bh}$ 是平行四邊形，$\overline{O_{bh}O_{ch}} = \overline{BC}$，同理可得 $\overline{O_{ah}O_{bh}} = \overline{AB}$ 且 $\overline{O_{ch}O_{ah}} = \overline{CA}$，故 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch} \cong \triangle ABC$。

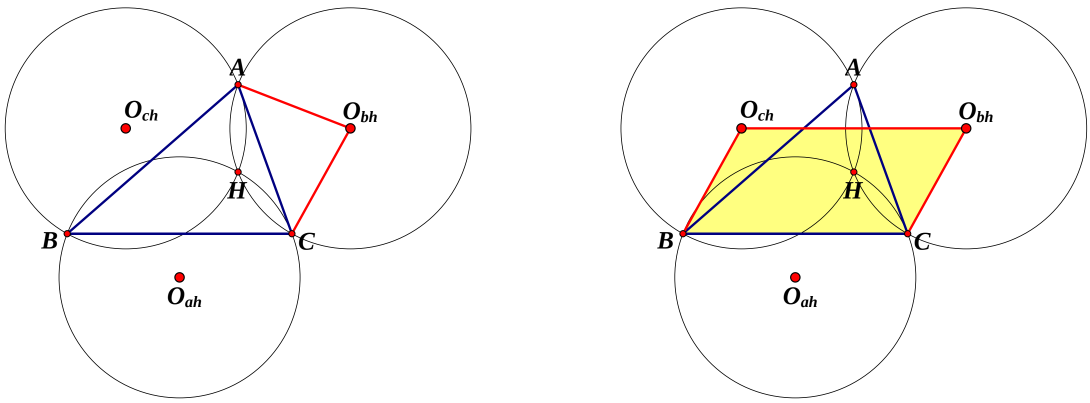


圖 10：$\triangle O_aO_bO_c \cong \triangle ABC$（作者自繪）

用同樣的方式，可以證明 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於 $\triangle ABC$。

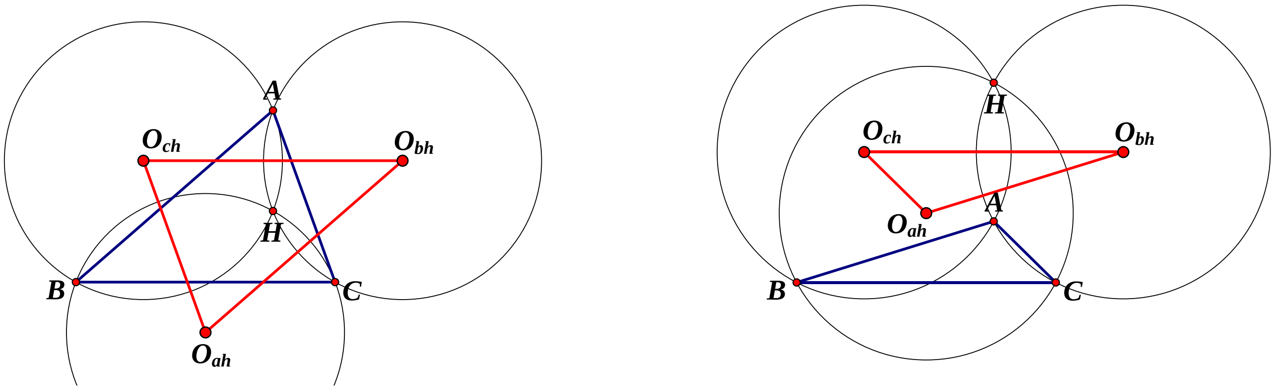


圖 11：$\triangle ABC$ 為銳角或鈍角三角形（作者自繪）

我們再處理外心 O，分別作 $\triangle BOC$、$\triangle COA$、$\triangle AOB$ 的外接圓，其圓心為 O_{ao}、O_{bo}、O_{co}。在垂心 H 條件下，因為有垂心組的特殊性質，證明方式無法適用於其他形心，因此我們找出一般化的方法。注意到，我們的三個外接圓的構圖下的 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 是連心線三角形，我們巧妙把兩圓的「連心線」轉換為「公弦」去討論，因為連心線和公弦恆保持垂直。

性質 2：外心條件下，$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 相似於垂足 $\triangle H_aH_bH_c$。

證明：將連心線轉換為公弦去討論，連接 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OC}$，$\angle BOC = 2\angle A$，從而有 $\angle O_{ao} = 180° - 2\angle A$，同樣可得 $\angle O_{bo} = 180° - 2\angle B$ 且 $\angle O_{co} = 180° - 2\angle C$。不失一般性，鈍角時，令 $\angle A > 90°$，則 $\angle O_{ao} = 180° - (360° - 2\angle A) = 2\angle A - 180°$。

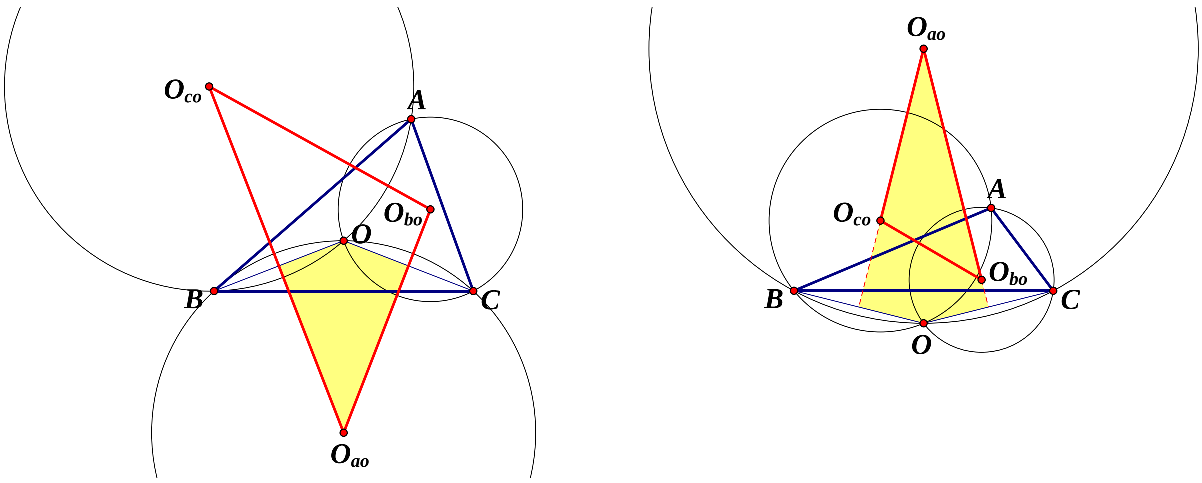
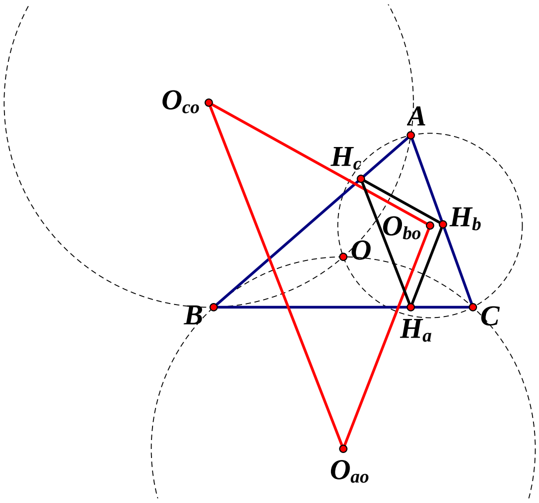


圖 12：$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的三內角度數分析（作者自繪）

因為 $\angle O_{ao} = 180° - 2\angle A = \angle H_a$、$\angle O_{bo} = 180° - 2\angle B = \angle H_b$、$\angle O_{co} = 180° - 2\angle C = \angle H_c$，所以 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co} \sim \triangle H_aH_bH_c$。



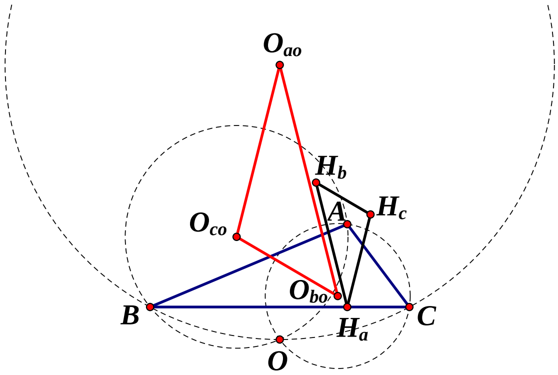


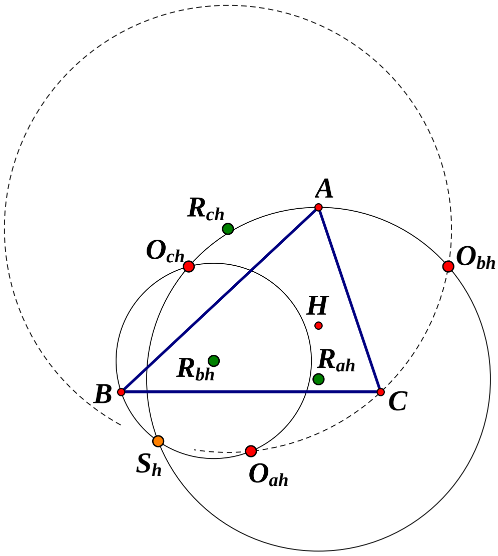
圖 13：$\triangle O_aO_bO_c \sim \triangle H_aH_bH_c$（作者自繪）

■

二、 垂心與外心條件下，$\triangle AO_bO_c$、$\triangle BO_cO_a$、$\triangle CO_aO_b$ 的外接圓之性質

（一）兩組三圓交於一點

無論垂心或外心條件下，$\odot AO_bO_c$、$\odot BO_cO_a$、$\odot CO_aO_b$ 三圓交於一點！如下圖，垂心條件下，令 $\odot AO_{bh}O_{ch}$ 與 $\odot BO_{ch}O_{ah}$ 交於 S_h 點（異於 O_{bh} 點），我們要討論的則是 $\odot CO_{ah}O_{bh}$ 是否通過 S_h 點？我們換成等價的命題，即為 S_h、C、O_{ah}、O_{bh} 四點是否共圓呢？



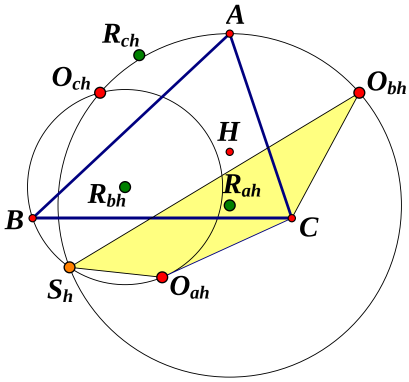


圖 14：三圓交於一點證明手法（作者自繪）

性質 3：垂心條件下，$\odot AO_{bh}O_{ch}$、$\odot BO_{ch}O_{ah}$、$\odot CO_{ah}O_{bh}$ 三圓交於一點。

證明：

1. 連接 $\overline{BO_{ah}}$、$\overline{BO_{ch}}$、$\overline{S_hO_{ah}}$、$\overline{S_hO_{bh}}$、$\overline{S_hO_{ch}}$。在圓內接四邊形 $O_{ch}S_hO_{bh}A$ 中，$\angle O_{ch}S_hO_{bh} + \angle O_{ch}AO_{bh} = 180°$。$\angle O_{ch}AO_{bh} = \angle O_{bh}AC + \angle A + \angle O_{ch}AB$，$\angle AO_{bh}C$ 為 $\odot AHC$ 的圓心角，又 $\angle AHC = 180° - \angle B$，可得 $\angle AO_{bh}C = 2\angle B$，再得 $\angle O_{bh}AC = 90° - \angle B$，同理 $\angle O_{ch}AB = 90° - \angle C$，從而有 $\angle O_{ch}AO_{bh} = 180° + \angle A - \angle B - \angle C = 2\angle A$，所以 $\angle O_{ch}S_hO_{bh} = 180° - 2\angle A$。在圓內接四邊形 $O_{ch}BS_hO_{ah}$ 中，同上可得 $\angle O_{ch}BO_{ah} = 2\angle B$。

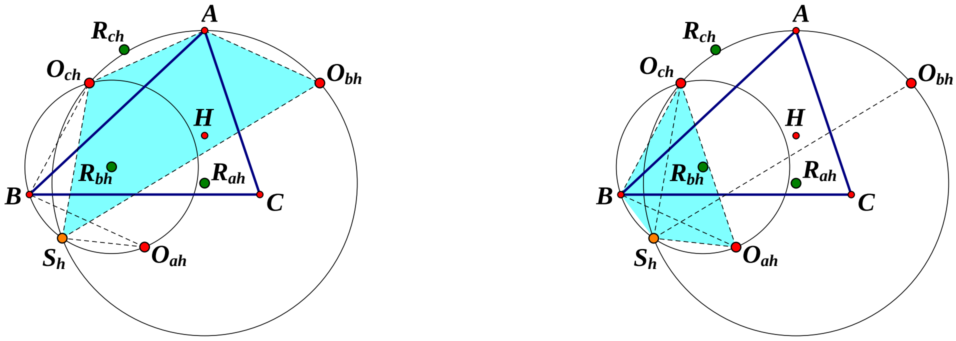


圖 15：兩組四點共圓（作者自繪）

2. 在四邊形 $O_{bh}S_hO_{ah}C$ 中，$\angle O_{bh}S_hO_{ah} = \angle O_{ch}S_hO_{ah} - \angle O_{ch}S_hO_{bh} = \angle O_{ch}BO_{ah} - \angle O_{ch}S_hO_{bh} = 2\angle B - (180° - 2\angle A)$，又 $\angle O_{bh}CO_{ah} = 2\angle C$，可得 $\angle O_{bh}S_hO_{ah} + \angle O_{bh}CO_{ah} = 180°$，故 $\odot AO_{bh}O_{ch}$、$\odot BO_{ch}O_{ah}$、$\odot CO_{ah}O_{bh}$ 交於一點 S_h。

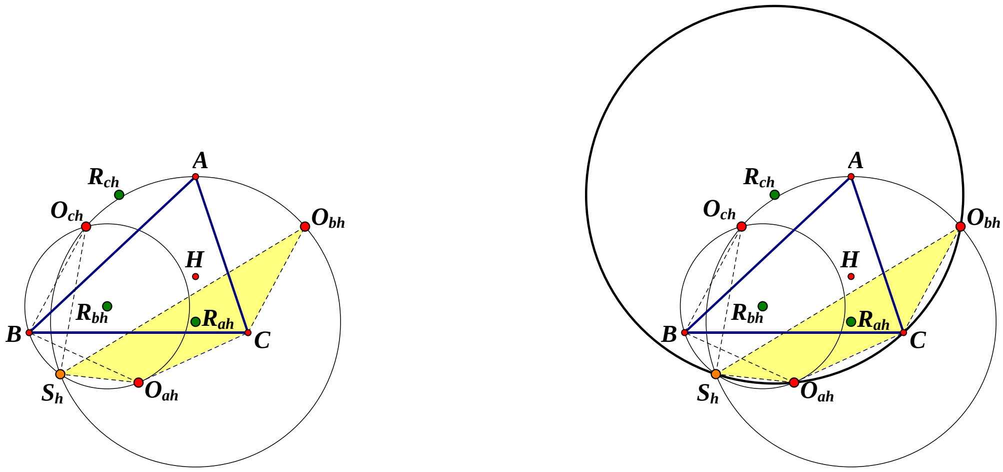


圖 16：三圓交於一點（垂心條件）（作者自繪）

■

我們用相同手法來證明外心條件下的三圓 $\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$，下面稍微簡化過程。

性質 4：外心條件下，$\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$ 三圓交於一點。

證明：

1. 連接 $\overline{BO_{ao}}$、$\overline{BO_{bo}}$、$\overline{BO_{co}}$、$\overline{S_oO_{ao}}$、$\overline{S_oO_{bo}}$、$\overline{S_oO_{co}}$。因為 $\angle O_{bo}AC$ 為 $\odot AOC$ 的圓周角，$\angle AOC = 2\angle B$，可得 $\angle O_{bo}AC = \frac{180°-4\angle B}{2} = 90° - 2\angle B$，同理可得 $\angle O_{co}AB = 2\angle C - 90°$ 且 $\angle O_{ao}BC = 2\angle A - 90°$，從而有 $\angle O_{co}AO_{bo} = (2\angle C - 90°) + \angle A - (90° - 2\angle B) = \angle A + 2\angle B + 2\angle C - 180° = 180° - \angle A$，所以在圓內接四邊形 $O_{co}S_oO_{bo}A$ 中，$\angle O_{co}S_oO_{bo} = \angle A$。$\angle O_{co}BO_{ao} = \angle O_{co}BA + \angle B + \angle O_{ao}BC = (2\angle C - 90°) + \angle B + (2\angle A - 90°) = \angle A + \angle C$。
2. 在四邊形 $O_{bo}S_oO_{ao}C$ 中，$\angle O_{bo}S_oO_{ao} = \angle O_{co}S_oO_{ao} - \angle O_{co}S_oO_{bo} = \angle O_{co}BO_{ao} - \angle O_{co}S_oO_{bo} = (\angle A + \angle C) - \angle A = \angle C$，又 $\angle O_{bo}CO_{ao} = 180° - \angle C$，可得 $\angle O_{bo}S_oO_{ao} + \angle O_{bo}CO_{ao} = 180°$，故我們得到 $\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$ 交於一點 S_o。

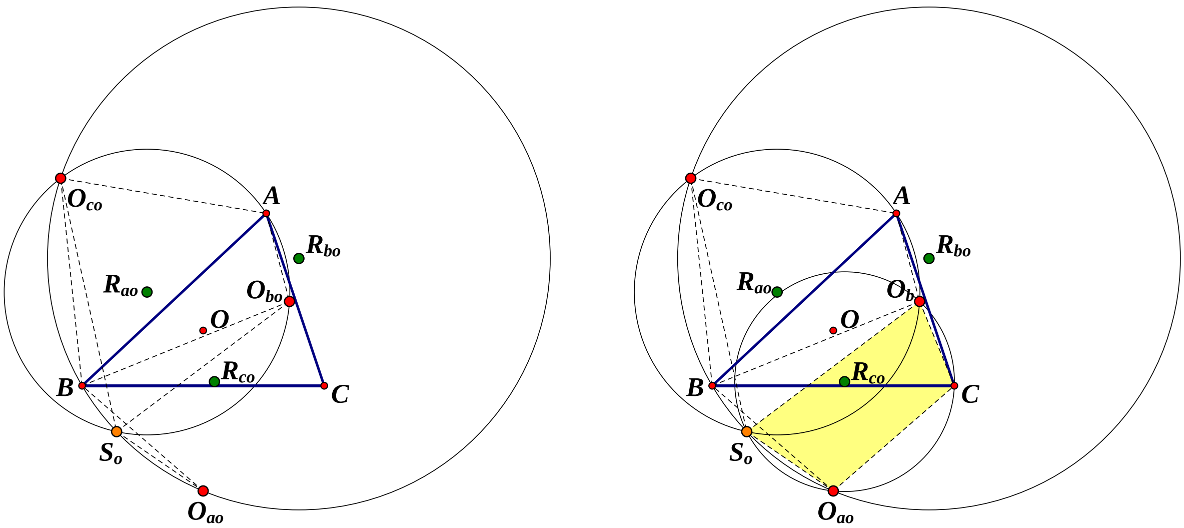


圖 17：三圓交於一點（外心條件）(作者自繪)

■

（二）四個「連心線三角形」的關聯性

關注四個三角形 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$、$\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$、$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$、$\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$，我們給出本研究第一個主要定理。

定理 1：$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch} \sim \triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 且 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch} \sim \triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$。

證明：

1. 在性質 1 得出 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的內角的角度依序為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，又在性質 2 得出 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的內角的角度依序為 $180° - 2\angle A$、$180° - 2\angle B$、$180° - 2\angle C$。再將「連心線」轉換為「公弦」去討論，處理 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 和 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$。根據性質 4 三圓交於一點，連接公弦 $\overline{S_hO_{ah}}$、$\overline{S_hO_{bh}}$、$\overline{S_hO_{ch}}$ 與 $\overline{S_oO_{ao}}$、$\overline{S_oO_{bo}}$、$\overline{S_oO_{co}}$。
2. 注意到，兩個角的兩邊相互垂直時，其角度相同或互補。先處理垂心構圖，由性質 3 有 $\angle O_{ch}S_hO_{ah} = 2\angle B$，可得 $\angle R_{ch}R_{bh}R_{ah} = 180° - 2\angle B$，同理 $\angle R_{bh}R_{ch}R_{ah} = 180° - 2\angle C$ 且 $\angle R_{bh}R_{ah}R_{ch} = 180° - 2\angle A$。再處理外心構圖，由性質 4 有 $\angle O_{co}S_oO_{bo} = \angle A$，可得 $\angle R_{bo}R_{ao}R_{co} = \angle A$，同理 $\angle R_{ao}R_{co}R_{bo} = \angle C$，$\angle R_{ao}R_{bo}R_{co} = \angle B$。
3. 根據性質 1，$\triangle ABC$ 與 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的三個內角皆相等，由前可知 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co} \sim \triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch} \cong \triangle ABC$。根據性質 2，$\triangle H_aH_bH_c$ 與 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的三個內角皆相等，由前可知 $\triangle H_aH_bH_c \sim \triangle O_{ao}O_{bo}O_{co} \sim \triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$。

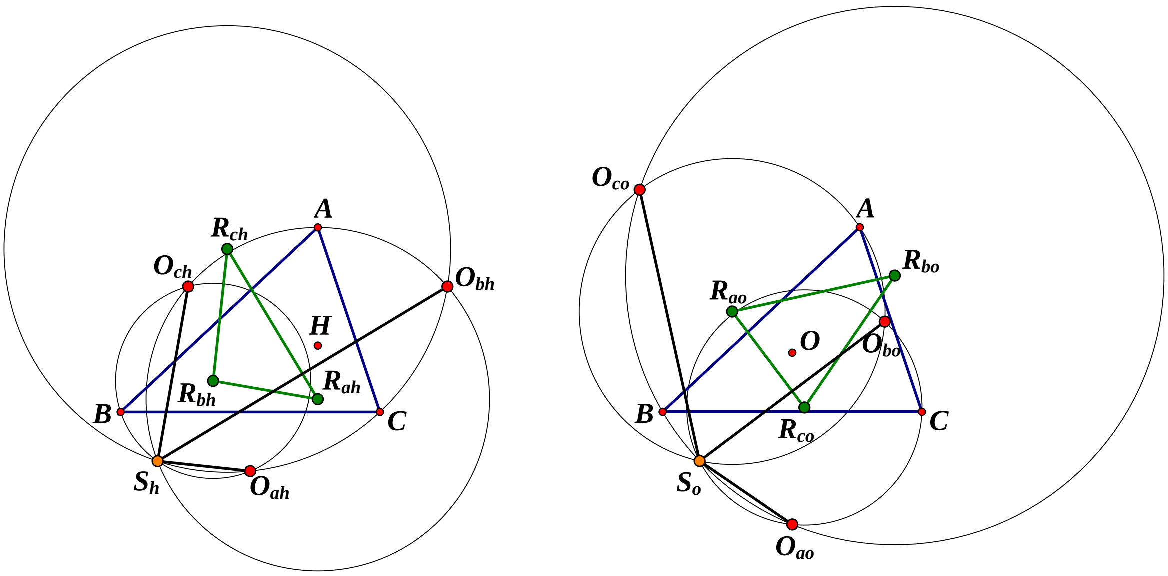


圖 18：$\triangle O_aO_bO_c$ 的三內角度數分析（作者自繪）

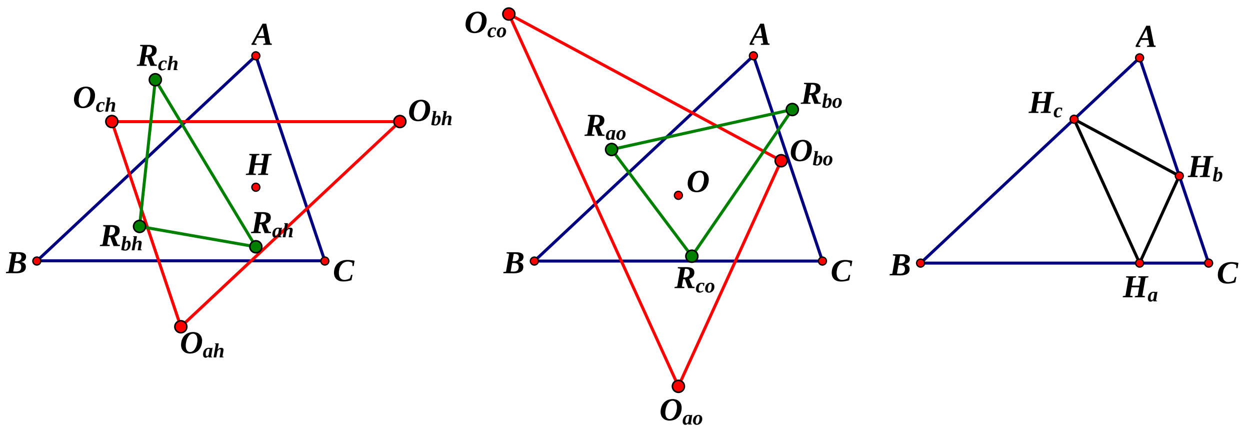


圖 19：兩組相似三角形（作者自繪）

■

（三）垂心與外心條件下的關聯性性質

我們發現有趣的事情：垂心條件下，$\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心，也是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心（或旁心）；外心條件下，$\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心（或旁心），也是 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的垂心，兩種作圖相互對稱！我們把原本三角形和兩個生成的三角形串聯起來！我們將會利用到前面的三圓交於一點的性質來進行證明。

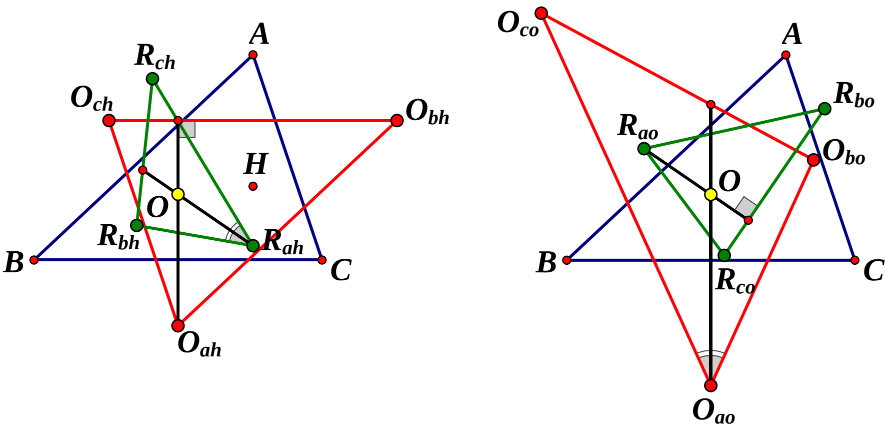


圖 20：$\triangle ABC$ 的外心 O 的性質（作者自繪）

定理 2：

1. $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心，也是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心（或旁心）。

2. $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心（或旁心），也是 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的垂心。

證明：

1. 先討論垂心條件下的構圖，根據性質 1，$\overline{O_{bh}O_{ch}} \parallel \overline{BC}$，又 $\overline{O_{ah}O}$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線，可得 $\overleftrightarrow{O_{ah}O} \perp \overline{O_{bh}O_{ch}}$，其餘兩邊同理，所以 $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心。我們討論 $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心之前，先證明四圓 $\odot AO_{bh}O_{ch}$、$\odot BO_{ch}O_{ah}$、$\odot CO_{ah}O_{bh}$ 與 $\triangle ABC$ 的外接圓交於一點 S_h，根據性質 3，前三個圓交於 S_h，我們只需要證明 $\angle BS_hC = 180° - \angle A$ 即可。考慮切割 $\angle BS_hC = \angle BS_hO_{ch} + \angle O_{ch}S_hO_{bh} + \angle O_{bh}S_hC = \angle BO_{ah}O_{ch} + \angle O_{ch}S_hO_{bh} + \angle O_{bh}O_{ch}C$。定理 1 中我們有 $\angle O_{ch}O_{ah}O_{bh} = \angle A$，可得 $\angle BO_{ah}O_{ch} + \angle O_{bh}O_{ch}C = \angle BO_{ah}C - \angle O_{ch}O_{ah}O_{bh} = 2\angle A - \angle A = \angle A$，又 $\angle O_{ch}S_hO_{bh} = 180° - \angle O_{ch}AO_{bh} = 180° - 2\angle A$，可得 $\angle BS_hC = 180° - \angle A$，從而有點 A、B、C、S_h 共圓。

 連接公弦 $\overline{S_hO_{ch}}$、$\overline{S_hA}$、$\overline{S_hO_{bh}}$，分別對應到連心線 $\overline{R_{ah}R_{bh}}$、$\overline{R_{ah}O}$、$\overline{R_{ah}R_{ch}}$，因為 $\overline{AO_{ch}} = \overline{AO_{bh}}$，可得 $\overline{S_hA}$ 平分 $\angle O_{ch}S_hO_{bh}$，從而有 $\overline{R_{ah}O}$ 平分 $\angle R_{ch}R_{ah}R_{bh}$，其餘兩角同理，所以 $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心（對於鈍角 $\triangle ABC$，其外心 O 是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的旁心）。

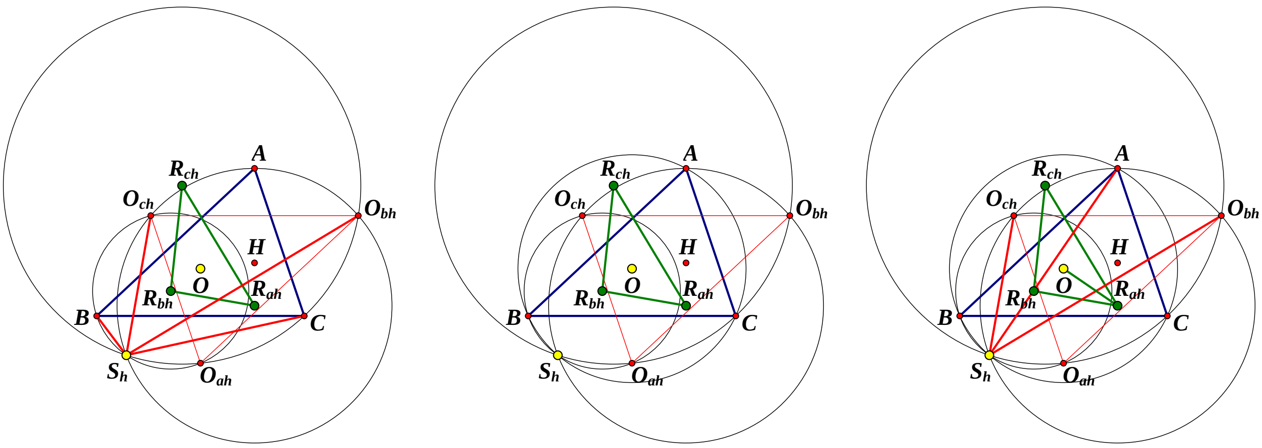
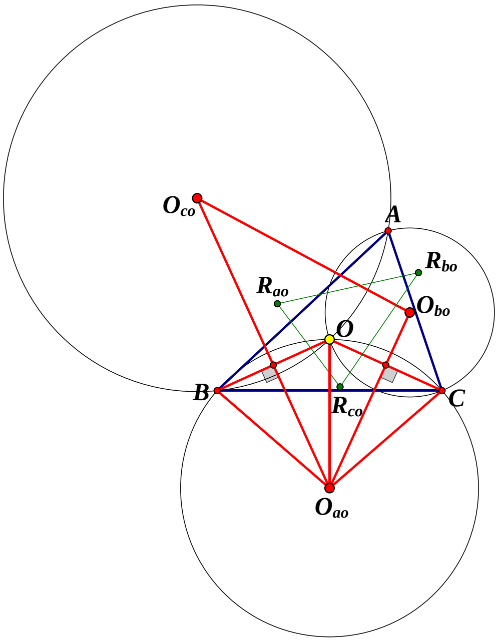


圖 21：O 點是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心（作者自繪）

2. 再討論外心條件下的構圖，因為四邊形 $BOCO_{ao}$ 為箏形，又 $\overline{BO_{ao}} = \overline{OO_{ao}} = \overline{CO_{ao}}$，易知 $\overline{O_{ao}O_{bo}}$、$\overline{O_{ao}O_{co}}$ 與 $\overline{O_{ao}O}$ 將箏形 $BOCO_{ao}$ 平分成四個全等直角三角形，從而有 $\overline{O_{ao}O}$ 平分 $\angle O_{co}O_{ao}O_{bo}$，其餘兩角同理，所以 O 點是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心。

 利用前面的方式可以證明四圓 $\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$ 與 $\odot ABC$ 交於一點 S_o，在此省略。連接 $\overline{S_oC}$ 切割 $\angle O_{ao}S_oA = \angle CS_oA + \angle O_{ao}S_oC = \angle B + \angle O_{ao}S_oC$，由性質 4 可得知 $\angle O_{bo}CO_{ao} = 180° - \angle C$，且 $\angle O_{bo}O_{ao}C = 90° - \angle A$，則 $\angle O_{ao}S_oC =$

$180° - \angle O_{bo}CO_{ao} - \angle O_{bo}O_{ao}C = 180° - (180° - \angle C) - (90° - \angle A) = 90° - \angle B$，所以 $\angle O_{ao}S_oA = \angle B + (90° - \angle B) = 90°$。注意到公弦 $\overline{S_oA}$、$\overline{S_oO_{ao}}$，分別對應到連心線 $\overline{R_{ao}O}$、$\overline{R_{bh}R_{ch}}$，即 $\overline{R_{ao}O} \perp \overline{R_{bh}R_{ch}}$。其餘兩邊同理，得△$ABC$ 的外心 O 是 △ $R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的垂心。



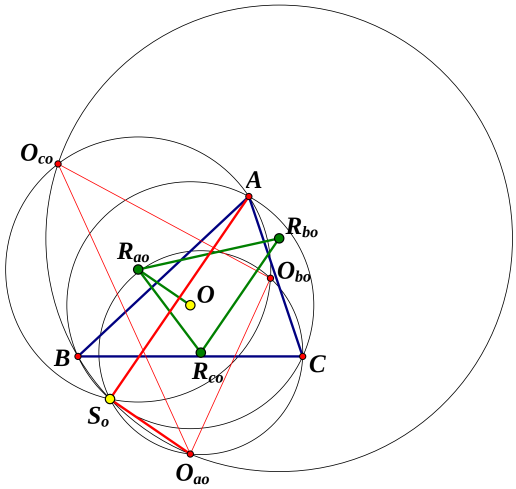


圖 22：O 點是 △$O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心與 △$R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的垂心（作者自繪）

■

如下圖，將垂心與外心條件下的的構圖合併，⊙ $AO_{bh}O_{ch}$、⊙ $BO_{ch}O_{ah}$、⊙ $CO_{ah}O_{bh}$ 與 ⊙ ABC 交於一點，此外 ⊙ $AO_{bo}O_{co}$、⊙ $BO_{co}O_{ao}$、⊙ $CO_{ao}O_{bo}$ 與 ⊙ ABC 也交於一點。有趣的是，七個圓 ⊙ $AO_{bh}O_{ch}$、⊙ $BO_{ch}O_{ah}$、⊙ $CO_{ah}O_{bh}$ 與 ⊙ $AO_{bo}O_{co}$、⊙ $BO_{co}O_{ao}$、⊙ $CO_{ao}O_{bo}$ 與 ⊙ ABC 也會交於一點！為了節省版面，七圓交於一點的證明過程在後續第四小節「一般化任意等角共軛點 P 與 Q 的多圓構圖」進行一般化證明。

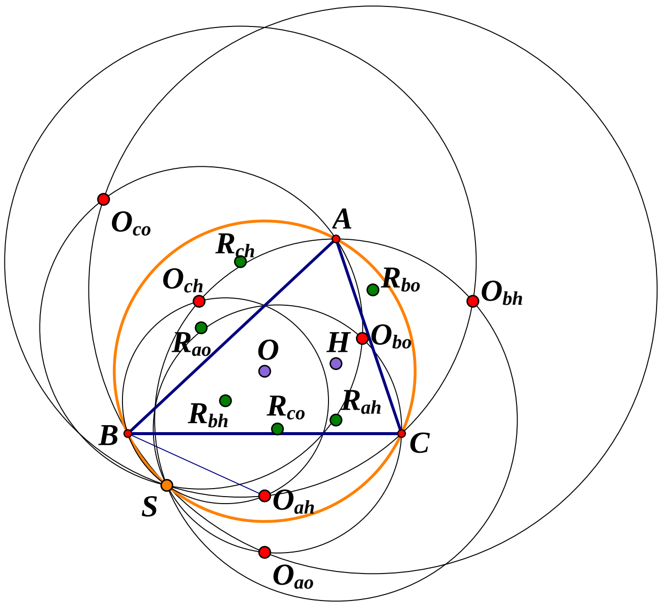


圖 23：七圓交於一點（作者自繪）

三、 一般化「三圓交於一點」的幾何結構

我們想知道由垂心和外心條件下的構圖是否有共通性？點 O_{ah}、O_{bh}、O_{ch} 與點 A、B、C 構成一個六邊形，由性質 3 可得六邊形的三個內角 $\angle O_{ch}AO_{bh}=2\angle A$、$\angle O_{ah}BO_{ch}=2\angle B$、$\angle O_{bh}CO_{ah}=2\angle C$，所以 $\angle O_{ch}AO_{bh}+\angle O_{ah}BO_{ch}+\angle O_{bh}CO_{ah}=360°$。由性質 4 也可得 $\angle O_{co}AO_{bo}+\angle O_{ao}BO_{co}+\angle O_{bo}CO_{ao}=360°$。

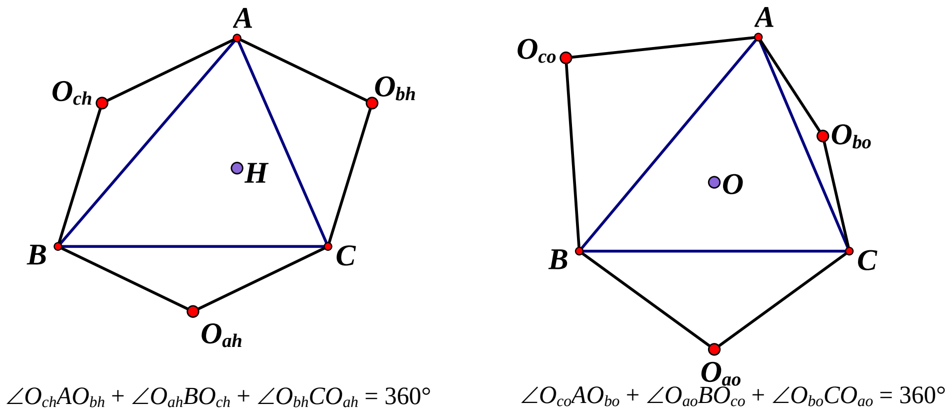


圖 24：特殊六邊形（作者自繪）

從前面的垂心和外心得出靈感，以下給出一般化推廣。在平面上任選一點 P（P 不在 $\triangle ABC$ 的邊、頂點或外接圓上），再作 $\odot BPC$、$\odot CPA$、$\odot APB$，其圓心分別為 O_{ap}、O_{bp}、O_{cp}；繼續作 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$，其圓心分別為 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp}，我們給出以下的重要定理。由於 P 點位置不影響作圖，角度計算上只要考慮有向角就可統一，於是為了節省版面，我們呈現 P 點在 $\triangle ABC$ 內部的圖片。

性質 5：對於平面上任一點 P 都有 $\angle O_{cp}AO_{bp}+\angle O_{ap}BO_{cp}+\angle O_{bp}CO_{ap}=360°$。

證明：令 $\angle BPC=\alpha$、$\angle BPC=\beta$、$\angle BPC=r$，可得 $\angle O_{ap}BC=\angle BCO_{ap}=\frac{180°-(360°-2\alpha)}{2}=\alpha-90°$，同理 $\angle O_{bp}CA=\angle CAO_{bp}=\beta-90°$ 且 $\angle O_{cp}AB=\angle ABO_{cp}=r-90°$。從而有 $\angle O_{cp}AO_{bp}=(r-90°)+\angle A+(\beta-90°)=\angle A-\alpha+180°$，同理 $\angle O_{ap}BO_{cp}=\angle B-\beta+180°$、$\angle O_{bp}CO_{ap}=\angle C-\gamma+180°$，注意到 $\alpha+\beta+r=360°$，所以 $\angle O_{cp}AO_{bp}+\angle O_{ap}BO_{cp}+\angle O_{bp}CO_{ap}=360°$。 ■

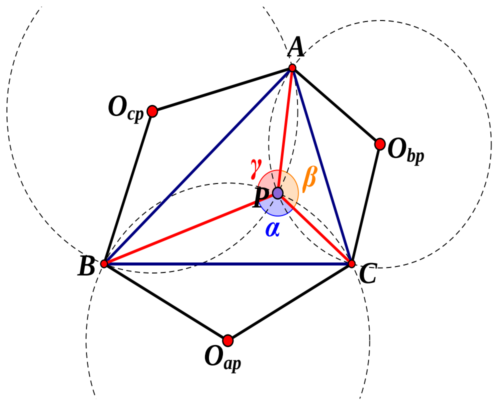


圖 25：非鄰角和為 360 度（作者自繪）

定理 3：若 $\angle O_{cp}AO_{bp}+\angle O_{ap}BO_{cp}+\angle O_{bp}CO_{ap}=360°$，則 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$ 三圓交於一點。

證明：由性質 5 得知 $\angle O_{cp}AO_{bp}=\angle A-\alpha+180°$、$\angle O_{ap}BO_{cp}=\angle B-\beta+180°$ 與 $\angle O_{bp}CO_{ap}=\angle C-\gamma+180°$，再得 $\angle O_{ap}S_pO_{bp}=\angle O_{ap}S_pO_{cp}-\angle O_{bp}S_pO_{cp}=\angle O_{ap}BO_{cp}-\angle O_{bp}BO_{cp}=(\angle B-\beta+180°)-\left(180°-\angle O_{cp}AO_{bp}\right)=\angle A+\angle B-\alpha-\beta+180°$，所以 $\angle O_{bp}CO_{ap}+\angle O_{ap}S_pO_{bp}=(\angle C-\gamma+180°)+(\angle A+\angle B-\alpha-\beta+180°)=180°$。

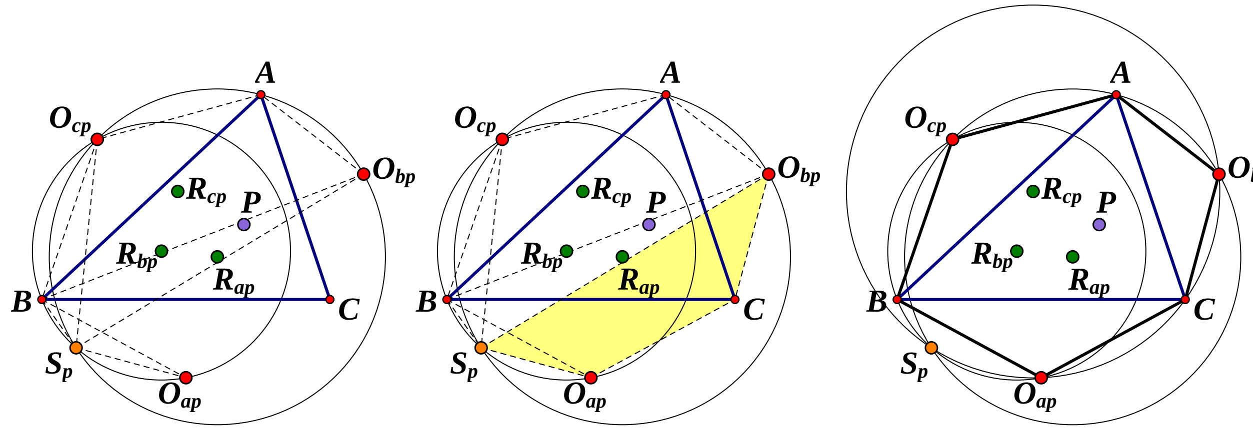


圖 26：任意 P 點構造六邊形的三圓交於一點（作者自繪）

■

我們可以將定理 3 寫成更強的版本變為定理 4，證明手法相同，我們省略。

定理 4：對於平面上封閉的六邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，若一組非相鄰內角（可大於 180 度）$\angle P_1+\angle P_3+\angle P_5=360°$，則 $\odot P_2P_1P_6$、$\odot P_4P_3P_2$、$\odot P_6P_5P_4$ 三圓交於一點。

證明：略。

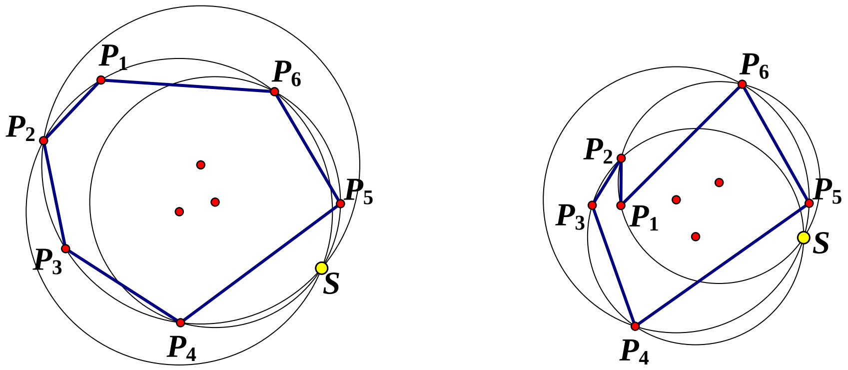


圖 27：一般化的三圓交於一點（作者自繪）

■

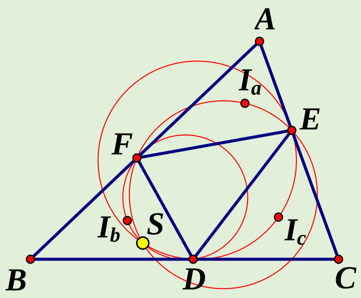
討論與應用

我們的定理 4 是很有強大應用！例如在 2024 年 10 月份的加拿大數學雜誌 Crux Mathematicorum 刊登的徵答題目 4977 題 [2]：

In a triangle ABC, let D, E and F be arbitrary interior points on the sides BC, AC and AB respectively. Let I_a, I_b and I_c be the incenters of the triangles AFE, BDF and CED respectively. Prove the following:

a) The circles FI_aE, FI_bD and EI_cD concur at a point S.

b) The circles I_bFI_a, I_aEI_c and I_cDI_b concur at a point T.



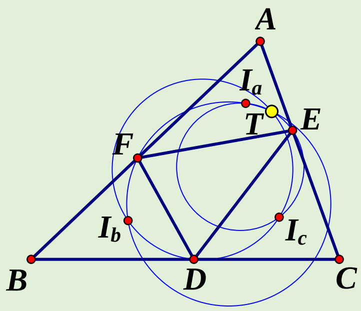


圖 28：Crux Math Problem 4977（作者自繪）

應用我們的定理 4，討論六邊形 $I_aFI_bDI_cE$ 的一組非相鄰內角，$\angle FI_aE = 90° + \frac{\angle A}{2}$、$\angle DI_bF = 90° + \frac{\angle B}{2}$、$\angle EI_cD = 90° + \frac{\angle C}{2}$，可得 $\angle FI_aE + \angle DI_bF + \angle EI_cD = 360°$，所以 $\odot FI_aE$、$\odot DI_bF$、$\odot EI_cD$ 交於點 S！同理得 $\odot I_bFI_a$、$\odot I_aEI_c$、$\odot I_cDI_b$ 交於點 T！

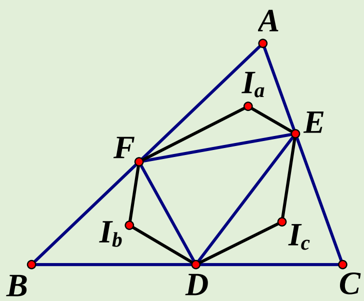


圖 29：六邊形的本質幾何結構（作者自繪）

我們還可以推廣這道題目，關於子三角形 $\triangle AFE$、$\triangle BDE$、$\triangle CED$ 的外心與垂心，也可得到相同的三圓交於一點性質，如下圖。然而，交點 S 與 T 不一定會落在 $\triangle DEF$ 的外接圓上，這一點跟我們的研究不一樣。未來我們可以繼續找出其充分條件。

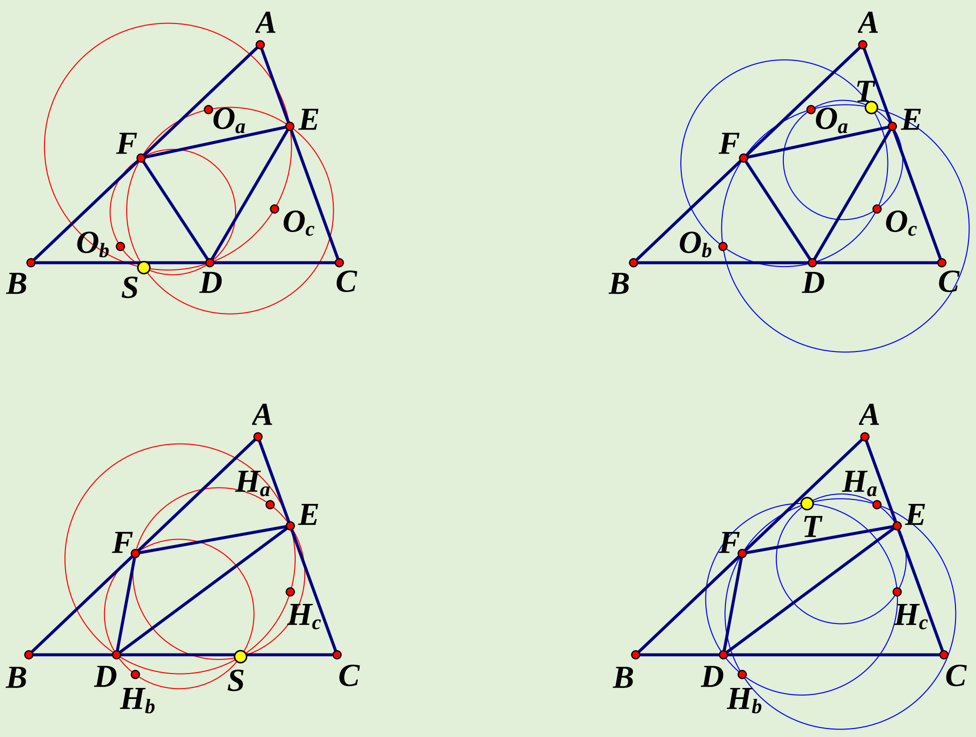
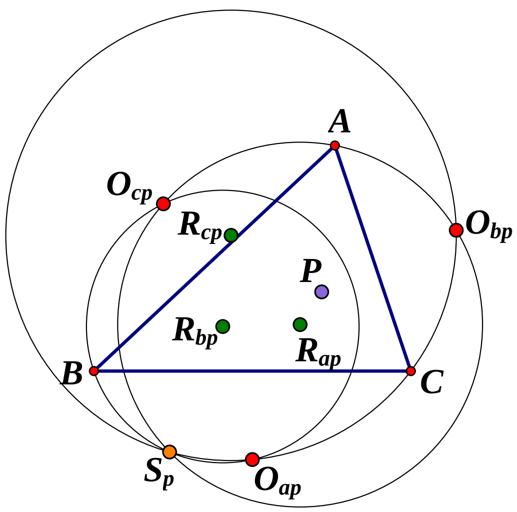
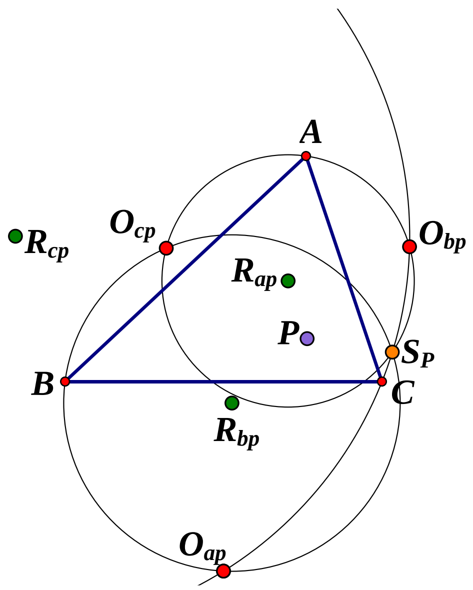


圖 30：Crux Math Problem 4977 推廣到外心與垂心（作者自繪）

四、 一般化等角共軛點 P 與 Q 的多圓構圖

在前一節研究，在平面上任選一點 P（不在 $\triangle ABC$ 的邊、頂點或外接圓上），由定理 3 可得 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$ 三圓交於一點 S_p。我們本來認為 P 點是隨機的點，其對應的交點 S_p 應該也是隨機無規律，但是後來發現非常有趣且漂亮的結果──交點 S_p 恆落在 $\triangle ABC$ 的外接圓上！





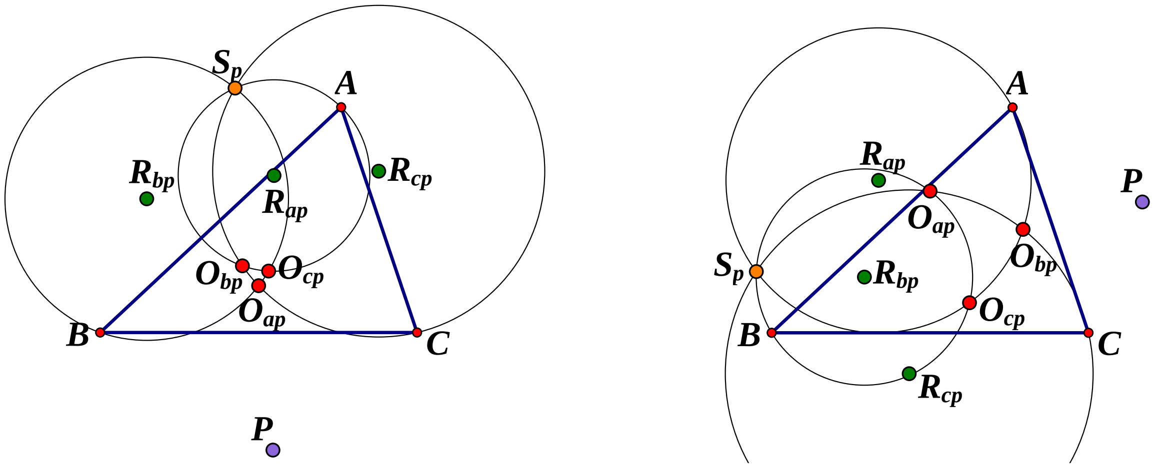


圖 31：動點 P 點對應到交點 S_p（作者自繪）

定理 5：對於不在 $\triangle ABC$ 的邊、頂點或外接圓上的動點 P，其構造的三圓之交點 S_p 恆落在 $\triangle ABC$ 的外接圓上。

證明：

1. 令有向角 $\angle BPC = \alpha$、$\angle CPA = \beta$、$\angle APB = r$，以下證明 $\angle CS_pB = 180° - \angle A$ 或 $\angle CS_pB = -\angle A$。由定理 3 得知 $\angle O_{cp}AO_{bp} = \angle A - \alpha + 180°$，得 $\angle O_{bp}S_pO_{cp} = \alpha - \angle A$。對同弧的圓周角 $\angle O_{cp}S_pB = \angle O_{cp}O_{ap}B$ 且 $\angle CS_pO_{bp} = \angle CO_{ap}O_{bp}$。又 $\angle CO_{ap}B = 360° - 2\alpha$ 且 $\angle O_{bp}O_{ap}O_{cp} = 180° - \angle BPC = 180° - \alpha$，得 $\angle CS_pO_{bp} + \angle O_{cp}S_pB = \angle CO_{ap}O_{bp} + \angle O_{cp}O_{ap}B = (360° - 2\alpha) - (180° - \alpha) = 180° - \alpha$，再得 $\angle CS_pB = \angle CS_pO_{bp} + \angle O_{cp}S_pB + \angle O_{bp}S_pO_{cp} = (180° - \alpha) + (\alpha - \angle A) = 180° - \angle A$。
2. 當交點 S_p 與 A 點 $\overline{BC}$ 的同側時，$\angle CS_pO_{bp} + \angle O_{cp}S_pB = -\alpha$，$\angle CS_pB = \angle CS_pO_{bp} + \angle O_{cp}S_pB + \angle O_{bp}S_pO_{cp} = (-\alpha) + (\alpha - \angle A) = -\angle A$。

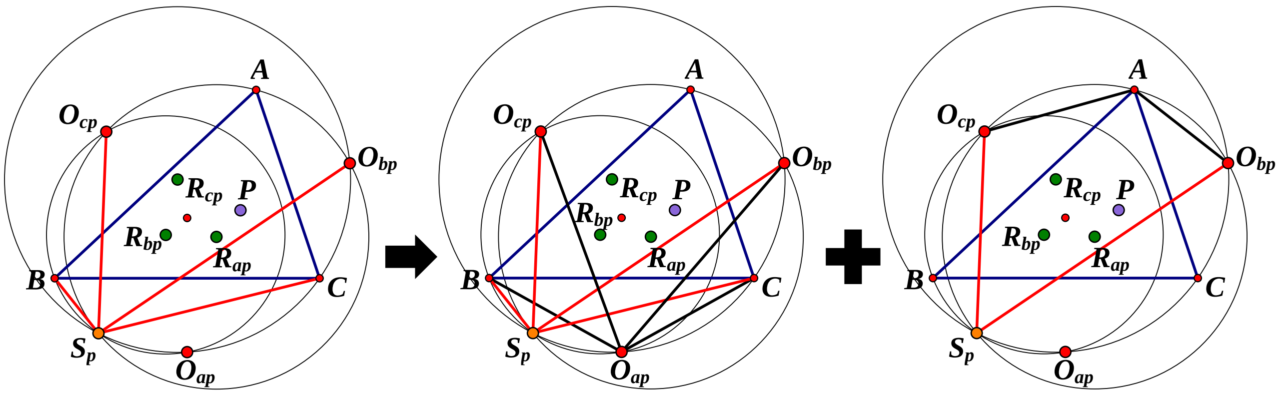


圖 32：三圓的交點 S_p 落在外接圓上（作者自繪）

■

本研究起初的條件是 $\triangle ABC$ 的外心與垂心，它們互為等角共軛點。我們好奇 $\triangle ABC$ 的任意一組等角共軛點 P 與 Q 是否也有漂亮的結果呢？令有向角 $\angle BPC=\alpha$、$\angle CPA=\beta$、$\angle APB=r$，再依據等角共軛定義可得 $\angle BQC=180°+\angle A-\alpha$、$\angle CQA=180°+\angle B-\beta$、$\angle AQB=180°+\angle C-r$。

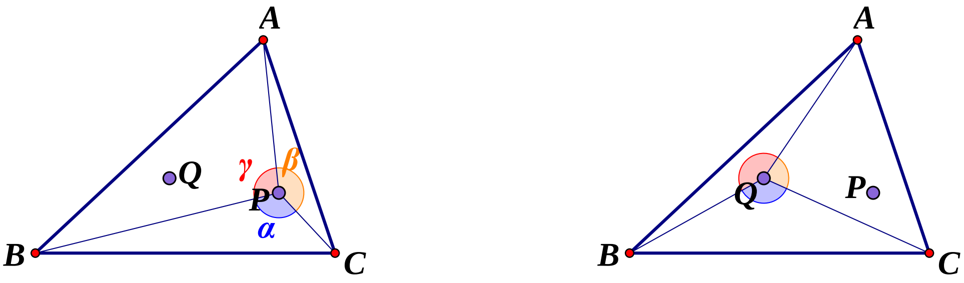


圖 33：等角共軛點角度關係式（作者自繪）

透過定理 3 和定理 5，我們可給出任意一組等角共軛點 P 與 Q 點的條件構造下的四圓 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$ 與 $\odot ABC$ 交於點 S_p，同樣 $\odot O_{cq}AO_{bq}$、$\odot O_{aq}BO_{cq}$、$\odot O_{bq}CO_{aq}$ 與 $\odot ABC$ 交於點 S_q，如下圖。

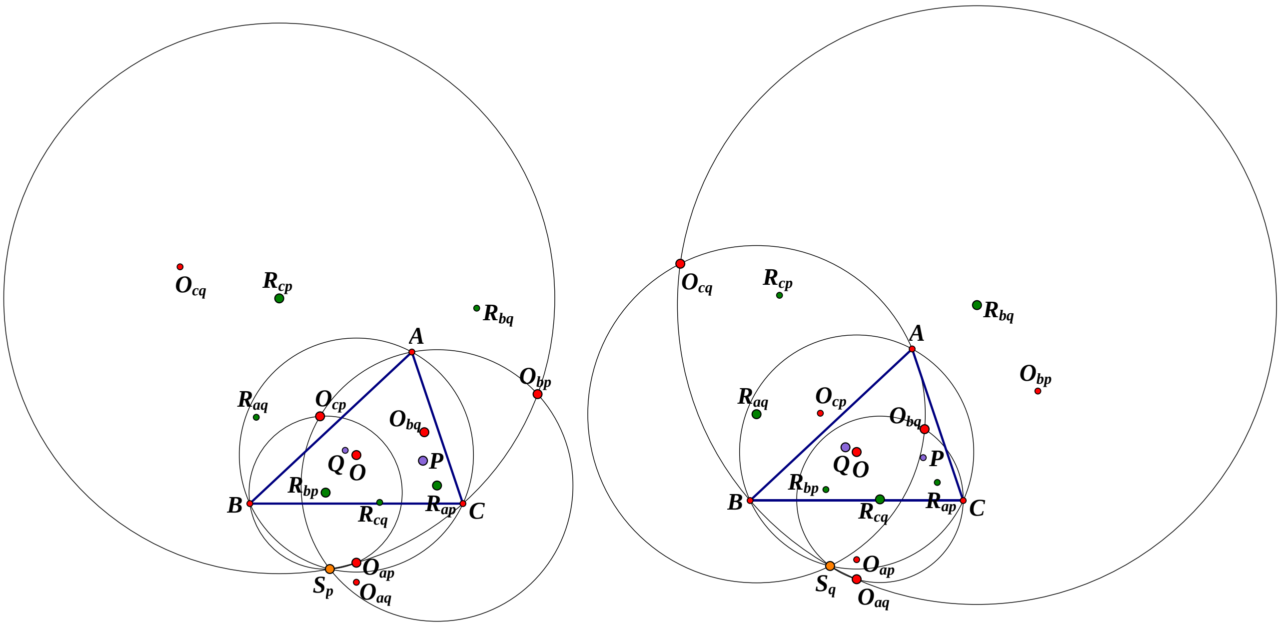


圖 34：兩組四圓共點（作者自繪）

透過兩組四圓共點的性質，我們就可以處理以下定理。

定理 6：對於任意一組等角共軛點 P 與 Q 點，皆有 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}\sim\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}\sim\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$。

證明：$\angle BPC=\alpha$、$\angle CPA=\beta$、$\angle APB=r$，由等角共軛可得 $\angle BQC=180°+\angle A-\alpha$、$\angle CQA=180°+\angle B-\beta$、$\angle AQB=180°+\angle C-r$。將連心線轉換為公弦，在 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$ 中，可得出 $\angle O_{ap}=180°-\alpha$、$\angle O_{bp}=180°-\beta$、$\angle O_{cp}=180°-r$。同理在 $\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$ 中，有 $\angle O_{aq}=180°-(180°+\angle A-\alpha)=\alpha-\angle A$、$\angle O_{bq}=\beta-\angle B$、$\angle O_{cq}=r-\angle C$。

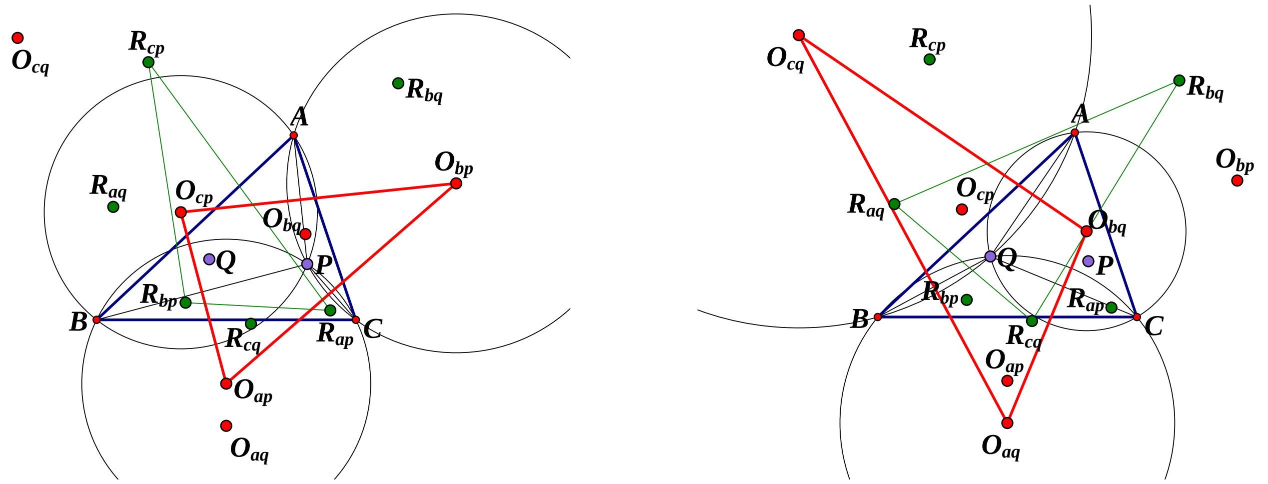


圖 35：$\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$ 與 $\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$ （作者自繪）

再利用四圓共點，在 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 中，$\angle R_{ap}=\angle O_{bp}S_pO_{cp}=180°-\angle O_{bp}AO_{cp}=180°-(180°+\angle A-\alpha)=\alpha-\angle A$、$\angle R_{bp}=\beta-\angle B$、$\angle R_{cp}=r-\angle C$。同理在 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 中，有 $\angle R_{aq}=180°-\alpha$、$\angle R_{bq}=180°-\beta$、$\angle R_{cq}=180°-r$。因此對於等角共軛點 P 與 Q，$\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}\sim\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}\sim\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$。

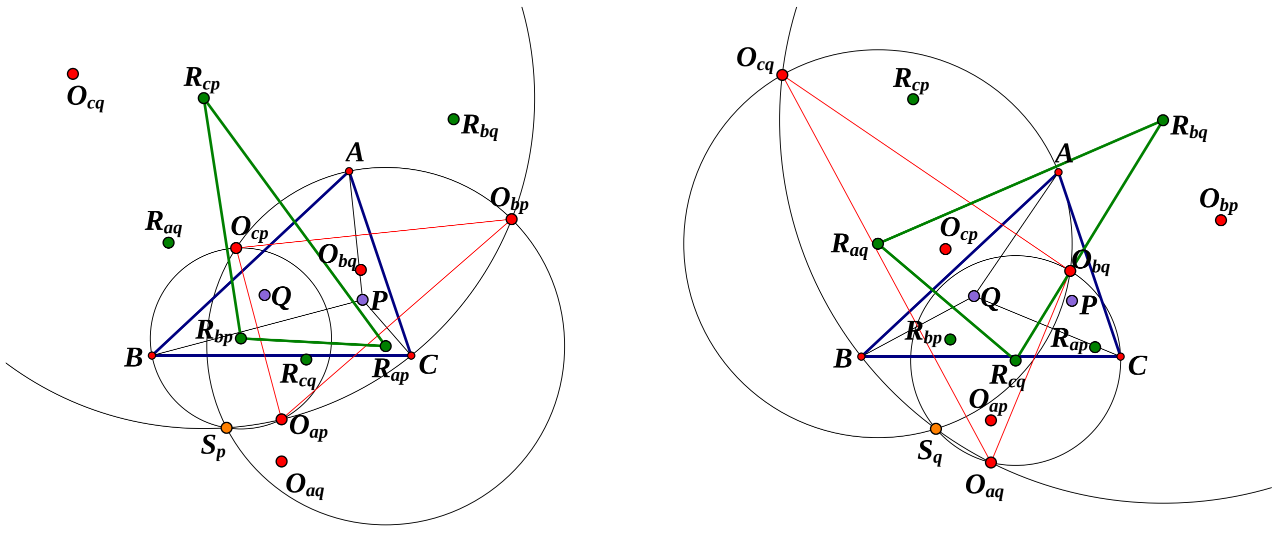


圖 36：$\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ （作者自繪）

■

定理 6 成功刻畫了一般化的理論：「對於任意一組的等角共軛點 P 與 Q 點，皆有

$\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp} \sim \triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp} \sim \triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$」。

對於這四個三角形 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$、$\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$、$\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$、$\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$，我們還發現另外一種非常有趣的關聯性「透視三角形 Perspective Triangles」。

由作圖方式可得 $\overleftrightarrow{O_{ap}O_{aq}}$、$\overleftrightarrow{O_{bp}O_{bq}}$、$\overleftrightarrow{O_{cp}O_{cq}}$ 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 的中垂線，因此 $\overleftrightarrow{O_{ap}O_{aq}}$、$\overleftrightarrow{O_{bp}O_{bq}}$、$\overleftrightarrow{O_{cp}O_{cq}}$ 交於 $\triangle ABC$ 的外心 O，這結果是顯然的，然而 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 卻也互相透視，透視中心也是 $\triangle ABC$ 的外心 O，這是很特殊的性質！除此之外，我們還發現 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp}、R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 這六點共圓！

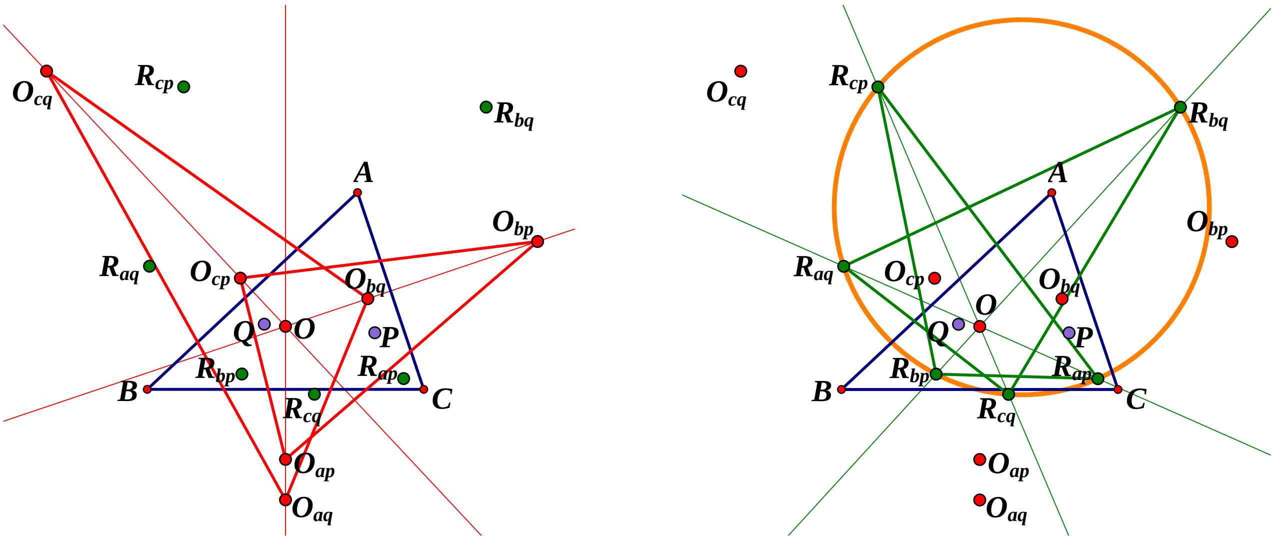


圖 37：$\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 透視及共圓（作者自繪）

證明 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 為透視三角形，等價證明這七圓 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$、$\odot O_{cq}AO_{bq}$、$\odot O_{aq}BO_{cq}$、$\odot O_{bq}CO_{aq}$ 與 $\odot ABC$ 交於一點。如欲證明 R_{ap}、O、R_{aq} 三點共線（兩條連心線 $\overleftrightarrow{R_{ap}O}$、$\overleftrightarrow{R_{aq}O}$ 重合），轉換為公弦後，因為 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{cq}AO_{bq}$、$\odot ABC$ 已經通過 A 點，所以等價證明這三個圓再交於異於 A 點的同一點（兩條公弦重合）。

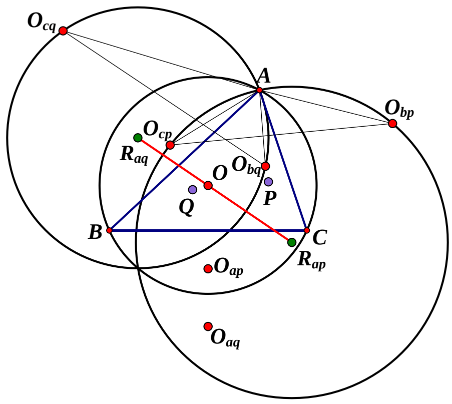


圖 38：證明分析（作者自繪）

有關證明 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 互相透視的工作，十分困難！我們花了兩個多月思考，一直無法突破，我們嘗試添加很多輔助

線，也模仿前面證明多圓共點的方法，然而卻無法將 P 點與 Q 點是等角共軛的條件有效利用。我們與指導老師討論後，發現關鍵的證明策略：由於等角共軛是對內角平分線的反射，我們關注本研究一開始的雞爪定理「$\triangle BIC$、$\triangle CIA$、$\triangle AIB$ 的外接圓，其圓心為 O_{ai}、O_{bi}、O_{ci} 在 $\triangle ABC$ 的外接圓」，結果等角共軛的條件轉換為反演點，我們巧妙解決困擾兩個多月的證明。

性質 6：$\odot O_{cp}AO_{bp}$ 與 $\odot O_{cq}AO_{bq}$ 互為關於 $\triangle ABC$ 的外接圓的反演像，其餘兩組圓同理互為反演像。

證明：考慮內心 I，作 $\odot BIC$、$\odot CIA$、$\odot AIB$，其圓心為 O_{ai}、O_{bi}、O_{ci}。令有向角 $\angle CPA = \beta$，由前可知 $\angle O_{bq}AC = \beta - 90° - \angle B$、$\angle CAO_{bi} = \frac{\angle B}{2}$、$\angle CAO_{bp} = \beta - 90°$，從而有 $\overline{AO_{bi}}$ 是 $\angle O_{bq}AO_{bp}$ 的內角平分線，又三點 O_{bp}、O_{bi}、O_{bq} 在 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑所在直線上，所以 O_{bp} 與 O_{bq} 互為反演點，同理 O_{cp} 與 O_{cq} 互為反演點。注意到 A 點在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，因此 $\odot O_{bp}AO_{cp}$ 與 $\odot O_{bq}AO_{cq}$ 互為關於 $\triangle ABC$ 的外接圓的反演像。根據定理 5，$\odot O_{cp}AO_{bp}$ 與 $\odot ABC$ 交於 S_p 點，又因為兩圓互為反演像，從而有 $\odot O_{cq}AO_{bq}$ 與 $\odot ABC$ 也交於同一點 S_p。

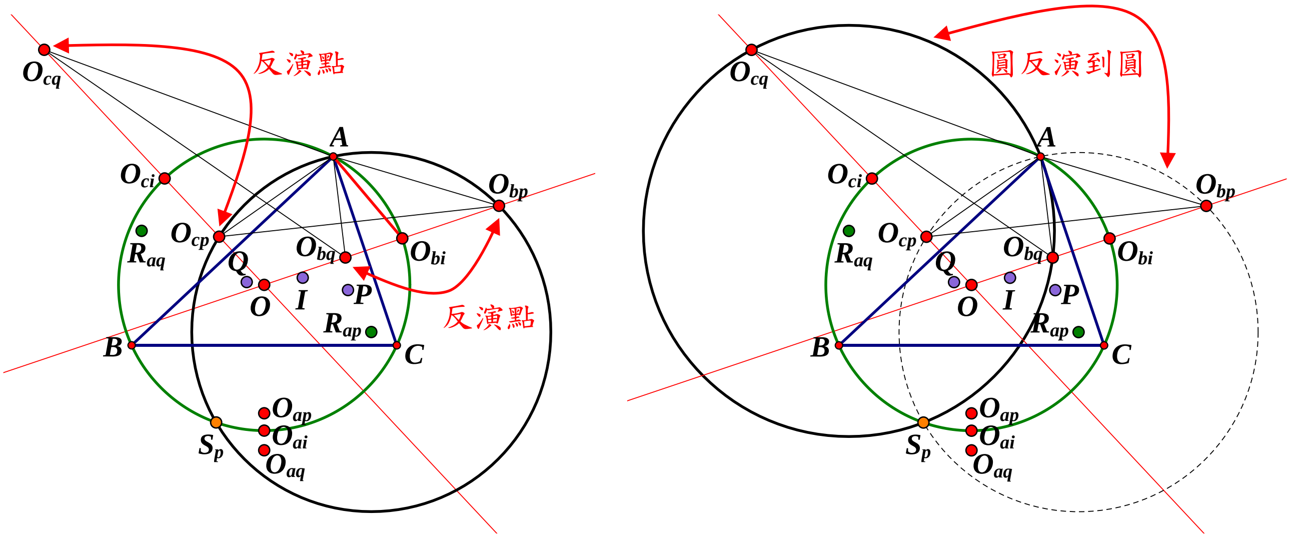


圖 39：反演（作者自繪）

■

根據性質 6，透過反演變換，我們可以得出七圓交於一點。

定理 7：$\odot AO_{bp}O_{cp}$、$\odot BO_{cp}O_{ap}$、$\odot CO_{ap}O_{bp}$ 與 $\odot AO_{bq}O_{cq}$、$\odot BO_{cq}O_{aq}$、$\odot CO_{aq}O_{bq}$ 與 $\odot ABC$ 七圓交於一點。

證明：利用性質 6 即可得。

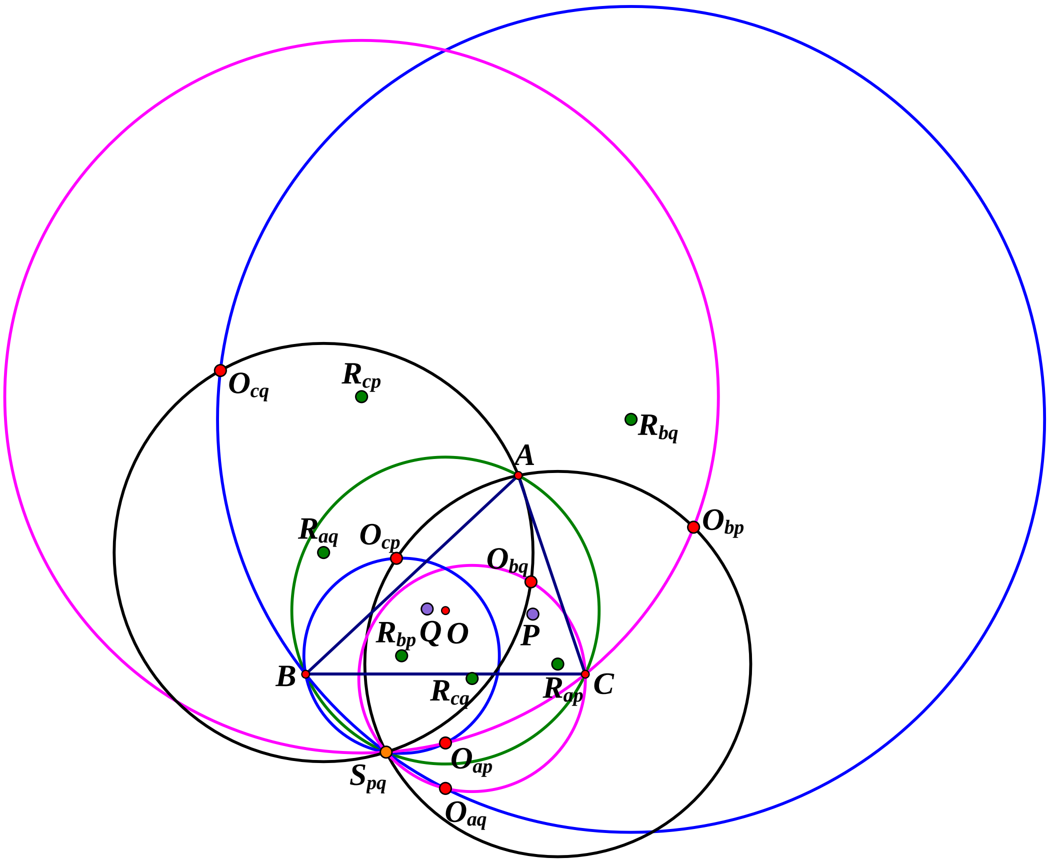


圖 40：七圓交於一點（作者自繪）

■

透過定理 7 的七圓交於一點，我們得出透視三角形定理。

定理 8：對於任意一組等角共軛點 P 與 Q 點，皆有 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$ 與 $\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$ 透視且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 透視。

證明：連心線 $\overleftrightarrow{R_{ap}O}$ 轉換為公弦 $\overleftrightarrow{S_{pq}A}$，連心線 $\overleftrightarrow{R_{aq}O}$ 也轉換為公弦也是 $\overleftrightarrow{S_{pq}A}$，所以 R_{ap}、O、R_{aq} 三點共線。同理，R_{bp}、O、R_{bq} 三點共線且 R_{cp}、O、R_{cq} 三點共線。

■

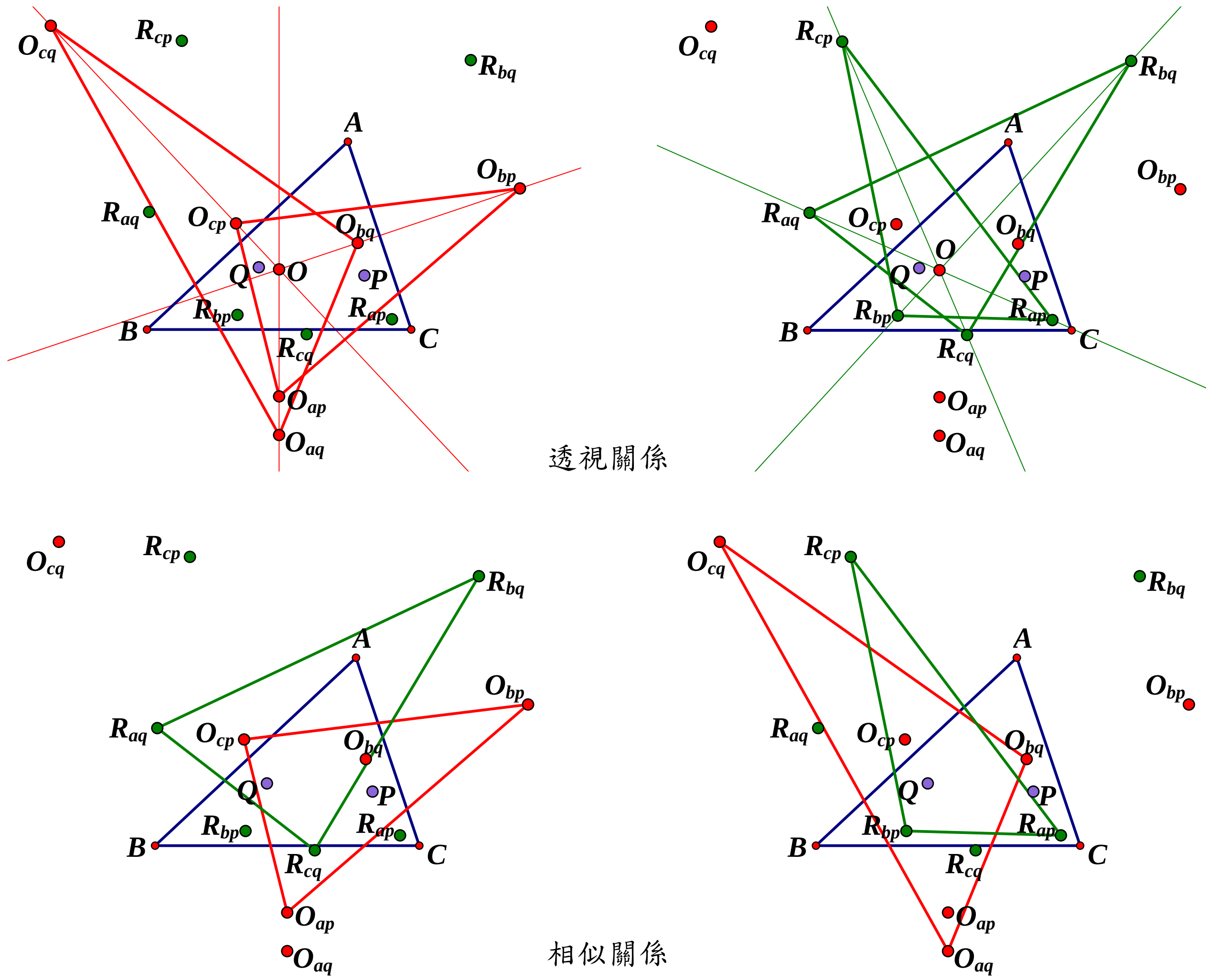


圖 41：四個連心線三角形的透視與相似（作者自繪）

接下來處理六個圓心 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp} 與 R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 六點共圓。考慮分次進行四點共圓來處理，如右圖我們一開始設定 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp} 與 R_{aq}，但是將連心線 $\overline{R_{aq}R_{bp}}$ 轉換為公弦之後無法處理，然而連心線 $\overline{R_{aq}R_{ap}}$ 轉換為公弦之後是可以處理的，因為 $\overline{R_{aq}R_{ap}}$ 會通過 O 點，因此必須更換策略。當 P 點構圖下的圓心和 Q 點構圖下的圓心相連時，必須經過 O 點才有用，於是我們證明四點 R_{ap}、R_{bp} 與 R_{aq} 與 R_{bq} 共圓，如下圖。

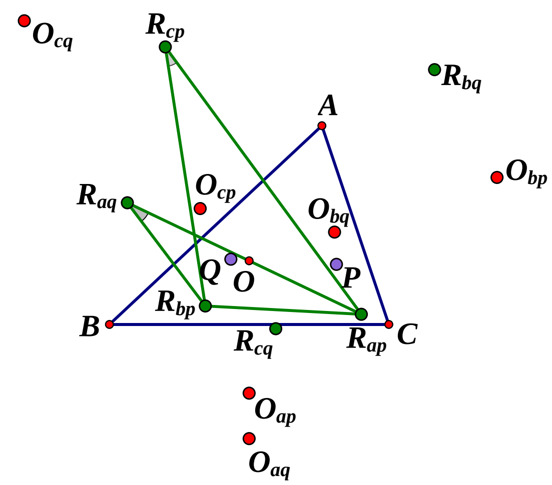


圖 42：原始策略（作者自繪）

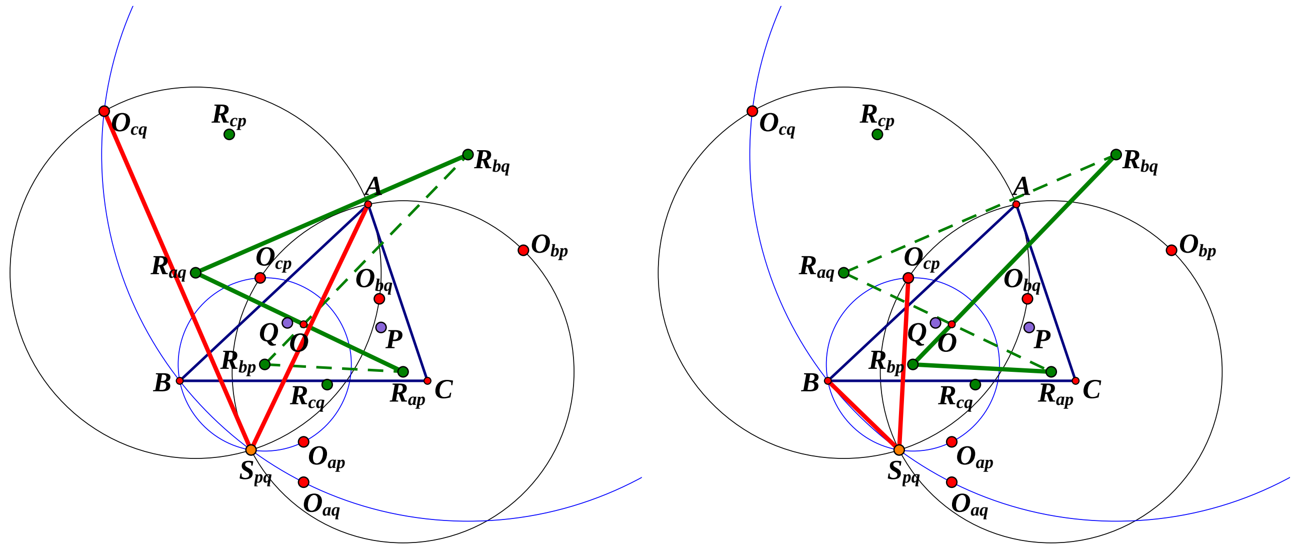


圖 43：改良策略 $\angle R_{aq}$ 與 $\angle R_{bp}$ 變換（作者自繪）

如上圖，我們可得出 $\angle R_{aq} = \angle AS_{pq}O_{cq}$ 且 $\angle R_{bp} = \angle O_{cq}S_{pq}B$，再根據等弧的圓周角 $\angle AS_{pq}O_{cq} = \angle AO_{bq}O_{cq}$ 且 $\angle O_{cq}S_{pq}B = \angle O_{cp}O_{ap}B$，所以我們只需要證明 $\angle AO_{bq}O_{cq}$ 與 $\angle O_{cp}O_{ap}B$ 相等。

我們發現美麗且重要的性質：$\triangle AO_{cq}O_{bq}$ 相似於 $\triangle PBC$！作 $\odot AQB$ 與 $\odot AQC$，得 $\angle AO_{bq}O_{cq} = \frac{\widehat{AQ}}{2}$，連接 $\overline{QC}$ 可得 $\angle ACQ = \frac{\widehat{AQ}}{2}$，因此 $\angle AO_{bq}O_{cq} = \angle ACQ$，又 P 點和 Q 點為等角共軛點，所以 $\angle ACQ = \angle PCB$，從而有 $\angle AO_{bq}O_{cq} = \angle PCB$，同樣方法可以得出 $\angle AO_{cq}O_{bq} = \angle PBC$，因此 $\triangle AO_{cq}O_{bq}$ 相似於 $\triangle PBC$。

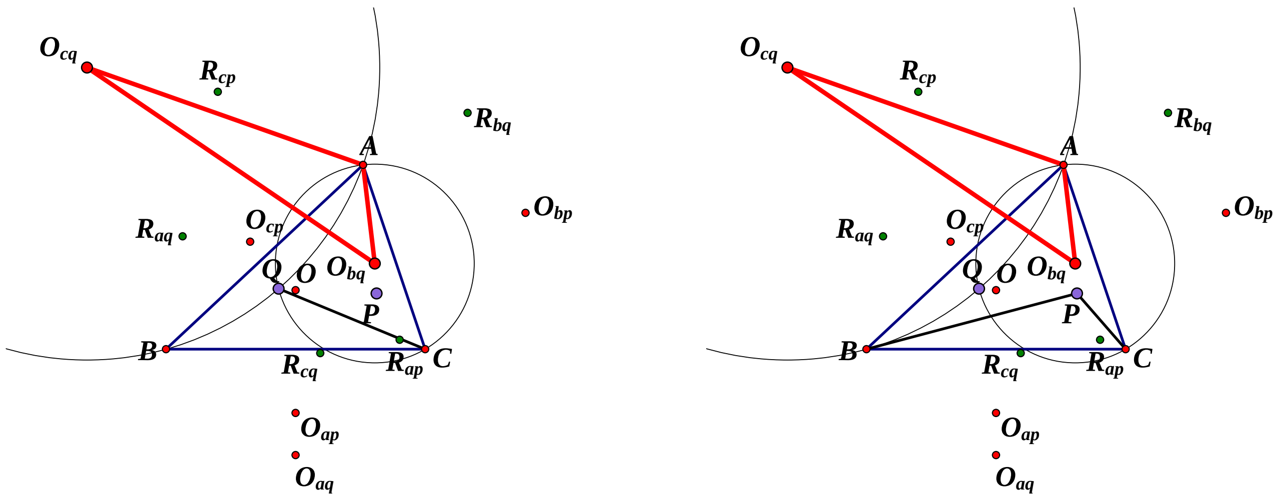


圖 44：$\triangle AO_{cq}O_{bq}$ 相似於 $\triangle PBC$（作者自繪）

同理有 $\triangle AO_{cp}O_{bp}$ 相似於 $\triangle QBC$，其餘兩個頂點可透過輪轉得出其他相似三角形。

定理 9：點 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp} 與 R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 六點共圓。

證明：由前討論可知 $\angle AO_{bq}O_{cq} = \angle PCB = \angle ACQ = \angle O_{cp}O_{ap}B$，可得 $\angle R_{aq} = \angle AS_{pq}O_{cq}$ 且 $\angle R_{aq} = \angle R_{bp}$，從而有四點 R_{ap}、R_{bp} 與 R_{aq} 與 R_{bq} 共圓，同理有四點 R_{bp}、R_{cp} 與 R_{bq} 與 R_{cq} 共圓，$\overline{R_{ap}O} \times \overline{R_{aq}O} = \overline{R_{bp}O} \times \overline{R_{bq}O} = \overline{R_{cp}O} \times \overline{R_{cq}O}$，因此點 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp} 與 R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 六點共圓（圓冪逆定理）。

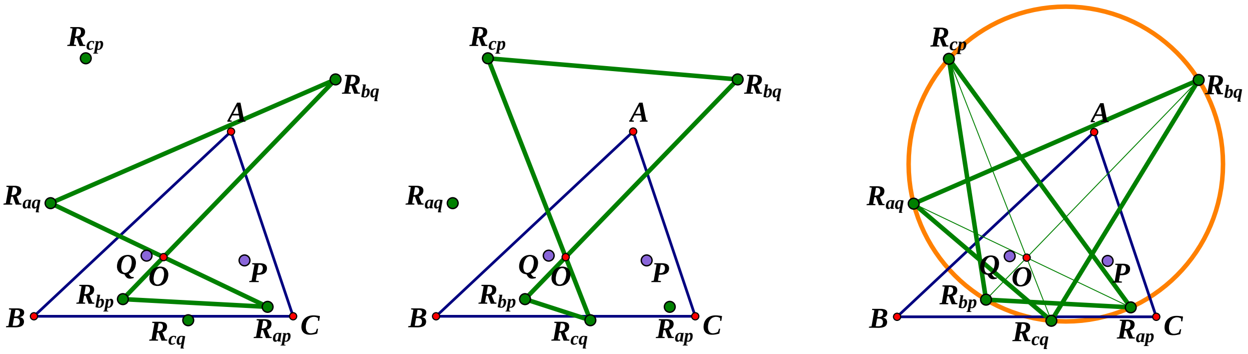


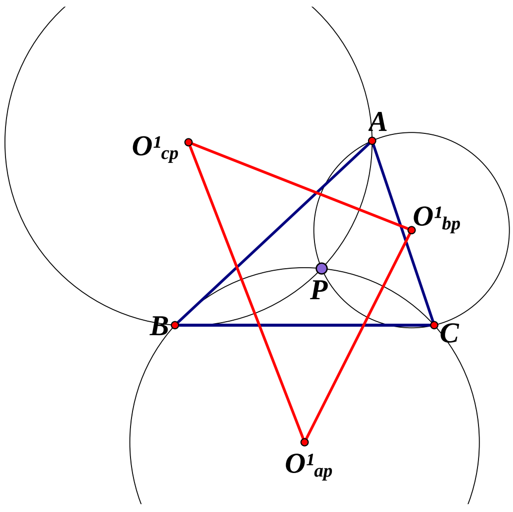
圖 45：六點共圓（作者自繪）

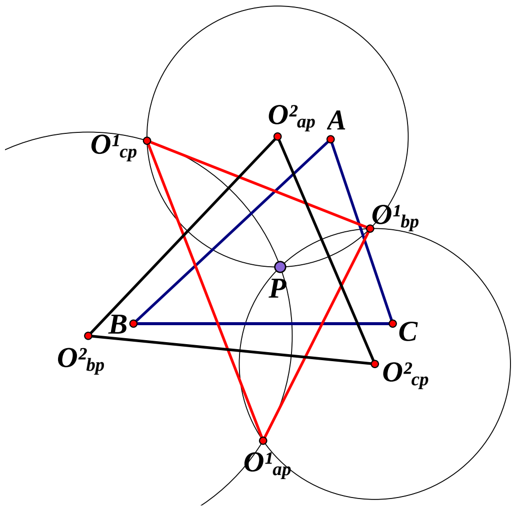
■

五、 一般化等角共軛點 P 與 Q 的迭作 $\triangle O_a^nO_b^nO_c^n$ 的循環相似性質

討論對於任意點 P，先以 $\triangle ABC$ 為參考三角形，做出第 1 層的 $\triangle O_{ap}^1O_{bp}^1O_{cp}^1$；再以 $\triangle O_{ap}^1O_{bp}^1O_{cp}^1$ 為參考三角形，做出其第 2 層的 $\triangle O_{ap}^2O_{bp}^2O_{cp}^2$；繼續以 $\triangle O_{ap}^2O_{bp}^2O_{cp}^2$ 為參考三角形，做出其第 3 層的 $\triangle O_{ap}^3O_{bp}^3O_{cp}^3$；......重複迭代作圖。

我們發現有意思的結果「層數模 3 同餘的三角形會相似」，即 $\triangle O_{ap}^3O_{bp}^3O_{cp}^3$ 相似於 $\triangle ABC$，$\triangle O_{ap}^4O_{bp}^4O_{cp}^4$ 相似於 $\triangle O_{ap}^1O_{bp}^1O_{cp}^1$，$\triangle O_{ap}^5O_{bp}^5O_{cp}^5$ 會相似於 $\triangle O_{ap}^2O_{bp}^2O_{cp}^2$。





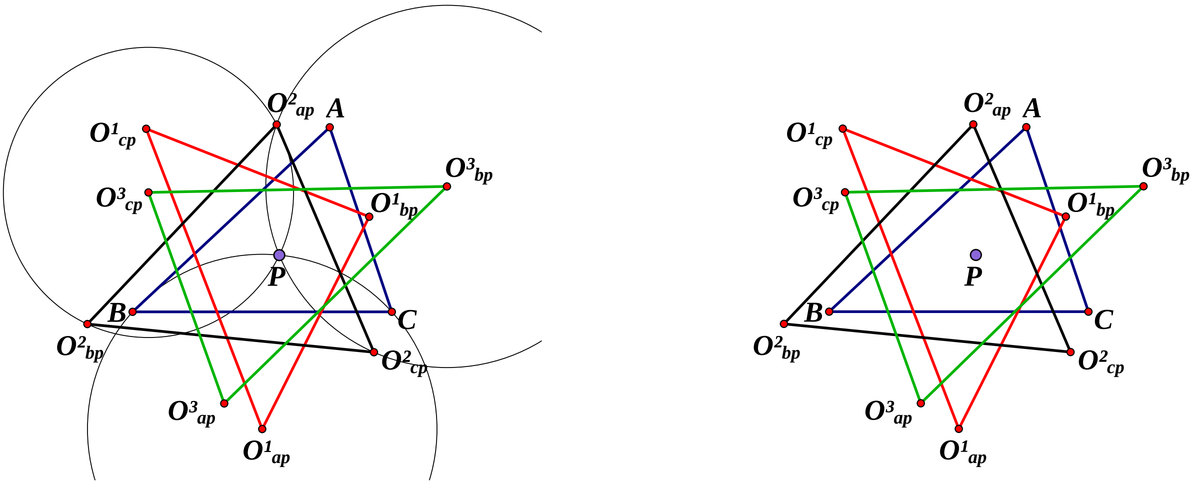


圖 46：迭作 $\triangle O_aO_bO_c$（作者自繪）

如下圖，令有向角 $\angle BPC=\alpha$、$\angle CPA=\beta$、$\angle APB=\gamma$，$\angle CBP=\alpha_b$、$\angle PCB=\alpha_c$，$\angle ACP=\beta_c$、$\angle PAC=\beta_a$，$\angle BAP=\gamma_a$、$\angle PBA=\gamma_b$。

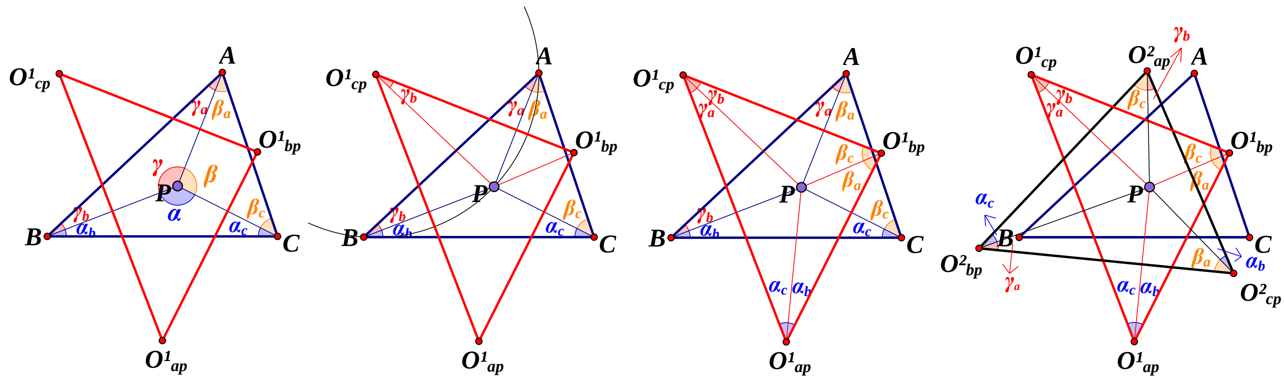


圖 47：迭作三角形的角度分析（作者自繪）

因為連心線與公弦垂直可得第 1 層三角形的 $\angle O^1_{ap}=\alpha_b+\alpha_c$、$\angle O^1_{bp}=\beta_c+\beta_a$、$\angle O^1_{cp}=\gamma_a+\gamma_b$。為了處理第 2 層，連接 $\overline{PO^1_{ap}}$、$\overline{PO^1_{bp}}$、$\overline{PO^1_{cp}}$，注意到將圓周角轉換到半個圓心角，可得 $\angle PO^1_{cp}O^1_{bp}=\angle PBA=\gamma_b$，其餘角同理可得，於是 $\angle O^2_{ap}=\beta_c+\gamma_b$、$\angle O^2_{bp}=\gamma_a+\alpha_c$、$\angle O^2_{cp}=\alpha_b+\beta_a$。最後給出第 3 層三角形的 $\angle O^3_{ap}=\beta_a+\gamma_a=\angle A$、$\angle O^3_{bp}=\gamma_b+\alpha_b=\angle B$、$\angle O^3_{cp}=\alpha_c+\beta_c=\angle C$（註：我們雖然假設兩個角的兩邊相互垂直時，其角度互補，但是當 P 點在三角形外部時，其角度也有可能相等，討論方式相同，就此省略）。

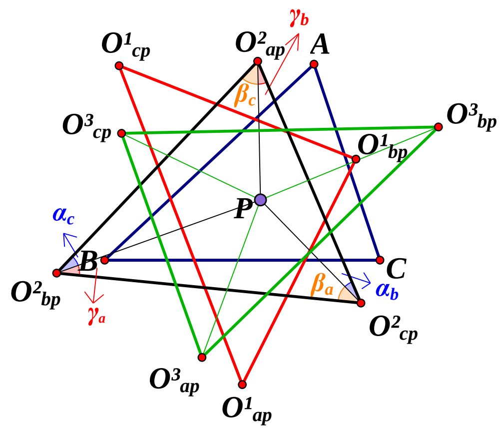


圖 48：迭代（作者自繪）

考慮於點 P 的等角共軛點 Q，則可給出以下非常有趣的循環相似定理。

定理 10：對於任意等角共軛點 P 與 Q 點，皆有迭作三角形的循環相似關係，如下圖。

證明：由前面分析與討論即可證明，在此省略。

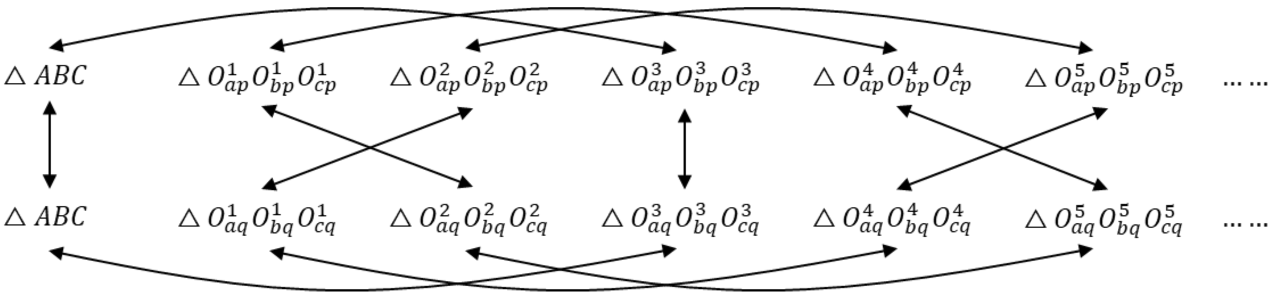


圖 49：等角共軛點的迭作三角形（箭頭表示相似關係）（作者自繪）

■

由性質 1 我們知道 P 點為 $\triangle ABC$ 的垂心時，$\triangle ABC$ 全等於 $\triangle O^1_{b\omega}O^1_{c\omega}O^1_{a\omega}$，但是第 2 層的 $\triangle O^2_{b\omega}O^2_{c\omega}O^2_{a\omega}$ 不會相似或全等於 $\triangle ABC$。我們好奇「存不存在迭代的每一個連心線三角形都會相似於 $\triangle ABC$ 呢？」利用前面分析，發現有兩個點滿足條件：第一布洛卡點 Ω 與第二布洛卡點 Ω'，即 $\triangle ABC \sim \triangle O^1_{b\omega}O^1_{c\omega}O^1_{a\omega} \sim \triangle O^2_{c\omega}O^2_{a\omega}O^2_{b\omega} \sim \triangle O^3_{a\omega}O^3_{b\omega}O^3_{c\omega}$ 且 $\triangle ABC \sim \triangle O^1_{c\omega'}O^1_{a\omega'}O^1_{b\omega'} \sim \triangle O^2_{b\omega'}O^2_{c\omega'}O^2_{a\omega'} \sim \triangle O^3_{a\omega'}O^3_{b\omega'}O^3_{c\omega'}$。有趣的是點 Ω 也是所有 $\triangle O^n_{a\omega}O^n_{b\omega}O^n_{c\omega}$ 的第一布洛卡點；點 Ω' 也是所有 $\triangle O^n_{a\omega'}O^n_{b\omega'}O^n_{c\omega'}$ 的第二布洛卡點。

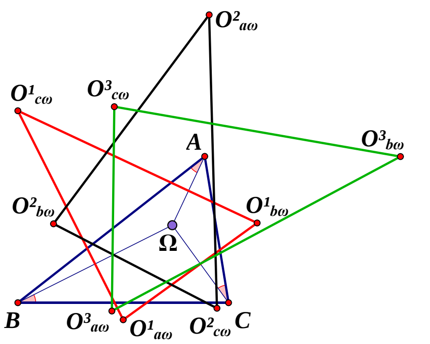


圖 50-1：第一布洛卡點 Ω（作者自繪）

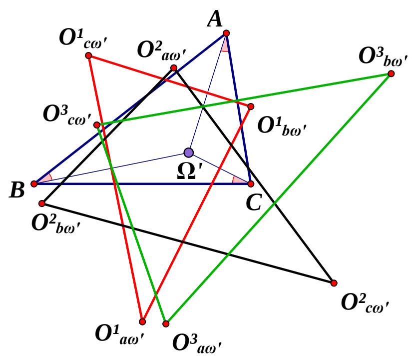


圖 50-2：第二布洛卡點 Ω′（作者自繪）

伍、 結論

一、 垂心與外心條件下，$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$、$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的性質

對於任意 $\triangle ABC$，作其垂心和外心，分別考慮其與 $\triangle ABC$ 的三頂點構成的子三角形之三個外心 O_{ah}、O_{bh}、O_{ch} 以及 O_{ao}、O_{bo}、O_{co}，發現 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於 $\triangle ABC$ 且 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 會相似於垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$。

二、 垂心與外心條件下，$\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 的性質

在垂心與外心條件下，$\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 三圓交於一點，有趣的是，它們的連心線三角形 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 相似於 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$，同時 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 會相似於 $R_{ah}R_{bh}R_{ch}$。值得一提的是，我們發現 $\triangle ABC$ 的外心是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心，同時也是 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的內心或旁心；$\triangle ABC$ 的外心是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心或旁心，同時也是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的垂心。

三、 一般化三圓交於一點的幾何結構

我們發現三圓交於一點是核心的性質，於是得到一般化靈感，考慮平面上任意一點 P 與 $\triangle ABC$ 的三頂點構成的子三角形之三個外接圓 $\odot BPC$、$\odot CPA$、$\odot APB$ 的圓心 O_{ap}、O_{bp}、O_{cp} 點，其與 A、B、C 點圍成一個封閉六邊形，我們給出其一組三個不相鄰內角的度數和為 360 度，則三個外接圓交於一點。更推廣到只要是任意封閉的六邊形，其一組三個不相鄰內角的度數和若為 360 度，則會三圓交於一點，這是非常重要的發現。

四、 一般化等角共軛點 P 與 Q 條件下的多圓構圖定理

把垂心和外心推廣為任意一組等角共軛點 P 與 Q，透過兩組的三圓交於一點，再利用連心線與公弦的轉換，可以發現它們所構成的連心線三角形也會相似。然而，難度較高但有趣的是，我們還發現它們之間的其他關聯性，也就是 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 和 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 為透視三角形且六個頂點共圓，為了解決這個問題，我們利用了反演變換刻劃了 $\odot AO_pO_p$ 與 $\odot AO_qO_q$ 互為反演像（其餘兩組三角形同理），最後給出美麗的七圓交於一點，從而刻劃出 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 和 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 為透視三角形，其六個頂點共圓。

五、 一般化等角共軛點 P 與 Q 條件下迭作 $\triangle O_aO_bO_c$ 的循環相似性質

考慮重複迭作 $\triangle O_aO_bO_c$，利用前面的性質，我們給出了不同層的 $\triangle O_aO_bO_c$ 的相似關係，再針對等角共軛點 P 與 Q 條件的構圖，也給出彼此的循環相似性質。

陸、 參考文獻

[1] *Incenter/Excenter Lemma* (n.d.). AoPS Online. https://reurl.cc/OYLKLv

[2] Pericles Papadopoulos (2024). Problem 4977. *Crux Mathematicorum*, *50* (8), 412.

[3] 嚴鎮軍（2002）。反射和反演。臺北市，九章出版社。

【評語】030422

從雞爪定理出發，將內心、外心、垂心等不同形心作推廣並得其間的關聯性,也將三圓交於一點推廣到七圓交於一點及等角共軛點的多圓共點性質，作者並應用所得的結果解決 Crux Mathematicorum (2024)的一道問題，作者們展現很不錯的推理及洞察力，內容也具一定的研究程度，值得鼓勵與肯定。未來或許可從解析幾何或一些實際問題的應用，可更具跨域的價值。

作品海報

從雞爪定理發想

壹、前言

本研究發想自常見的數學競賽解題工具「雞爪定理」──$\triangle ABC$ 的內心與三頂點構成的子三角形之三個外心落在其外接圓上，我們將條件更換為其他形心 X，創新探討其與三頂點構成的子三角形之三個外心 O_{ax}、O_{bx}、O_{cx} 的性質。再進一步構造 $\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$的圓心為 R_{ax}、R_{bx}、R_{cx}，刻劃 $\triangle O_{ax}O_{bx}O_{cx}$ 與 $\triangle R_{ax}R_{bx}R_{cx}$ 的關聯性。

貳、預備性質

預備性質 1：內心、外心、垂心角度性質。

預備性質 2 (反演)：以 O 點為圓心，r 為半徑的圓，對平面上任意 P 點，在 $\overrightarrow{OP}$ 上取點 P'，使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$

$\Leftrightarrow \overline{BP}:\overline{BP'}=\overline{AP}:\overline{AP'}$

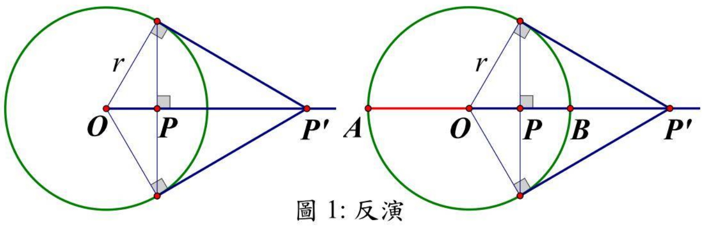


圖 1: 反演

參、研究過程與結果

一、$\triangle O_{ax}O_{bx}O_{cx}$ 與原三角形 $\triangle ABC$ 的關聯

性質 1：垂心條件下，$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於 $\triangle ABC$。

性質 2：外心條件下，$\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 相似於 $\triangle H_aH_bH_c$（垂足三角形）。

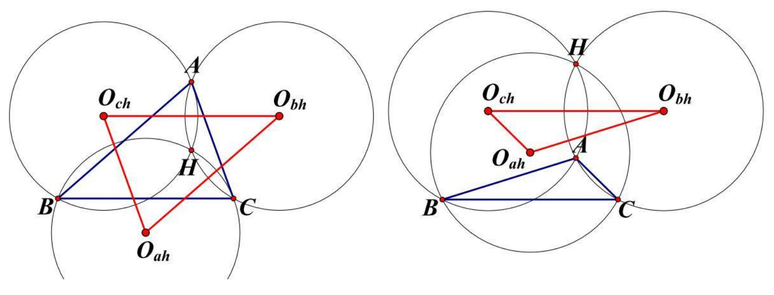


圖 2: $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$

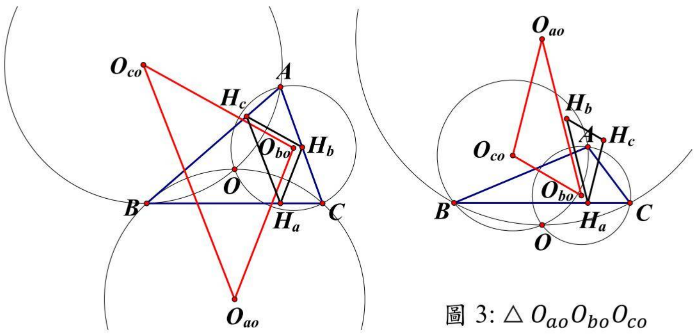


圖 3: $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$

二、垂心與外心條件下的三圓交於一點

性質 3：垂心條件下，$\odot AO_{bh}O_{ch}$、$\odot BO_{ch}O_{ah}$、$\odot CO_{ah}O_{bh}$ 三圓交於一點。

性質 4：外心條件下，$\odot AO_{bo}O_{co}$、$\odot BO_{co}O_{ao}$、$\odot CO_{ao}O_{bo}$ 三圓交於一點。

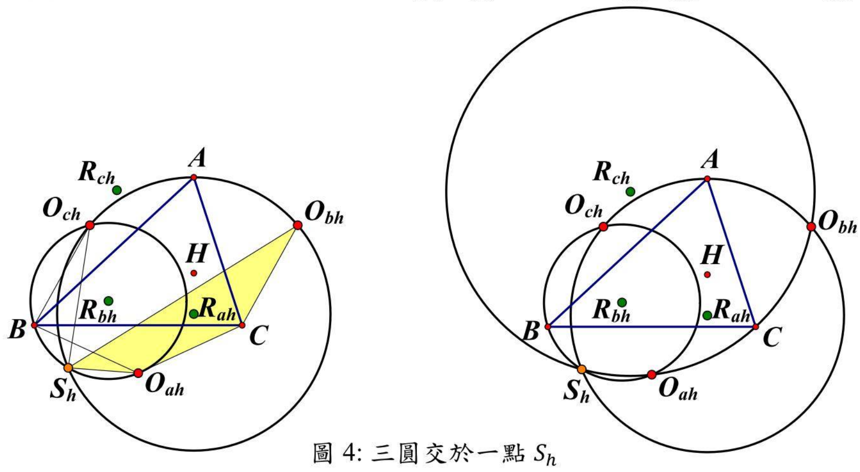


圖 4: 三圓交於一點 S_h

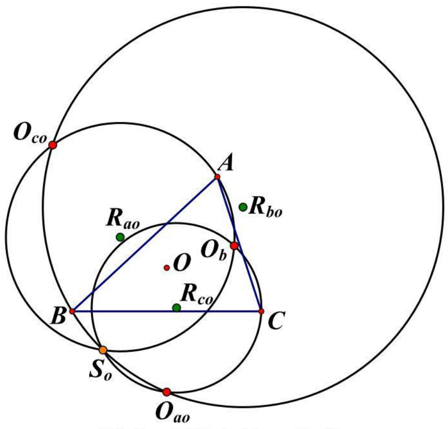


圖 5: 三圓交於一點 S_o

三、垂心與外心條件下的連心線三角形的關聯性

我們考慮將連心線轉換為公弦，再利用前面的三圓交於一點性質為工具進行刻劃。

定理 1：$\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}\sim\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 且 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}\sim\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$。

定理 2：$\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心，也是 $\triangle R_{ah}R_{bh}R_{ch}$ 的內心（或旁心）。

$\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心（或旁心），也是 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$ 的垂心。

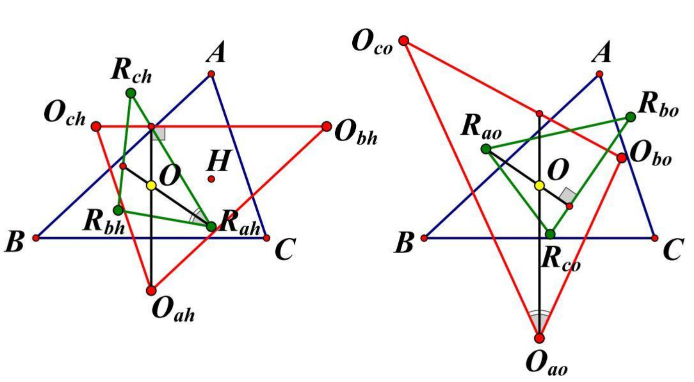


圖 6: 連心線三角形關聯性（銳角）

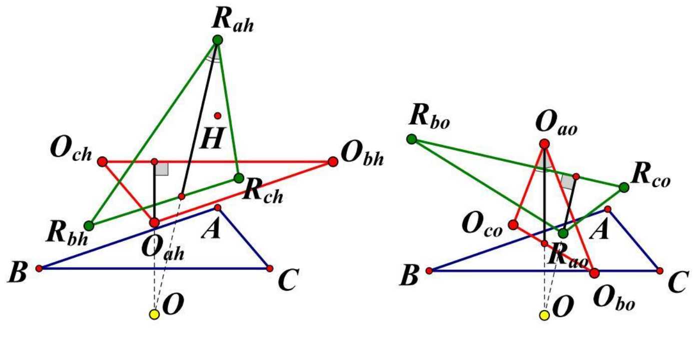


圖 7: 連心線三角形關聯性（鈍角）

四、一般化「三圓交於一點」的幾何結構

定理 4：對於平面上封閉的六邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，若一組非相鄰內角（可大於 180 度）$\angle P_1+\angle P_3+\angle P_5=360°$，則 $\odot P_2P_1P_6$、$\odot P_4P_3P_2$、$\odot P_6P_5P_4$ 三圓交於一點。

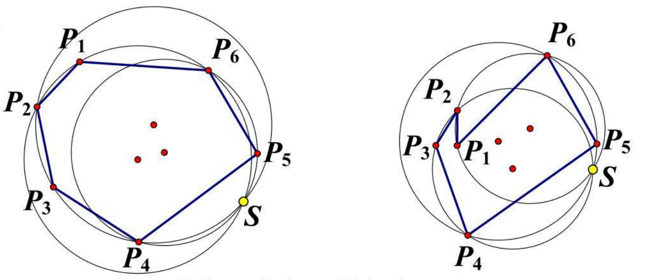


圖 8: 一般化三圓交於一點

本研究作品說明書與海報之圖片皆為作者以 GSP 軟體繪製

五、一般化：等角共軛點 P 和 Q 的多圓構圖

令有向角 $\angle BPC=\alpha$、$\angle CPA=\beta$、$\angle APB=r$，從而得出
$\angle O_{cp}AO_{bp}=\angle A-\alpha+180°$、
$\angle O_{ap}BO_{cp}=\angle B-\beta+180°$、
$\angle O_{bp}CO_{ap}=\angle C-\gamma+180°$；
再考慮 P 點關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Q，則有
$\angle O_{cq}AO_{bq}=\alpha$、$\angle O_{aq}BO_{cq}=\beta$、$\angle O_{bq}CO_{aq}=\gamma$。

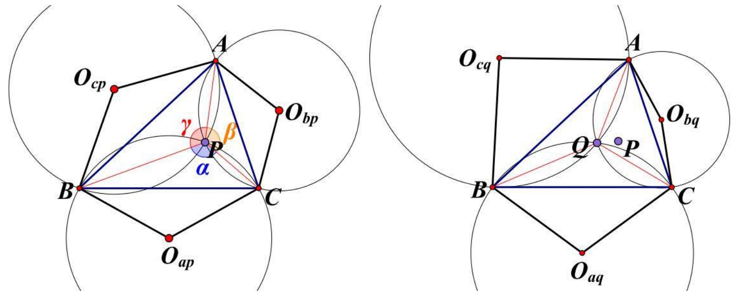


圖 9: 等角共軛

定理 5：動點 P 構造的三圓之交點 S_p 恆落在 $\triangle ABC$ 的外接圓上。
證明：根據定理 4 可知三圓交於一點，再利用多圓間的圓周角轉換證明 $\angle CS_pB=180°-\angle A$ 或 $\angle CS_pB=-\angle A$。
定理 6：對於等角共軛點 P 與 Q 點，皆有 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}\sim\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}\sim\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$。

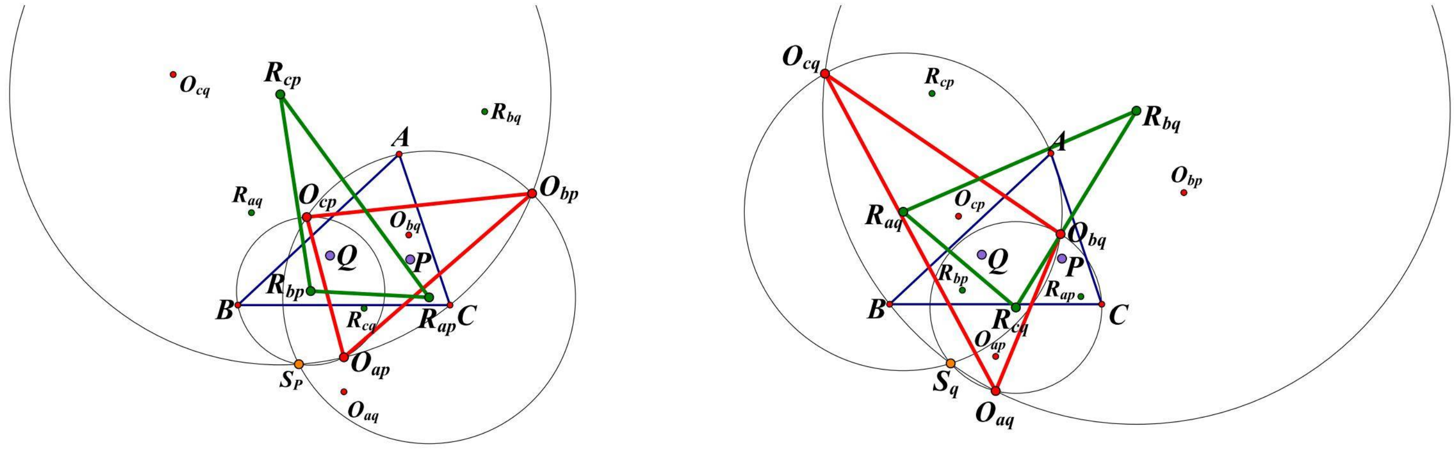


圖 10: $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}\sim\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$ 且 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}\sim\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$

觀察、討論分析

我們持續刻劃更多 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$、$\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$、$\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$、$\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 的關聯性，發現了有趣的現象，S_p 點和 S_q 點會重合，也就是 $\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$、$\odot O_{cq}AO_{bq}$、$\odot O_{aq}BO_{cq}$ 與 $\odot O_{bq}CO_{aq}$ 與 $\odot ABC$ 七圓交於一點！

性質 6：$\odot O_{cp}AO_{bp}$ 與 $\odot O_{cq}AO_{bq}$ 互為關於 $\triangle ABC$ 的外接圓的反演像，其餘兩組圓同理互為反演像。
證明：考慮內心 I，作 $\odot BIC$、$\odot CIA$、$\odot AIB$，其圓心為 O_{ai}、O_{bi}、O_{ci}。計算角度後，可得出 $\overline{AO_{bi}}$ 是 $\angle O_{bq}AO_{bp}$ 的內角平分線，又三點 O_{bp}、O_{bi}、O_{bq} 在 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑所在直線上，所以 O_{bp} 與 O_{bq} 互為反演點，同理 O_{cp} 與 O_{cq} 互為反演點。

定理 7：$\odot O_{cp}AO_{bp}$、$\odot O_{ap}BO_{cp}$、$\odot O_{bp}CO_{ap}$、$\odot O_{cq}AO_{bq}$、$\odot O_{aq}BO_{cq}$、$\odot O_{bq}CO_{aq}$ 與 $\odot ABC$ 交於一點。

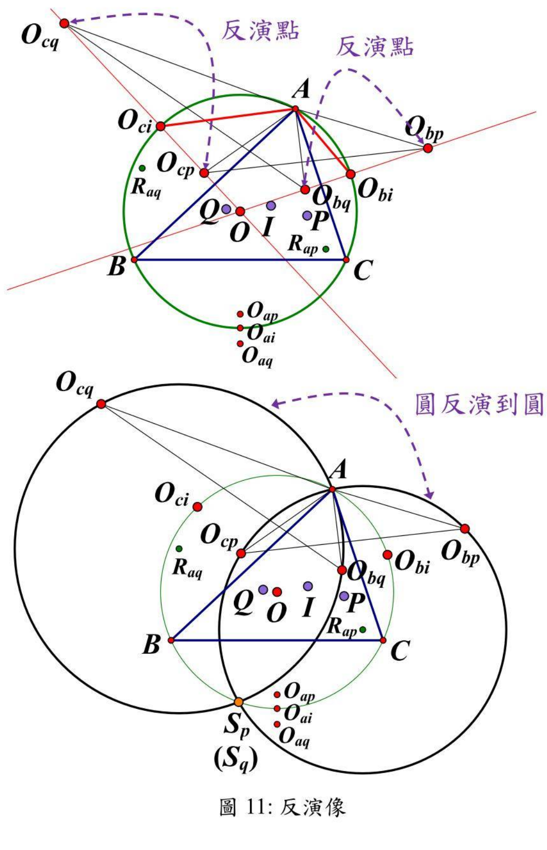


圖 11: 反演像

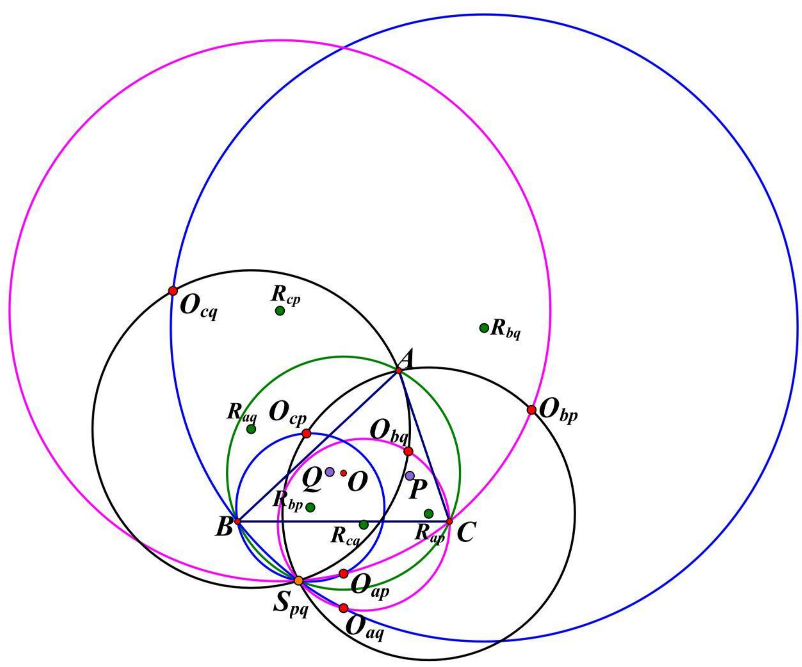


圖 12: 七圓交於一點

有趣的是，利用七圓交於一點定理可給出以下「透視」定理。
定理 8：對於任意等角共軛點 P 與 Q 點，皆有 $\triangle O_{ap}O_{bp}O_{cp}$ 與 $\triangle O_{aq}O_{bq}O_{cq}$ 透視且 $\triangle R_{ap}R_{bp}R_{cp}$ 與 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 透視，其透視中心皆為 O 點。

定理 9：點 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp} 與 R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 六點共圓。

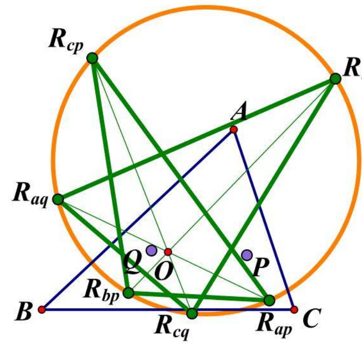


圖 13: 透視與六點共圓

六、一般化：等角共軛點 P 和 Q 的迭作 $\triangle O_a^n O_b^n O_c^n$ 的循環相似性質

令有向角 $\angle BPC=\alpha$、$\angle CPA=\beta$、$\angle APB=\gamma$
$\angle CBP=\alpha_b$、$\angle PCB=\alpha_c$、$\angle ACP=\beta_c$
$\angle PAC=\beta_a$、$\angle BAP=\gamma_a$、$\angle PBA=\gamma_b$

定理 10：對於任意等角共軛點 P 與 Q 點，皆有迭作三角形的循環相似關係，如下圖。
圖中的箭頭 ↔ 表示相似關係

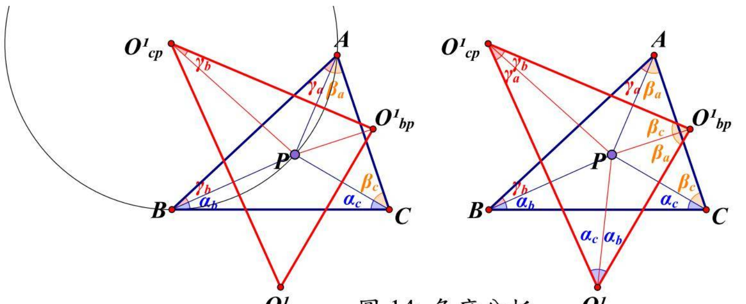


圖 14: 角度分析

P 點構圖	$\triangle ABC$	$\triangle O_{ap}^1O_{bp}^1O_{cp}^1$	$\triangle O_{ap}^2O_{bp}^2O_{cp}^2$	$\triangle O_{ap}^3O_{bp}^3O_{cp}^3$	$\triangle O_{ap}^4O_{bp}^4O_{cp}^4$	$\triangle O_{ap}^5O_{bp}^5O_{cp}^5$	……
Q 點構圖	$\triangle ABC$	$\triangle O_{aq}^1O_{bq}^1O_{cq}^1$	$\triangle O_{aq}^2O_{bq}^2O_{cq}^2$	$\triangle O_{aq}^3O_{bq}^3O_{cq}^3$	$\triangle O_{aq}^4O_{bq}^4O_{cq}^4$	$\triangle O_{aq}^5O_{bq}^5O_{cq}^5$	……

圖 15: 等角共軛點的迭作三角形

性質 11：第一布洛卡點 Ω 與第二布洛卡點 Ω' 迭代
$\triangle ABC \sim \triangle O_{b\omega}^1O_{c\omega}^1O_{a\omega}^1 \sim \triangle O_{c\omega}^2O_{a\omega}^2O_{b\omega}^2 \sim \triangle O_{a\omega}^3O_{b\omega}^3O_{c\omega}^3$
$\triangle ABC \sim \triangle O_{c\omega'}^1O_{a\omega'}^1O_{b\omega'}^1 \sim \triangle O_{b\omega'}^2O_{c\omega'}^2O_{a\omega'}^2 \sim \triangle O_{a\omega'}^3O_{b\omega'}^3O_{c\omega'}^3$

點 Ω 是所有 $\triangle O_{a\omega}^nO_{b\omega}^nO_{c\omega}^n$ 的第一布洛卡點
點 Ω' 是所有 $\triangle O_{a\omega'}^nO_{b\omega'}^nO_{c\omega'}^n$ 的第二布洛卡點

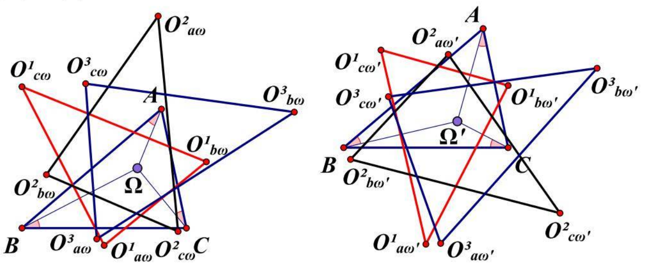


圖 16: 布洛卡點迭代作圖

肆、討論與應用

2024 年 10 月份的加拿大數學雜誌 Crux Mathematicorum 的數學題目 4977 題，我們發現應用本研究的定理 4 可以解決此問題！

(1) The circles FI_aE, FI_bD and EI_cD concur at a point S.
(2) The circles I_bFI_a, I_aEI_c and I_cDI_b concur at a point T.

應用本研究定理 4，我們只需要討論六邊形 $I_aFI_bDI_cE$ 的一組非相鄰內角相加為 360 度即可。值得一提的是，可以再將原問題繼續推廣到外心、垂心的條件。

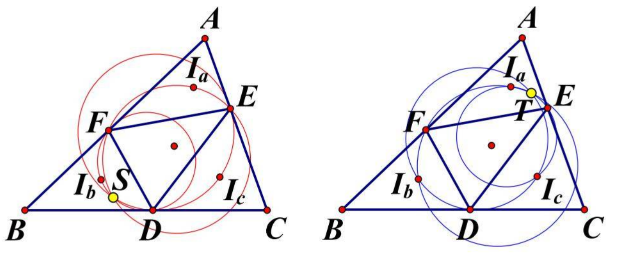


圖 17: Crux Math Problem 4977

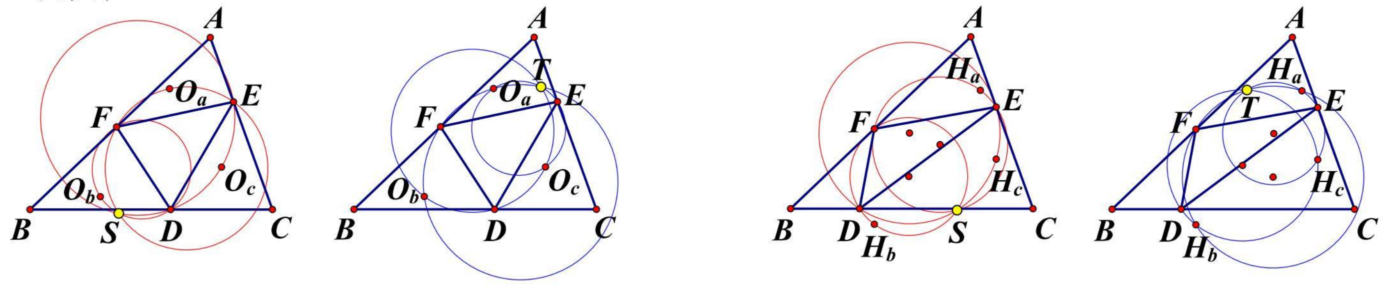


圖 18: 推廣 Crux Math Problem 4977

伍、結論

一、垂心與外心條件下，$\triangle O_{ax}O_{bx}O_{cx}$ 與原三角形 $\triangle ABC$ 的關聯

對於任意 $\triangle ABC$，作其垂心和外心，發現 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 全等於 $\triangle ABC$ 且 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 會相似於垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$。

二、垂心與外心條件下，$\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 的性質

在垂心與外心條件下，$\odot AO_{bx}O_{cx}$、$\odot BO_{cx}O_{ax}$、$\odot CO_{ax}O_{bx}$ 三圓交於一點。有趣的是，它們的連心線三角形 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 相似於 $\triangle R_{ao}R_{bo}R_{co}$，同時 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 會相似於 $\triangle R_{ah}\,R_{bh}R_{ch}$。

我們還發現 $\triangle ABC$ 的外心是 $\triangle O_{ah}O_{bh}O_{ch}$ 的垂心，同時也是 $\triangle R_{ah}\,R_{bh}R_{ch}$ 的內心或旁心；$\triangle ABC$ 的外心是 $\triangle O_{ao}O_{bo}O_{co}$ 的內心或旁心，也是 $\triangle R_{ao}\,R_{bo}R_{co}$ 的垂心，兩種結構互相對稱！

三、一般化三圓交於一點的幾何結構

我們給出比較強定理，對於任意封閉的六邊形，若其一組三個不相鄰內角的度數和為 360 度，則會三圓交於一點。利用此定理解決了 Crux Mathematicorum 雜誌的一道題目，並進行推廣。

四、一般化任意等角共軛點 P 與 Q 的構圖與性質

推廣到任意等角共軛點 P 與 Q，從而刻劃四個連心線三角形的關聯性。首先，它們有兩組相似。第二，我們發現 $\triangle R_{ap}\,R_{bp}R_{cp}$ 和 $\triangle R_{aq}R_{bq}R_{cq}$ 為透視三角形，為解決這現象，我們先處理根本的「七圓交於一點」性質，從而成功給出漂亮的透視關係，再證明 R_{ap}、R_{bp}、R_{cp}、R_{aq}、R_{bq}、R_{cq} 六點共圓。最後我們討論迭代 $\triangle O_a^nO_b^nO_c^n$，給出有趣的發現循環相似關係。

陸、參考文獻

[1] Incenter/Excenter Lemma (n.d.). AoPS Online. https://reurl.cc/OYLKLv
[2] Pericles Papadopoulos (2024). Problem 4977. *Crux Mathematicorum*, *50* (8), 412.
[3] 嚴鎮軍（2002）。反射和反演。臺北市，九章出版社。