中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030421

伸縮毛毛蟲-如何將正方形與正三角形的規律圖形面積平分

學校名稱： 嘉義縣立朴子國民中學

作者：	指導老師：
國二 邱靖恩 國二 蔡侑妤 國二 林瑋筑	蔡孟哲

關鍵詞： 面積平分、連續整數、正方形與正三角形

摘要

將正方形的邊長從 1，2，3，4...依序增加，在面積最大的正方形左上角，加上一個長方形，使其寬等於最大正方形邊長的一半，將最左上角的點連接最小正方形右下的點，形成對角線，問長方形的長為多少時，此對角線能將圖形平分。在此，我們得到一些結論及一般化的證明。

接著，我們把正方形改成正三角形，將三角形的個數依序增加，而邊長依序是 1，2，3，4...，在面積最大的三角形旁加上一個梯形，梯形的高為正三角形高的一半，接著畫出斜對角線，我們想問梯形的底為多少時，此對角線能將圖形平分。這個問題，我們也得到一些結論。

壹、研究動機

為了認識獨立研究，老師建議我們試著完成一份獨立研究作品。我們在各縣市的數學競賽中尋找問題，想做的題目有很多種，但大部分的題目都不適合拿來做獨立研究，於是在我們的精挑細選之下，選中了兩種題目。我們原本找的是另一個題目，研究一段時間後，我們研究不出一般化的結果，因此我們3人和老師討論過後，果斷放棄原本的題目，而選擇了現在的題目。

貳、研究目的

學習做獨立研究的流程，以及思考遇到問題時該如何解決，試著從多種方面思考答案。還能學會以前不會用的公式。順便訓練上台發表的膽量，而且跟別人炫耀說有在參與一項數學獨立研究及科展，讓別人覺得自己很厲害。

參、研究設備及器材

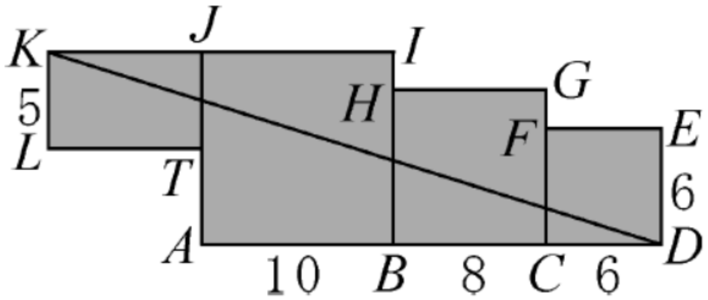
紙、筆、電腦、GeoGebra。

肆、研究過程或方法

一、　研究主題說明

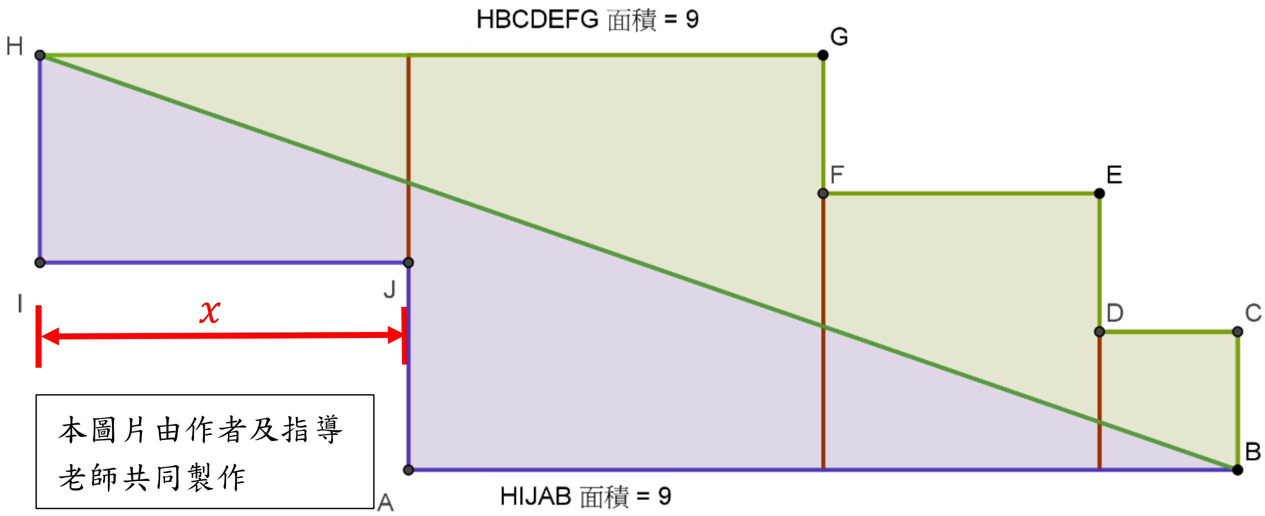
我們原本做另一個題目，後來研究不出一般化的結果，因此不捨地放棄原本的題目，而選擇了現在的題目。以下是這次研究的原始題目(2018 年希望杯 7 年級試題[4])：

正方形$ABIJ$，$BCGH$，$CDEF$的邊長依次為10公分、8公分和6公分。它們和一個長方形$LTJK$放在一起，組成下圖的陰影多邊形。其中A，B，C，D在同一條直線上，K，J，I也在同一條直線上。已知$\overline{KL}=5$公分，$\overline{KD}$平分陰影多邊形的面積，則$\overline{KJ}$為多少公分？



本圖片摘自 2018 年希望杯 7 年級試題第 22 題[4]

為了徹底研究題目，我們將正方形的邊長從 1，2，3，4…依序增加，另外為了方便討論，我們將圖形塗上顏色，因此我們的問題變成『在面積最大的正方形左上角，加上一個長方形，使其寬等於最大正方形邊長的一半。請問長方形的長x為多少時，可以讓綠色多邊形的面積等於藍色多邊形？』



本圖片由作者及指導老師共同製作

二、　公式

以下是我們在研究過程中需用到的公式，列在下方以供閱覽者參考。

(1)　$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3)　若c_1、c_2為常數，則$\sum_{k=1}^{n}(c_1a_k\pm c_2b_k)=c_1\sum_{k=1}^{n}a_k\pm c_2\sum_{k=1}^{n}b_k$

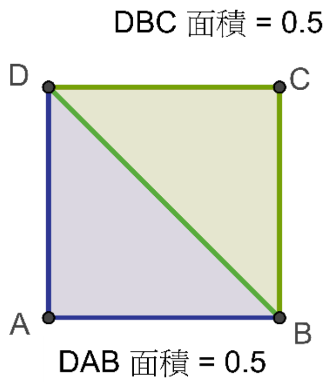
(4) 正三角形的高$=\frac{\sqrt{3}}{2}n$，其中n為正三角形的邊長。

(5) 正三角形面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}n^2$，其中n為正三角形的邊長。

三、 正方形

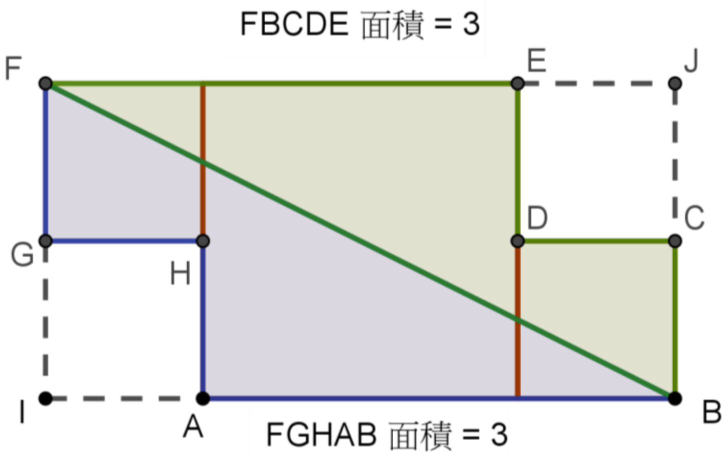
我們先研究只有 1 個正方形時，長方形的長該是多少，再多增加 1 個正方形，長方形的長又該是多少，...，依此類推。

1. 當正方形只有 1 個時，我們發現正方形本身的對角線就能將兩個區塊的面積平分，因此用不到長方形，故長方形的長為 0。



本圖片由作者製作

2. 當有 2 個正方形時，這 2 個正方形的邊長依序是 1、2，為了要讓藍色和綠色多邊形的面積相等，我們必須使右上角空白處(四邊形$CDEJ$)的面積等於左下角的空白處(四邊形$AHGI$)面積，因此$\overline{GH}$勢必為 1，因此長方形的長為 1。

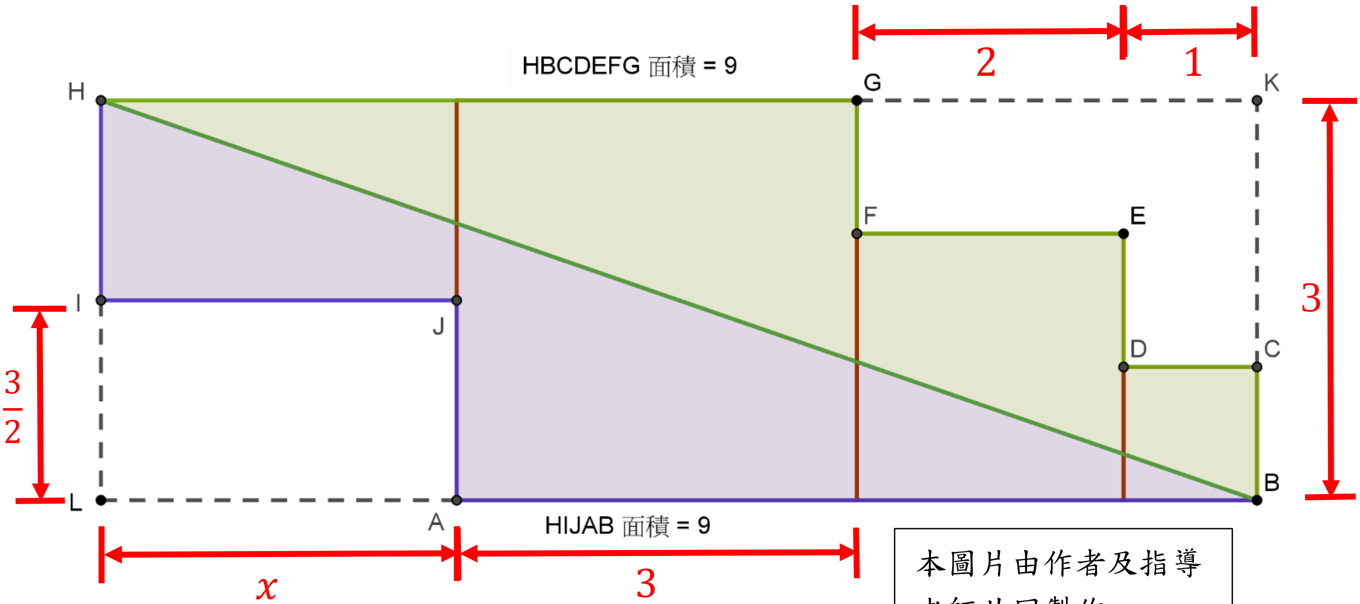


本圖片由作者製作

3. 當正方形有 3 個時，設長方形的長為x，和之前的想法一樣，我們讓右上角L型空白處的面積等於左下角空白處的面積，因此可以列出方程式：

$\frac{3}{2}x = 3 \times (1+2) - 1^2 - 2^2$，接著我們去解方程式，可得到

$\frac{3}{2}x = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$，這代表當長方形的長為$\frac{8}{3}$時，綠色面積就等於藍色面積。



本圖片由作者及指導老師共同製作

4. 當正方形有 4 個時，設長方形的長為x，可以列出方程式：

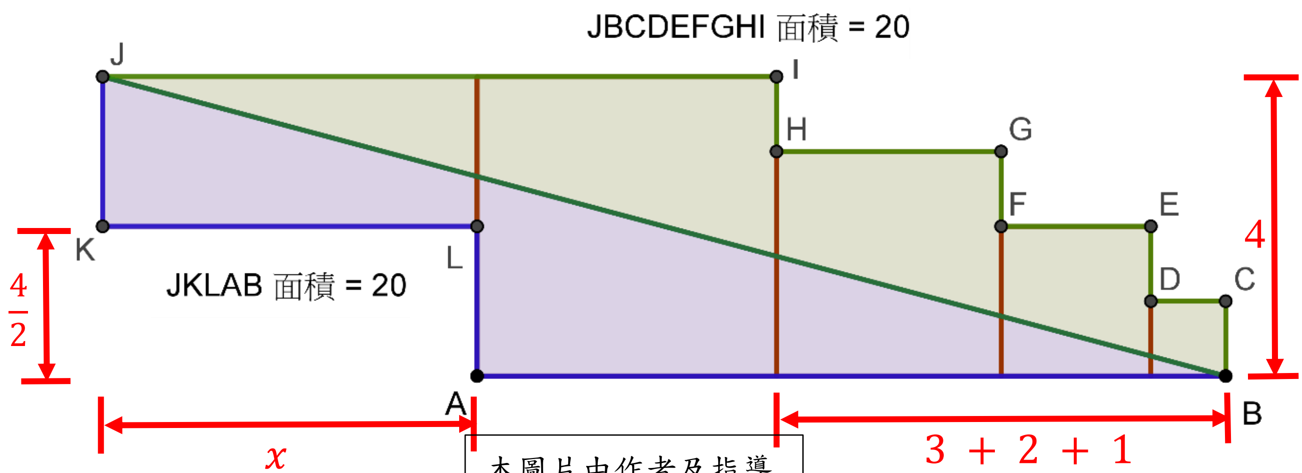
$\frac{4}{2}x = 4 \times (1+2+3) - (1^2+2^2+3^2)$，

$\Rightarrow 2x = 4 \times \frac{3\times(1+3)}{2} - \frac{3\times(3+1)\times(6+1)}{6}$，

$\Rightarrow 2x = 2 \times 3 \times 4 - 2 \times 7$，

$\Rightarrow 2x = 10$，

$\Rightarrow x = 5$ ，因此長方形的長為 5。



本圖片由作者及指導老師共同製作

5. 當正方形有 5 個，設長方形的長為x，可以列出方程式：

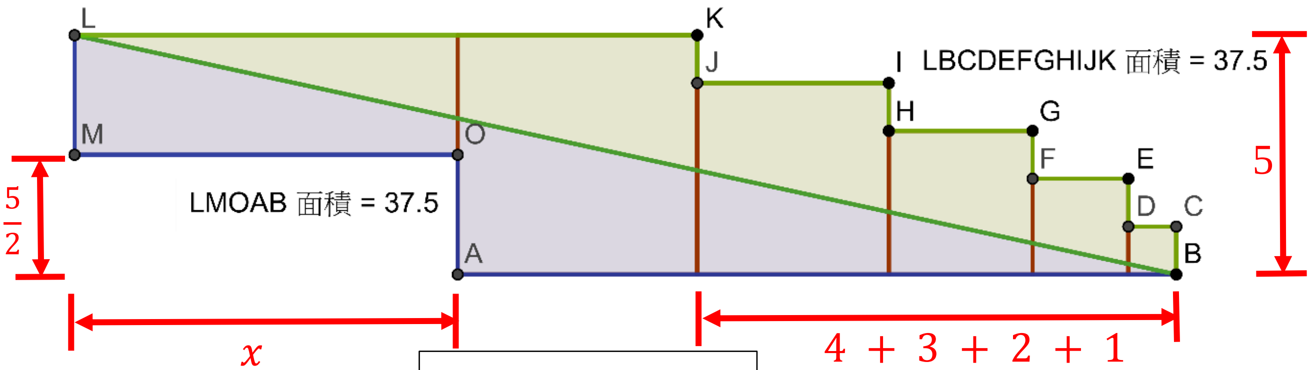
$$\frac{5}{2}x = 5 \times (1+2+3+4) - (1^2+2^2+3^2+4^2)，$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 5 \times \frac{4\times(1+4)}{2} - \frac{4\times(4+1)\times(8+1)}{6}，$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 5 \times 2 \times 5 - 2 \times 5 \times 3，$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 20，$$

$\Rightarrow x = 8$ ，因此長方形的長為 8。



本圖片由作者及指導老師共同製作

6. 當正方形有 6 個，設長方形的長為x，可以列出方程式：

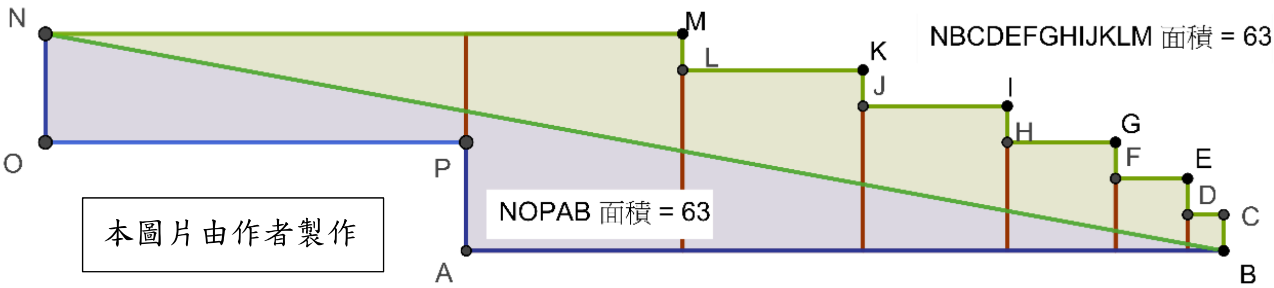
$$\frac{6}{2}x = 6 \times (1+2+3+4+5) - (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)，$$

$$\Rightarrow 3x = 6 \times \frac{5\times(1+5)}{2} - \frac{5\times(5+1)\times(10+1)}{6} \quad ，$$

$$\Rightarrow 3x = 3 \times 5 \times 6 - 5 \times 11 \quad ，$$

$$\Rightarrow 3x = 35 \quad ，$$

$\Rightarrow x = \frac{35}{3}$ ，因此長方形的長為$\frac{35}{3}$。



本圖片由作者製作

7. 當正方形有 7 個，設長方形的長為x，可以列出方程式：

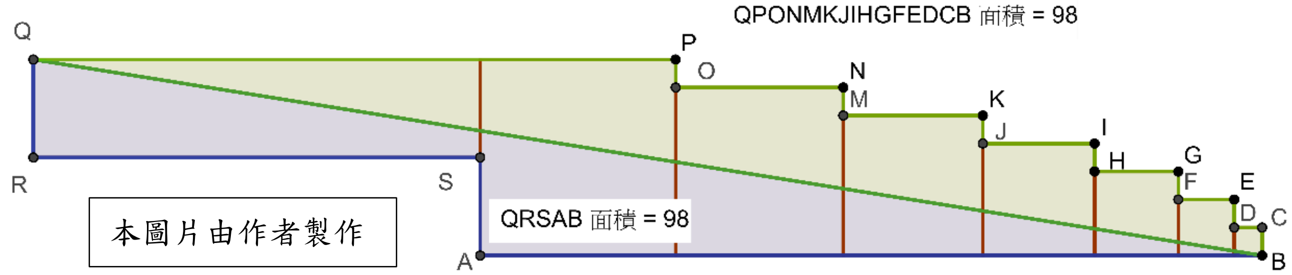
$$\frac{7}{2}x=7\times(1+2+3+4+5+6)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{7}{2}x=7\times\frac{6\times(1+6)}{2}-\frac{6\times(6+1)\times(12+1)}{6}\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{7}{2}x=7\times3\times7-7\times13\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{7}{2}x=56\text{ ，}$$

$\Rightarrow x=16$ ，因此長方形的長為 16。



8. 當正方形有 8 個，設長方形的長為x，可以列出方程式：

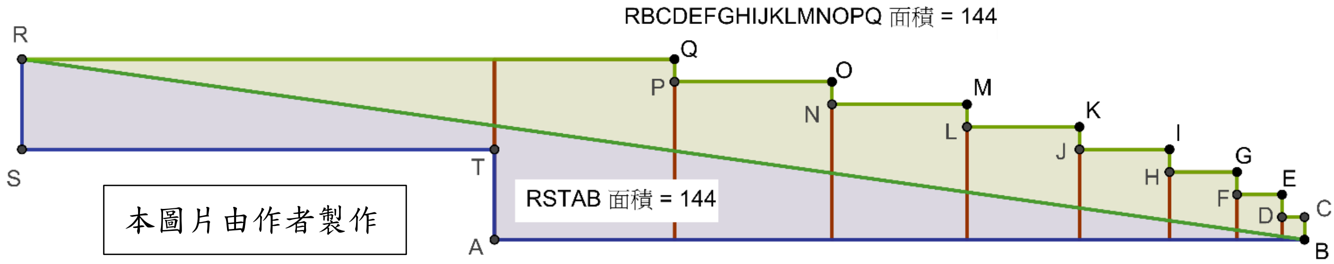
$$\frac{8}{2}x=8\times(1+2+3+4+5+6+7)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)\text{，}$$

$$\Rightarrow 4x=8\times\frac{7\times(1+7)}{2}-\frac{7\times(7+1)\times(14+1)}{6}\text{ ，}$$

$$\Rightarrow 4x=8\times7\times4-7\times4\times5\text{ ，}$$

$$\Rightarrow 4x=84\text{ ，}$$

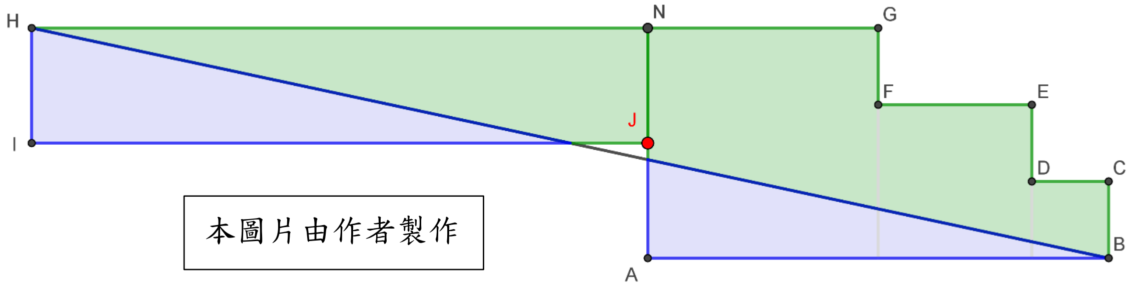
$\Rightarrow x=21$ ，因此長方形的長為 21。



做到這裡之後，我們把 1～8 個正方形的數據做成以下表格：

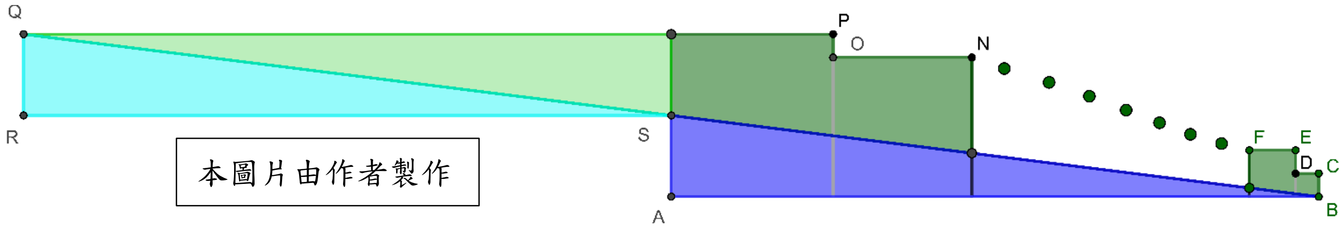
正方形個數	1	2	3	4	5	6	7	8
長方形的長	0	1	$\frac{8}{3}$	5	8	$\frac{35}{3}$	16	21

我們發現如果要將面積平分，斜對角線好像要通過最大正方形的上半部。如果這件事為真，那麼我們能將做法一般化，為了一般化，我們必須先說明不會產生以下情形(以 3 個正方形的例子來解釋)：斜對角線$\overline{BH}$不可能通過$\overline{AJ}$，斜對角線$\overline{BH}$只能通過$\overline{NJ}$(不含J點)。



9. 現在來說明斜對角線為什麼只能通過最大正方形的上半部。

(1) 當有n個正方形時，且斜對角線通過最大正方形邊長的中點S時，上半部綠色的面積為深綠色加上淺綠色，而下半部藍色的面積為深藍色加上淺藍色。



很容易知道淺綠色面積等於淺藍色，

而深藍色直角三角形面積$=\frac{1}{2}\left[(1+2+\cdots+n)\times\frac{n}{2}\right]=\frac{n^2(n+1)}{8}$，

深綠色的面積為所有正方形的面積總和扣掉深藍色直角三角形，因此

深綠色的面積$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{n^2(n+1)}{8}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)}{8}$$

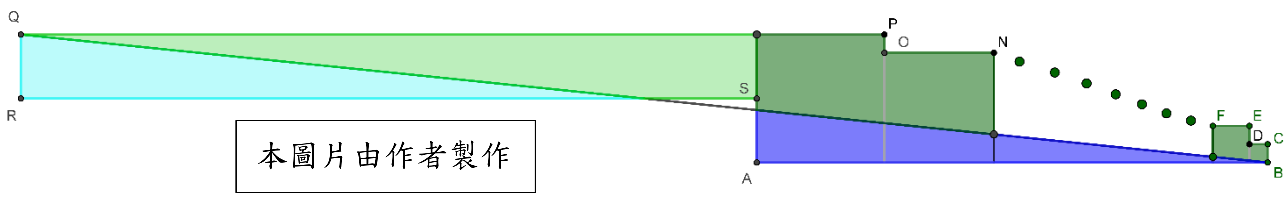
$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{24}-\frac{3n^2(n+1)}{24}$$

$$=\frac{(n+1)[4n(2n+1)-3n^2]}{24}$$

$$=\frac{(n+1)[5n^2+4n]}{24}>\frac{(n+1)\times 3n^2}{24}=\frac{n^2(n+1)}{8}$$ ＝深藍色面積，

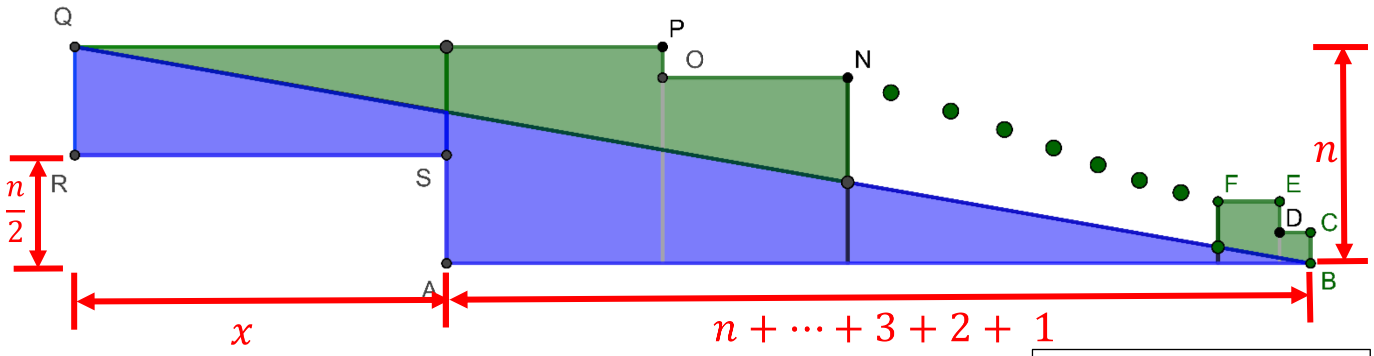
為了平分面積，斜對角線一定不可能通過中點S。

(2) 若斜對角線通過最大正方形的下半部，和第(1)小題比較後，發現深綠色面積比深藍色多更多了，且淺綠色面積又會大於淺藍色面積，因此上半部的綠色面積會大於下半部的藍色面積。綜合(1)、(2)的說明：斜對角線只能通過最大正方形的上半部



現在來給出一般化的說明：

10. 當正方形有n個時：



本圖片由作者及指導老師共同製作

設長方形的長為x，可以列出方程式：

$$\frac{n}{2}x=n[1+2+\cdots+(n-1)]-[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$\frac{n}{2}\times x=n\times\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow 3x=3n(n-1)-(n-1)(2n-1)$$

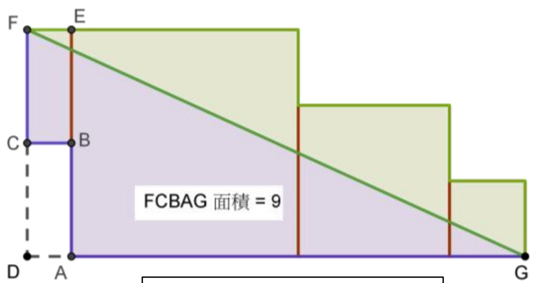
$$\Rightarrow 3x=3n^2-3n-2n^2+3n-1$$

$$\Rightarrow 3x=n^2-1\quad\Rightarrow x=\frac{n^2-1}{3}\text{，}$$

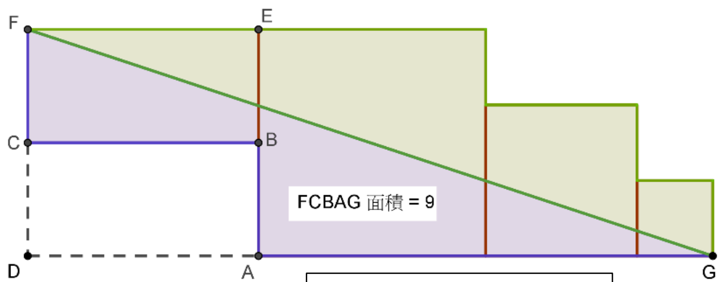
因此可以知道長方形的長為$x=\frac{n^2-1}{3}$。所以我們得到【定理 1】

> 【定理 1】
>
> 若有邊長 1、2、3、...、n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{n^2-1}{3}$時，斜對角線就能將面積平分。

基本上，我們已經解決一開始的問題了。在研究正方形的過程中，我們發現只要讓斜對角線一直保持在最大正方形的上半部，接著不管怎麼改變斜對角線，下半部的藍色多邊形面積總是保持不變，這個發現也馬上幫我們解決更一般化的證明。

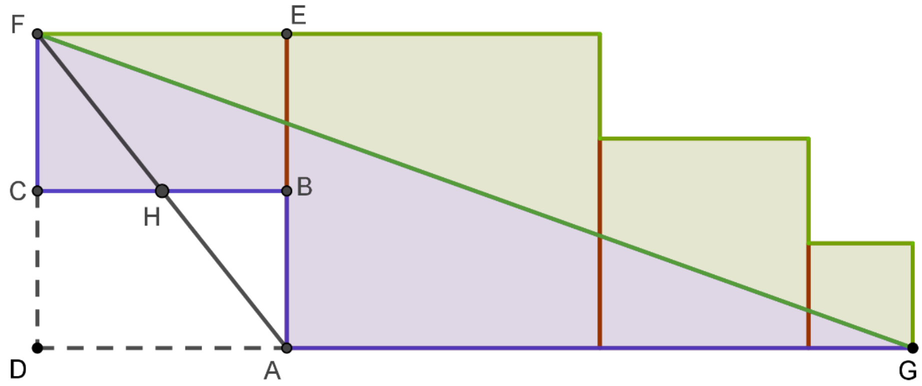


本圖片由作者製作



本圖片由作者製作

這件事讓我們有了另一種正方形公式的推導證明，在此不贅述，以下是藍色多邊形面積保持不變的說明，我們僅以 3 個正方形的例子來呈現：



本圖片由作者製作

因為B點為$\overline{AE}$的中點，所以兩長方形$ABCD$、$BEFC$全等，因此$\overline{CF}=\overline{AB}$。
在ΔABH和ΔFCH中，

$$\begin{cases} \overline{AB}=\overline{CF}\cdots ① \\ \angle ABH=\angle FCH=90°\cdots ② \\ \angle AHB=\angle CHF\cdots ③ \end{cases}$$

故$\Delta ABH\cong\Delta FCH(AAS)$。

藍色多邊形$AGFCB$的面積$=AGFHB$的面積$+\Delta FCH$的面積，接著將ΔFCH的面積換成ΔABH的面積，所以藍色多邊形$AGFCB$的面積$=AGFHB$的面積$+\Delta ABH$的面積$=\Delta AGF$的面積，而ΔAGF的面積是定值，因此藍色多邊形$AGFCB$的面積保持不變。

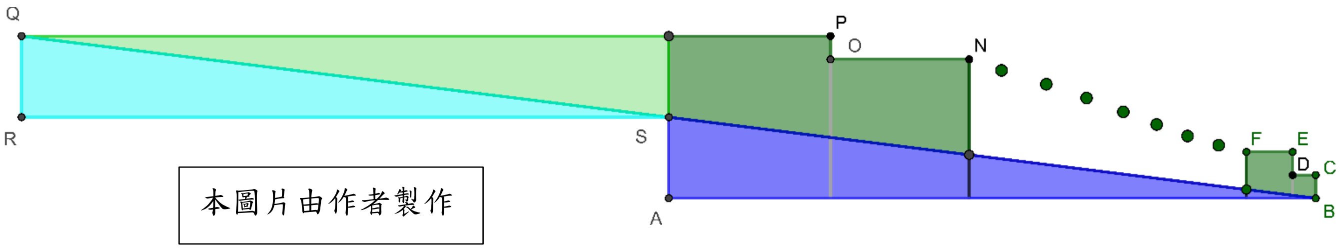
接著，老師說：『你們把正方形邊長，改成正整數的等差數列，這樣結論會更廣』。於是我們就開始著手研究，題目變成有n個規律正方形，其邊長依序為$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，$a_4=a+3d$，…，$a_n=a+(n-1)d$，其中a、d皆為正整數，想問最大正方形旁的長方形長度為多少時，斜對角線就能將面積平分？

11. 現在來給出推廣的一般化證明：

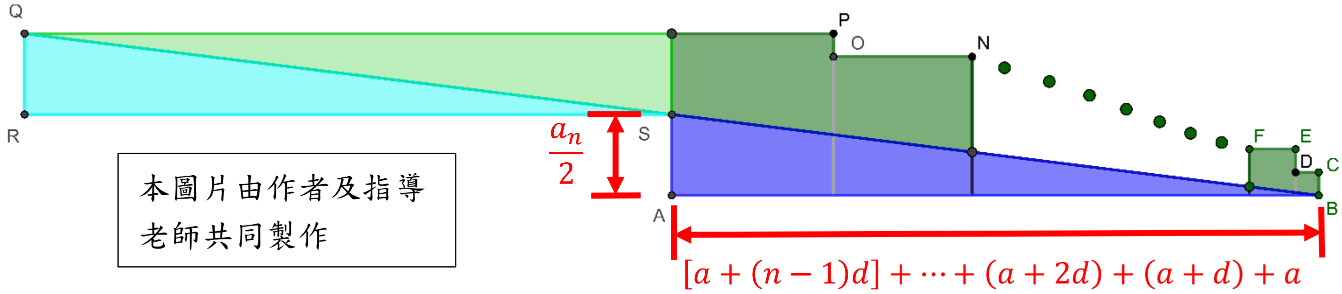
先來說明斜對角線為什麼只能通過最大正方形的上半部。

(1) 如圖，當有n個正方形時，且斜對角線通過最大正方形邊長的中點S時，上半部綠色的面積為深綠色加上淺綠色，而下半部藍色的面積為深藍色加上淺藍色。

很容易知道淺綠色面積等於淺藍色，所以只要比較深綠色和深藍色的面積大小。



本圖片由作者製作



為了以後的方便性，我們先算所有正方形的面積總和：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)d)^2 = \sum_{k=1}^{n}[a^2+2a(k-1)d+(k-1)^2d^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^2 + 2ad\sum_{k=1}^{n}(k-1) + d^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

$$= na^2 + 2ad\frac{(n-1)n}{2} + d^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= na\,[a+(n-1)d] + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2 = na\,a_n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2\text{，}$$

而深藍色直角三角形面積$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\times\frac{a_n}{2}=\frac{1}{2}\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times\frac{a_n}{2}$，

深綠色的面積為所有正方形的面積總和扣掉深藍色直角三角形，因此

深綠色的面積$= na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2-\frac{1}{2}\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times\frac{a_n}{2}$。如果深綠色減去深藍色恆為正，那麼代表深綠色的面積大於深藍色面積，以下是說明：

深綠色減掉深藍色

$$=\left\{na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2-\frac{1}{2}\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times\frac{a_n}{2}\right\}-\frac{1}{2}\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times\frac{a_n}{2}$$

$$=\left[na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2\right]-\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times\frac{a_n}{2}$$

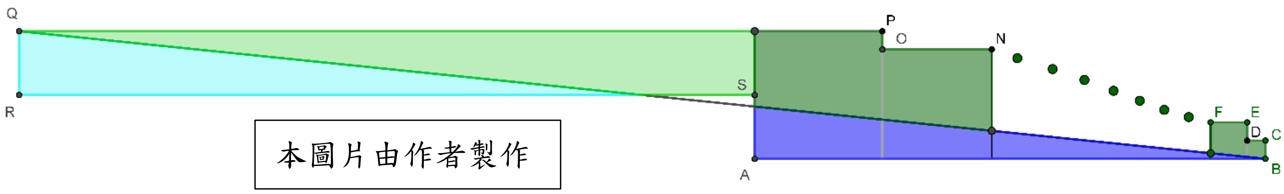
$$=\frac{1}{2}na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2-\frac{(n-1)nd}{4}a_n$$

$$=\frac{n}{12}\{6a[a+(n-1)d]+2(n-1)(2n-1)d^2-3(n-1)d[a+(n-1)d]\}$$

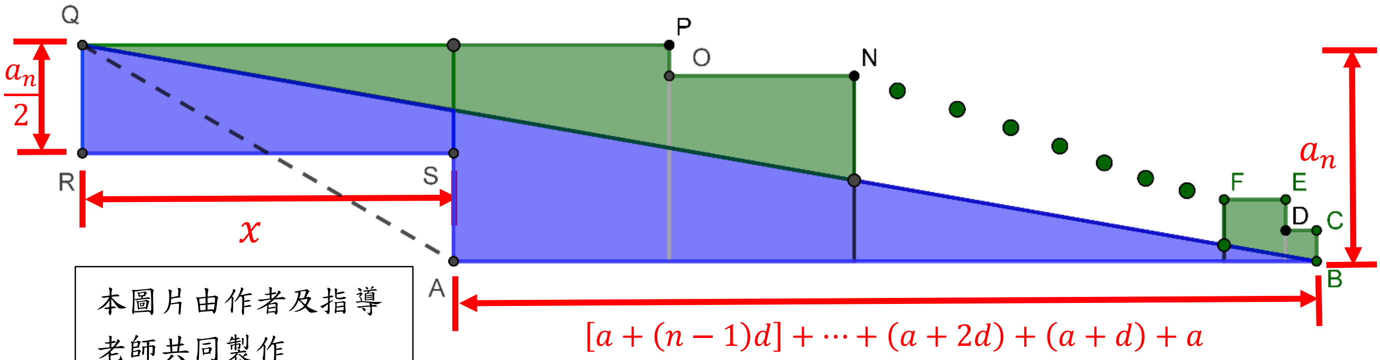
$$=\frac{n}{12}\{6a^2+3a(n-1)d+[2(n-1)(2n-1)-3(n-1)^2]d^2\}$$

$$=\frac{n}{12}\{6a^2+3a(n-1)d+(n^2-1)d^2\}>0$$

(2) 若斜對角線通過最大正方形的下半部，和第(1)小題比較後，發現深綠色面積比深藍色多更多了，且淺綠色面積又會大於淺藍色面積，因此斜對角線只能通過最大正方形的上半部。



(3)　當正方形有n個時(第一個正方形邊長a、公差d)：



本圖片由作者及指導老師共同製作

在前面有提過，藍色面積等於ΔABQ的面積，為了好算，將藍色面積以ΔABQ的面積代替。設長方形的長為x，利用全部塗色面積的一半等於藍色面積，來列出方程式：

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2+\frac{a_n}{2}x\right\}=\frac{1}{2}\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times a_n$$

正方形面積和　　長方形面積　　ΔABQ面積

$$\Rightarrow na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2+\frac{a_n}{2}x=\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{2}x=\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]\times a_n-na\,a_n-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2$$

$$=\frac{(n-1)n}{2}d\times a_n-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2$$

$$\Rightarrow x=(n-1)n\,d-\frac{(n-1)n(2n-1)d^2}{3a_n}$$

$$=(n-1)nd\left[1-\frac{(2n-1)d}{3a_n}\right]$$

$$=(n-1)nd\left[1-\frac{2a+2(n-1)d-2a+d}{3a_n}\right]$$

$$=(n-1)nd\left[\frac{1}{3}+\frac{2a-d}{3a_n}\right]=\frac{(n-1)nd}{3}\left[1+\frac{2a-d}{a_n}\right]$$

因此得到【定理 2】。又$x=\frac{(n-1)nd}{3}\left[1+\frac{2a-d}{a_n}\right]$，我們可以知道$\left[1+\frac{2a-d}{a_n}\right]$中的$\frac{2a-d}{a_n}$與1比較起來算很小，我們把它想成微調項，所以長方形的長度大致被$\frac{d}{3}(n-1)n$控制住。

【定理 2】

已知a_1、a_2、a_3、⋯、a_n為首項a，公差d的等差數列，其中a、d皆為正整數。若有邊長a_1、a_2、a_3、⋯、a_n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{(n-1)nd}{3}\left[1+\frac{2a-d}{a_n}\right]$時，斜對角線就能將面積平分。

四、 正三角形

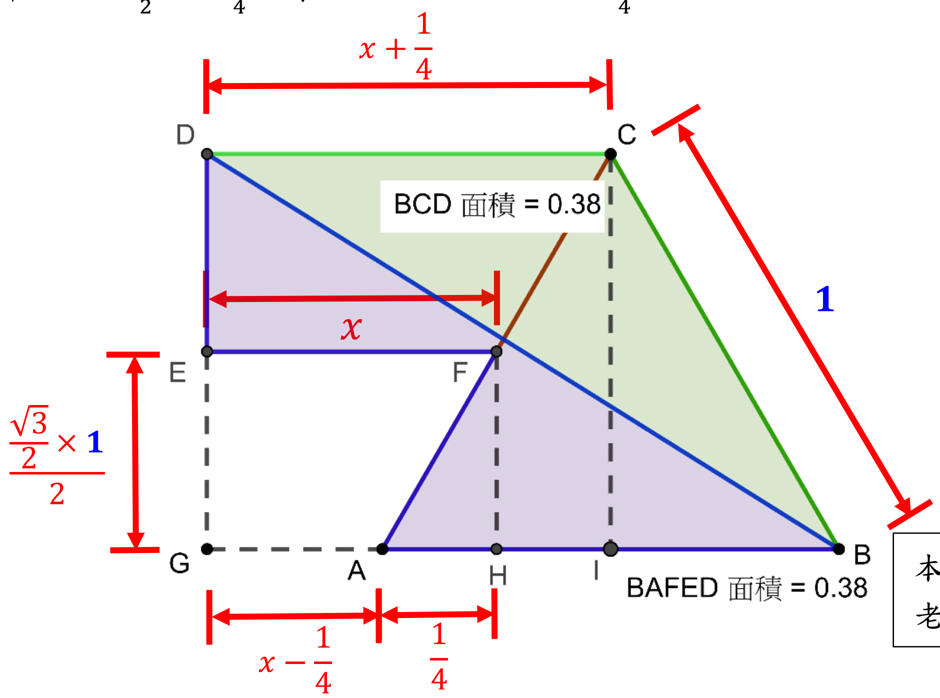
因為還有時間可以繼續發展，因此我們和老師討論了一下，訂定了朝正三角形發展的方向。我們把正方形改成正三角形，以相同的想法，將三角形的個數依序增加，而邊長就依序是1，2，3，4…，在面積最大的三角形旁加上一個梯形，梯形的高為正三角形高的一半，接著畫出斜對角線，我們想問梯形的底為多少時，能使得綠色面積等於藍色面積。

因為正三角形更複雜，我們透過正方形中，藍色面積不變的原理，發現了正三角形公式的推導方法。接著我們從 1 個→2 個→3 個→4 個三角形…的情況來探討，而正三角形的邊長依序為 1、2、3、4、…：

1. 當三角形有 1 個，而且邊長為 1：

假設藍、綠兩種顏色的面積相等，則我們計算的想法為藍色面積為全部塗色面積的一半，為了方便計算藍色的面積，我們採用下半部的直角ΔBDG面積減去空白處梯形$AFEG$的面積來算。

如下圖，為了方便討論，我們假設梯形的下底$\overline{EF}$為x，因為正三角形的邊長為 1，所以高為$\frac{\sqrt{3}}{2}$，又F點為$\overline{AC}$中點，所以$\overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{DG}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$。因為$\overline{AI}=\frac{1}{2}$且$F$點為$\overline{AC}$中點，所以$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AI}=\frac{1}{4}$，則$\overline{GA}=\overline{GH}-\overline{AH}=x-\frac{1}{4}$、$\overline{DC}=\overline{GH}+\overline{HI}=x+\frac{1}{4}$，



本圖片由作者及指導老師共同製作

接著用藍色面積為全部塗色面積的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)+1\right]}{2}}_{\Delta BDG\text{面積}}-\underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]}{2}}_{\text{梯形}AFEG\text{面積}}=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+x\right]}{2}\right]}_{\Delta ABC\text{面積加上梯形}CDEF\text{面積的一半}}$$

利用等量公理，兩邊乘以 8，得到

$$2\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{4}\right)-\sqrt{3}\left(2x-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2x+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ 4\sqrt{3}x+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

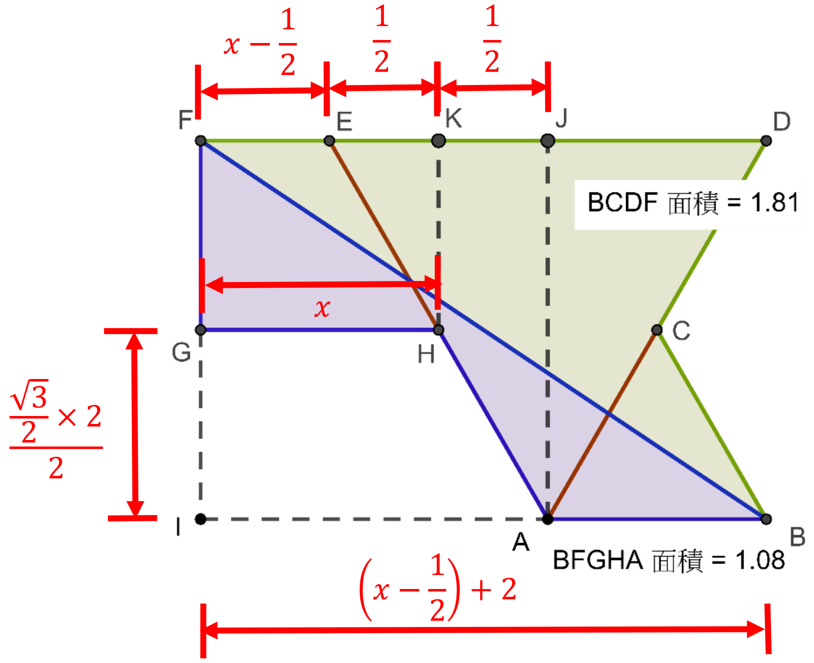
$$\Rightarrow\ \frac{7\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}x+\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow\ 14\sqrt{3}-9\sqrt{3}=8\sqrt{3}x\ \Rightarrow\ 8\sqrt{3}x=5\sqrt{3}\ \ \Rightarrow\ x=\frac{5}{8}$$

2. 當三角形有 2 個，而且邊長依序為 1、2：

我們發現不管怎麼改變梯形下底的長度，下半部的藍色面積都不會等於上半部的綠色面積，為了解釋這件事，我們分以下 3 個步驟：

(1) 當斜對角線$\overline{BF}$通過最大正三角形邊長的上半部時，藍色多邊形的面積保持不變：已知正ΔADE的邊長$\overline{DE}=2$，所以$\overline{JK}=\overline{KE}=\frac{1}{2}$，設$\overline{GH}=x$，則$\overline{EF}=x-\frac{1}{2}$。因為正$\Delta ADE$的邊長為 2，所以高$\overline{AJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，因此$\overline{GI}=\frac{1}{2}\overline{AJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，



本圖片由作者及指導老師共同製作

所以藍色面積為

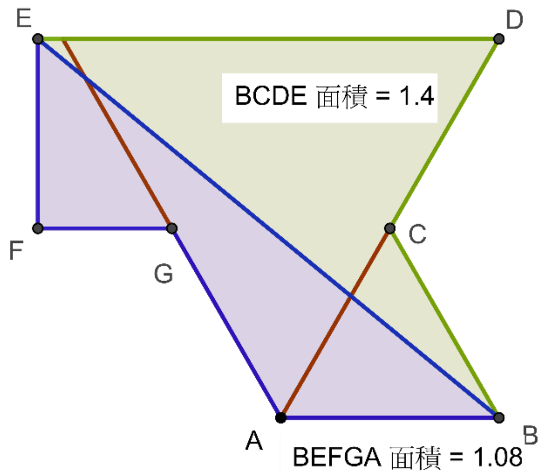
$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\right]}{2}}_{\Delta BFI\text{面積}}-\underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{2}}_{\text{梯形}AHGI\text{面積}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\sqrt{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{3}x+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$=\frac{1}{4}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$，這代表藍色多邊形面積和梯形的下底$\overline{GH}$無關。

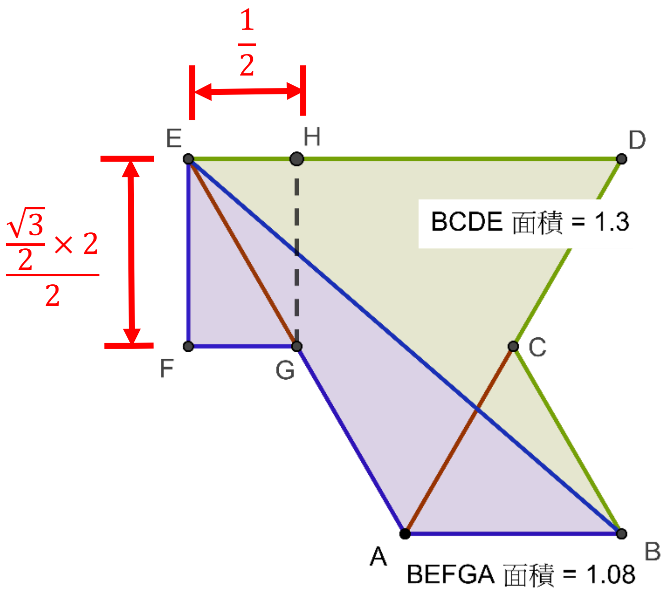
既然斜對角線通過最大正三角形邊長的上半部時，藍色面積保持不變，再加上觀察下圖，可發現綠色面積比較大。為了讓上半部綠色面積和下半部的藍色面積相等，因此我們思考綠色面積什麼時候最小，我們將圖中的E點推到最右邊，因此有了第(2)個步驟。



本圖片由作者製作

(2) 若斜對角線通過最大正三角形的上半部時，不可能將面積平分。

我們採用全部塗色面積減去藍色，來計算綠色面積：



本圖片由作者及指導老師共同製作

綠色面積$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

兩三角形面積和

ΔEFG面積

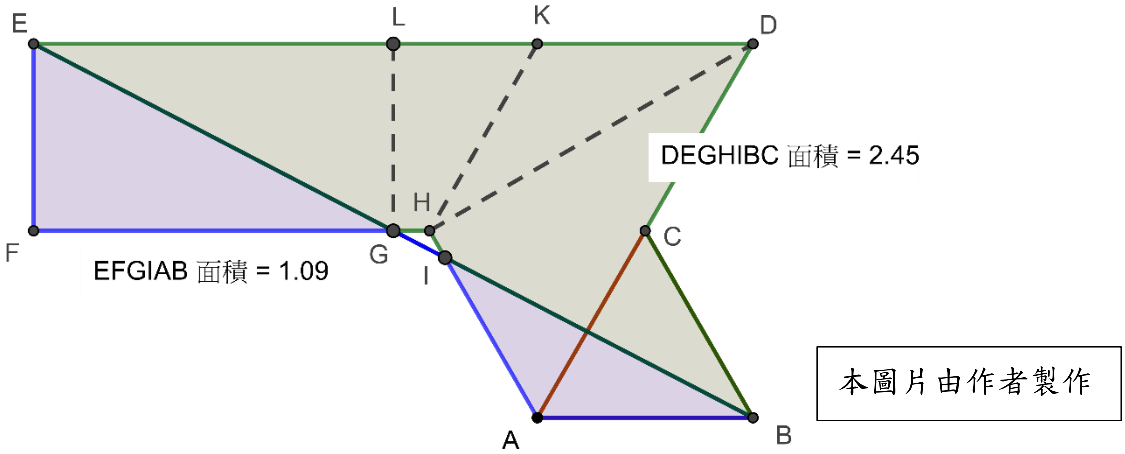
藍色的面積

$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{6\sqrt{3}}{8}>\frac{5\sqrt{3}}{8}=$藍色面積，

由此可知，即使讓綠色面積最小了，它還是比藍色面積還大，因此斜對角線通過最大正三角形的上半部時，不可能將面積平分。

(3) 接著，我們說明當斜對角線通過最大正三角形的下半部時，也不可能將面積平分：請看下圖，我們特地在$\overline{DE}$上取一點K，使得$\overline{DK}=\overline{AB}=1$，因此

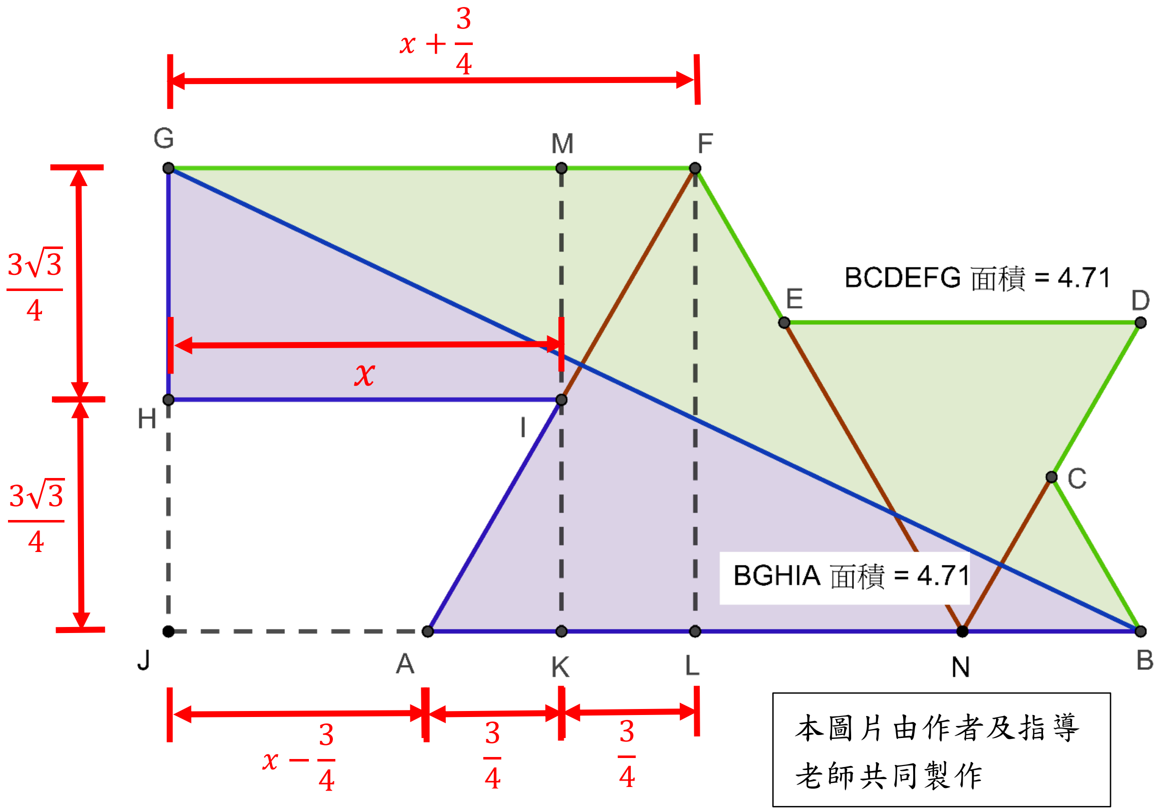
綠色面積> ΔLEG面積+ΔDKH面積> ΔEGF面積+ΔABI面積=藍色面積，



因此在 2 個三角形的情況下，不管斜對角線在哪裡，都不能將面積平分。所以我們找不到一個梯形，使得斜對角線能將面積平分。

3. 很幸運的，當正三角形邊長依序為 1、2、3 時，我們能找到面積平分的斜對角線：

我們假設梯形下底$\overline{IH}=x$，因為最大正三角形的邊長為 3，又L點為$\overline{AN}$的中點，可知$\overline{AL}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{3}{2}$。因為$I$點為$\overline{AF}$中點，利用平行線截比例線段的想法，可知$K$點為$\overline{AL}$的中點，因此$\overline{AK}=\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{AL}=\frac{3}{4}$，可知$\overline{JA}=\overline{HI}-\overline{AK}=x-\frac{3}{4}$、$\overline{GF}=\overline{GM}+\overline{MF}=x+\frac{3}{4}$。因為最大正三角形的邊長為 3，所以高為$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，又$I$點為$\overline{AF}$中點，同理，$H$點也為$\overline{GJ}$中點，因此$\overline{GH}=\overline{HJ}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$。



本圖片由作者及指導老師共同製作

接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[1+3+\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+2^2+3^2)+\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)+x\right]}{2}\right]$$

ΔBGJ面積

梯形$AIHJ$面積

三角形面積和+梯形$IFGH$面積的一半

利用等量公理，兩邊同乘 16，得到

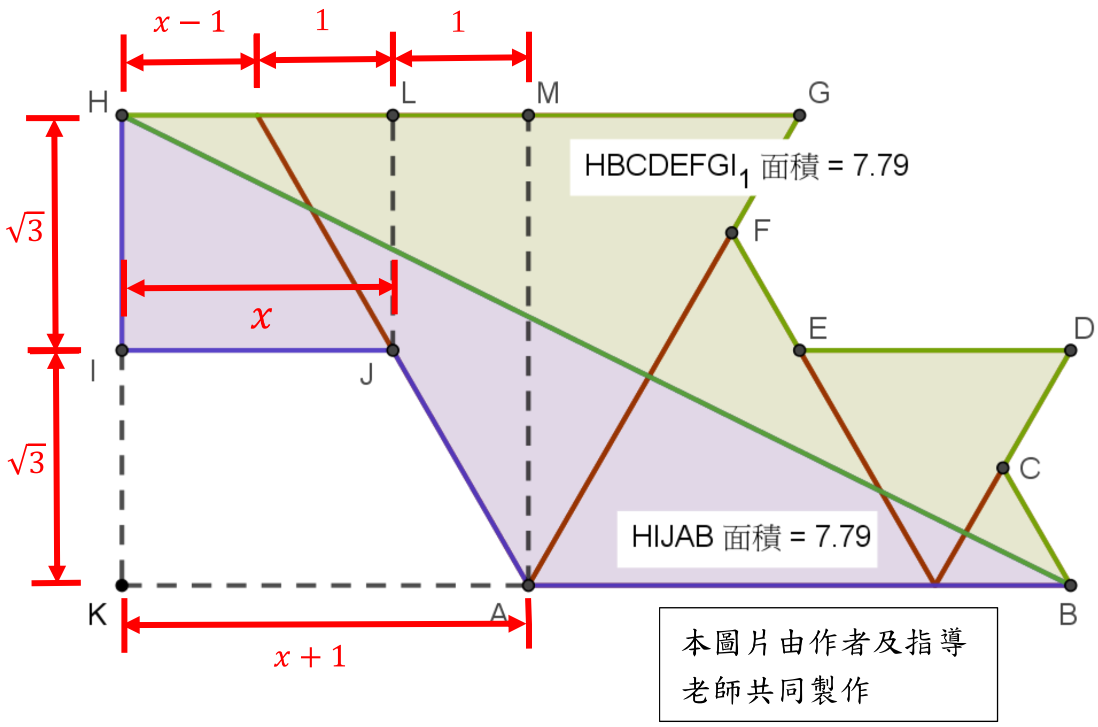
$$12\sqrt{3}\left(x+\frac{13}{4}\right)-6\sqrt{3}\left(2x-\frac{3}{4}\right)=28\sqrt{3}+3\sqrt{3}\left(2x+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3}\times\frac{13}{4}+6\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=28\sqrt{3}+6\sqrt{3}x+3\sqrt{3}\times\frac{3}{4}$$

移項整理，再同除以$\sqrt{3}$後，得到

$$\Rightarrow \frac{156}{4}+\frac{18}{4}-28-\frac{9}{4}=6x \Rightarrow \frac{53}{4}=6x \Rightarrow x=\frac{53}{24}$$

4. 當三角形有 4 個時，我們模仿 3 個三角形的假設方式與計算方式，請看下圖：



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{2\sqrt{3}[1+3+(x+1)]}{2}-\frac{\sqrt{3}[x+(x+1)]}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2)+\frac{\sqrt{3}[(x-1)+x]}{2}\right]$$

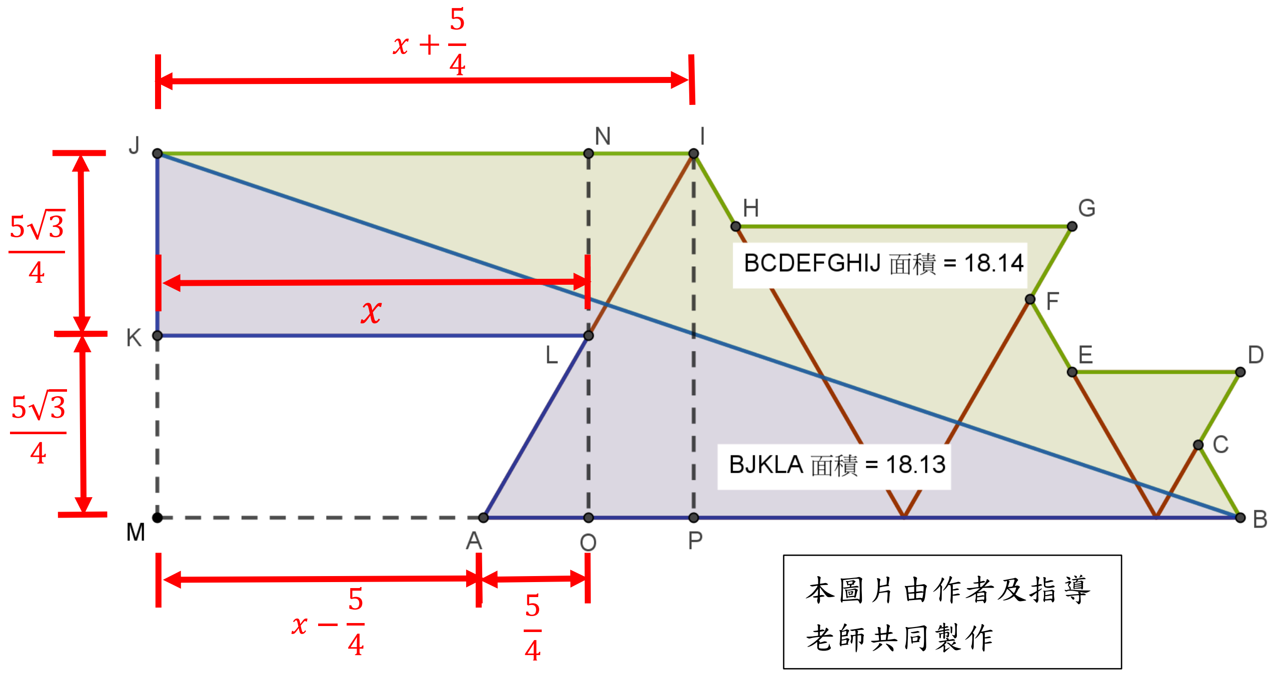
$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}(x+5)}{2}-\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{30\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}(x+5)}{2}-\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{30\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right]$$

利用等量公理，兩邊同乘 4，得到

$$\Rightarrow 4\sqrt{3}(x+5)-2\sqrt{3}(2x+1)=15\sqrt{3}+\sqrt{3}(2x-1)$$
$$\Rightarrow 20\sqrt{3}-2\sqrt{3}=14\sqrt{3}+2\sqrt{3}x$$
$$\Rightarrow 20-2-14=2x \qquad \Rightarrow\ x=2$$

5. 當三角形有 5 個的計算方式，請看下圖：



本圖片由作者及指導老師共同製作

接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}\left[1+3+5+\left(x-\frac{5}{4}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{5}{4}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+\cdots+5^2)+\frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)+x\right]}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{31}{4}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{4}\left(2x-\frac{5}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{8}\left(2x+\frac{5}{4}\right)$$

利用等量公理，兩邊同乘 8，得到

$$20\sqrt{3}\left(x+\frac{31}{4}\right)-10\sqrt{3}\left(2x-\frac{5}{4}\right)=2\sqrt{3}\times(5\times11)+5\sqrt{3}\left(2x+\frac{5}{4}\right)$$

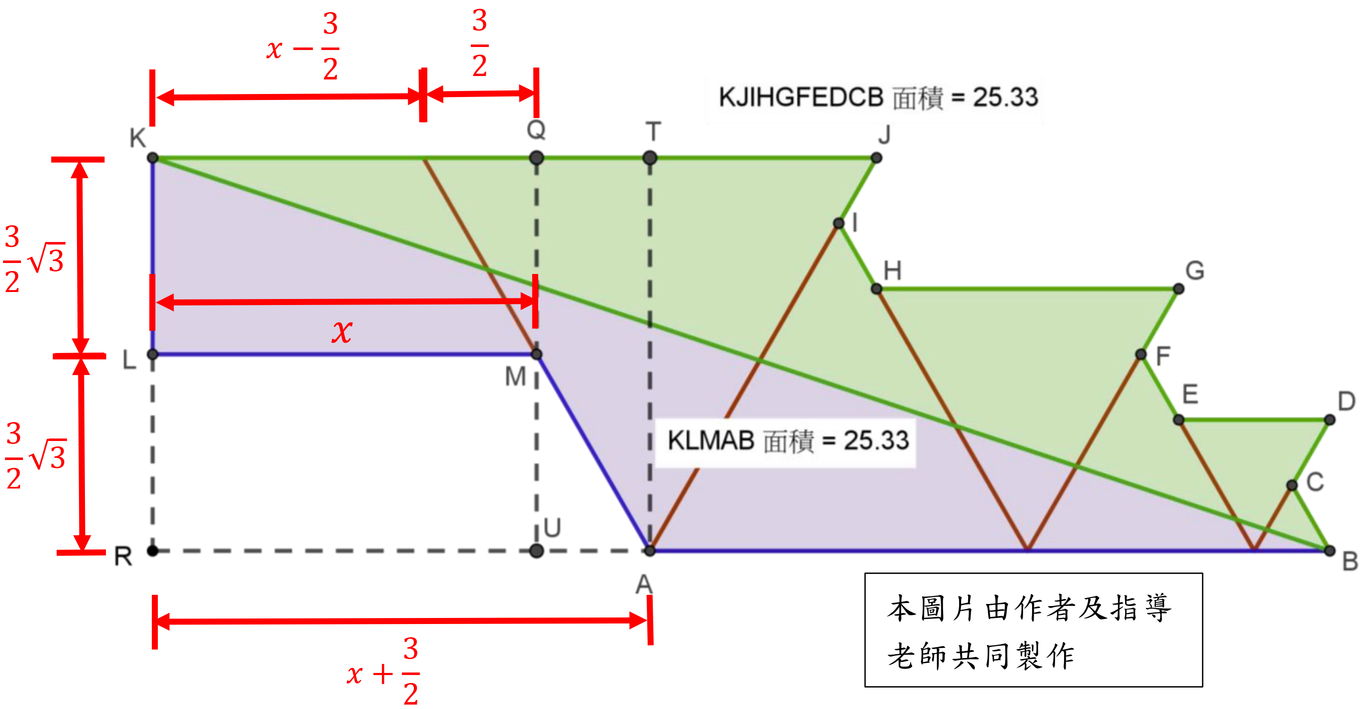
再同除以$\sqrt{3}$，得到

$$20\left(x+\frac{31}{4}\right)-10\left(2x-\frac{5}{4}\right)=2\times(5\times11)+5\left(2x+\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 155+\frac{25}{2}=110+10x+\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow 205=40x \quad \Rightarrow x=\frac{41}{8}$$

6.　當三角形有 6 個的計算方式，請看下圖：



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{3\sqrt{3}\left[1+3+5+\left(x+\frac{3}{2}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[x+\left(x+\frac{3}{2}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+\cdots+6^2)+\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)+x\right]}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}\left(x+\frac{21}{2}\right)}{2}-\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2x+\frac{3}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{6\times 7\times 13}{6}+\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2x-\frac{3}{2}\right)}{2}\right]$$

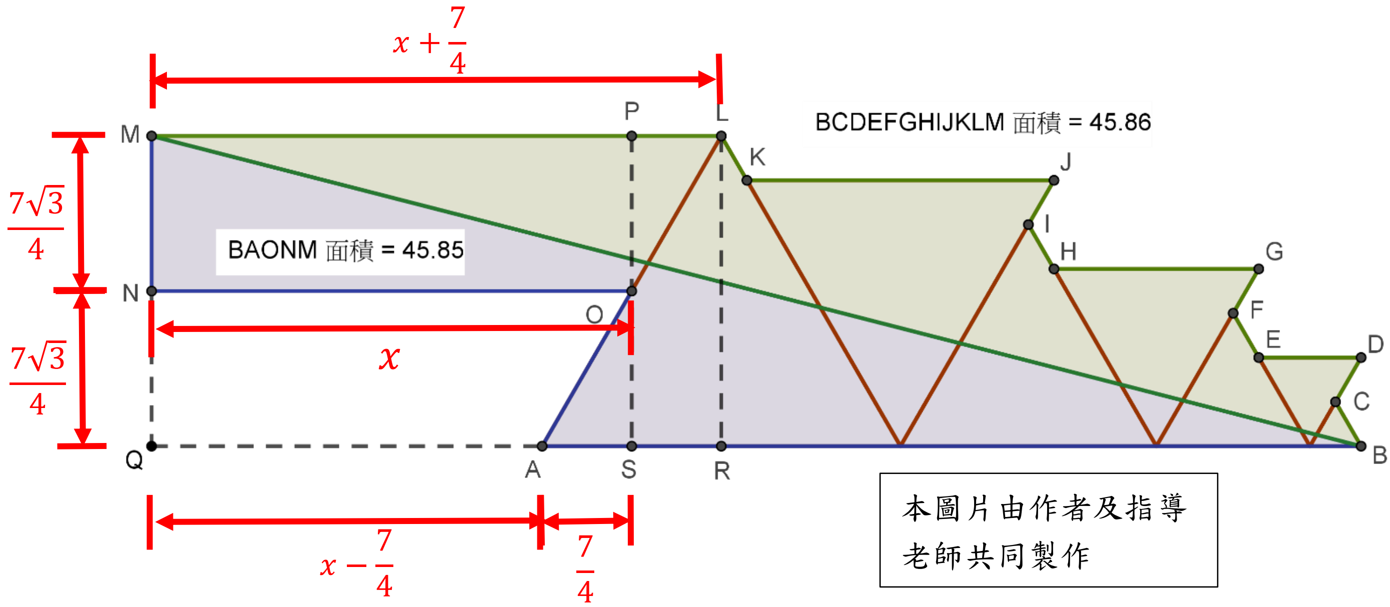
利用等量公理，兩邊同乘 8，得到

$$12\sqrt{3}\left(x+\frac{21}{2}\right)-6\sqrt{3}\left(2x+\frac{3}{2}\right)=91\sqrt{3}+3\sqrt{3}\left(2x-\frac{3}{2}\right)$$

再同除以$\sqrt{3}$，合併得到

$$126-9=91+6x-\frac{9}{2}\quad\Rightarrow 61=12x\quad\Rightarrow x=\frac{61}{12}$$

7. 當三角形有 7 個的計算方式，請看下圖：



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}\left[1+3+5+7+\left(x-\frac{7}{4}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{7}{4}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+\cdots+7^2)+\frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)+x\right]}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{57}{4}\right)}{2}-\frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}\left(2x-\frac{7}{4}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{140\sqrt{3}}{4}+\frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}\left(2x+\frac{7}{4}\right)}{2}\right]$$

利用等量公理，兩邊同乘 8，得到

$$14\sqrt{3}\left(x+\frac{57}{4}\right)-7\sqrt{3}\left(2x-\frac{7}{4}\right)=140\sqrt{3}+\frac{7\sqrt{3}\left(2x+\frac{7}{4}\right)}{2}$$

再同除以$\sqrt{3}$，合併得到

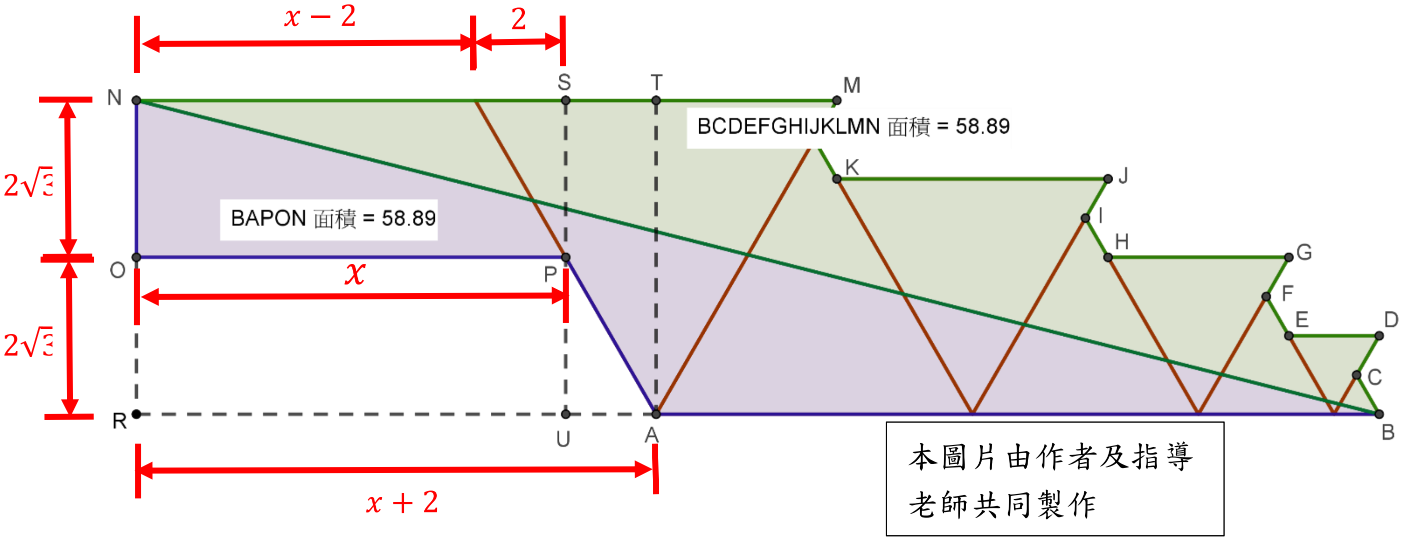
$$\frac{399}{2}+\frac{49}{4}=140+7x+\frac{49}{8}$$

$$\Rightarrow 8\left(\frac{399}{2}+\frac{49}{4}\right)=8\left(140+7x+\frac{49}{8}\right)$$

$$\Rightarrow 1694=1169+56x$$

$$\Rightarrow 56x=525 \qquad \Rightarrow x=\frac{75}{8}$$

8.　當三角形有 8 個的計算方式，請看下圖：



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{4\sqrt{3}[1+3+5+7+(x+2)]}{2}-\frac{2\sqrt{3}[x+(x+2)]}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+\cdots+8^2)+\frac{2\sqrt{3}[(x-2)+x]}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{4\sqrt{3}(x+18)}{2}-\frac{2\sqrt{3}(2x+2)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{204\sqrt{3}}{4}+\frac{2\sqrt{3}(2x-2)}{2}\right]$$

利用等量公理，兩邊同乘 8，得到

$$16\sqrt{3}(x+18)-8\sqrt{3}(2x+2)=204\sqrt{3}+4\sqrt{3}(2x-2)$$

再同除以$\sqrt{3}$，合併得到

$$16(x+18)-8(2x+2)=204+4(2x-2)$$

$$\Longrightarrow 288-16=8x+196$$

$$\Longrightarrow 8x=76 \quad \Longrightarrow x=\frac{19}{2}$$

做到這裡之後，我們把 1～8 個正三角形的數據做成以下表格，

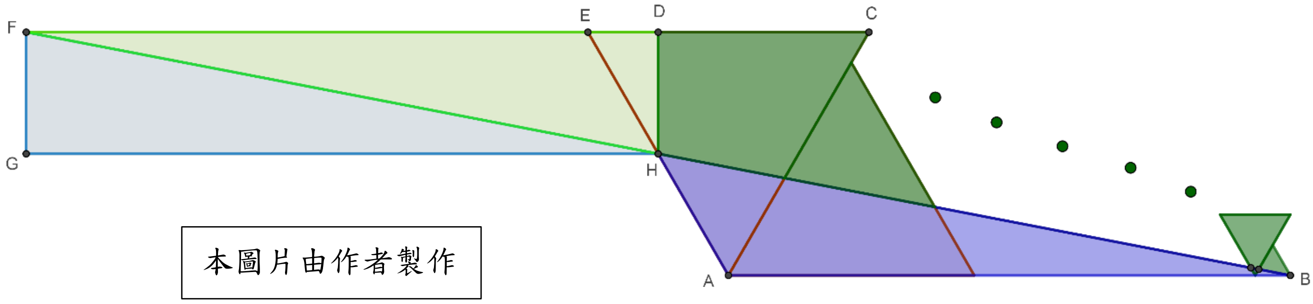
正三角形個數	1	2	3	4	5	6	7	8
上半部梯形的下底長	$\frac{5}{8}$	無解	$\frac{53}{24}$	2	$\frac{41}{8}$	$\frac{61}{12}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{19}{2}$

從以上幾個例子的計算過程發現，我們應該依正三角形個數的奇、偶性，將問題分成奇數個三角形及偶數個三角形，這樣才能將情況一般化。

9. 偶數個正三角形：假設有$2k$(k為正整數)個正三角形。

為了將解法一般化，我們首先要說明，若要將面積平分，則斜對角線不可能通過最大三角形的中點及下半部，這裡我們分成兩部分來說明。

(1) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的中點：
上半部的面積為深綠色加上淺綠色面積，而下半部面積為深藍色加上淺藍色面積。



本圖片由作者製作

很容易知道淺綠色和淺藍色面積相等，

深藍色的三角形面積$=\frac{1}{2}\left\{[1+3+5\cdots+(2k-1)]\times\frac{k\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{k[1+(2k-1)]}{2}\times\frac{k\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(k^2\times\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{k^3\sqrt{3}}{4}=\frac{6k^3}{24}\sqrt{3}$$

深綠色面積為所有的正三角形面積扣掉深藍色三角形再扣掉ΔDEH：

深綠色的面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}[1^2+2^2+\cdots+(2k)^2]-\frac{k^3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DH}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}-\frac{k^3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times\frac{\sqrt{3}k}{2}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{24}-\frac{k^3}{4}-\frac{k^2}{8}\right\}$$

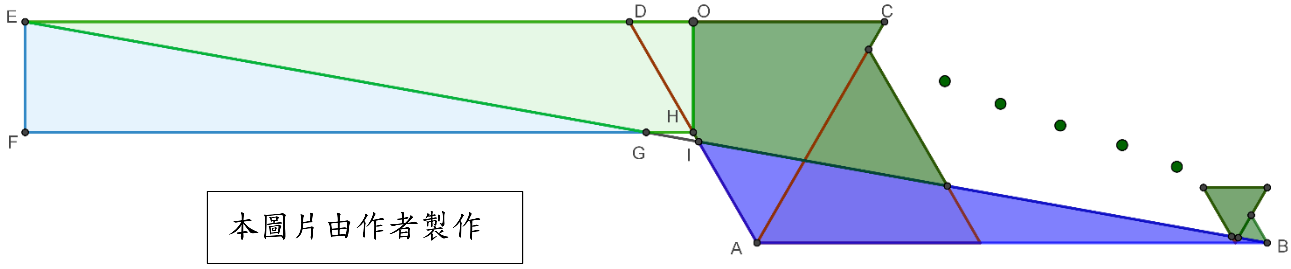
$$=\sqrt{3}\left\{\frac{16k^3+12k^2+2k}{24}-\frac{6k^3}{24}-\frac{3k^2}{24}\right\}$$

$$=\frac{10k^3+9k^2+2k}{24}\sqrt{3}$$

因為$k\geq 1$，所以深綠色的面積$=\frac{10k^3+9k^2+2k}{24}\sqrt{3}>\frac{6k^3}{24}\sqrt{3}$＝深藍色的面積。因此，綠色面積總和一定大於藍色面積總和，因此斜對角線一定不可能通過最大正三角形的中點。

(2) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的下半部：

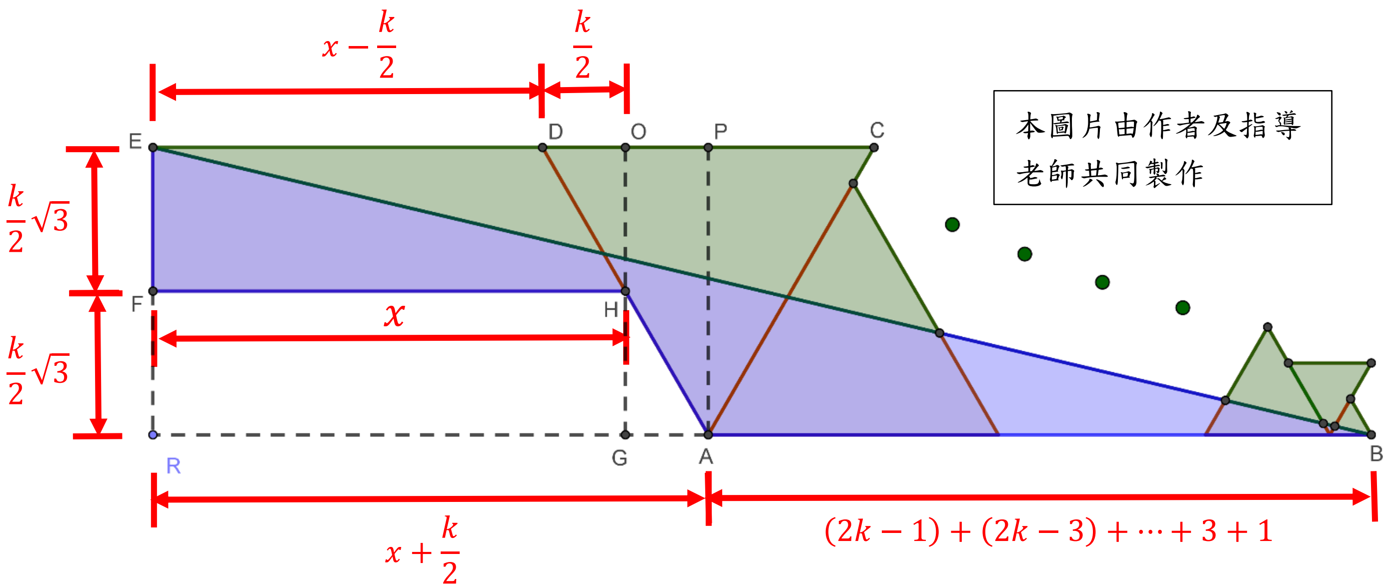
很容易知道淺綠色的面積大於淺藍色面積。而斜對角線在下半部，所以本圖的深綠色面積比上一個圖的深綠色面積還要大；本圖的深藍色面積比上個圖的深藍色面積還要小，因此本圖的綠色面積總和大於藍色面積總和。



本圖片由作者製作

所以，要將面積平分，則斜對角線一定要在上半部。

接著，我們來算$2k$(k為大於 1 的整數)個正三角形，上半部梯形的長度為何時，才能讓斜對角線將面積平分。



本圖片由作者及指導老師共同製作

用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{\sqrt{3}k\left[1+3+\cdots+(2k-1)+\left(x+\frac{k}{2}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{\sqrt{3}k}{2}\left[x+\left(x+\frac{k}{2}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1^2+\cdots+(2k)^2\right]+\frac{\frac{\sqrt{3}k}{2}\left[\left(x-\frac{k}{2}\right)+x\right]}{2}\right\}$$

ΔBER面積

梯形$AHFR$面積

三角形面積和+梯形$DEFH$面積的一半

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}k}{2}\left(k^2+\frac{k}{2}+x\right)-\frac{\sqrt{3}k}{4}\left(2x+\frac{k}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}\right]+\frac{\sqrt{3}k}{4}\left(2x-\frac{k}{2}\right)\right\}$$

利用等量公理，兩邊同乘 8、同除以$\sqrt{3}$，得到

$$4k\left(k^2+\frac{k}{2}+x\right)-2k\left(2x+\frac{k}{2}\right)=\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}+k\left(2x-\frac{k}{2}\right)$$

利用等量公理，兩邊同除以k，得到

$$4\left(k^2+\frac{k}{2}+x\right)-2\left(2x+\frac{k}{2}\right)=\frac{(2k+1)(4k+1)}{3}+\left(2x-\frac{k}{2}\right)$$

利用等量公理，兩邊同乘 6，得到

$$24\left(k^2+\frac{k}{2}+x\right)-12\left(2x+\frac{k}{2}\right)=2(2k+1)(4k+1)+6\left(2x-\frac{k}{2}\right)$$

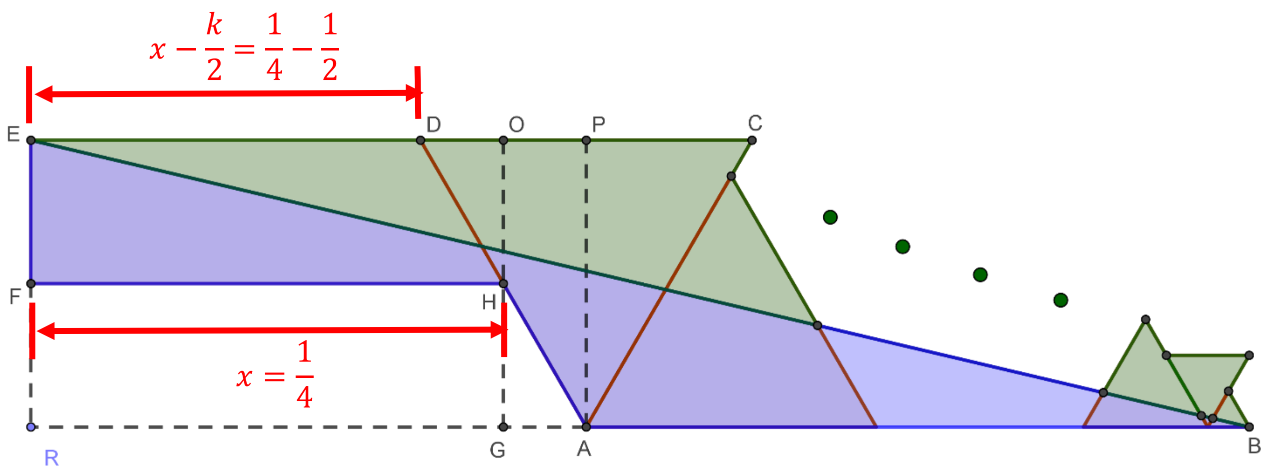
$$\Longrightarrow (24k^2+12k+24x)-(24x+6k)=(16k^2+12k+2)+(12x-3k)$$

$$\Longrightarrow 24k^2+6k=16k^2+9k+2+12x$$

$$\Longrightarrow 8k^2-3k-2=12x$$

$\Longrightarrow x=\frac{8k^2-3k-2}{12}$，$k\geq 2$。

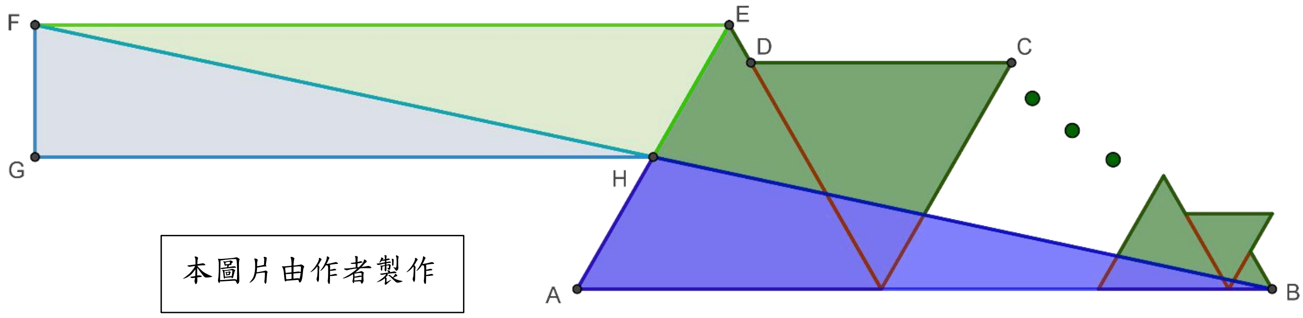
當$k=1$時，$x=\frac{8\times1^2-3\times1-2}{12}=\frac{1}{4}$，如下圖，我們會發現梯形是不存在的，因此必須要讓$k\geq 2$，這個算式才是對的。



本圖片由作者及指導老師共同製作

10. 奇數個正三角形：假設有$2k-1$(k為正整數)個正三角形。

為了將解法一般化，我們首先要說明，若要將面積平分，則斜對角線不可能通過最大三角形的中點及下半部，這裡我們分成兩部分來說明。



本圖片由作者製作

(1) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的中點：

上半部的面積為深綠色加上淺綠色，而下半部的面積為深藍色加上淺藍色。

很容易知道淺綠色的面積大於淺藍色，

深藍色的三角形面積$=\frac{1}{2}\left\{[1+3+5\cdots+(2k-1)]\times\frac{(2k-1)\sqrt{3}}{4}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{k[1+(2k-1)]}{2}\times\frac{(2k-1)\sqrt{3}}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(k^2\times\frac{(2k-1)\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{(2k^3-k^2)\sqrt{3}}{8}=\frac{6k^3-3k^2}{24}\sqrt{3}$$

深綠色的面積為所有的正三角形面積扣掉深藍色三角形的面積：

深綠色的面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}[1^2+2^2+\cdots+(2k-1)^2]-\frac{\sqrt{3}(2k^3-k^2)}{8}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{(2k-1)2k(4k-1)}{6}-\frac{\sqrt{3}(2k^3-k^2)}{8}$$

$$=\left\{\frac{(2k-1)2k(4k-1)}{24}-\frac{2k^3-k^2}{8}\right\}\sqrt{3}$$

$$=\left\{\frac{16k^3-12k^2+2k}{24}-\frac{6k^3-3k^2}{24}\right\}\sqrt{3}$$

$$=\frac{10k^3-9k^2+2k}{24}\sqrt{3}$$

因為深綠色和深藍色的面積分別為$\frac{10k^3-9k^2+2k}{24}\sqrt{3}$、$\frac{6k^3-3k^2}{24}\sqrt{3}$，其有相同的分母和$\sqrt{3}$，因此我們只要比分子$10k^3-9k^2+2k$、$6k^3-3k^2$的大小就好了。

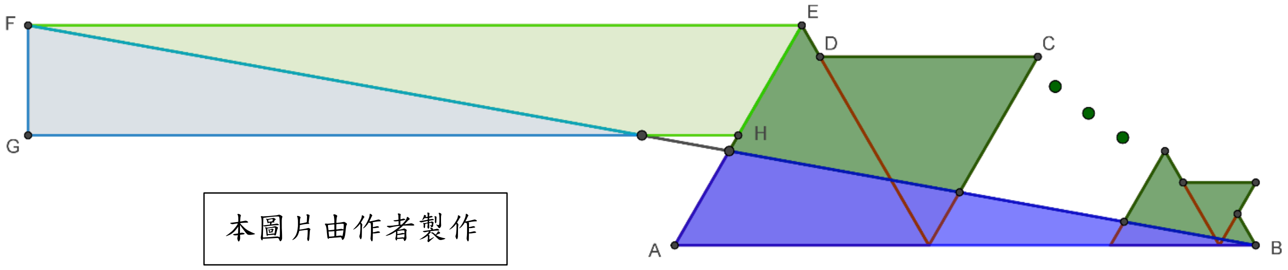
所以現在要證明若k為正整數，則$10k^3-9k^2+2k\geq 6k^3-3k^2$。我們將兩分子相減，得到：$(10k^3-9k^2+2k)-(6k^3-3k^2)$

$$=4k^3-6k^2+2k=2k(2k^2-3k+1)=2k(2k-1)(k-1)$$

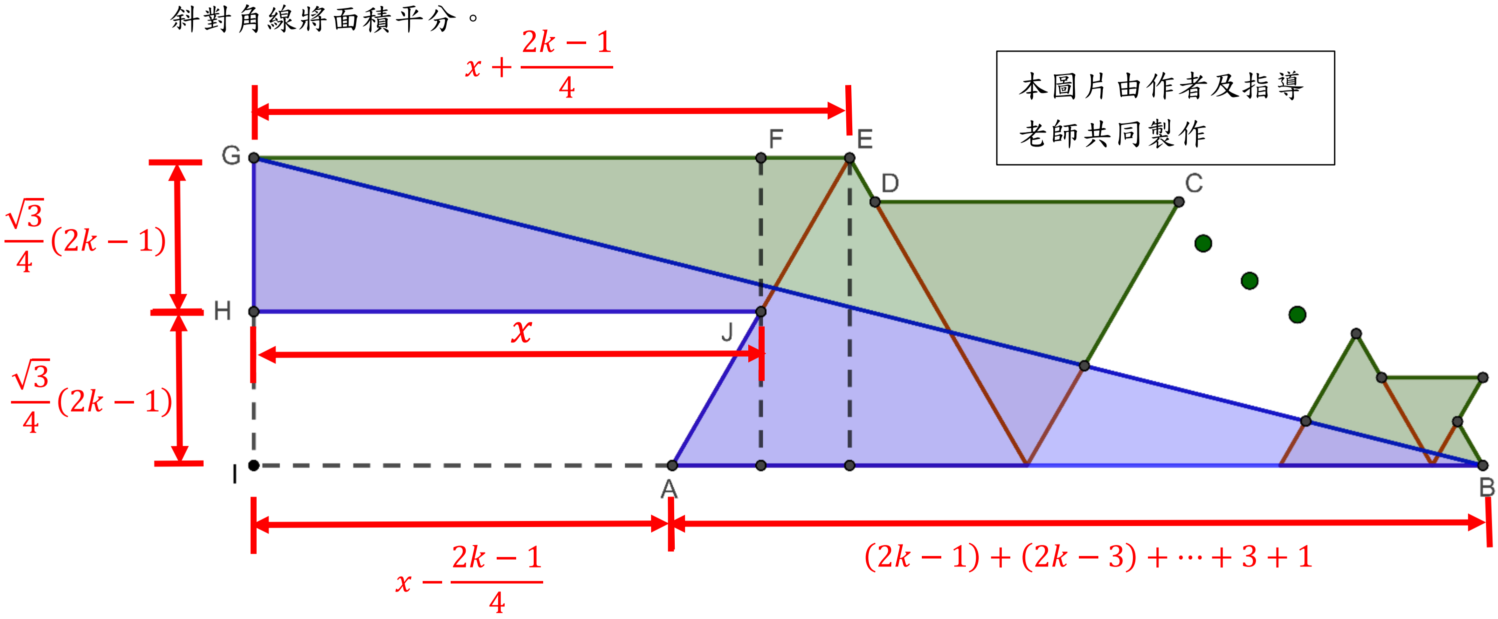
當k為正整數時，可知$2k > 0$、$2k-1 > 0$、$k-1 \geq 0$，因此$10k^3 - 9k^2 + 2k \geq 6k^3 - 3k^2$，故深綠面積$= \frac{10k^3-9k^2+2k}{24}\sqrt{3} \geq \frac{6k^3-3k^2}{24}\sqrt{3} =$深藍面積。因此，綠色的面積總和大於藍色面積總和，因此斜對角線一定不可能通過最大正三角形的中點。

(2) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的下半部：

很容易知道淺綠色的面積大於淺藍色。而斜對角線在下半部，所以本圖的深綠色面積比上一個圖的深綠色面積還要大；本圖的深藍色面積比上個圖的深藍色面積還要小，因此本圖的綠色面積總和大於藍色面積總和。所以，要將面積平分，則斜對角線一定要在上半部。



接著，我們來算當k為正整數時，$2k-1$個正三角形的上半部梯形長為何時，才能讓斜對角線將面積平分。



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

ΔBGI面積　　　　梯形$AJHI$面積

$$\frac{(2k-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1+3+\cdots+(2k-1)+\left(x-\frac{2k-1}{4}\right)\right]}{2} - \frac{(2k-1)\frac{\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{2k-1}{4}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1^2+\cdots+(2k-1)^2\right] + \frac{(2k-1)\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{2k-1}{4}\right)+x\right]}{2}\right\}$$

三角形面積和+梯形$EGHJ$面積的一半

$$\Longrightarrow \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{4}\left[k^2+x-\frac{2k-1}{4}\right]-\frac{(2k-1)\sqrt{3}}{8}\left(2x-\frac{2k-1}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{(2k-1)\times 2k(4k-1)}{6}\right]+\frac{(2k-1)\sqrt{3}}{16}\left(2x+\frac{2k-1}{4}\right)$$

用等量公理，同乘以 64，同除以$\sqrt{3}$，

$$\Longrightarrow 16(2k-1)\left[k^2+x-\frac{2k-1}{4}\right]-8(2k-1)\left(2x-\frac{2k-1}{4}\right)$$
$$=8\left[\frac{k(2k-1)(4k-1)}{3}\right]+4(2k-1)\left(2x+\frac{2k-1}{4}\right)$$

用等量公理，同除以$(2k-1)$，

$$\Longrightarrow 16\left(k^2+x-\frac{2k-1}{4}\right)-8\left(2x-\frac{2k-1}{4}\right)=8\left[\frac{k(4k-1)}{3}\right]+4\left(2x+\frac{2k-1}{4}\right)$$

將等式展開，

$$\Longrightarrow 16k^2-8k+4+16x-16x+4k-2=\frac{8\times(4k^2-k)}{3}+8x+2k-1$$
$$\Longrightarrow 16k^2-4k+2=\frac{8\times(4k^2-k)}{3}+8x+2k-1$$

用等量公理，同乘以 3，

$$\Longrightarrow 48k^2-12k+6=8\times(4k^2-k)+24x+6k-3$$
$$\Longrightarrow 16k^2-10k+9=24x$$
$$\Longrightarrow x=\frac{16k^2-10k+9}{24}$$

為了便於公式的整理呈現，我們假定x為上半部梯形的下底長、n為最大正三角形的邊長。

(A) 若n為偶數，則$n=2k$。將$x=\frac{8k^2-3k-2}{12}$換成$x=\frac{8\left(\frac{n}{2}\right)^2-3\left(\frac{n}{2}\right)-2}{12}\Rightarrow x=\frac{4n^2-3n-4}{24}$。

(B) 若n為奇數，則$n=2k-1$。將$x=\frac{16k^2-10k+9}{24}$換成$x=\frac{16\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-10\left(\frac{n+1}{2}\right)+9}{24}\Rightarrow x=\frac{4n^2+3n+8}{24}$。

將公式整理成以下表格並寫成定理【3】、【4】:

	大於 2 的偶數$n=2k$ $(k\geq 2$的整數)	奇數$n=2k-1$ $(k\geq 1$的整數)
以k表示上半部梯形的下底長	$\frac{8k^2-3k-2}{12}$	$\frac{16k^2-10k+9}{24}$
以n表示上半部梯形的下底長	$\frac{4n^2-3n-4}{24}$	$\frac{4n^2+3n+8}{24}$

【定理 3】

有邊長 1、2、3、…、n的規律正三角形，且n為大於 2 的偶數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2-3n-4}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 4】

有邊長 1、2、3、…、n的規律正三角形，且n為正奇數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2+3n+8}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

伍、研究結果:

【定理 1】

有邊長 1、2、3、...、n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{n^2-1}{3}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 2】

已知a_1、a_2、a_3、⋯、a_n為首項a，公差d的等差數列，其中a、d皆為正整數。若有邊長a_1、a_2、a_3、⋯、a_n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{(n-1)nd}{3}\left[1+\frac{2a-d}{a_n}\right]$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 3】

有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為大於 2 的偶數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2-3n-4}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 4】

有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為正奇數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2+3n+8}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

陸、討論：

首先，在正方形上，我們利用綠色及藍色面積相等的關係，使左下角的空格等於右上角的空格，進而算出長方形的長x為何，斜對角才能將面積平方，接著將結果一般化及推廣。其次，關於正三角形，我們先把圖形從左上到右下切開，讓下面的直角三角形減掉多餘的梯形，其面積等於整個圖形的一半，如此就能得出梯形下底長x的數值。雖然一開始的推算過程複雜且困難，但經過多次計算後也逐漸掌握了技巧。如果還要更深入研究，可以探討：正三角形的等差化、正六邊形...等許多可以研究的規律或圖形，期待日後可以繼續探討。

柒、參考資料及其他

一、國中數學課本，第四冊，康軒文教事業。
二、曾嘉儀，康軒版麻辣講義，第四冊。
三、高中數學課本，第二冊，翰林文教事業。
四、2018 年希望杯 7 年級試題。

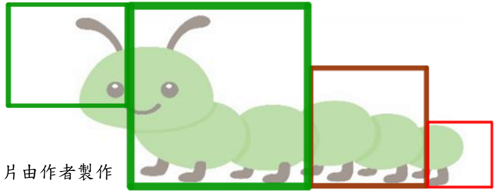
【評語】030421

本作品主題取材參考 2018 年希望杯數學競賽七年級試題，作者從幾何構圖出發，依序探討將一系列大小漸增的正方形與正三角形排列後（正方形和正三角形組成的「毛毛蟲」狀圖形），如何透過加上特定輔助圖形，使對角線能將整體圖形面積平均分割。研究通過幾何面積計算，成功歸納出長方形長度和梯形下底的具體數值和一般化證明，展現了紮實的幾何計算和歸納能力。

建議：

推導過程的詳盡度：報告中提及「經過多次計算後也逐漸掌握了技巧」，但部分推導步驟（例如正方形或正三角形面積平分公式的完整推導）較為精簡，建議補充，以提高證明嚴謹性。

作品海報



本圖片由作者製作

伸縮毛毛蟲-

如何將正方形與正三角形的規律圖形面積平分

壹、　研究動機

為了熟悉獨立研究的做法，老師建議我們做看看獨立研究。我們在各大數學競賽找題目，大部分的題目都不適合拿來做獨立研究，於是在我們的精挑細選之下，選中了兩種題目。我們原本找的是另一個題目，研究一段時間後，無法產出一般化的結果，因此我們 3 人和老師討論過後，果斷放棄原本的題目，而選擇了現在的題目。

貳、研究目的

學習獨立研究的順序，以及思考遇到問題時該怎麼解決，試著從多種方面思考答案。還能學會以前不會用的公式。順便訓練上台發表的膽量，而且可以跟同學炫耀說我有參與全國科展喔。

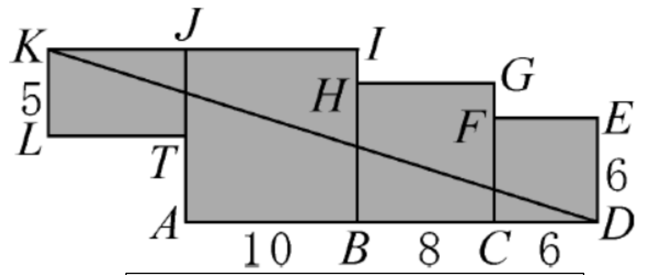
參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、*GeoGebra*。

肆、研究過程或方法

一、　研究主題說明

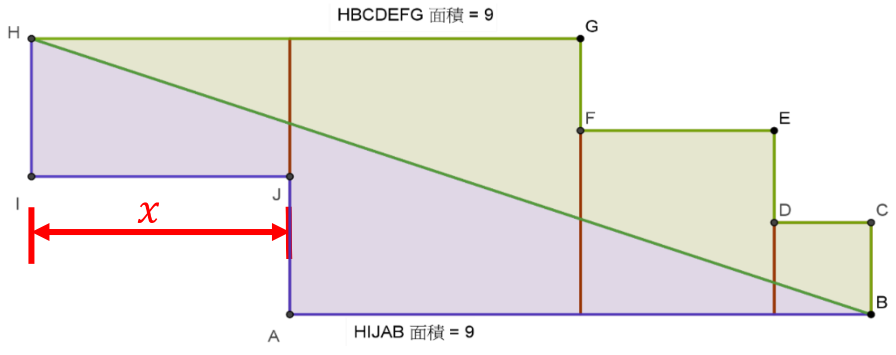
以下是這次研究的題目(2018 年希望杯 7 年級試題[4])。



本圖片摘自 2018 年希望杯 7 年級試題第 22 題[4]

正方形$ABIJ$，$BCGH$，$CDEF$的邊長依次為 10 公分、8 公分和 6 公分。它們和一個長方形$LTJK$放在一起，組成上圖的陰影多邊形。其中A，B，C，D在同一條直線上，K，J，I也在同一條直線上。已知$\overline{KL}=5$公分，$\overline{KD}$平分陰影多邊形的面積，則$\overline{KJ}$為多少公分？

1. 將正方形的邊長從 1，2，3，4…依序增加。
2. 將圖形塗上顏色。因此我們的問題變成『請問長方形的長x為多少時，可以讓綠色多邊形的面積等於藍色多邊形？』。



本圖片由作者及指導老師共同製作

二、　公式

以下是我們在研究過程中需用到的公式。

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

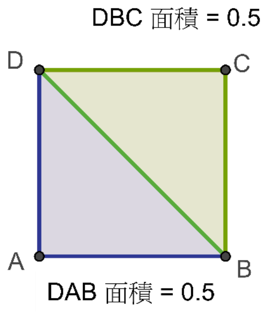
(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) c_1、c_2為常數，則$\sum_{k=1}^{n}(c_1a_k\pm c_2b_k)=c_1\sum_{k=1}^{n}a_k\pm c_2\sum_{k=1}^{n}b_k$

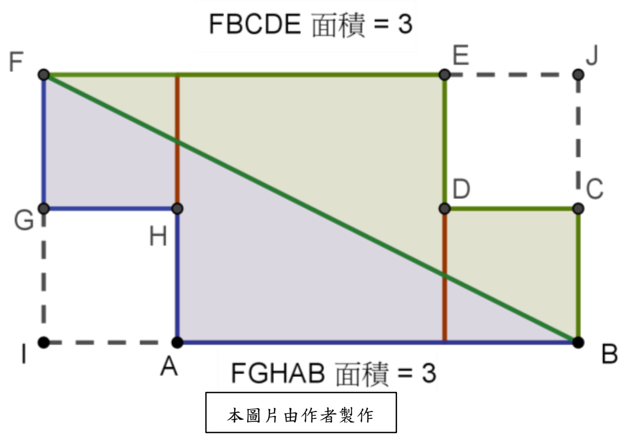
(4) 正三角形的高$=\frac{\sqrt{3}}{2}n$，正三角形面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot n^2$，$n$為邊長。

三、　正方形

1. 一個正方形、兩個正方形：



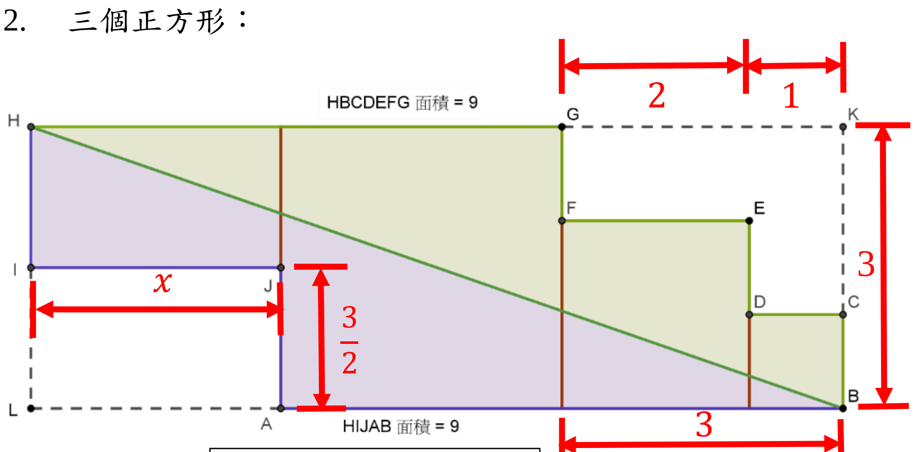
本圖片由作者製作



本圖片由作者製作

為了讓藍色和綠色多邊形面積相等，我們必須使右上角的四邊形$CDEJ$與左下角的四邊形$AHGI$面積相等，因此長方形的長為 1。

2. 三個正方形：



本圖片由作者及指導老師共同製作

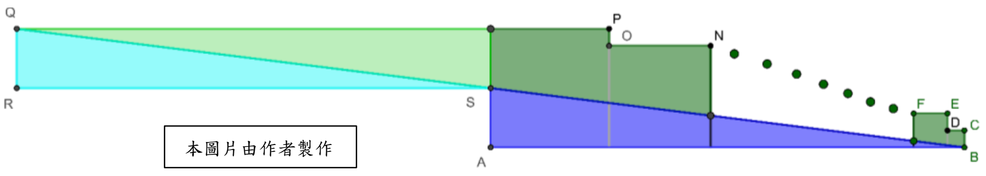
$\frac{3}{2}x=3\times(1+2)-1^2-2^2$，可得到$\frac{3}{2}x=4\Rightarrow x=\frac{8}{3}$。

我們把 1～8 個正方形的數據做成以下表格：

正方形個數	1	2	3	4	5	6	7	8
長方形的長	0	1	$\frac{8}{3}$	5	8	$\frac{35}{3}$	16	21

3. 現在來說明為什麼斜對角線只能通過最大正方形的上半部。

(1) n個正方形，且斜對角線通過最大正方形的中點。



本圖片由作者製作

淺綠色和淺藍色面積相等，

深藍色面積$=\frac{1}{2}\left[(1+2+\cdots+n)\frac{n}{2}\right]=\frac{n^2(n+1)}{8}$，

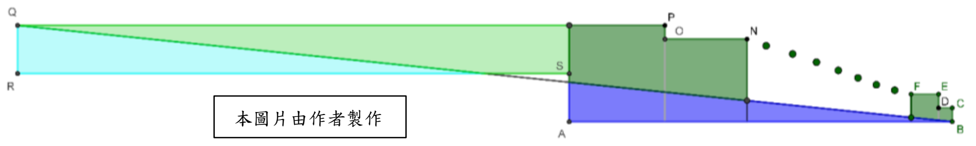
深綠色面積$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{n^2(n+1)}{8}$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)}{8}$

$=\frac{(n+1)(5n^2+4n)}{24}>\frac{(n+1)\times 3n^2}{24}=\frac{n^2(n+1)}{8}$，

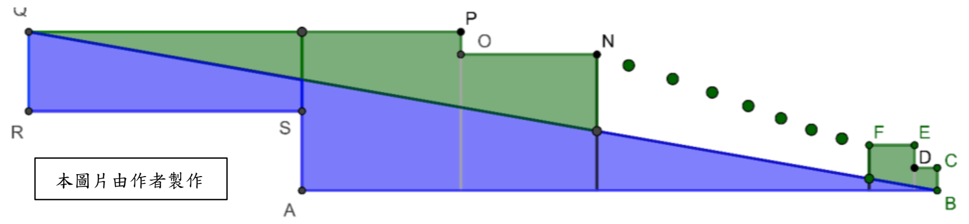
斜對角線不可能通過中點

(2) 若斜對角線通過最大正方形的下半部，和第(1)小題比較後，發現深綠色面積比深藍色多更多，且淺綠色面積又大於淺藍色，因此所有綠色的面積會大於所有藍色面積，因此斜對角線只能通過上半部。



本圖片由作者製作

4. 當正方形有n個時：



本圖片由作者製作

設長方形的長為x，可以列出方程式：

$\frac{n}{2}x=n[1+2+\cdots+(n-1)]-[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$

$\frac{n}{2}x=n\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

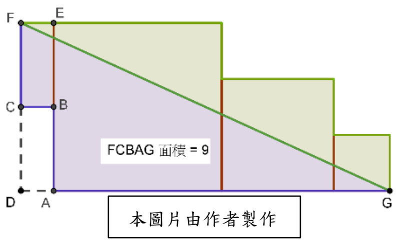
$\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$

$\Rightarrow 3x=n^2-1\ \Rightarrow\ x=\frac{n^2-1}{3}$，

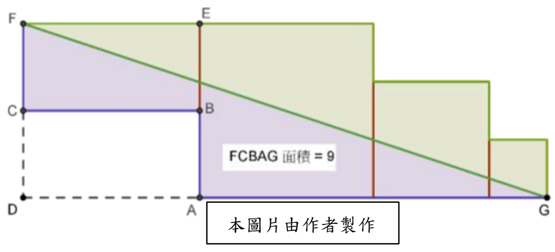
因此可以知道長方形的長為$x=\frac{n^2-1}{3}$。所以我們得到【定理 1】

【定理 1】
若有邊長 1、2、3、…、n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{n^2-1}{3}$時，斜對角線就能將面積平分。

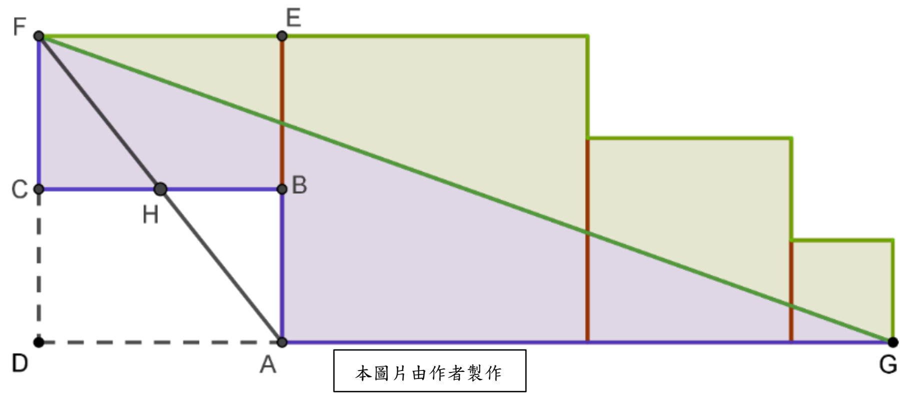
基本上，我們已經解決一開始的問題了。在研究正方形的過程中，我們發現只要讓斜對角線一直保持在最大正方形的上半部，接著不管怎麼改變斜對角線，下半部的藍色多邊形面積總是保持不變，這個發現也在之後幫了我們解決更困難的問題。



本圖片由作者製作



本圖片由作者製作



本圖片由作者製作

5. 接著把正方形邊長，改成正整數的等差數列：『有n個規律正方形，其邊長依序為$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，$a_4=a+3d$，⋯，$a_n=a+(n-1)d$，其中a、d皆為正整數』

(1) 因版面問題，我們這裡省略斜對角線只能通過最大正方形上半部的說明，詳細說明，請看作品說明書。

(2) 我們先算所有正方形的面積總和：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}a^2+2ad\sum_{k=1}^{n}(k-1)+d^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$
$$=na\,a_n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2$$

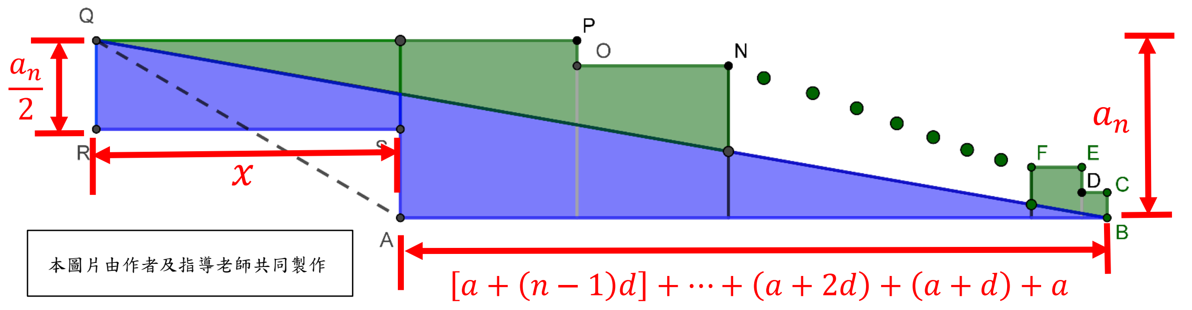
(3) 深藍色直角三角形面積$=\frac{1}{2}a_n\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right]$。

(4) 當正方形有n個時(第一個正方形邊長a、公差d)：

設長方形長x，利用藍色面積等於全部塗色面積的一半：

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{a_n}{2}x\right) = \frac{1}{2}a_n\left[na + \frac{(n-1)n}{2}d\right]$$

正方形面積和　長方形面積　ΔABQ面積

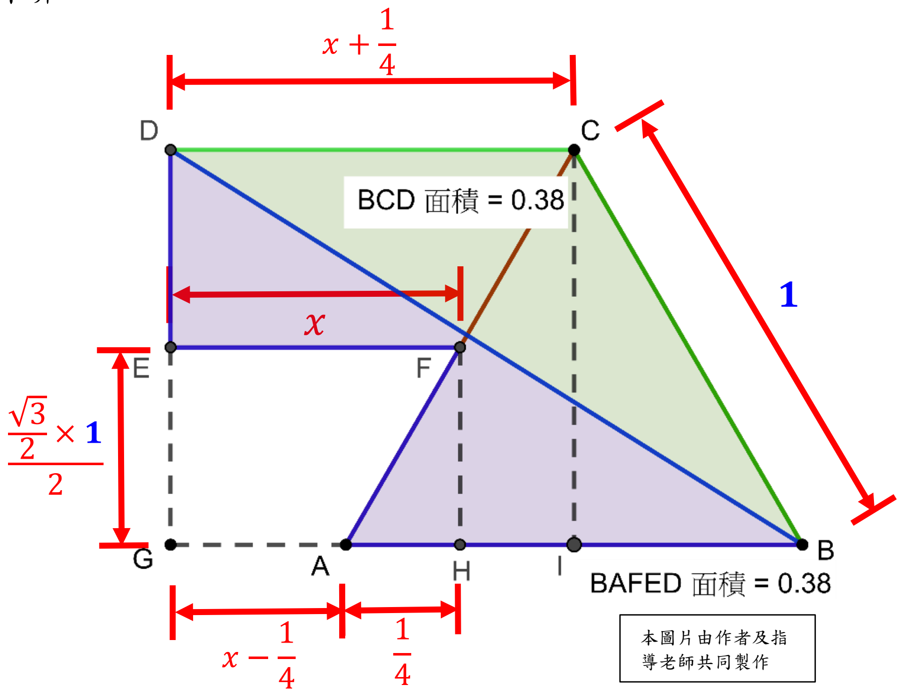


$\Rightarrow \frac{a_n}{2}x = a_n\left[na+\frac{(n-1)n}{2}d\right] - na\,a_n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2 \quad \Rightarrow x = (n-1)n\,d - \frac{(n-1)n(2n-1)d^2}{3a_n} = (n-1)nd\left(\frac{1}{3}+\frac{2a-d}{3a_n}\right) = \frac{(n-1)nd}{3}\left(1+\frac{2a-d}{a_n}\right)$。

【定理2】已知a_1、a_2、a_3、⋯、a_n為首項a，公差d的等差數列，其中a、d皆為正整數。若有邊長a_1、a_2、a_3、⋯、a_n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{(n-1)nd}{3}\left(1+\frac{2a-d}{a_n}\right)$時，斜對角線就能將面積平分。

二、　正三角形

我們計算的想法為藍色面積為全部的一半，為了方便計算藍色多邊形的面積，我們採用下半部的直角ΔBDG面積減去空白處的梯形$AFEG$面積來算。

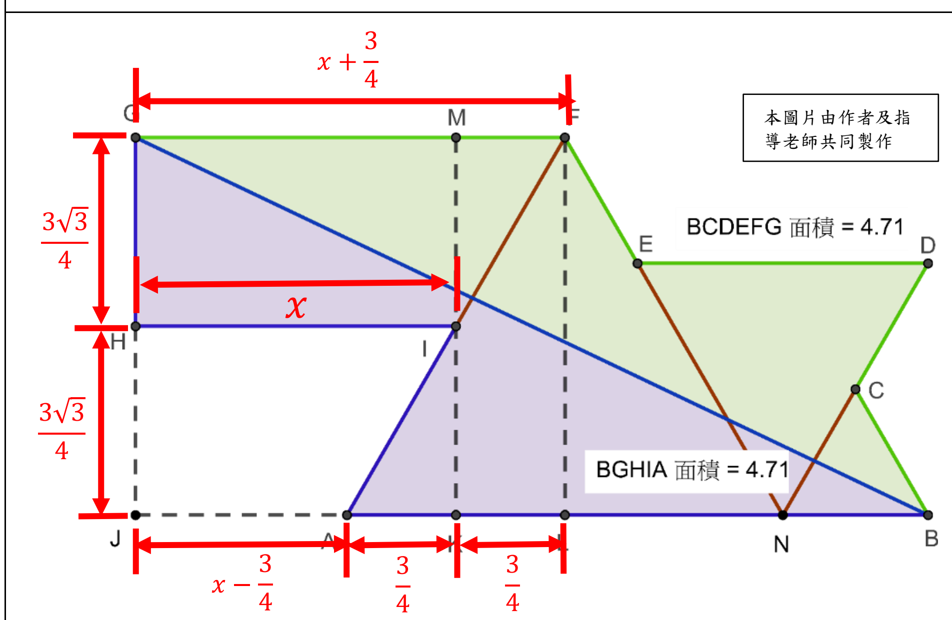


為了方便討論，我們假設梯形的下底$\overline{EF}$為x，因為正三角形的邊長為1，所以高為$\frac{\sqrt{3}}{2}$。因為F點為$\overline{AC}$中點，所以$\overline{EG}$的長度為$\overline{DG}$的一半，因此$\overline{EG}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$。因為$\overline{AI}=\frac{1}{2}$且$F$點為$\overline{AC}$中點，所以$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AI}=\frac{1}{4}$，則$\overline{GA}=\overline{GH}-\overline{AH}=x-\frac{1}{4}$、$\overline{DC}=\overline{GH}+\overline{HI}=x+\frac{1}{4}$，接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式，因此有了以下方程式：

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)+1\right]}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+x\right]}{2}\right]$$

ΔBDG面積　梯形$AFEG$面積　ΔABC面積加上梯形$CDEF$面積的一半

$\Rightarrow x=\frac{5}{8}$



接著用藍色面積為全部圖形的一半來列式：

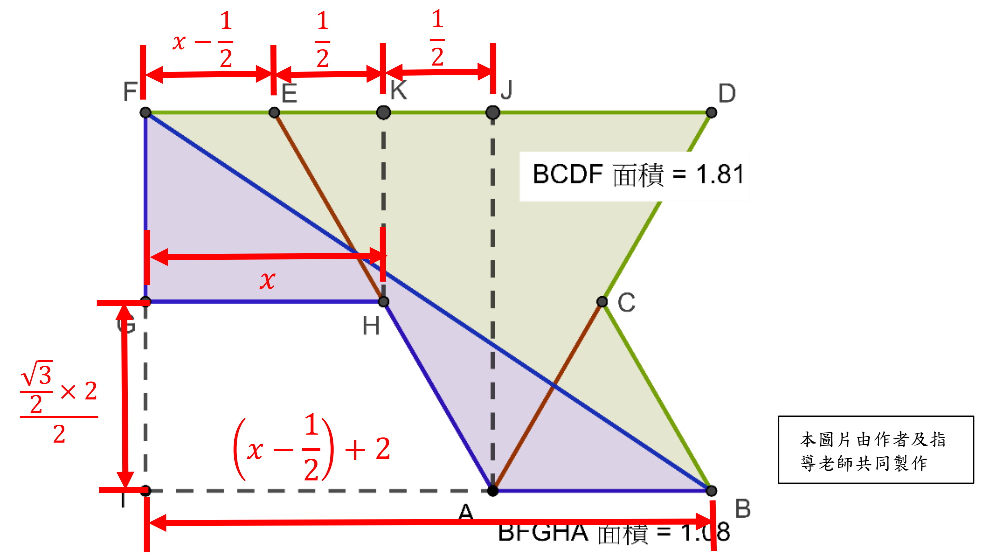
ΔBGJ面積　梯形$AIHJ$面積

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[1+3+\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]}{2} - \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[x+\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+2^2+3^2) + \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)+x\right]}{2}\right\}$$

三角形面積和+梯形$IFGH$面積的一半

$\Rightarrow x=\frac{53}{24}$

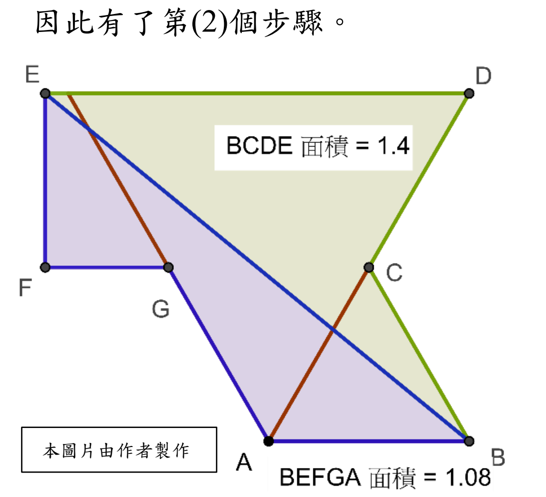
(1) 斜對角線$\overline{BF}$通過最大正三角形邊長的上半部時，藍色多邊形的面積保持不變：

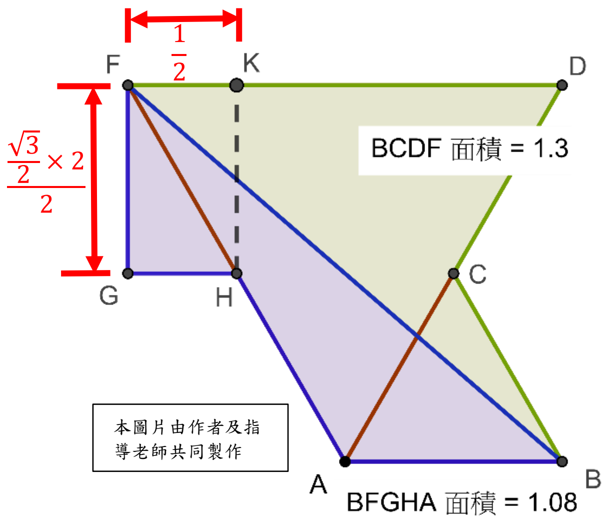


藍色面積為$\frac{\sqrt{3}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\right]}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$，這代表藍色面積和梯形的下底$\overline{GH}$無關

ΔBFI　梯形$AHGI$

既然藍色多邊形面積不變，那我們想要讓上半部的綠色多邊形面積和藍色相等，觀察右圖，可發現綠色面積比較大，我們就思考綠色多邊形面積什麼時候最小，因此有了第(2)個步驟。





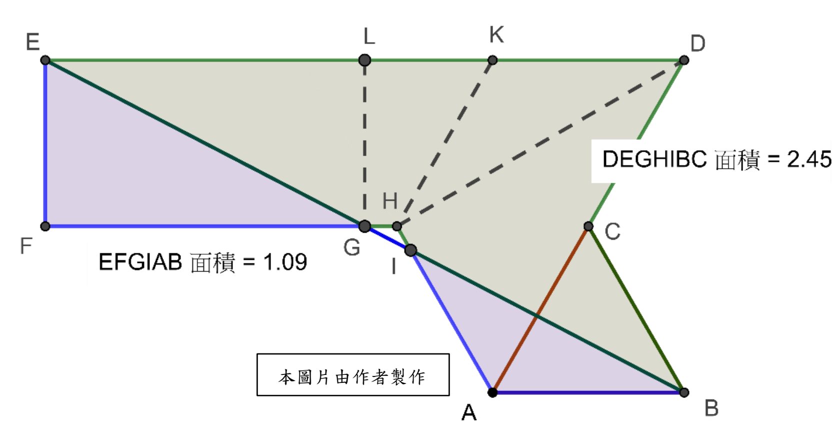
(2) 若斜對角線通過最大正三角形的上半部時，不可能將面積平分：

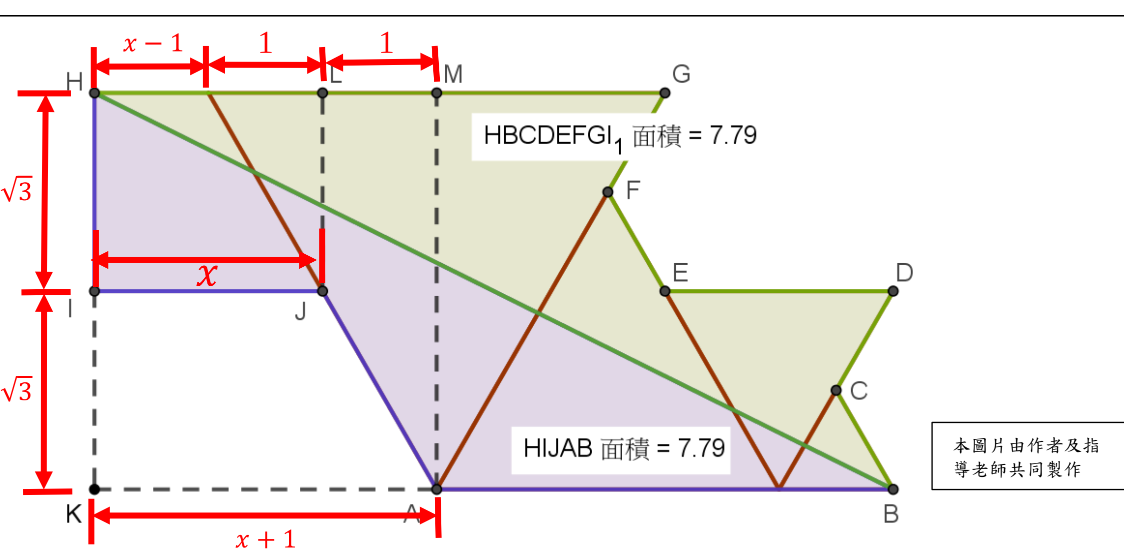
綠色面積$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{6\sqrt{3}}{8}>\frac{5\sqrt{3}}{8}=$藍色，

兩三角形面積和　ΔFGH面積　藍色面積

即使讓綠色面積最小了，它還是比藍色面積還大，因此斜對角線通過最大正三角形的上半部時，不可能將面積平分。

(3) 接著說明當斜對角線通過最大正三角形的下半部時，也不可能將面積平分：





$$\frac{2\sqrt{3}[1+3+(x+1)]}{2} - \frac{\sqrt{3}[x+(x+1)]}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2)+\frac{\sqrt{3}[(x-1)+x]}{2}\right]$$

$\Rightarrow x=2$

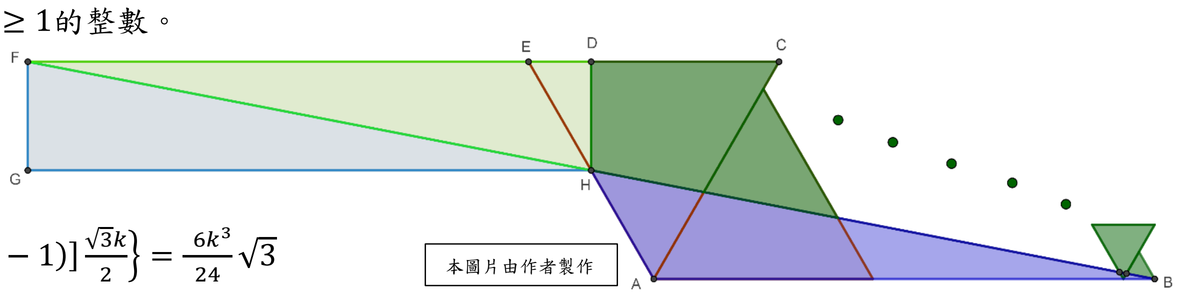
做到這裡之後，我們把 1～8 個正三角形的數據做成以下表格，

正三角形個數	1	2	3	4	5	6	7	8
上半部梯形的下底長	$\frac{5}{8}$	無解	$\frac{53}{24}$	2	$\frac{41}{8}$	$\frac{61}{12}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{19}{2}$

我們發現，我們應該將問題分成有奇數個三角形及有偶數個三角形，這樣才能將情況一般化。

1. 偶數個正三角形：我們假設有$2k$個正三角形，$k \geq 1$的整數。

(1) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的中點：

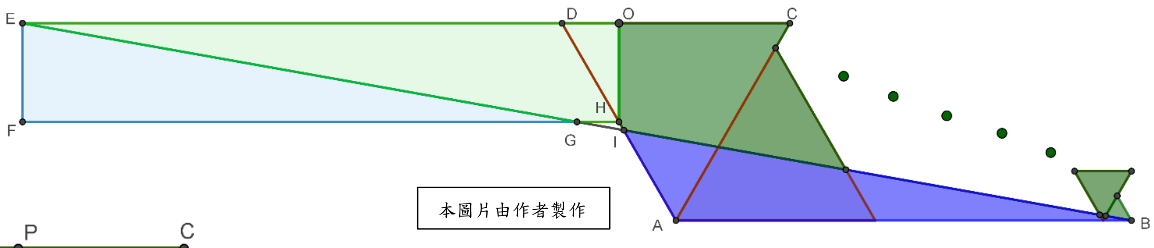


深藍色的三角形面積$=\frac{1}{2}\left\{[1+3+5\cdots+(2k-1)]\frac{\sqrt{3}k}{2}\right\}=\frac{6k^3}{24}\sqrt{3}$

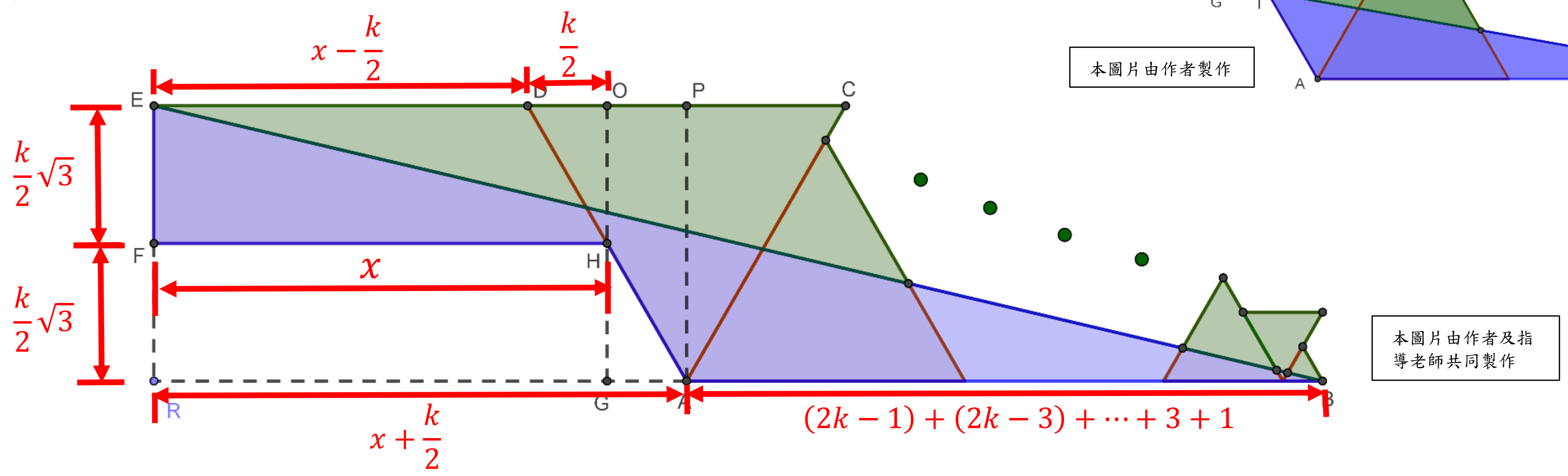
深綠色的面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}[1^2+2^2+\cdots+(2k)^2]-\frac{\sqrt{3}k^3}{4}-\frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{DH}=\frac{10k^3+9k^2+2k}{24}\sqrt{3}$，因為$k \geq 1$。

所以深綠色的面積$=\frac{10k^3+9k^2+2k}{24}\sqrt{3}>\frac{6k^3}{24}\sqrt{3}$ =深藍色的面積。

(2) 若斜對角線通過最大正三角形邊長的下半部：



(3) 斜對角線通過最大正三角形邊長的上半部：



$$\frac{k\sqrt{3}\left[1+3+\cdots+(2k-1)+\left(x+\frac{k}{2}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{k}{2}\sqrt{3}\left[x+\left(x+\frac{k}{2}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}[1^2+\cdots+(2k)^2]+\frac{\frac{k}{2}\sqrt{3}\left[\left(x-\frac{k}{2}\right)+x\right]}{2}\right\}\Longrightarrow x=\frac{8k^2-3k-2}{12},k\geq 2$$

ΔBER面積　　梯形$AHFR$面積　　三角形面積和+梯形$DEFH$面積的一半

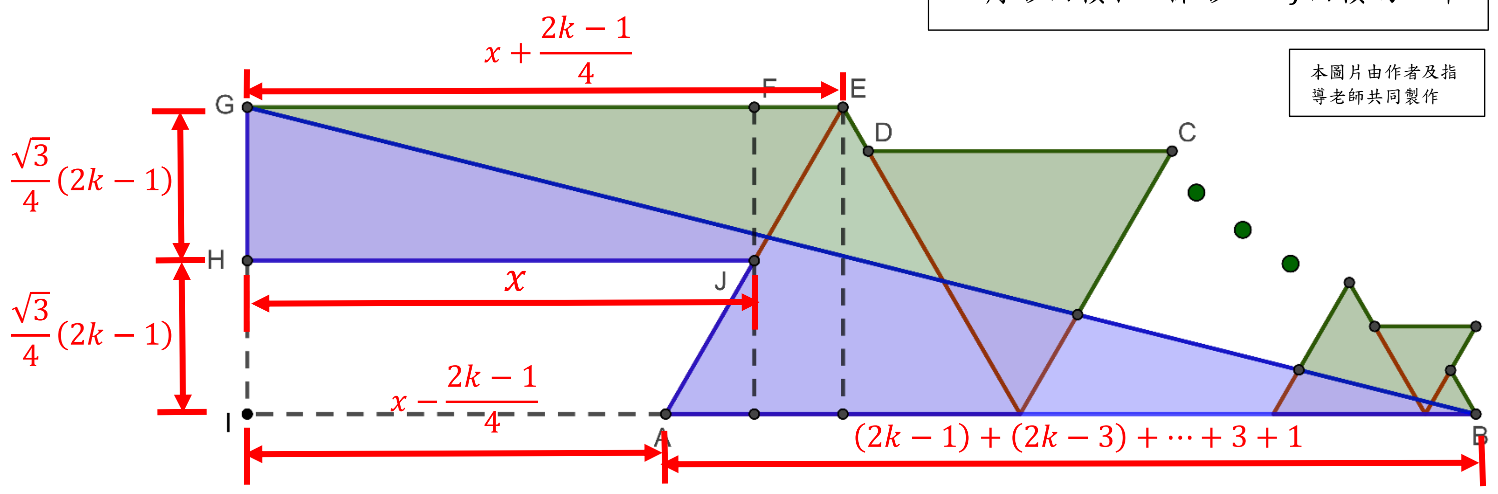
2. 奇數個正三角形：我們假設有$2k-1$個正三角形，$k \geq 1$的整數。

因版面問題，我們省略斜對角線為什麼一定不在下半部的說明，直接算

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2k-1)\left[1+3+\cdots+(2k-1)+\left(x-\frac{2k-1}{4}\right)\right]}{2}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(2k-1)\left[x+\left(x-\frac{2k-1}{4}\right)\right]}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}[1^2+\cdots+(2k-1)^2]+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(2k-1)\left[\left(x+\frac{2k-1}{4}\right)+x\right]}{2}\right\}$$

ΔBGI面積　　梯形$AJHI$面積　　三角形面積和+梯形$EGHJ$面積的一半

$$\Longrightarrow x=\frac{16k^2-10k+9}{24}$$



【定理 3】有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為大於 2 的偶數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2-3n-4}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 4】有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為正奇數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2+3n+8}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

伍、研究結果

【定理 1】若有邊長 1、2、3、...、n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{n^2-1}{3}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 2】已知a_1、a_2、a_3、⋯、a_n為首項a，公差d的等差數列，其中a、d皆為正整數。若有邊長a_1、a_2、a_3、⋯、a_n的規律正方形。當最大正方形旁的上半部長方形，其長度為$\frac{(n-1)nd}{3}\left(1+\frac{2a-d}{a_n}\right)$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 3】有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為大於 2 的偶數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2-3n-4}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

【定理 4】有邊長 1、2、3、...、n的規律正三角形，且n為正奇數。當最大正三角形旁的上半部梯形，其下底長度為$\frac{4n^2+3n+8}{24}$時，斜對角線就能將面積平分。

陸、討論

首先，在正方形上，我們利用綠色及藍色面積相等的關係，使左下角的空格等於右上角的空格，進而算出x，接著將結果一般化及推廣。其次，關於正三角形，我們先把圖形從左上到右下切開，讓下面三角形的面積減掉多餘的梯形後等於整個圖形的一半，如此就能得出x的數值。雖然一開始的推算過程複雜困難，但經過多次計算後也逐漸掌握了技巧。若還要深入研究，可以探討：正三角形的等差化、正六邊形…等許多可以研究的規律或圖形，期待日後可以繼續探討。

柒、參考資料及其他

一、國中數學課本，第四冊，康軒文教事業。
二、曾嘉儀，康軒版麻辣講義，第四冊。
三、高中數學課本，第二冊，翰林文教事業。
四、2018 年希望杯 7 年級試題。