# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組　數學科

**第一名**

030420

**有趣的同心三角形**

學校名稱：新北市立文山國民中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國二 黃品堯<br>國二 黃心遠<br>國二 吳柏翰 | 蕭偉智 |

關鍵詞：九點圓、歐拉線、奈格爾線

# 得獎感言

## 在數學的迷宮裡，找到了自己的光

國小時，我們在各科目表現都不錯，唯獨數學總能激起我們的熱情。當別人按部就班地解題時，我們總喜歡試試不同的方式去挑戰，也曾好奇翻閱國中數學課本內容。這份對數學純粹的喜愛，讓我們在國中七年級下學期選擇研究組別時，毫不猶豫地勾選了「數學組」，儘管當時還不知道，這會成為一段既艱難又閃耀的旅程。

八年級研究剛起步時，我們天真地以為只要有點小聰明，加上有經驗的指導老師，做科展應該不難。我們先從書籍《幾何明珠》中汲取靈感，選定了「有趣的同心三角形」為題，想以歐拉三角形公式為基礎進行推廣。然而，當推廣時，形心的先備知識、三角函數、輔助線等等接踵而至，我們才發現自己根本還沒掌握好，尤其在存在性作圖步驟卡關許久。面對不懂之處，只好硬著頭皮請教老師或詢問同學。問問題的過程也不輕鬆——怕問太多被嘲笑，也怕拖累進度。那是一場自尊與誠實之間的心理拉鋸戰。

市賽的準備是一場漫長的馬拉松。白天有課業，放學或假日則留下來做研究，埋首畫圖觀察與思索證明，還得模擬評審問題。有次練習時，我們被一個基礎問題問倒，現場一片靜默。那一刻，我們才懂了「承認一知半解，是進步的開始。」。此後，我們開始分類問題、整理筆記，甚至午餐時間也在討論。那些曾經陌生而讓人退卻的公式或圖形，在多次的討論與推敲後，漸漸顯露出數學獨有的規律與美感。

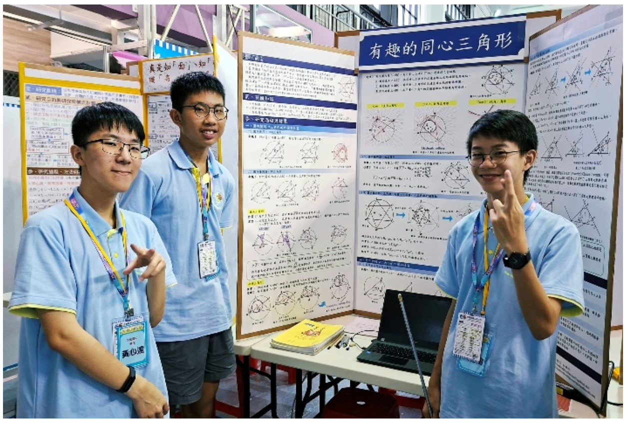
當市賽結果公布，我們如願晉級全國賽。興奮過後，壓力隨之而來，由於全國賽的對手都是各縣市的佼佼者，同時評審教授的提問將更有挑戰性。我們只高興了一晚，就繼續往後做研究，重新閱讀每一段證明細節，搜尋網路資料與文獻，最後在老師的指導下，我們利用向量工具，終於成功將圓外切的推廣作圖完整證

明。

將近一年的旅程中，我們從一開始的懵懂無知，逐漸學會主動探索、相互合作，我們也學會將問題拆解成更小問題，再想辦法突破。這不只是完成了一份報告，而是一次次自我突破的歷程。我們珍惜一起披星載月、一起焦頭爛額、一起分享美食的同學們。謝謝你們，讓這段路不只有壓力，還有許多笑聲與溫暖！

我們也衷心感謝老師一路的指導！在我們迷惘時伸出援手，在我們鬆懈時適時提醒。我們不再只是為了獎項而努力，而是學會了追求更高標準的自己，以及享受問題解決的喜悅。

從「不懂」到「試試看」的那份勇氣替這段數學旅程刻下最佳印記。這段路，我們不再懼怕未知，也相信每一個困難背後，都藏著值得追尋的答案。



作者合照（左起黃心遠、黃品堯、吳柏翰）


全國科展數學科同校的兩組學生合照


總統接見師生合照

# 有趣的同心三角形

## 摘要

本研究從著名的歐拉三角形公式出發，我們將圓內接同內心三角形，推廣至圓內接同重心三角形和圓內接同垂心三角形。有關同重心與同垂心三角形的存在性與作圖範圍，我們巧妙利用原三角形的九點圓來進行刻劃！再將研究項目放在同心三角形的邊的包絡線，我們先給出其焦點，再用純幾何方式來證明銳角三角形時，其包絡線為橢圓；鈍角三角形時，包絡線為雙曲線；直角三角形時，則是退化為垂心與外心。值得一提的是，本研究進一步整合同內心、同垂心、同重心三角形，發現面積成等比之關聯性。最後考慮將圓內接改成圓外切的同心三角形，這個難度提升很多，我們成功利用奈格爾線來處理這個研究項目，它顯著不同於圓內接同重心三角形。

# 壹、 前言

## 一、 研究動機

眾所皆知對於任意三角形 $\triangle ABC$，都同時擁有內切圓和外切圓（內心與外心）。我們又在書籍《幾何明珠》中第十二章看到「歐拉公式（Euler triangle formula）」（見 [1]，第 124 - 126 頁），即「平面上，圓 $O$ 與圓 $I$ 的半徑長度分別為 $R$ 和 $r$，若存在一個三角形以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$，則 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$，其逆定理亦成立」。

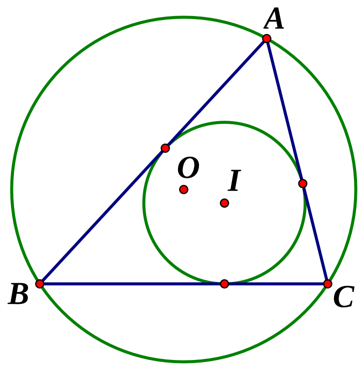


圖 1：歐拉正定理（自繪）

歐拉公式（Euler triangle formula）的逆定理是比較有趣的，若兩圓的圓心之距離滿足 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$，則存在一個三角形以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$。

如下圖，在圓 $O$ 上任取一點 $A$，作 $\overrightarrow{AI}$ 交圓 $O$ 於 $D$ 點，再以 $D$ 點為圓心且 $\overline{DI}$ 為半徑畫弧，分別交圓 $O$ 於 $B$、$C$ 兩點，則 $\triangle ABC$ 即為所求，也就是 $\triangle ABC$ 以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$（證明見 [1]，第 125 - 126 頁）。

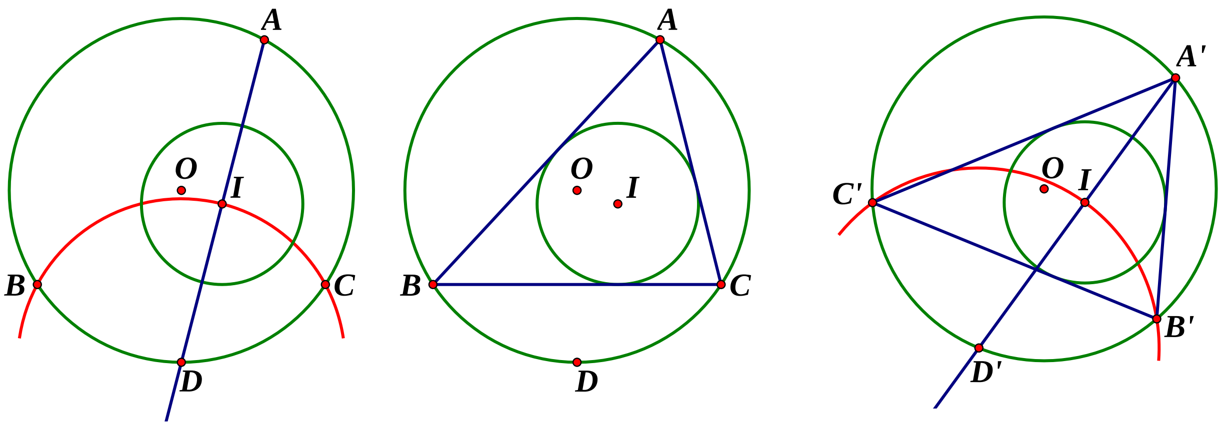



圖 2：歐拉逆定理（自繪）

關鍵是 $A$ 點是任取的點，於是我們也可以在圓 $O$ 再任取一點 $A'$ 異於 $A$ 點，用相同步驟可以得出 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$。我們可以說 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外接圓與內切圓。

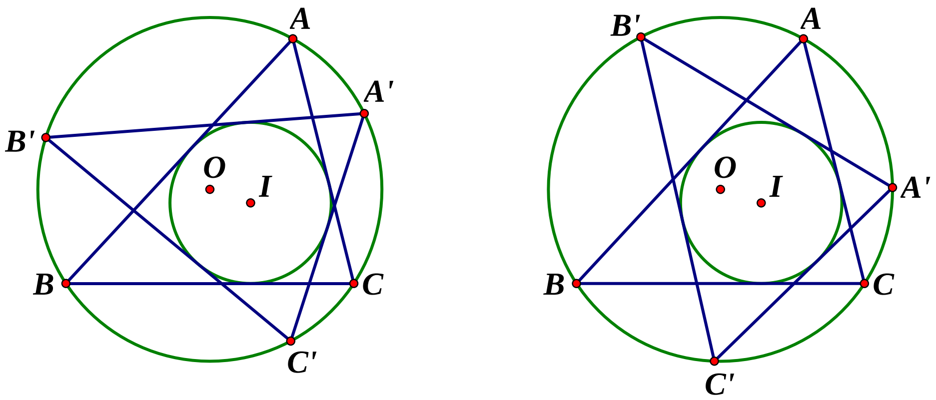



圖 3：有相同的外接圓與內切圓的兩個三角形（自繪）

然而，我們思考一個問題：「給定圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$ 及其內心 $I$，求作圓 $O$ 內接 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同內心」，這樣的作圖是否等價於歐拉逆定理呢？換句話說，有沒有可能圓 $O$ 內接的兩個三角形 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 有相同的內心，但是其內切圓不同（也就是內切圓是同心圓）呢？

事實上，不可能是同心圓。因為歐拉三角形公式是正定理與逆定理都成立，因此給定外心 $O$ 點、內心 $I$ 點與外接圓半徑 $R$ 後，此時內切圓半徑 $r$ 即為唯一的長度。

從歐拉公式（Euler triangle formula）延伸，我們嘗試更換一些條件，將「相同外心與內心」改成「相同外心與重心」，也就是「給定圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$ 及其重心 $G$，求作圓 $O$ 內接 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\Delta ABC$ 有相同重心」，我們發現這樣新的命題具有豐富且美麗的幾何性質，因此展開以下研究。

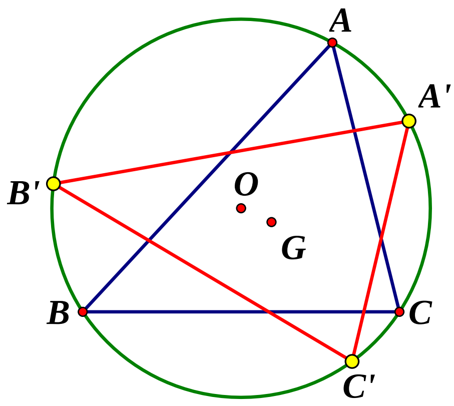



圖 4：圓內接同重心三角形（自繪）

## 二、 研究目的

（一） 刻劃圓內接同內心三角形的作圖、存在性與性質。

（二） 刻劃圓內接同重心三角形的作圖、存在性與性質。

（三） 刻劃圓內接同垂心三角形的作圖、存在性與性質。

（四） 刻劃圓內接同內心三角形、同重心、同垂心三角形之關聯性。

（五） 探討「圓外切」同心三角形的存在性作圖及其與圓內接同心三角形的異同。

# 貳、 研究設備與器材

本研究所有圖片皆為作者以幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體繪製而成。

# 參、 預備知識

定義 1（橢圓）：$F_1$、$F_2$ 為平面上相異兩定點，且定值 $2a$ 滿足 $2a > \overline{F_1F_2}$，則在平面上滿足 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ 的所有點 $P$ 所形成的圖形稱為橢圓。

定義 2（雙曲線）：$F_1$、$F_2$ 為平面上相異兩定點，且定值 $2a$ 滿足 $0 < 2a < \overline{F_1F_2}$，則在平面上滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ 的所有點 $P$ 所形成的圖形稱為雙曲線。

預備性質 1（歐拉公式（Euler triangle formula））[1]：平面上，圓 $O$ 與圓 $I$ 的半徑長度分別為 $R$ 和 $r$，若存在一個三角形以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$，則 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$。

預備性質 2（九點圓）[2]：平面上，$\triangle ABC$ 的各邊中點 $M_A$、$M_B$、$M_C$，各邊上的高之垂足點 $H_A$、$H_B$、$H_C$，以及三個頂點與垂心的連線之中點 $K_A$、$K_B$、$K_C$，則此九點共圓稱為九點圓，其圓心為 $N$ 為垂心與外心連線的中點。

預備性質 3（九點圓的半徑）[2]：$\triangle ABC$ 的九點圓之半徑為外接圓之半徑的一半。

預備性質 4（歐拉線 Euler line）[2]：平面上，對於任意三角形的外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$，三點共線且 $\overline{HG} = 2\overline{GO}$。

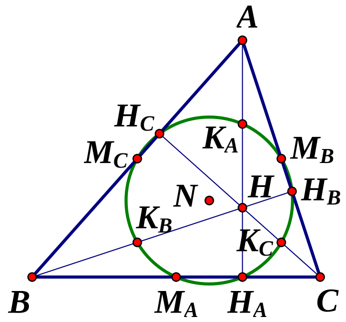



圖 5：九點圓（自繪）

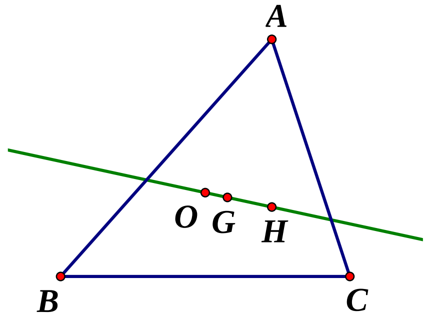



圖 6：歐拉線 Euler line（自繪）

# 肆、 研究過程與結果

## 一、 圓內接同內心三角形的作圖與性質

給定圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$ 及其內心 $I$，在前言中，我們已經給出了圓內接 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同內心的作圖方式與證明。

命題 1：對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，其同內心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。

步驟 1：在圓 $O$ 上任取一點 $A'$，作 $\overrightarrow{A'I}$ 交圓 $O$ 於 $D'$ 點。

步驟 2：以 $D'$ 點為圓心且 $\overline{D'I}$ 為半徑畫弧，分別交圓 $O$ 於 $B'$、$C'$ 兩點。

步驟 3：連接 $\overline{B'C'}$，則 $\triangle A'B'C'$ 即為所求。

證明如前所述，我們就不再重複。

□

接續討論，「$A'$ 點是否為圓 $O$ 上的所有點呢？」由命題 1 可知道，作圖的存在性關鍵在於 以 $D'$ 點為圓心且 $\overline{D'I}$ 為半徑畫弧，是否恆能與圓 $O$ 有兩個交點？

在圓 $O$ 和 圓 $D'$ 中，顯然連心線 $\overline{D'O}$ 恆小於兩圓半徑和 $\overline{D'I} + \overline{D'O}$，所以兩圓恆相交兩點。圓 $O$ 上的所有點都可以構造圓內接同內心 $\triangle A'B'C'$，換個觀點來說 $\triangle A'B'C'$ 的三邊直線包絡線是內切圓。

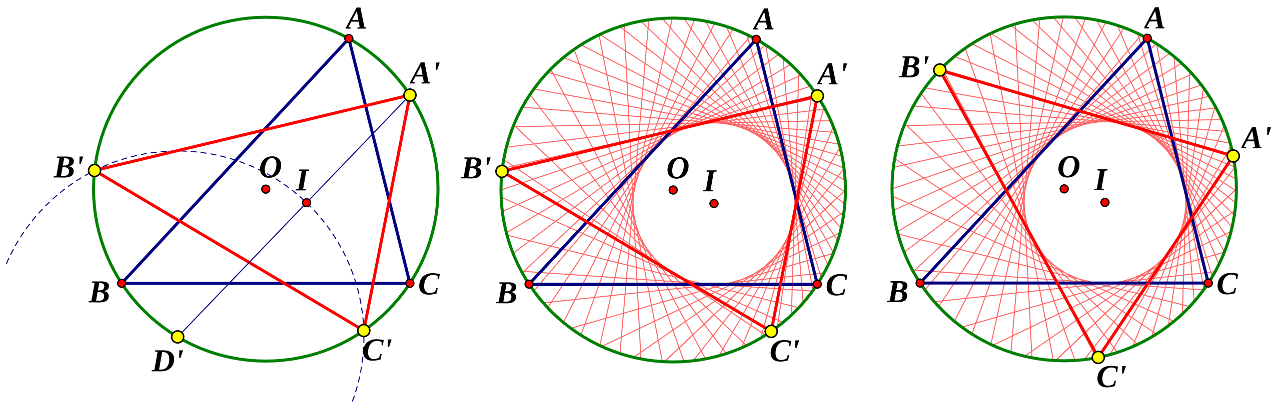



圖 7：同內心 $\triangle A'B'C'$ 的分布（自繪）

## 二、 圓內接同重心三角形的作圖與性質

我們接下來處理圓內接「同重心」三角形，我們利用重心 $G$ 點分割中線為 2 比 1 的特性進行思考。

在圓 $O$ 上任取一點 $A'$，作 $\overrightarrow{A'G}$ 並在其上取一點 $D'$ 點，使得 $\overrightarrow{GD'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'G}$。接下來要怎麼作出圓上的一條弦，使得其中點是 $D'$ 點？我們巧妙利用弦心距的性質，連接 $\overline{D'G}$，過 $D'$ 點作 $\overline{D'O}$ 的垂直線交圓 $O$ 於相異兩點。

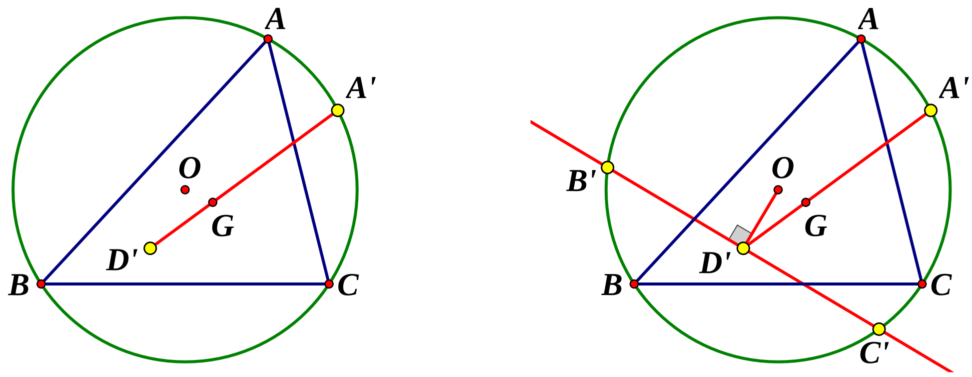



圖 8：同重心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖（自繪）

命題 2：對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。

步驟 1：在圓 $O$ 上任取一點 $A'$ 並作 $\overrightarrow{A'G}$。

步驟 2：在 $\overrightarrow{A'G}$ 上取一點 $D'$ 點，使得 $\overrightarrow{GD'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'G}$。

步驟 3：連接 $\overline{D'O}$，過 $D'$ 點作 $\overline{D'O}$ 的垂直線交圓 $O$ 於點 $B'$、$C'$。

步驟 4：連接 $\overline{B'C'}$，則 $\triangle A'B'C'$ 即為所求。

證明：因為 $\overline{A'G}:\overline{GD'}=2:1$，又 $\overline{B'D'}:\overline{D'C'}=1:1$，所以 $G$ 點為 $\triangle A'B'C'$ 的重心 。

$\square$

接續討論，「$A'$ 點是否為圓 $O$ 上的所有點呢？」由命題 2 可知道，作圖的存在性關鍵在於以 $D'$ 點是否在為圓 $O$ 內部？我們考慮 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，並不是圓 $O$ 上的所有點都可以作出同重心的 $\triangle A'B'C'$。如右下圖，$A'$ 點就是接續無法作圖。

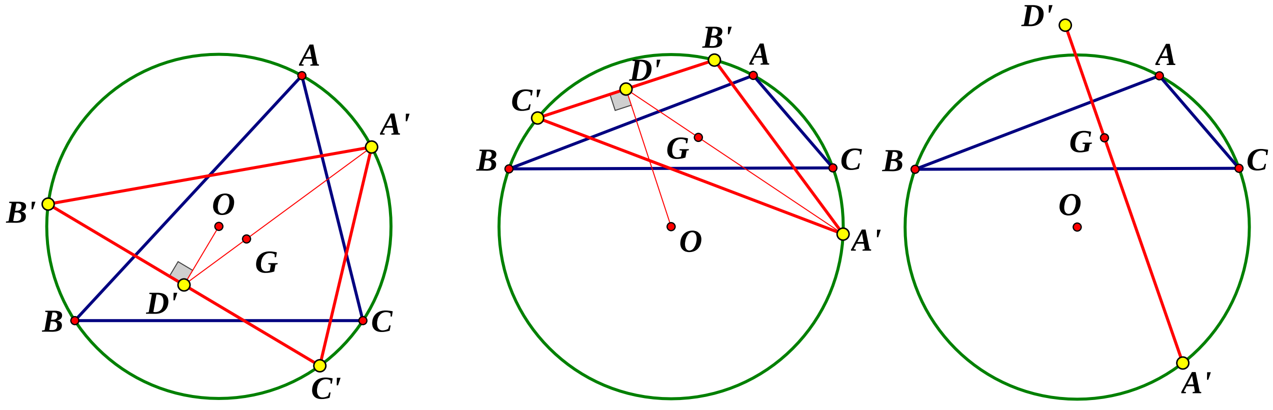



圖 9：同重心 $\triangle A'B'C'$ 的分布分析（自繪）

觀察發現同重心的 $\triangle A'B'C'$ 的存在性與 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 點之位置有關。我們好奇其條件是什麼？以下我們企圖刻劃這個有趣的項目。

（一） 當 $\triangle ABC$ 為直角三角形

我們作圖觀察，$\triangle ABC$ 為直角三角形時，因為 $A$、$G$、$O$ 三點共線且 $\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OA}$，可得當 $\triangle ABC$ 為任意直角三角形，$G$ 點軌跡為圓，其半徑為 $\overline{OG}$。因此，不失一般性，我們可任意選取一個直角 $\triangle ABC$，再去觀察 $A'$ 點在圓 $O$ 的不同位置時，同重心三角形 $\triangle A'B'C'$ 是否存在？

我們觀察到幾個現象：

第一，當 $A'$ 點為通過 $\overline{OG}$ 的直徑之端點時，因為 $\overline{A'G}:\overline{GA}=(3+1):2=2:1$，可得 $D'$ 點與 $A$ 點重合，所以過 $D'$ 點作 $\overline{D'O}$ 的垂線為切線，從而此時的 $A'$ 點無法作出同重心三角形。

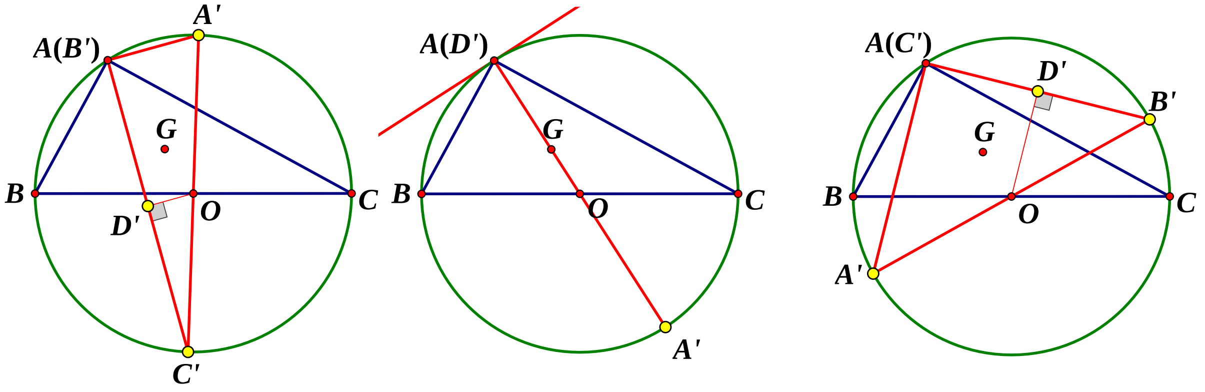



圖 10：$\triangle ABC$ 為直角三角形的同重心三角形（自繪）

第二，當 $A'$ 點不為通過 $\overline{OG}$ 的直徑之端點時，我們發現過 $D'$ 點（沒有與 $A$ 點重合）作 $\overline{D'O}$ 的垂線恆會通過 $A$ 點，這樣意味著此垂線與圓 $O$ 必交於相異兩點，所以同重心三角形 $\triangle A'B'C'$ 必然存在。

| |
|---|
| 性質 1：對於直角 $\triangle ABC$，過 $D'$ 點與 $\overline{D'G}$ 的垂線恆會通過 $A$ 點。 |

證明：在 $\triangle A'GA$ 與 $\triangle D'GO$ 中，$\overline{A'G}:\overline{GD'}=2:1=\overline{AG}:\overline{GO}$，$\angle A'GA=\angle D'GO$，可得 $\triangle A'GA \sim \triangle D'GO$（$SAS$ 相似）。考慮直徑 $\overline{AP}$ 的端點 $P$，$\overline{A'G}:\overline{GP}=2:(1+3)=1:2$，同理可得 $\triangle A'GP \sim \triangle D'GA$（$SAS$ 相似），從而有 $\overline{AA'} \parallel \overline{OD'}$ 且 $\overline{A'P} \parallel \overline{AD'}$。

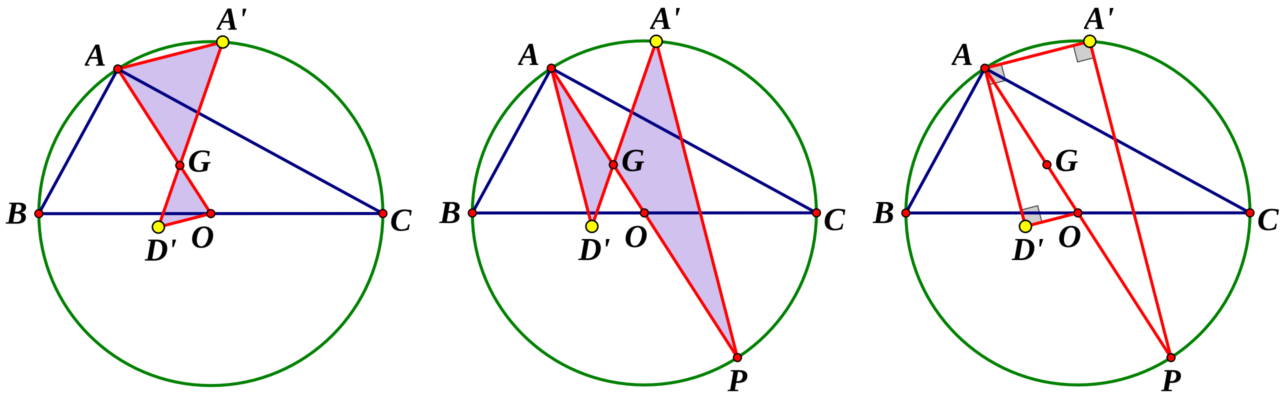



圖 11：兩組相似三角形（自繪）

因為 $\overline{AP}$ 為直徑，$\angle AA'P=90°$，又 $\overline{AA'} \parallel \overline{OD'}$ 且 $\overline{A'P} \parallel \overline{AD'}$，可得 $\angle A'AD'=\angle OD'A=90°$，故過 $D'$ 點與 $\overline{D'O}$ 的垂線恆會通過 $A$ 點。

$\square$

| |
|---|
| 定理 1：給定直角 $\triangle ABC$，若 $A'$ 點不是通過 $\overline{OG}$ 的直徑之端點，則同重心 $\triangle A'B'C'$ 必然存在且 $\triangle A'B'C'$ 恆為直角三角形。 |

證明：根據性質 1，若 $A'$ 點不是通過 $\overline{OG}$ 的直徑之端點，則 $\angle A'AC' = 90°$，且過 $D'$ 點與 $\overline{D'O}$ 的垂線與圓 $O$ 必交於相異兩點，因此圓內接同重心 $\triangle A'B'C'$ 必然存在。

□

我們還發現有趣的結果，$\triangle ABC$ 為直角三角形時，觀察當動點 $A'$ 在圓周上移動，滿足 $\overrightarrow{GD'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'G}$ 的 $D'$ 點的軌跡。當 $A'$ 與 $A$ 點重合時，$D'$ 點與 $O$ 點重合；當 $A'$ 分別與 $B$、$C$ 點重合時，$D'$ 點為其對邊的中點。

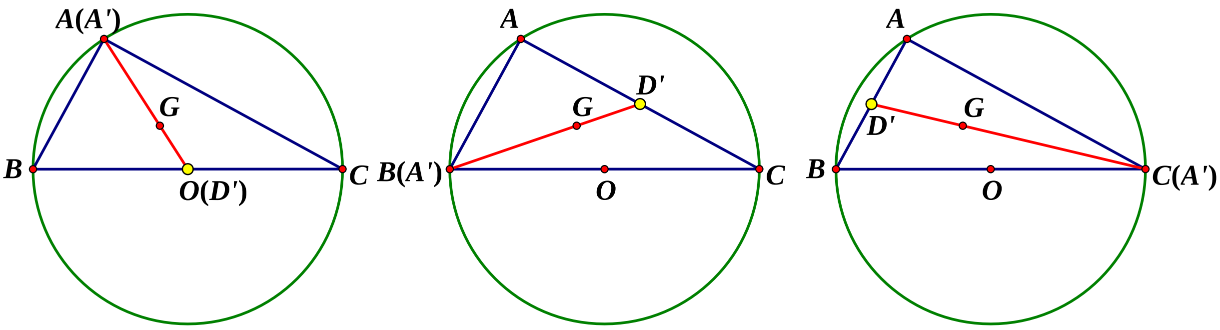



圖 12：觀察三個特殊的 $D'$ 點（自繪）

因為通過直角 $\triangle ABC$ 三邊的中點，我們發現 $D'$ 點的軌跡是 $\triangle ABC$ 三邊的九點圓，於是取 $\overline{AO}$ 的中點 $N$（九點圓圓心），以下證明 $\overline{ND'}$ 恆為定長。

| 性質 2：給定直角 $\triangle ABC$，動點 $D'$ 的軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓。 |
|---|

證明一：如下圖左一和左二，考慮取 $\overline{AO}$ 的中點 $N$，即為直角 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心。根據性質 1，過 $D'$ 點與 $\overline{D'O}$ 的垂線恆會通過 $A$ 點，可得直角 $\triangle AD'O$，其斜邊中點 $N$ 為其外心，從而有 $\overline{ND'}$ 恆為定長 $\frac{1}{2}\overline{AO}$，故動點 $D'$ 的軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓。

證明二：如下圖右一，連接 $\overline{A'O}$、$\overline{ON}$、$\overline{ND'}$，在 $\triangle A'OG$ 與 $\triangle D'NG$ 中，$\overline{A'G} = 2\overline{GD'}$ 且 $\overline{OG} = 2\overline{GN}$（歐拉線），$\angle A'GO = \angle D'ON$，可得 $\triangle A'OG \sim \triangle D'NG$（$SAS$ 相似），從而有 $\overline{ND'}$ 恆為定長 $\frac{1}{2}\overline{A'O}$。

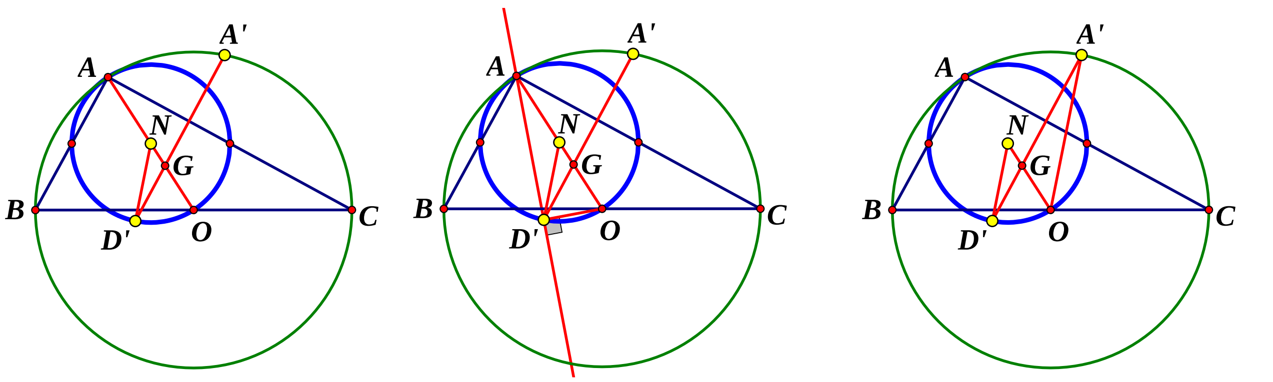



圖 13：$D'$ 點的軌跡為九點圓（自繪）

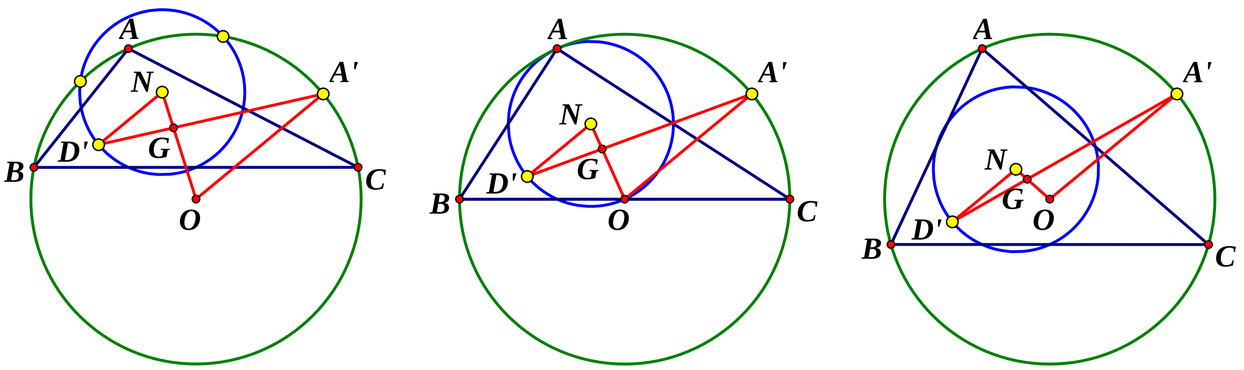
□

（二） 當 $\triangle ABC$ 為銳角三角形或鈍角三角形

我們本來想分類討論 $\triangle ABC$ 是銳角三角形或鈍角三角形時的重心 $G$ 點位置，再令 $\overrightarrow{A'G}$ 交圓 $O$ 於 $A''$ 點，因為 $\frac{\overline{A'G}}{\overline{GD'}}=2$，只要證明 $0<\frac{\overline{A'G}}{\overline{GA''}}<2$，就表示 $D'$ 點恆在圓內（在 $\overline{GA''}$ 上）；若 $\frac{\overline{A'G}}{\overline{GA''}}>2$ 時，則 $D'$ 點恆在圓外。然而，在圓 $O$ 上的 $A'$ 點有無窮多個，這樣的分析過於複雜！討論許久後，我們在性質 2 得到靈感。對於刻劃同重心三角形的作圖範圍，我們給出一個巧妙的手法，這個手法是通用的，適用於 $\triangle ABC$ 是銳角、直角與鈍角的情形。我們先證明對於任意 $\triangle ABC$，其 $D'$ 點的軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓，

| 性質 3：對於任意 $\triangle ABC$，動點 $D'$ 的軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓。 |
| --- |

證明：取 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 $N$，連接 $\overline{A'O}$、$\overline{ON}$、$\overline{ND'}$，在 $\triangle A'OG$ 與 $\triangle D'NG$ 中，$\overline{A'G}=2\overline{GD'}$ 且 $\overline{OG}=2\overline{GN}$（歐拉線），$\angle A'GO=\angle D'ON$，可得 $\triangle A'OG \sim \triangle D'NG$（$SAS$ 相似），從而有 $\overline{ND'}$ 恆為定長 $\frac{1}{2}\overline{A'O}$，因此 $D'$ 點軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓。




鈍角 $\triangle ABC$　　直角 $\triangle ABC$　　銳角 $\triangle ABC$

圖 14：軌跡為九點圓（自繪）

□

| |
|---|
| 定理 2：給定銳角 $\triangle ABC$，在外接圓上的所有點都可以構造同重心 $\triangle A'B'C'$。 |

證明：由性質 3 可得 $D'$ 點軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓，又銳角 $\triangle ABC$ 的九點圓恆在外接圓 $O$ 內（即九點圓與外接圓沒有交點），因此同重心 $\triangle A'B'C'$ 必然存在。

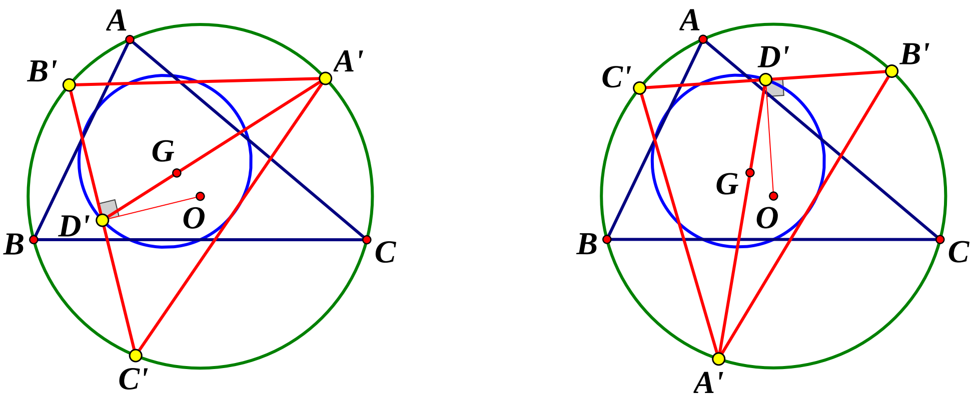



圖 15：銳角 $\triangle ABC$ 的同重心三角形（自繪）

□

繼續討論 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形的同重心三角形的存在性，要刻畫出無法作出同重心三角形的區域，如下圖的 $\widehat{A_1'A_2'}$，弧的端點即為臨界點為 $A_1'$ 點和 $A_2'$ 點，其 $D'$ 點恰好在 $\triangle ABC$ 外接圓上。

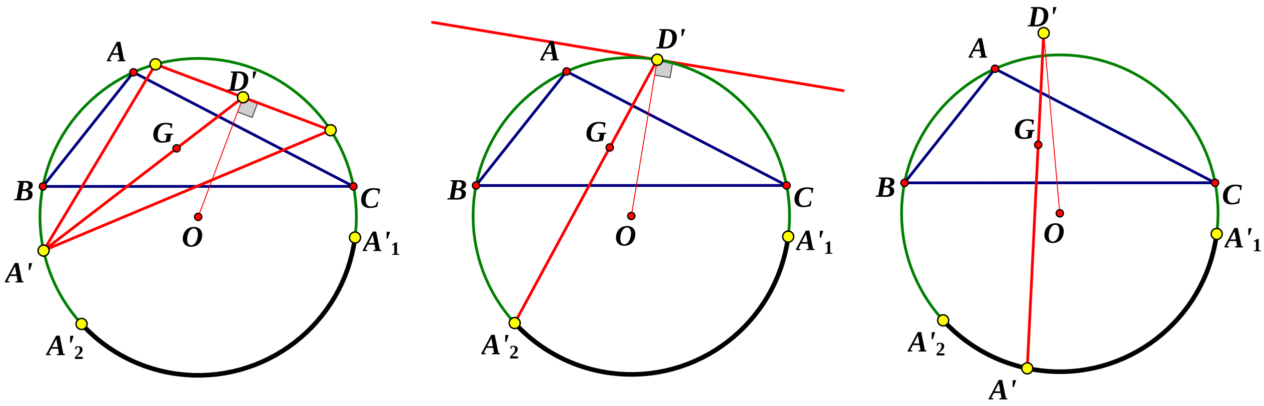



圖 16：鈍角 $\triangle ABC$ 的同重心三角形存在性（自繪）

我們同樣利用性質 3 結果處理鈍角 $\triangle ABC$ 的情形，取鈍角 $\triangle ABC$ 的九點圓與外接圓兩個交點，就可以刻畫出臨界點為 $A_1'$ 點和 $A_2'$ 點！

| |
|---|
| 命題 3：對於圓 $O$ 內接鈍角 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的範圍之作圖步驟。 |

步驟 1：作鈍角 $\triangle ABC$ 的九點圓。

步驟 2：$\triangle ABC$ 的九點圓與外接圓交於相異兩點 $D_1'$、$D_2'$。

步驟 3：連接 $\overleftrightarrow{D_1'G}$ 與 $\overleftrightarrow{D_2'G}$，分別交外接圓於相異兩點 $A_1'$、$A_2'$。

步驟 4：優弧 $\overset{\frown}{A_1'A_2'}$ 即為所求（劣弧 $\overset{\frown}{A_1'A_2'}$ 則不可作出同重心 $\triangle A'B'C'$）。

證明：由性質 3 可得 $D'$ 點軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓，又九點圓通過鈍角 $\triangle ABC$ 的邊延長線上的垂足（在外接圓的外部），令九點圓與外接圓 $D_1'$、$D_2'$ 兩點，因此 $A'$ 點在優弧 $\overset{\frown}{A_1'A_2'}$，有 $0 < \frac{A'G}{GA''} < 2$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 必然存在；$A'$ 點在劣弧 $\overset{\frown}{A_1'A_2'}$，有 $\frac{A'G}{GA''} > 2$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 不存在。

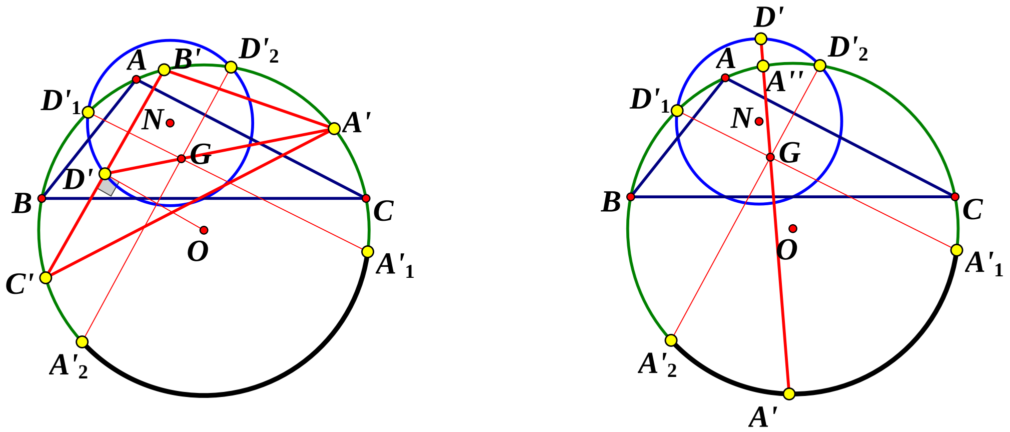



圖 17：鈍角三角形的同重心三角形的存在性（自繪）

□

（三） $\triangle ABC$ 的同重心三角形的三邊直線包絡線探討

根據性質 1 與定理 1，我們知道直角 $\triangle ABC$（不失一般性，令 $\angle A = 90°$）的同重心 $\triangle A'B'C'$ 恆為直角三角形，且其直角頂點與直角 $\triangle ABC$ 的直角頂點重合，因此斜邊必為直徑，意味著同重心 $\triangle A'B'C'$ 三邊直線為通過 $A$ 點的線束或通過圓心 $O$ 的線束。

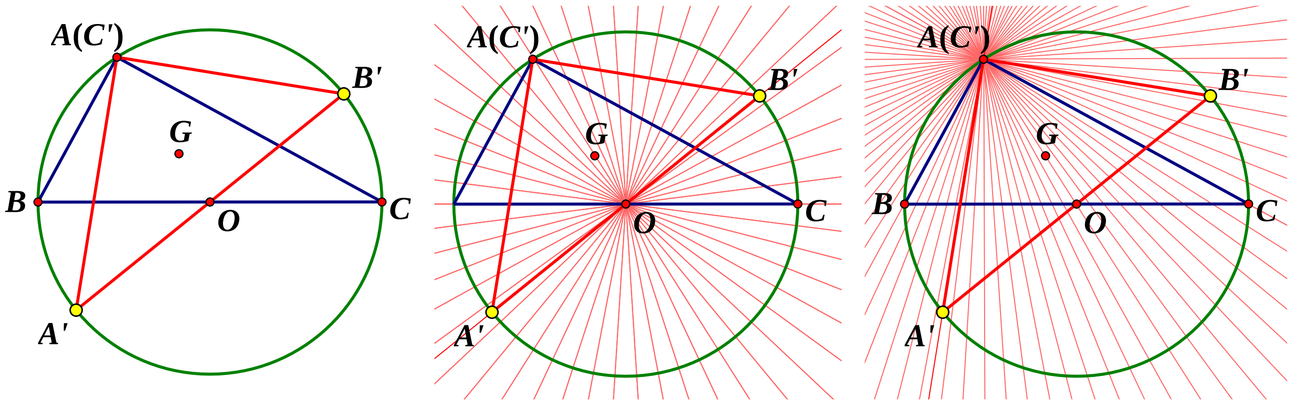



圖 18：直角三角形的同重心三角形的三邊直線之包絡線（自繪）

接下來討論銳角 $\triangle ABC$ 的同重心 $\triangle A'B'C'$ 三邊直線之包絡線。我們先介紹包絡線（Envelope）的定義，即「某一條曲線與某個曲線族中的每條線都有至少一點相切，就稱此曲線為某個曲線族的包絡線」。

我們先用 GSP 軟體模擬作圖，發現非常漂亮的結果！其包絡線是銳角 $\triangle ABC$ 的內切橢圓且其焦點為外心 $O$ 與垂心 $H$。

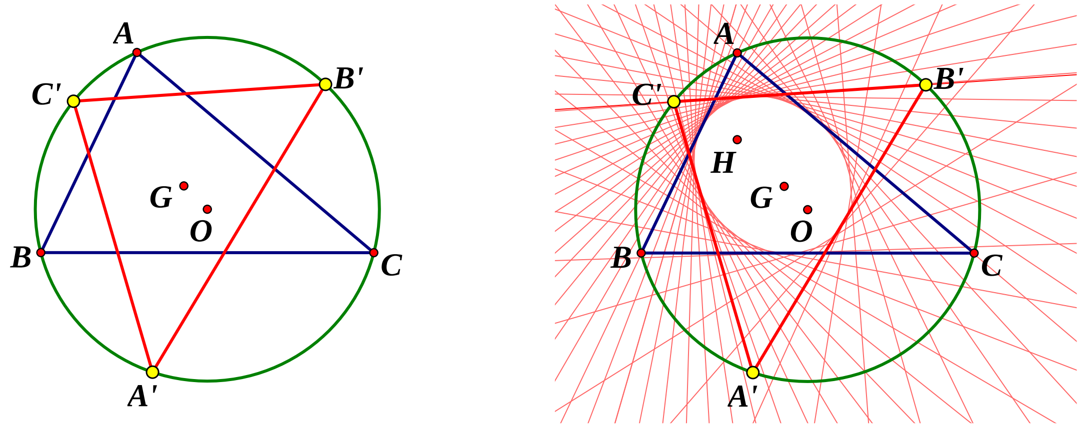



圖 19：銳角三角形的同重心三角形的三邊直線之包絡線（自繪）

我們先需要一個重要的性質。

| 性質 4：圓內接 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 若同重心，若且唯若同垂心。 |
|---|

證明：因為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 若同外心且同重心，根據歐拉線定理，兩個三角形的垂心必重合。同理，若同外心且同垂心，則必兩個三角形的重心必重合。

□

由性質 4 可得知，動態的 $\triangle A'B'C'$ 的外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$ 皆為固定點，即為原本 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心。我們利用這一點來刻劃銳角與鈍角 $\triangle ABC$ 的同重心

$\triangle A'B'C'$ 三邊直線之包絡線。

定理 3：給定圓內接 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的三邊直線之包絡線。

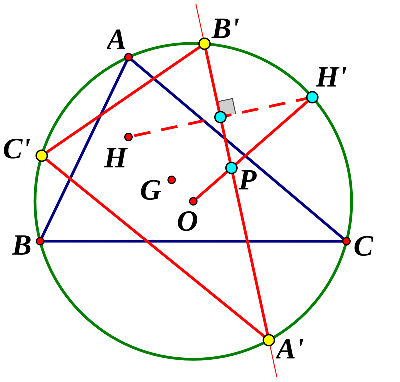
(1) 對於直角 $\triangle ABC$，其同重心三角形的三邊直線之包絡線為兩點（退化）。

(2) 對於銳角 $\triangle ABC$，其同重心三角形的三邊直線之包絡線為橢圓。

(3) 對於鈍角 $\triangle ABC$，其同重心三角形的三邊直線之包絡線為雙曲線。

證明：

1. 對於直角 $\triangle ABC$ 的情形，我們在前一頁已經討論完畢，相關證明見前頁。
2. 對於銳角 $\triangle ABC$ 的情形，根據性質 4，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$ 皆相同，作垂心 $H$ 關於 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 的對稱點 $H'$，點 $H'$ 會落在外接圓上，連接 $\overline{OH'}$，令 $\overline{OH'}$ 與 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 交於 $P$ 點，注意到 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 是 $\overline{HH'}$ 的中垂線，可得 $\overline{OP}+\overline{PH}=\overline{OP}+\overline{PH'}=\overline{OH'}$ 為定長（外接圓的半徑）且 $\overline{OH'}>\overline{OH}$，從而有 $P$ 點所形成的軌跡為以外心 $O$ 與垂心 $H$ 為兩焦點的橢圓。在 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 上取異於 $P$ 點的 $Q$ 點，根據三角不等式 $\overline{OQ}+\overline{QH}=\overline{OQ}+\overline{QH'}>\overline{OH'}$，$Q$ 點都在橢圓的外側，因此 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 為橢圓相切，切點為 $P$。



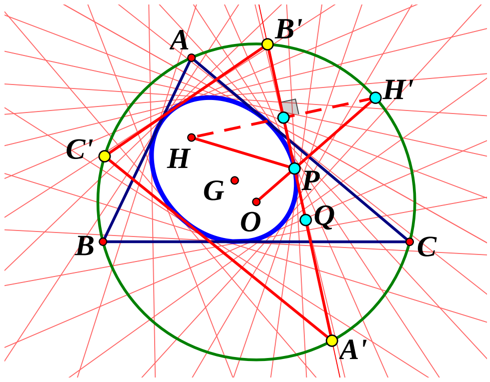




圖 20：包絡線為橢圓（自繪）

3. 對於鈍角 $\triangle ABC$ 的情形，同理作垂心 $H$ 關於 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 的對稱點 $H'$，點 $H'$ 會落在外接圓上，連接 $\overleftrightarrow{OH'}$，令 $\overleftrightarrow{OH'}$ 與 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 交於 $P$ 點，注意到 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 是 $\overleftrightarrow{HH'}$ 的中垂線，可得 $|\overline{PH}-\overline{PO}|=|\overline{PH'}-\overline{PO}|=\overline{OH'}$ 為定長（外接圓的半徑）且 $\overline{OH}>\overline{OH'}$（$H$ 點在圓外），從而有 $P$ 點所形成的軌跡為以外心 $O$ 與垂心 $H$ 為兩焦點的雙曲線。在 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 上取異於 $P$ 點的 $Q$ 點，根據三角不等式 $|\overline{QH}-\overline{QO}|=|\overline{QH'}-\overline{QO}|<\overline{OH'}$，$Q$ 點都在雙曲線包含中心的這一側，因此 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 和雙曲線相切，切點為 $P$。

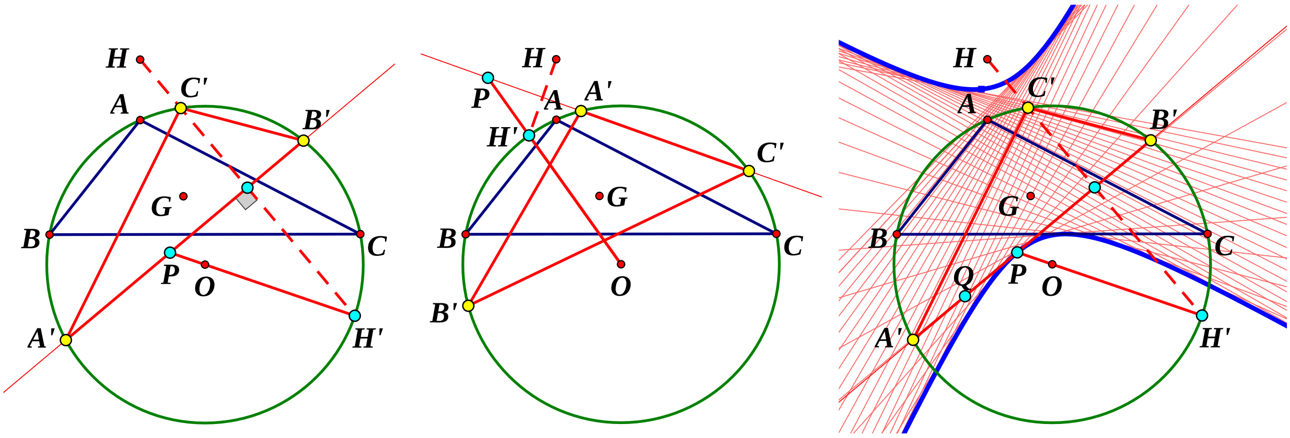
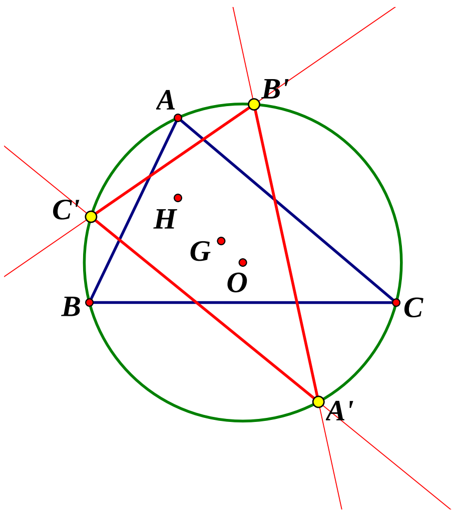
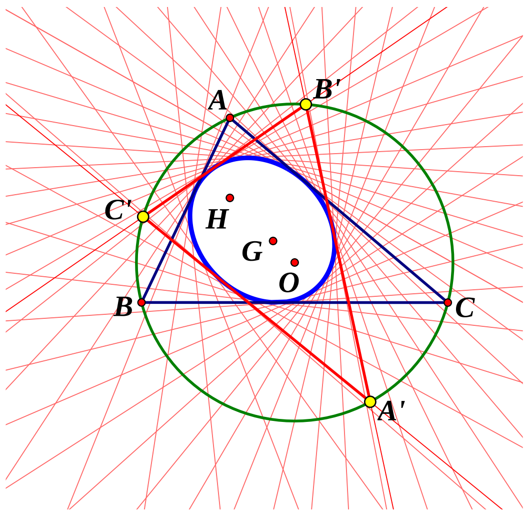
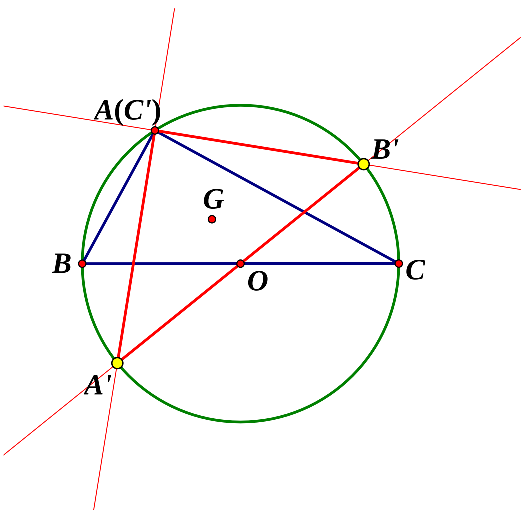
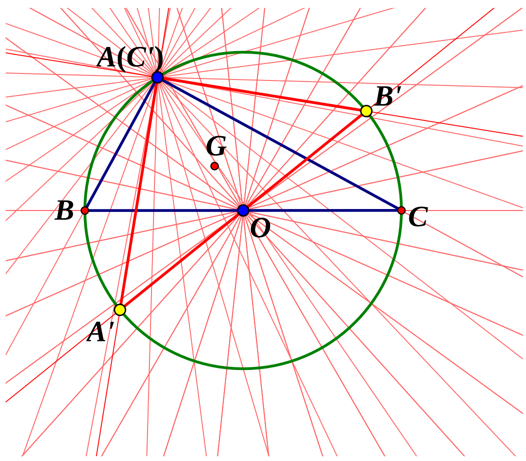



圖 21：包絡線為雙曲線（自繪）

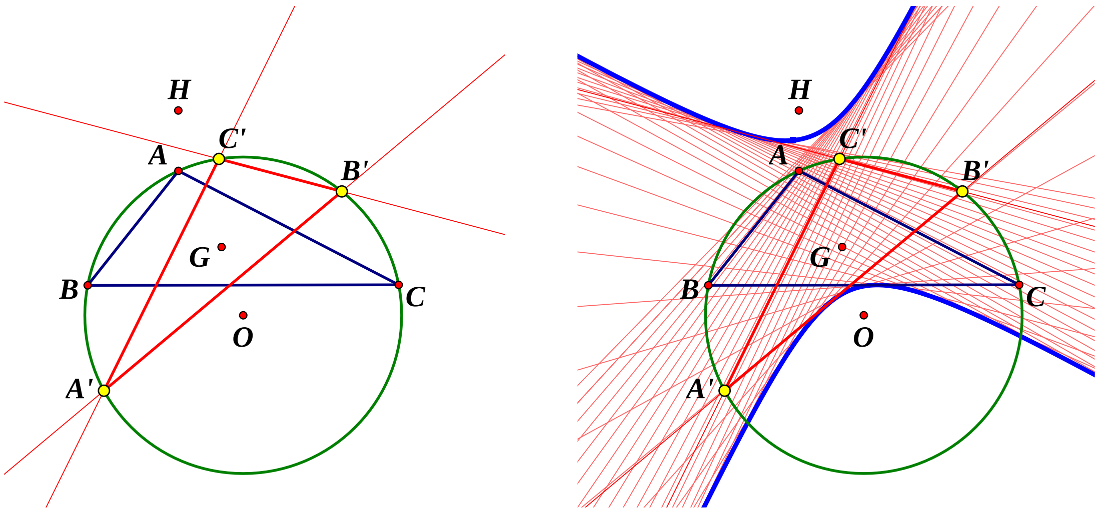
□

我們整理圓內接的同重心（同垂心）三角形三邊的直線的包絡線如下表格。

表 1：同重心（同垂心）三角形的存在性與三邊的直線的包絡線

| 分類 | 同重心（同垂心）三角形 | 三邊的直線的包絡線 |
|---|---|---|
| 銳角 |   |   |
| 直角 |   |   |

鈍角




本研究發現的包絡線橢圓和雙曲線，焦點為 $\triangle ABC$ 的外心與垂心，中心為九點圓圓心，經查詢其為 MacBeath ellipse 與 MacBeath hyperbola，不過與本研究的包絡線觀點不同，它們是給出此內切橢圓或雙曲線的軌跡方程式 [3]。

【討論】同垂心三角形是否能獨立作圖？

在性質 4 中，我們發現圓內接 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 若同重心，也會同垂心。我們好奇若不透過重心，我們能否獨立做出同垂心三角形？

命題 4：對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，同垂心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。

步驟 1：在圓 $O$ 上任取一點 $A'$，作 $\overleftrightarrow{A'H}$，與圓 $O$ 交於 $K'$ 點。

步驟 2：作 $\overline{HK'}$ 的中點 $H_{A'}$。

步驟 3：過點 $H_{A'}$ 作 $\overleftrightarrow{A'H}$ 的垂線，與圓 $O$ 交於點 $B'$ 與 $C'$。

步驟 4：連接 $\overline{B'C'}$，則 $\triangle A'B'C'$ 即為所求。

證明：根據垂心基本性質，垂心 $H$ 關於三角形的任意一邊的對稱點 $H'$ 必落在外接圓上，因此 $\overline{HH'}$ 的中垂線必為三角形的一邊。

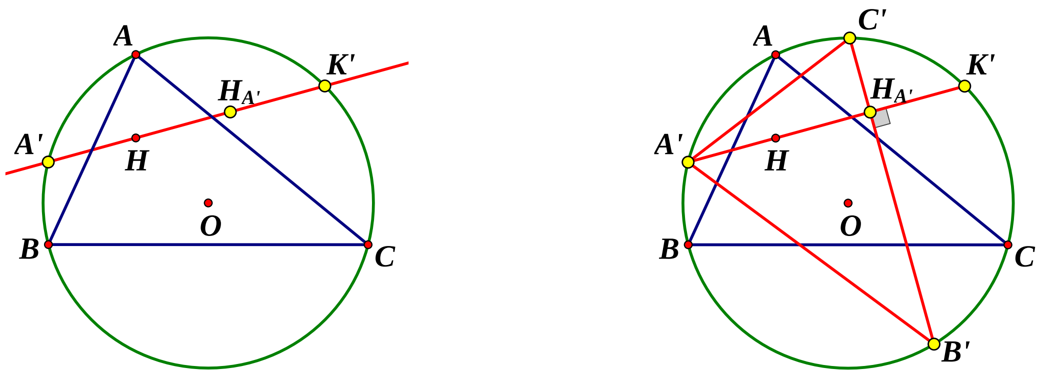



圖 22：同垂心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖（自繪）

□

在同垂心三角形中，我們發現有趣的「線段乘冪不變量」。

我們約定 $\triangle ABC$ 三邊 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的垂足分別為 $H_A$、$H_B$ 與 $H_C$ 點，同理有 $\triangle A'B'C'$ 三邊的垂足為 $H_{A'}$、$H_{B'}$ 與 $H_{C'}$ 點。透過四點共圓，垂心有一個易知線段乘冪性質：$\overline{AH} \times \overline{HH_A} = \overline{BH} \times \overline{HH_B} = \overline{CH} \times \overline{HH_C}$，同理 $\overline{A'H} \times \overline{HH_{A'}} = \overline{B'H} \times \overline{HH_{B'}} = \overline{C'H} \times \overline{HH_{C'}}$，但是 $\overline{AH} \times \overline{HH_A}$ 和 $\overline{A'H} \times \overline{HH_{A'}}$ 會一樣嗎？尤其 $\triangle A'B'C'$ 是動態的三角形！我們發現所有同垂心三角形都具備「線段乘冪不變量」性質，即 $\overline{A'H} \times \overline{HH_{A'}} = \overline{AH} \times \overline{HH_A}$，等價 $A$、$A'$、$H_A$、$H_{A'}$ 四點共圓。

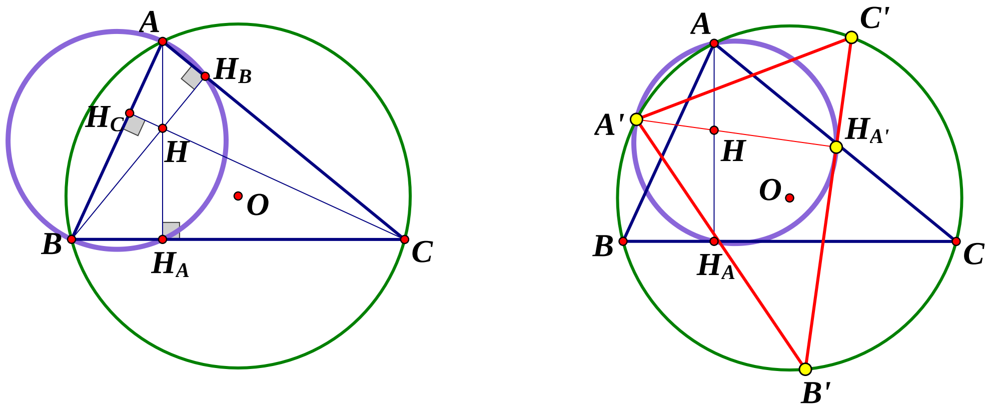



圖 23：線段乘冪不變量（自繪）

| |
|---|
| 性質 5：同垂心 $\triangle A'B'C'$ 恆有 $\overline{A'H} \times \overline{HH_{A'}} = \overline{AH} \times \overline{HH_A}$。 |

證明：分別延長 $\overrightarrow{AH_A}$ 與 $\overrightarrow{A'H_{A'}}$ 交圓 $O$ 於 $K$ 與 $K'$ 點，根據圓冪定理有 $\overline{A'H} \times \overline{HK'} = \overline{AH} \times \overline{HK}$，可得 $\overline{A'H} \times \frac{\overline{HK'}}{2} = \overline{AH} \times \frac{\overline{HK}}{2}$，從而有 $\overline{A'H} \times \overline{HH_{A'}} = \overline{AH} \times \overline{HH_A}$。

□

## 三、 圓內接同內心三角形、同垂心（同重心）三角形之關聯性

本研究的對象有兩類：圓內接同內心三角形，以及圓內接同垂心（同重心）三角形，我們接下來要將這兩類三角形合併在一起來討論，並且給出更多豐富的性質。

第一，考慮圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，與其同垂心 $\triangle A'B'C'$。因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的九點圓相同，所以我們作垂足三角形 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle H_{A'}H_{B'}H_{C'}$。

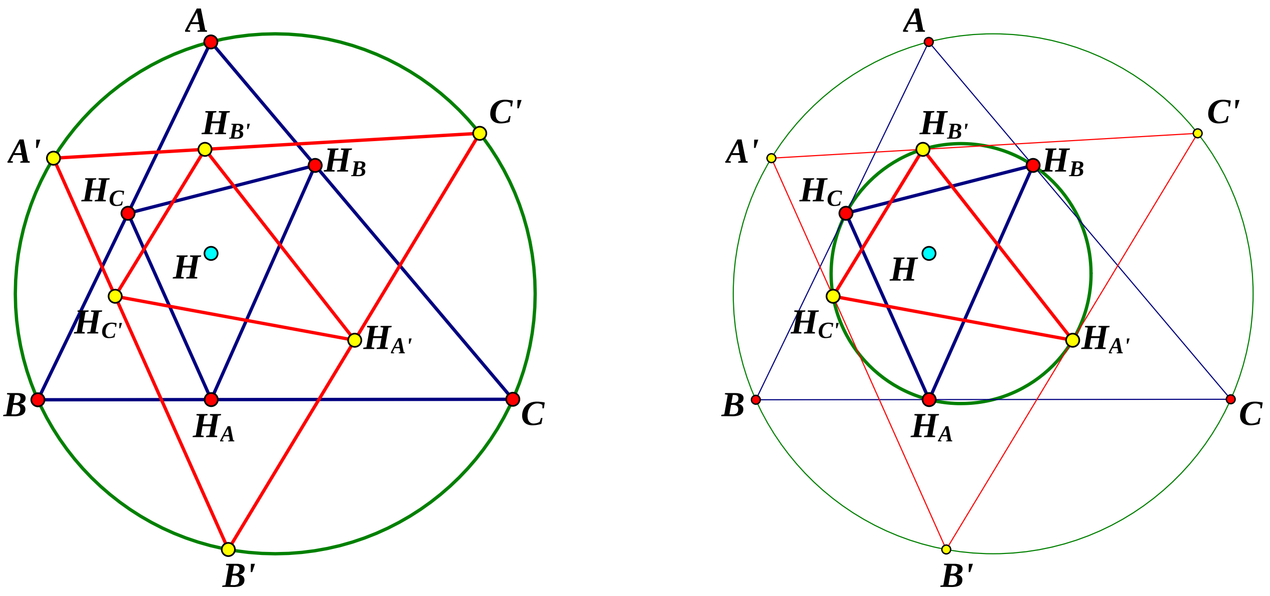


圖 24：第二層垂足三角形（自繪）

第二，因為垂心 $H$ 是 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle H_{A'}H_{B'}H_{C'}$ 的內心，所以 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle H_{A'}H_{B'}H_{C'}$ 就變成我們討論過的圓內接同內心三角形！

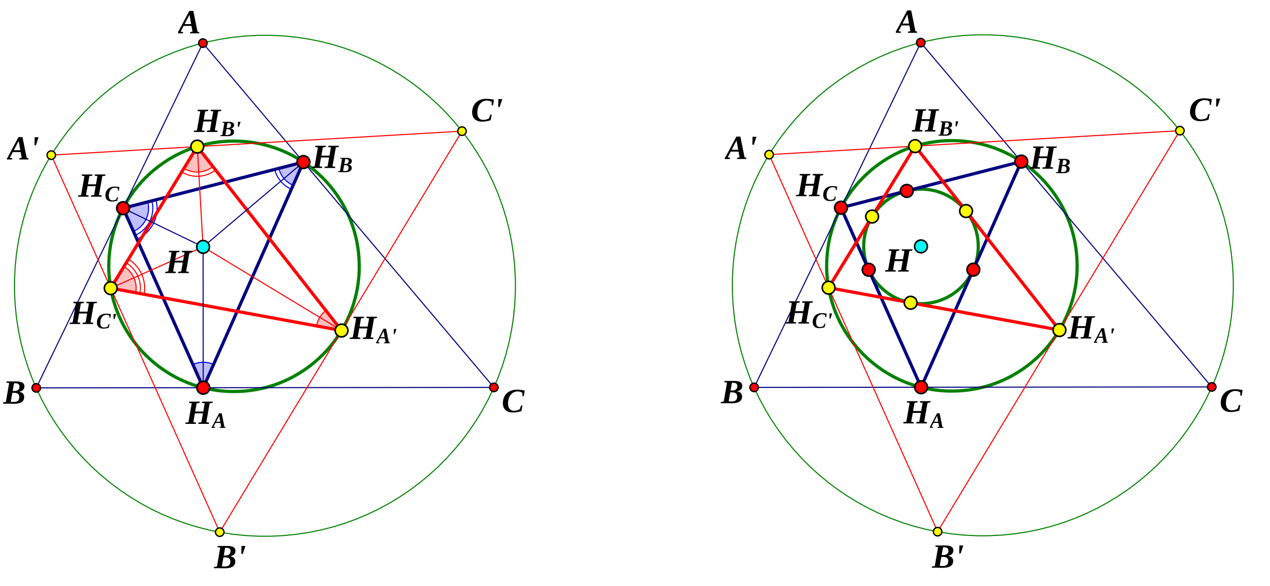


圖 25：垂足三角形是同內心三角形（自繪）

第三，因為 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle H_{A'}H_{B'}H_{C'}$ 是圓內接同內心三角形，我們再畫出其內切圓與六個邊的切點 $T_A$、$T_B$、$T_C$ 與 $T_{A'}$、$T_{B'}$、$T_{C'}$。$H$ 點是 $\triangle T_AT_BT_C$ 與 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 的外心，但我們想知道圓內接切點三角形 $\triangle T_AT_BT_C$ 與 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 是否同垂心呢？

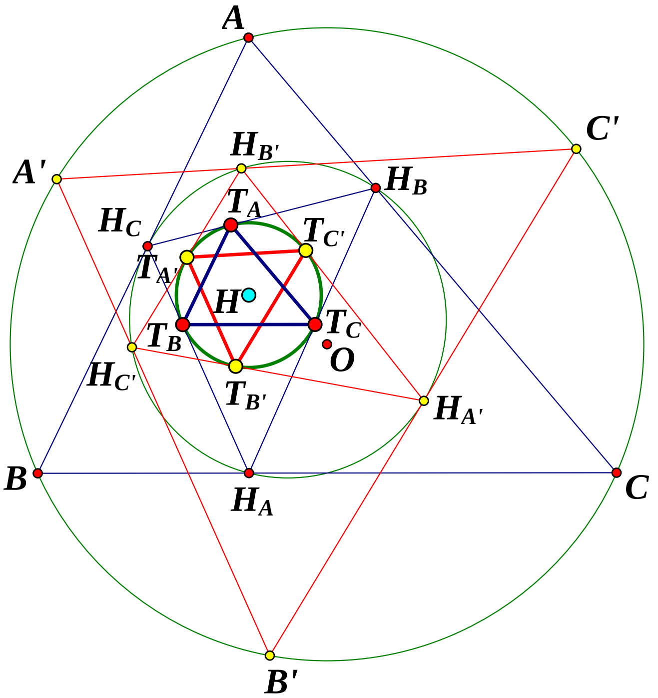



圖 26：第三層切點三角形（自繪）

先證明一個關於三角形的垂心的常見引理。

| 引理 1：三角形的垂心是其垂足三角形的內心或旁心。 |
|---|

證明：$H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，可得 $A$、$C$、$H_A$、$H_C$ 共圓，從而有 $\angle BH_CH_A = \angle C$，同理 $\angle AH_CH_B = \angle C$，又 $\overline{CH_C} \perp \overline{AB}$，所以 $\angle CH_CH_A = \angle CH_CH_B$，其餘兩角同理。當 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，$H$ 點是 $\triangle H_AH_BH_C$ 的內心；當 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，$\overline{AH_C}$ 是內角平分線，又 $\overline{CH_C} \perp \overleftrightarrow{AB}$，可得 $\overline{HH_C}$ 是外角平分線，因此 $H$ 點是 $\triangle H_AH_BH_C$ 的旁心。

□

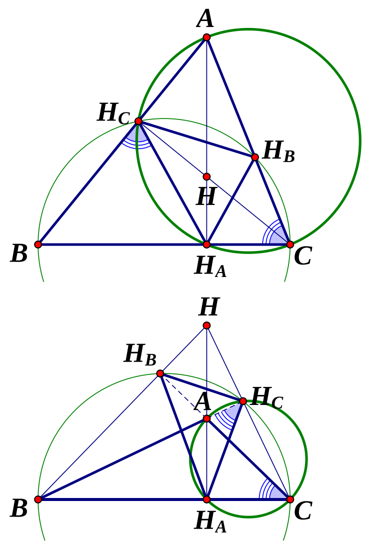



圖 27：垂心常見性質（自繪）

為了刻劃 $\triangle T_AT_BT_C$ 與 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 的關聯性，我們先切割出以下性質作為工具。

性質 6：$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle T_AT_BT_C$（$\triangle A'B'C'$ 相似於 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$）。

證明：由引理 1 可得 $\angle AH_CH_B = \angle C = \angle BH_CH_A$，所以 $\angle T_AH_CT_B = 180° - 2\angle C$，又切線段 $\overline{H_CT_B} = \overline{H_CT_A}$，得 $\angle H_CT_AT_B = \angle C$（內錯角相等），故 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{T_AT_B}$ 平行，其餘兩邊同理，因此 $\triangle ABC$ 相似於 $\triangle T_AT_BT_C$（$AA$ 相似）。同理，$\triangle ABC$ 的同垂心 $\triangle A'B'C'$ 也會相似於 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$。$\triangle ABC$ 與 $\triangle T_AT_BT_C$ 的相似比為其外接圓 $O$ 的半徑和外接圓 $H$ 的半徑比，注意到 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 的相似比也為外接圓 $O$ 的半徑和外接圓 $H$ 的半徑比，因此兩組相似三角形的相似比相同。

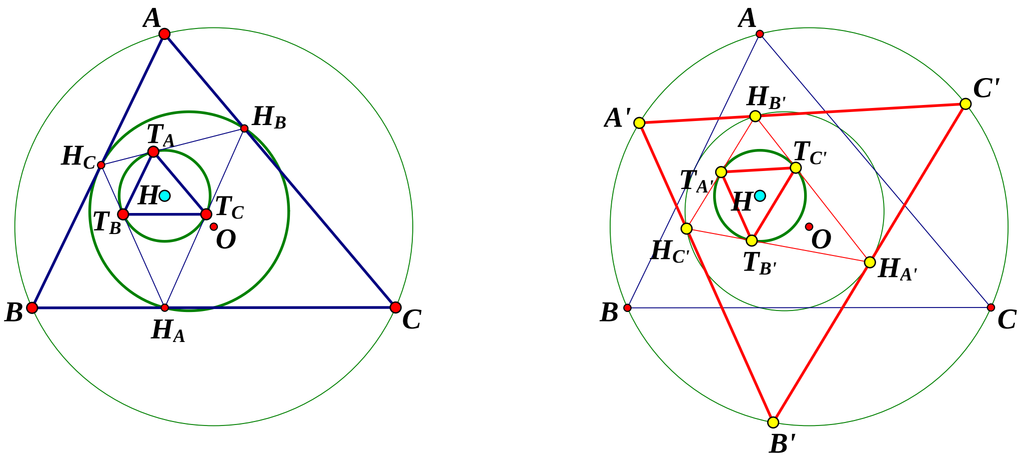



圖 28：相似三角形（自繪）

定理 4：切點三角形 $\triangle T_AT_BT_C$ 和 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 同垂心。

證明：

1. 在性質 6 中，可得 $\triangle ABC$ 與 $\triangle T_AT_BT_C$ 的三邊分別平行，因此可連接 $\overleftrightarrow{AT_A}$、$\overleftrightarrow{BT_B}$、$\overleftrightarrow{CT_C}$ 交於其縮放相似中心 $Z$。$\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 是 $\triangle T_AT_BT_C$ 的外心，又 $O$ 點是 $\triangle ABC$ 的外心，所以兩個三角形的外心與縮放相似中心 $Z$ 共線，即 $O$、$H$、$Z$ 共線。同理 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 的縮放相似中心 $Z'$，即 $O$、$H$、$Z'$ 共線。注意到，兩組相似三角形的相似比相同，所以 $\frac{\overline{ZH}}{\overline{ZO}} = \frac{\overline{Z'H}}{\overline{Z'O}}$，得出 $Z$ 和 $Z'$ 重合。
2. 兩組相似三角形的縮放相似中心重合，相似比相同，又 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 同垂心，從而有 $\triangle T_AT_BT_C$ 和 $\triangle T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 同垂心。

□

從定理 4 中，我們就可以一直迭作下去，關聯性如下圖。

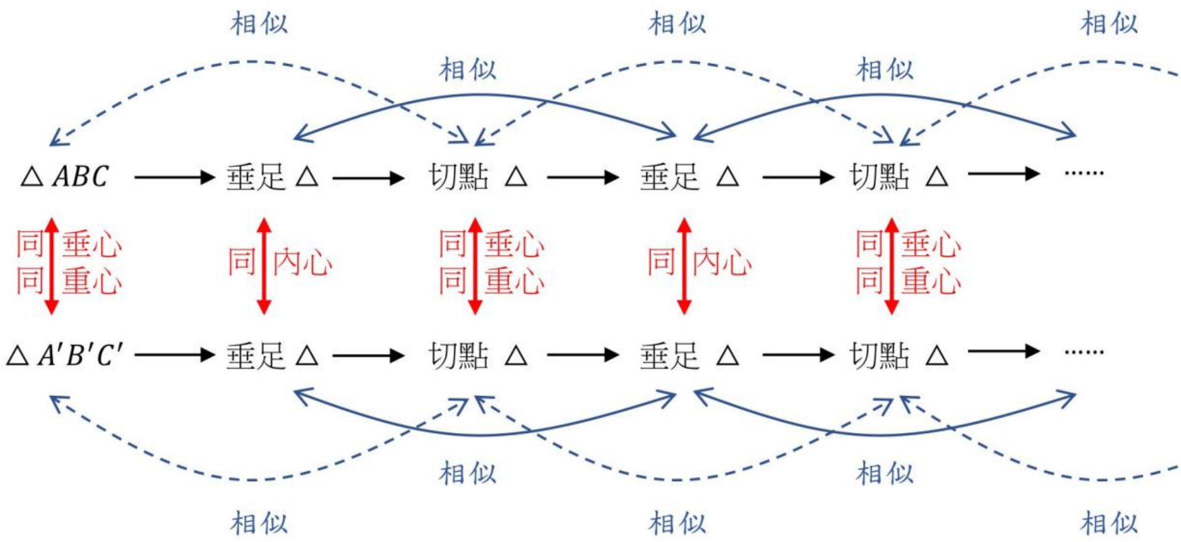



圖 29：迭作同心三角形的關聯性（自繪）

有趣的是，這些同垂心三角形的垂心與重心，以及同內心三角形的內心，都會在初始三角形 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，如下圖。

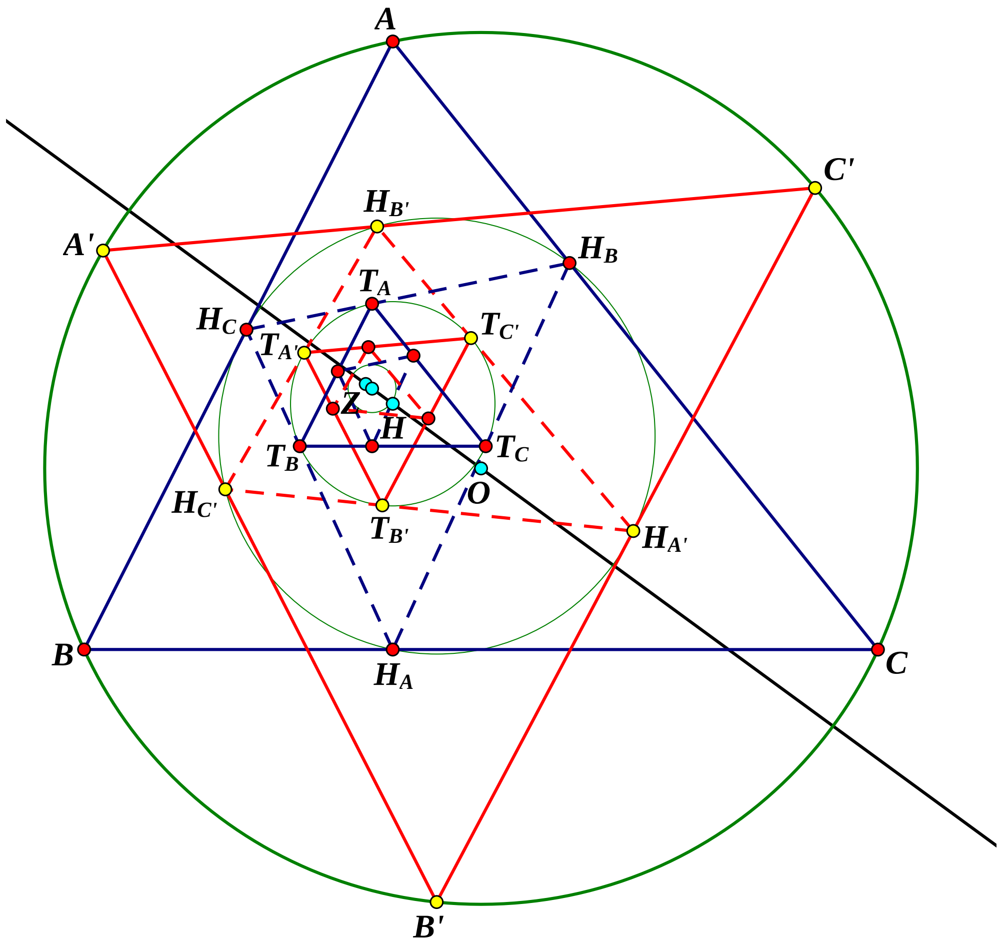



圖 30：迭作同心三角形（自繪）

性質 7：$\triangle ABC$、$\triangle H_AH_BH_C$、$\triangle T_AT_BT_C$ 的面積成等比。

證明：

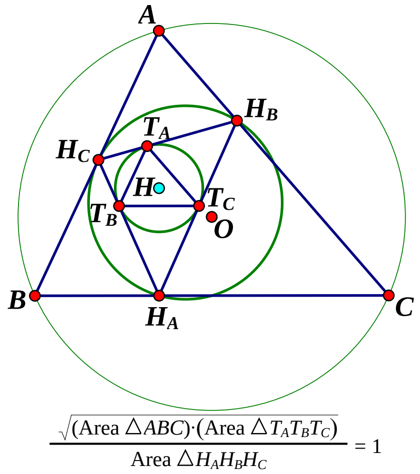



圖 31：面積成等比（自繪）

1. 先討論 $\triangle H_AH_BH_C$ 和 $\triangle T_AT_BT_C$，令 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $R$、$\triangle H_AH_BH_C$ 的外接圓半徑為 $R_h$、內切圓半徑為 $r_h$，面積 $\triangle T_AT_BT_C = \triangle HT_AT_B + \triangle HT_BT_C + \triangle HT_CT_A$，又 $\angle T_BHT_C = 180° - \angle H_CH_AH_B$、$\angle T_CHT_A = 180° - \angle H_AH_BH_C$、$\angle T_AHT_B = 180° - \angle H_BH_CH_A$。

   面積 $\triangle T_AT_BT_C = \frac{r_h^2}{2} \times (\sin\angle H_BH_CH_A + \sin\angle H_CH_AH_B + \angle H_AH_BH_C) = \frac{r_h^2}{2} \times \left(\frac{\overline{H_AH_B}}{2R_h} + \frac{\overline{H_BH_C}}{2R_h} + \frac{\overline{H_CH_A}}{2R_h}\right) = \frac{r_h}{2R_h} \times r_h \times \left(\frac{\overline{H_AH_B}+\overline{H_BH_C}+\overline{H_CH_A}}{2}\right) = \frac{r_h}{2R_h} \times \triangle H_AH_BH_C$，從而有面積比 $\frac{\triangle T_AT_BT_C}{\triangle H_AH_BH_C} = \frac{r_h}{2R_h}$。

2. 再討論 $\triangle ABC$ 和 $\triangle H_AH_BH_C$，根據性質 8 可得 $\triangle ABC \sim \triangle T_AT_BT_C$，面積比 $\frac{\triangle T_AT_BT_C}{\triangle ABC} = \left(\frac{r_h}{R}\right)^2$，考慮面積比 $\frac{\triangle H_AH_BH_C}{\triangle ABC} = \frac{\triangle T_AT_BT_C}{\triangle ABC} \times \frac{\triangle H_AH_BH_C}{\triangle T_AT_BT_C} = \left(\frac{r_h}{R}\right)^2 \times \frac{2R_h}{r_h} = \frac{2r_hR_h}{R^2}$。注意到 $R_h$ 是 $\triangle ABC$ 的九點圓之半徑，所以 $2R_h = R$，故 $\frac{\triangle H_AH_BH_C}{\triangle ABC} = \frac{2r_hR_h}{R^2} = \frac{r_h}{2R_h}$。

3. 由前可得面積比 $\frac{\triangle T_AT_BT_C}{\triangle H_AH_BH_C} = \frac{r_h}{2R_h} = \frac{\triangle H_AH_BH_C}{\triangle ABC}$，即三角形的面積成等比。

□

根據定理 4、性質 6、性質 7，我們給出完整的同心三角形關聯性，如下圖。

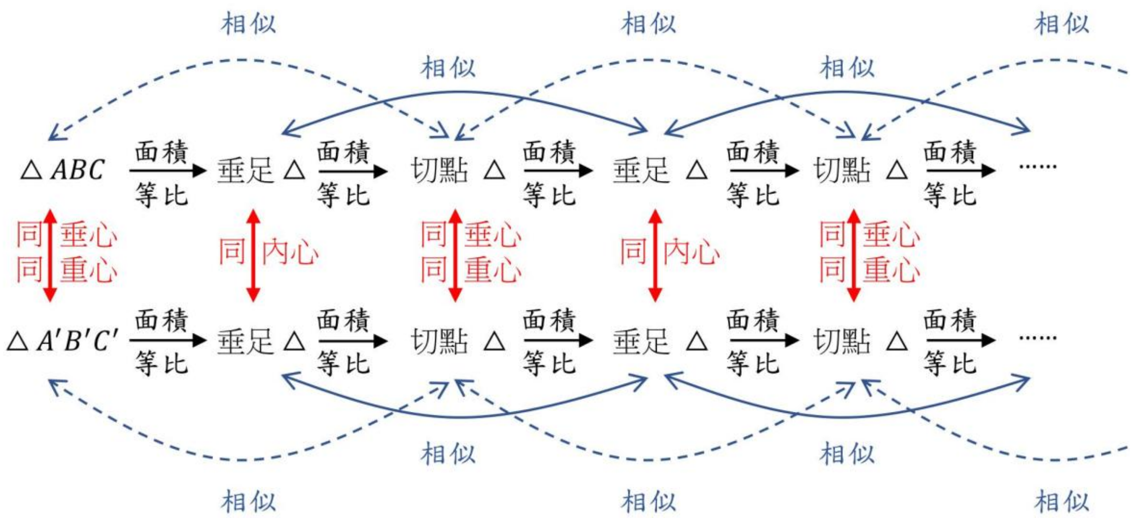



圖 32：迭作同心三角形的關聯性（自繪）

從性質 7 的面積等比性質得知，我們若給定初始的同垂心三角形後，依序迭作垂足三角形、切點三角形，因為公比 $0<\frac{\text{垂足三角形的內切圓半徑}}{\text{垂足三角形的外接圓直徑}}<1$，所以最後面積會收斂到 0，也就是依序迭作下去，三角形會退化變成 $\triangle ABC$ 與 $\triangle T_AT_BT_C$ 的相似中心 $Z$ 點。

## 四、 探討圓外切同心三角形的作圖與性質

我們完成了「對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，其同內心、同重心、同垂心三角形的作圖及性質」研究。接下來，我們討論延伸的命題，將「內接」換成「外切」，也就是「對於圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$，其同外心、同重心等其他形心的同心三角形的作圖及性質」研究。

新設定的命題的條件是「圓外切的同心三角形」，在同重心與垂心的項目上，其難度高非常多！第一，因為沒有初始共同的外心設定條件下，其同垂心三角形不會等同其同重心三角形；第二，三角形的形心多數都與三角形的頂點有關，例如：垂心是高、重心是中線、內心是角平分線，而在圓內接的同心三角形的條件下，圓上選的點就是頂點，作圖分析較為直接，然而在圓外切的同心三角形的條件下，我們僅有邊上的切點可以使用，要能從切點反推頂點就非常難。

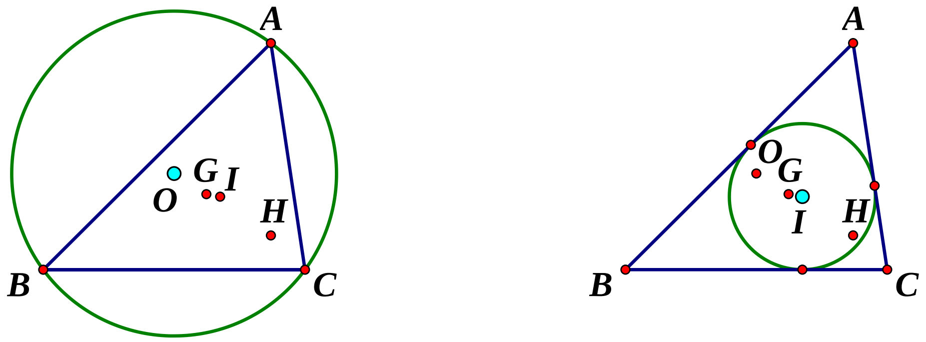



圖 33：圓內接與圓外切對偶作圖（自繪）

### （一） 圓外切同外心三角形

給定圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$ 及其外心 $O$，我們給出了圓外切 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同外心的作圖方式。

| |
|---|
| 命題 5：對於圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$，其同外心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。 |

步驟 1：在圓 $I$ 上任取一點 $T_{A'}$，過 $T_{A'}$ 作圓 $I$ 的切線。

步驟 2：以 $O$ 點為圓心且 $\overline{OB}$ 為半徑畫弧，分別切線於 $B'$、$C'$ 兩點。

步驟 3：分別過 $B'$、$C'$ 兩點作圓 $I$ 的切線，並交於 $A'$，則 $\triangle A'B'C'$ 即為所求。

證明：利用歐拉公式（Euler triangle formula）的恆等式 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$，因為點 $O$、$I$ 與半徑 $r$ 給定，所以半徑 $R$ 的長度取值則可被決定，即可證明。

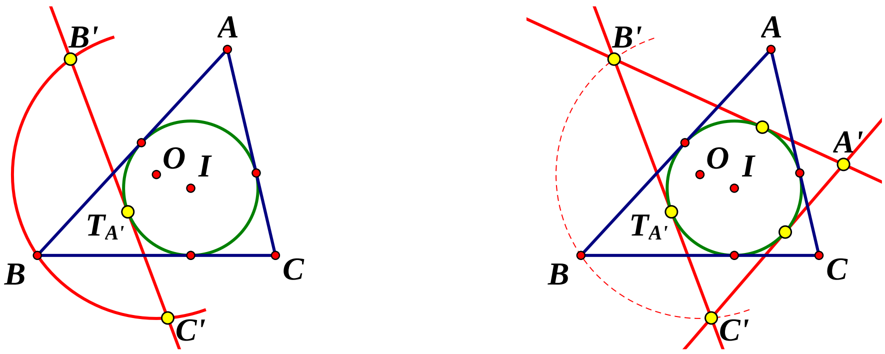



圖 34：圓外切同外心三角形作圖（自繪）

□

（二） 圓外切同重心三角形：以奈格爾線 Nagel line 為工具

有關圓外切同重心三角形的難度很高，我們只有邊上的切點，沒有邊上的中點或同心三角形的頂點，我們也無法藉由命題 5 作為工具，這個研究項目困擾我們一個多月，進一步思考「如果仿照歐拉線定理的方式（外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$，三點共線且 $\overline{HG} = 2\overline{GO}$）呢？」在圓內接同心三角形時，當我們固定了 $O$ 點和 $G$ 點就可以推出 $H$ 點，也可以固定 $O$ 點和 $H$ 點就可以推出 $G$ 點。換句話說，決定了歐拉線上的相異兩點，就可以推出其他點。

查詢資料後發現通過內心 $I$ 點、重心 $G$ 的直線，也是一條著名的直線「奈格爾線 Nagel line」，即內心 $I$、重心 $G$、奈格爾點 $Na$，三點共線且 $\overline{NaG} = 2\overline{GI}$。以下利用奈格爾線 Nagel line 來解決圓外切同重心三角形的存在性作圖。

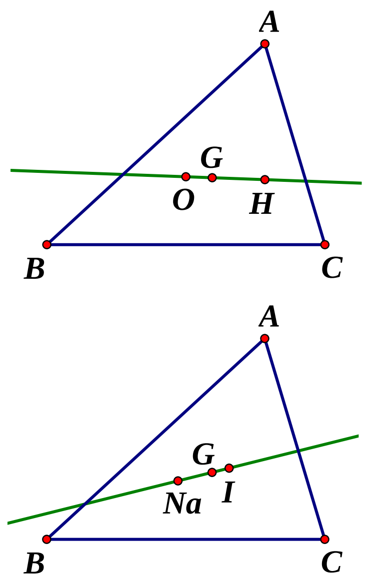



圖 35：歐拉線（上）與奈格爾線（下）（自繪）

定義 3（奈格爾點 Nagel ponit）[3]：平面上，任意三角形三個旁切圓與三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 的切點分別為 $D_A$、$D_B$、$D_C$，則 $\overleftrightarrow{AD_A}$、$\overleftrightarrow{BD_B}$、$\overleftrightarrow{CD_C}$ 交於一點，稱為奈格爾點。

引理 2（奈格爾線 Nagel line）[3]：平面上，對於任意三角形的內心 $I$、重心 $G$、奈格爾點 $Na$，三點共線且 $\overline{NaG} = 2\overline{GI}$。

證明：相關證明見研究日誌。 □

給定圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$ 及其重心 $G$，我們給出了圓外切 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同重心的作圖方式。

命題 6：對於圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。

步驟 1：作 $\triangle ABC$ 的奈格爾點 $Na$，過圓 $I$ 上一點 $T_{A'}$ 作切線 $L$。

步驟 2：在 $\overrightarrow{T_{A'}G}$ 取一點 $D$，使得 $2\overline{GD} = \overline{T_{A'}G}$。

步驟 3：連接 $\overleftrightarrow{NaD}$ 交直線 $L$ 於 $E$ 點，在 $\overrightarrow{EG}$ 取一點 $A'$，使得 $\overline{DA'} = \overline{ED}$。

步驟 4：過 $A'$ 作圓 $I$ 的兩條切線，交於直線 $L$ 於 $B'$、$C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 即為所求。

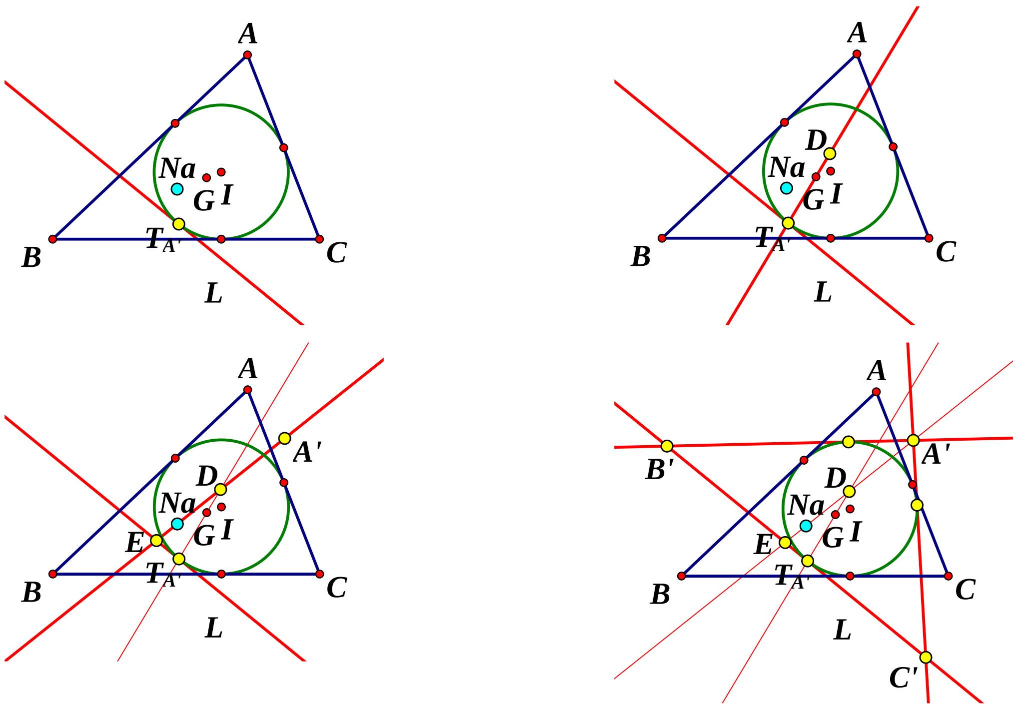



圖 36：圓外切同重心三角形作圖（自繪）

證明：

1. 在 $\triangle A'B'C'$ 中，$I$ 點是內心，我們要證明 $Na$ 點是其奈格爾點。令 $\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$、$\overline{B'C'}$ 的中點分別為 $M_{C'}$、$M_{B'}$、$M_{A'}$，因為作圖 $\overline{ED}:\overline{DA'}=1:1$，可得 $D$ 點在 $\overline{M_{B'}M_{C'}}$ 上。
2. 給定 $\overline{NaG}:\overline{GI}=2:1$，取 $\overline{NaI}$ 的中點 $S$ 可得 $\overline{SG}:\overline{GI}=1:2$。在 $\triangle IT_{A'}G$ 與 $\triangle SDG$ 中，$\overline{SG}:\overline{GI}=1:2$ 且 $\angle DGS=\angle T_{A'}GI$，又作圖 $\overline{DG}:\overline{GT_{A'}}=1:2$，可得 $\triangle IT_{A'}G\sim\triangle SDG$，從而有 $\overline{SD}:\overline{IT_{A'}}=1:2$ 且 $\overline{SD}\perp\overline{M_{B'}M_{C'}}$。
3. 考慮以 $S$ 點為圓心且 $\overline{SD}$ 長為半徑作圓，注意到，圓 $S$ 即為以 $G$ 點為旋轉及縮放中心，將圓 $I$ 進行旋轉 180 度且縮放二分之一的變換，又圓 $I$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的內切圓，即圓 $S$ 與中點三角形 $\triangle M_{A'}M_{B'}M_{C'}$ 的內切圓大小相同。
4. 令 $\overleftrightarrow{A'E}$ 與圓 $I$ 交於 $F$ 點，在 $\triangle DNaS$ 與 $\triangle FNaI$ 中，$\angle DNaS=\angle FNaI$ 且 $\overline{NaS}:\overline{NaI}=\overline{DS}:\overline{IF}=1:2$（我們已排除 $\overleftrightarrow{A'E}$ 的另一點到 $I$ 點距離與 $\overline{IF}$ 等長），可得 $\triangle DNaS\sim\triangle FNaI$，再得 $\overline{IF}\parallel\overline{DS}$，從而有 $\overline{T_{A'}F}$ 是直徑。若過 $F$ 點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，則 $F$ 點為旁接圓切點，可得 $\overleftrightarrow{A'F}$ 是周長平分線，所以 $\overleftrightarrow{A'E}$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的周長平分線，因此 $Na$ 點是 $\triangle A'B'C'$ 的奈格爾點，從而有 $G$ 點是 $\triangle A'B'C'$ 的重心。

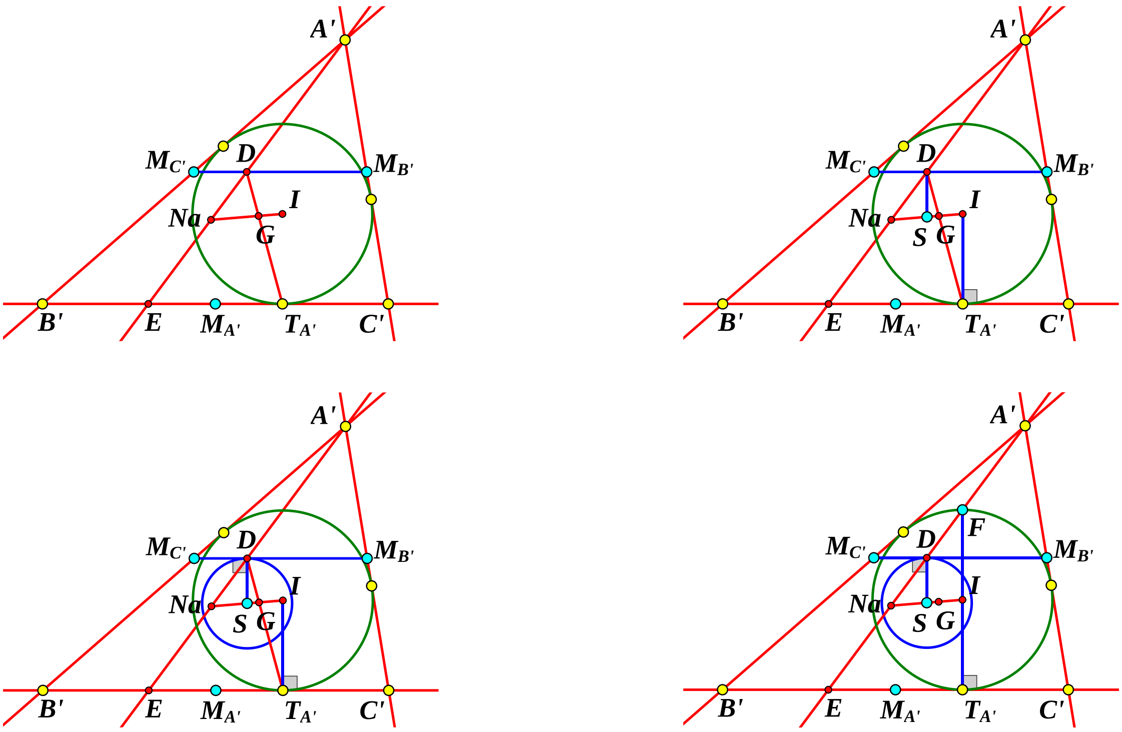



圖 37：圓外切同重心三角形的證明分析（自繪）

□

（三） 圓外切同重心三角形的存在性（可作圖範圍）

圓內接同重心三角形地可作圖範圍是原三角形 $\triangle ABC$ 為銳角、直角、鈍角所決定。然而，觀察圓外切同重心三角形時，原三角形 $\triangle ABC$ 是銳角時，如下右圖，因為 $A'$ 點在圓 $I$ 內部，無法作切線，因此無法構造圓外切同重心 $\triangle A'B'C'$，這個十分特殊！

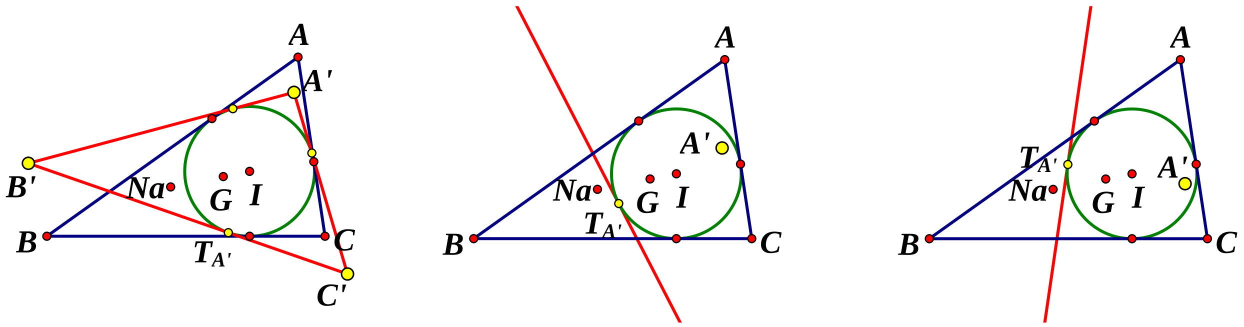



圖 38：圓外切同重心三角形的存在性（自繪）

好奇圓外切同重心三角形的可作範圍被什麼決定？原三角形 $\triangle ABC$ 的型態是什麼？由於奈格爾點 $Na$ 是三角形的三條周長平分線的交點，因此 $Na$ 點必在三角形內部，還有一個很重要的條件是 $\overline{NaD} = \overline{DF}$ 且 $F$ 點在圓 $I$ 上，利用此兩項性質就可以劃分圓外切同重心三角形的可作範圍。

情形一，當奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 內部時，$E$ 點在圓切線上，所以恆有 $\overline{DE} > \overline{DNa}$，又 $\overline{DE} = \overline{DA'}$ 且 $\overline{DNa} = \overline{DF}$，可得 $\overline{DA'} > \overline{DF}$，注意到 $F$ 點在圓 $I$ 上，從而有 $A'$ 點恆在圓 $I$ 外部，故在內切圓上的所有點都可以構造同重心 $\triangle A'B'C'$。

情形二，當奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 上時，僅切點 $T_{A'}$ 與奈格爾點 $Na$ 重合時，由前推論，此時 $A'$ 點在圓 $I$ 上，此時無法構造同重心 $\triangle A'B'C'$。排除此點後，其餘內切圓上的點都可以構造同重心 $\triangle A'B'C'$。

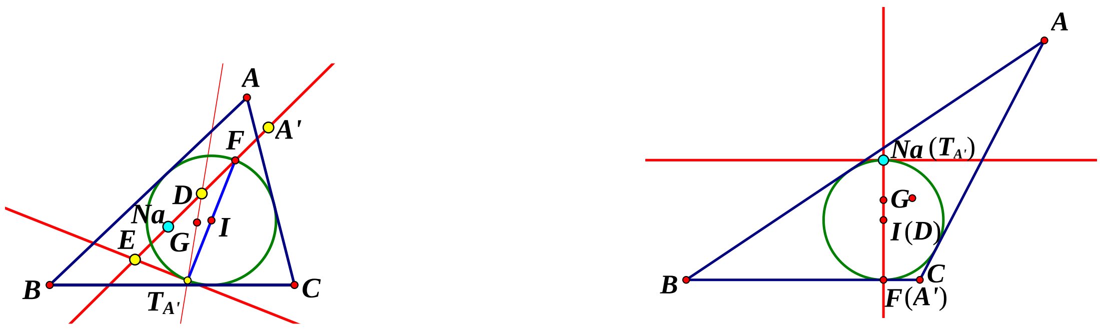



圖 39：奈格爾點在圓內部或圓上（自繪）

情形三，當奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 外部時，過 $Na$ 點作圓 $I$ 的兩條切線，其切點分別為 $K_1$、$K_2$ 點，若 $T_{A'}$ 點在劣弧 $\widehat{K_1K_2}$ 上，則恆有 $\overline{DE} < \overline{DNa}$，再得出 $\overline{DA'} < \overline{DF}$，即 $A'$ 點恆在圓 $I$ 內部，故無法構造同重心 $\triangle A'B'C'$。若 $T_{A'}$ 點在優弧 $\widehat{K_1K_2}$ 上，則可構造同重心 $\triangle A'B'C'$。

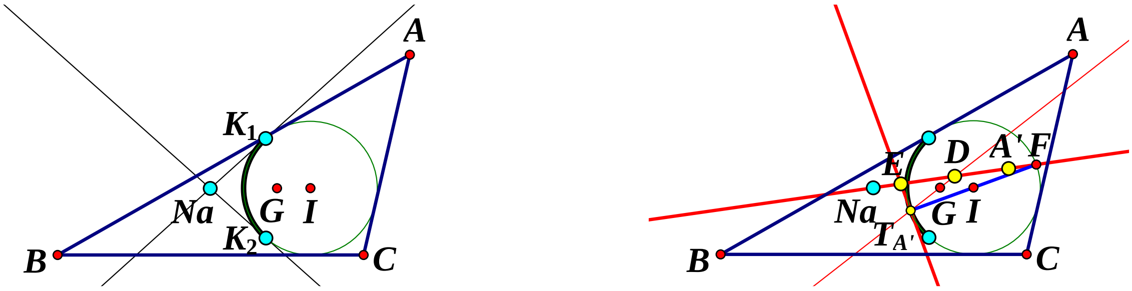


圖 40：奈格爾點在圓外部（自繪）

奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 外部、圓周、內部決定了圓外切同重心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖，我們好奇對應到原三角形 $\triangle ABC$ 的型態是什麼？注意到，奈格爾線上$\overline{NaG} = 2\overline{GI}$，所以奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 上時，$\overline{GI}$ 長度為三分之一的圓 $I$ 半徑，以下利用這個性質來刻劃原三角形 $\triangle ABC$ 的型態。

約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC} = a$、$\overline{CA} = b$、$\overline{AB} = c$、$s = \frac{a+b+c}{2}$，內切圓半徑長度為 $r$ 且外接圓半徑長度為 $R$，$\triangle ABC$ 面積為 $[ABC]$。

| |
|---|
| 引理 3：對於任意 $\triangle ABC$，$\overline{IG}^2 = \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr)$。 |

證明：以向量表示 $G$ 點和 $I$ 點後，再利用內積與 $\overline{OI}^2$ 與 $\overline{OG}^2$ 的恆等式證明。 □

定理 5：給定圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的可作條件。

(1) 當 $(-3a + b + c)(a - 3b + c)(a + b - 3c) > 0$，圓上某段圓弧上的所有點可作同重心三角形。

(2) 當 $(-3a + b + c)(a - 3b + c)(a + b - 3c) = 0$，除了奈格爾點 $Na$ 外，圓上其他點可作同重心三角形。

(3) 當 $(-3a + b + c)(a - 3b + c)(a + b - 3c) < 0$，圓上的所有點可作同重心三角形。

證明：我們僅需要臨界點即可，即奈格爾點 $Na$ 在圓 $I$ 上時，因為 $\overline{NaG} = 2\overline{GI}$，令 $\overline{IG} = \frac{1}{3}r$。根據引理 3 可得

$$\frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr) = \frac{1}{9}r^2$$

再將 $r = \frac{[ABC]}{s}$ 以及 $R = \frac{abc}{4[ABC]}$ 代入可得

$$s^2 + \frac{4[ABC]^2}{s^2} - \frac{4abc}{s} = 0$$

因為 $[ABC]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ 繼續化簡可得

$$s^3 + 4(s-a)(s-b)(s-c) - 4abc = 0$$

將 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 代入並進行因式分解得出

$$(-3a+b+c)(a-3b+c)(a+b-3c) = 0$$

□

## 【討論】圓外切同重心三角形的頂點軌跡與性質

關心 $\triangle ABC$ 的圓外切同重心三角形的頂點軌跡，我們發現當奈格爾點 $Na$ 在圓內，即 $(-3a+b+c)(a-3b+c)(a+b-3c)$ 小於 0 時，頂點 $A'$、$B'$、$C'$ 的軌跡是橢圓；當奈格爾點 $Na$ 在圓外，即 $(-3a+b+c)(a-3b+c)(a+b-3c)$ 大於 0 時，頂點 $A'$、$B'$、$C'$ 的軌跡是雙曲線（須扣除圓內的軌跡）。

比較有趣的是，當奈格爾點 $Na$ 在圓上，即 $(-3a+b+c)(a-3b+c)(a+b-3c)$ 等於 0 時，我們一開始猜測頂點 $A'$、$B'$、$C'$ 的軌跡是拋物線，或兩相交直線，然而結果卻是「兩條平行線」！以下針對證明這個特殊的性質進行證明。

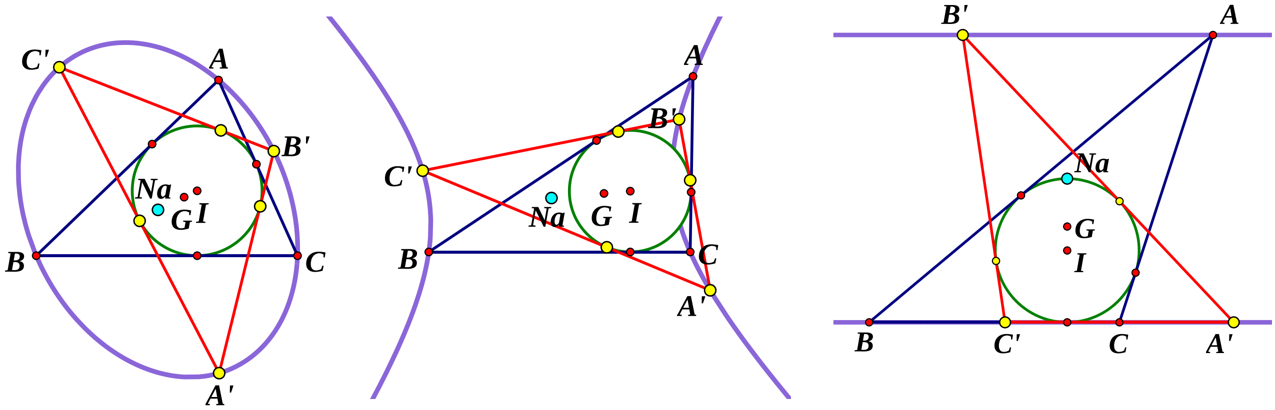



圖 41：圓外切同重心三角形的頂點軌跡（自繪）

不失一般性，我們假設 $b + c = 3a$，此時我們發現到有趣的性質「$\triangle ABC$ 的內切圓與 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點連線 $\overline{M_B M_C}$ 相切於奈格爾點 $Na$」，證明如下：

內切圓半徑 $r=\frac{[ABC]}{s}=\frac{[ABC]}{2a}$，又因為 $\overline{BC}$ 上的高 $h=\frac{2[ABC]}{a}$，所以內切圓直徑長度恰好為一半的高，從而有 $\triangle ABC$ 的內切圓與 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點連線 $\overline{M_BM_C}$ 相切，再令切點為 $P$ 點，則 $P$ 點是 $\triangle AM_BM_C$ 旁切圓切點，所以 $\overleftrightarrow{AP}$ 是 $\triangle AM_BM_C$ 的周長平分線，又 $\triangle AM_BM_C$ 與 $\triangle ABC$ 平行相似，$\overleftrightarrow{AP}$ 也是 $\triangle ABC$ 的周長平分線，又點 $Na$ 在圓上，因此 $P$ 點與 $\triangle ABC$ 的 $Na$ 點重合，我們最後得到有趣的點 $Na$、$G$、$I$、$T_A$ 四點共線。

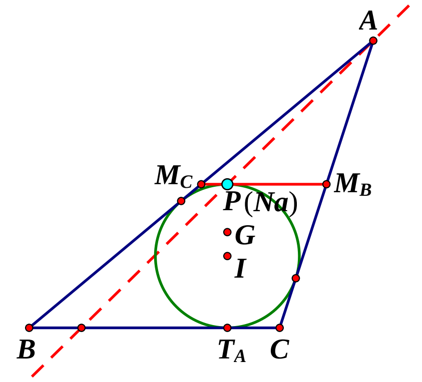


圖 42：點 $Na$ 為切點（自繪）

給定切點 $T_{A'}$ 後，根據命題 6 的作圖步驟可將 $D$、$E$、$F$ 點作出。

| 性質 8：圓外切同重心三角形的頂點的軌跡退化時，其為平行線。 |
|---|

證明：$\triangle EFT_{A'}$、$\triangle A'NaT_A$ 中，$D$ 點為中點，可得 $\overline{EF}=\overline{A'Na}$、$\overline{FT_{A'}}=\overline{NaT_A}$、$\angle EFT_{A'}=\angle A'NaT_A$（$\triangle INaF$ 是等腰），$\triangle EFT_{A'}\cong\triangle A'NaT_A$（$SAS$），從而有 $\angle NaT_AA'=\angle FT_{A'}E=90°$。再過 $A'$ 點作兩條切線，即可得出 $A'$、$C'$ 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。再由前討論可知，當奈格爾點 $Na$ 在內切圓上時，$\overline{A'C'}$ 上的高必為內切圓半徑的 2 倍，因此 $\overleftrightarrow{B'A}\parallel\overleftrightarrow{BC}$。

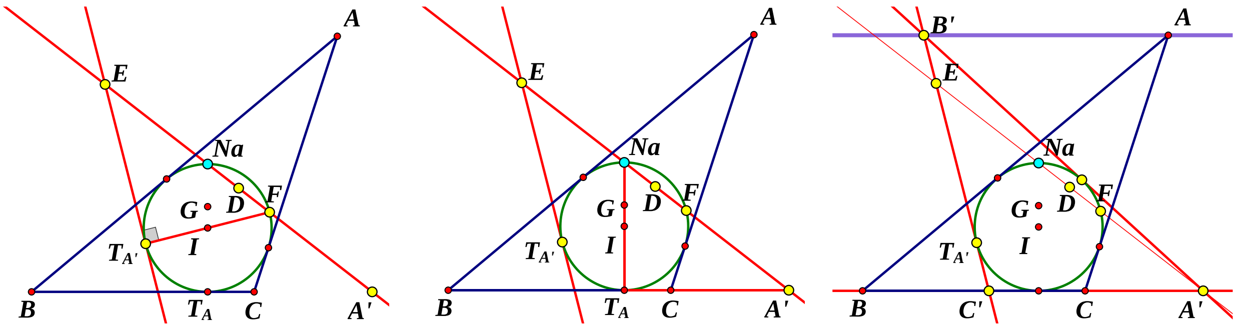


圖 43：頂點軌跡退化為平行線（自繪）

□

# 伍、 結論

## 一、 圓內接同內心三角形的作圖、存在性與性質

我們先證明歐拉公式（Euler triangle formula）雙心三角形恆等式等同本研究的圓內接同內心 三角形，因此圓內接同內心三角形其三邊包絡線就是內切圓。

## 二、 圓內接同重心（同垂心）三角形的作圖、存在性與性質

我們利用重心的比例性質作出圓內接同重心三角形。有趣的是，圓內接同重心（同垂心）三角形與圓內接同內心三角形不同，並不是圓上的每個點都可以構造出圓內接同重心（同垂心）三角形，於是我們進行圓上可作點的刻劃，利用原三角形的九點圓與外接圓接點就可刻劃，這是很漂亮的發現。再將焦點放在圓內接同重心（同垂心）三角形其三邊包絡線，結果發現原三角形為直角三角形時，其包絡線退化為垂心或外心；原三角形為銳角三角形時，其包絡線為焦點是垂心和外心的橢圓；原三角形為鈍角三角形，其包絡線為焦點是垂心和外心的雙曲線。

## 三、 圓內接同內心三角形、同重心（同垂心）三角形之關聯性

將前面兩類同心三角形串聯起來，先給定兩個同重心（同垂心），再不斷由外向內依序迭作「垂足三角形」與「切點三角形」。我們發現同階層的垂足三角形同內心，同時同階層的切點三角形會同重心（同垂心），最後我們還發現三角形之間面積為等比數列。

## 四、 「圓外切」同心三角形的存在性與圓內接同心三角形的異同

若將「圓內接同心三角形」換成「圓外切同心三角形」會發生什麼事情呢？顯然利用歐拉公式（Euler triangle formula）就可以給出圓外切同外心三角形，但是圓外切同重心三角形的難度很高！我們利用了奈格爾線定理，成功刻劃了圓外切同重心三角形的存在性，其分類並不是原三角形的直角、銳角、鈍角的分界（這一點與圓內接同重心三角形不同），我們進一步證明給出原三角形的邊長條件，臨界點是三角形的兩邊之和為第三邊的 3 倍，這個非常有趣！最後我們也分析圓外切同重心三角形的頂點軌跡，值得一提的是，三個頂點的軌跡退化會變成「兩條平行線」，而不是常見預期的拋物線或兩相交直線。

# 陸、 參考文獻


[1] 黃家禮（2000）。幾何明珠。臺北市：九章出版社。

[2] 張海潮（2009）。從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓。數學傳播，33 (2)，pp. 48-51。

[3] Weisstein, Eric W. “Nagel Point”. available at https://mathworld.wolfram.com/NagelPoint.html

[4] Weisstein, Eric W. “MacBeath Inconic.” available at https://mathworld.wolfram.com/MacBeathInconic.html

## 【評語】030420

此作品啟發於三角形尤拉公式的反問題,將圓內接同內心三角形推廣至圓內接同重心和同垂心三角形,並巧妙利用九點圓刻劃其存在性。研究進一步探討了邊的包絡線,並將不同同心三角形的面積關聯,最後成功處理了圓外切同心三角形的難題,展現了卓越的幾何洞察力和解決複雜問題的能力。此研究在選題、方法與成果上均具創意與挑戰性,是一件亮眼的數學作品。

作品海報

# 有趣的同心三角形

# 壹、前言

本研究從著名歐拉公式（Euler triangle formula）雙心三角形恆等式出發，即「圓 $O$ 與圓 $I$ 的半徑長度分別為 $R$ 和 $r$，若存在一個三角形以圓 $I$ 為內切圓，同時又內接於圓 $O$，則 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$，其逆定理亦成立」。

我們好奇此定理是否等價「給定圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$ 及其內心 $I$，再作圓 $O$ 內接 $\triangle A'B'C'$，使得 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同內心」？接續推廣到圓內接同重心、圓內接同垂心三角形，最後是圓外切同心三角形，過程中發現其特殊且美妙的性質。【本研究作品說明書與海報的所有圖片為作者自行繪製】

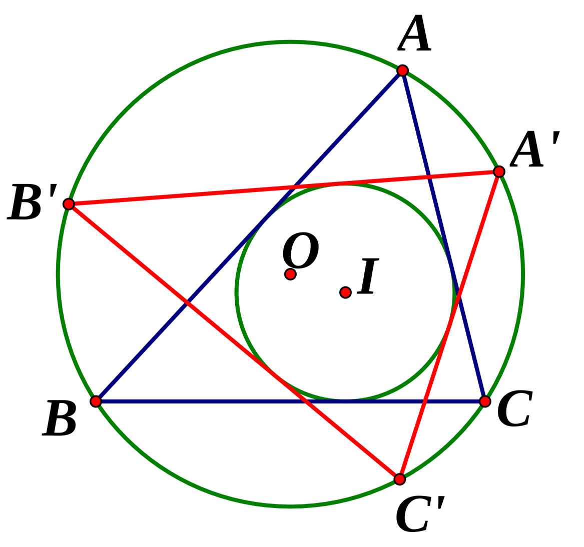


圖 1：歐拉公式

# 貳、預備知識

一、九點圓：$\triangle ABC$ 的三邊中點、三個垂足、三頂點與垂心之中點，此九點共圓。

二、歐拉線 Euler line：$\triangle ABC$ 中的垂心 $H$、重心 $G$ 及外心 $O$ 三點共線，且 $\overline{HG} = 2\overline{GO}$。

三、奈格爾線 Nagel line：$\triangle ABC$ 的奈格爾點 $Na$、重心 $G$ 及內心 $I$ 三點共線，且 $\overline{NaG} = 2\overline{GI}$。

# 參、研究過程與結果

## 一、圓內接同心三角形的作圖與性質

### (一) 圓內接同內心的三角形

**命題 1**：對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，其同內心 $\triangle A'B'C'$的作圖步驟。

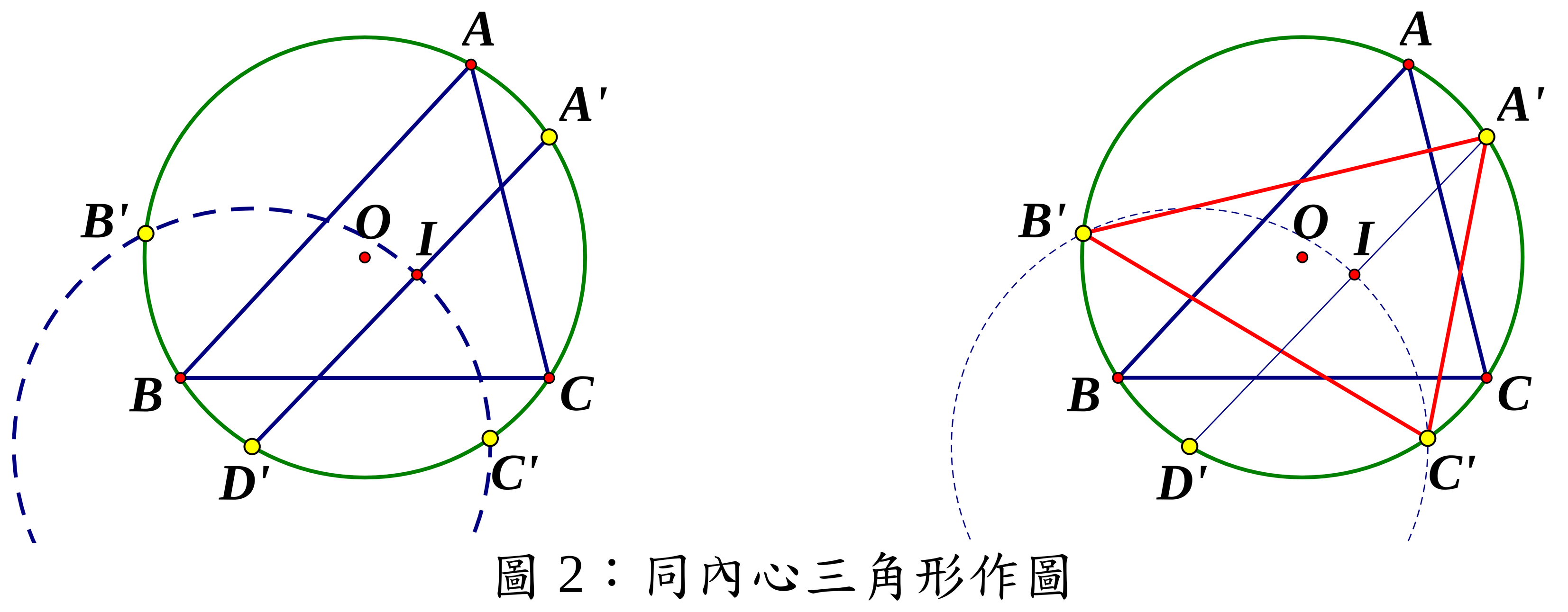


圖 2：同內心三角形作圖

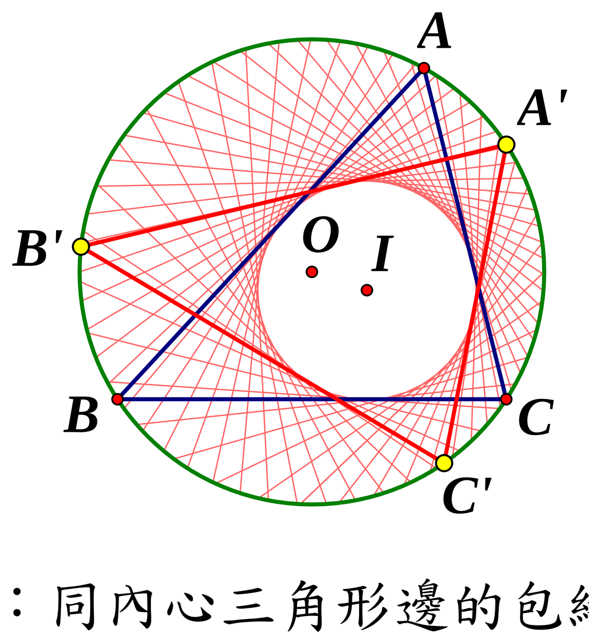


圖 3：同內心三角形邊的包絡線

### (二) 圓內接同重心的三角形

**命題 2**：對於圓 $O$ 內接 $\triangle ABC$，其同重心 $\triangle A'B'C'$的作圖步驟。

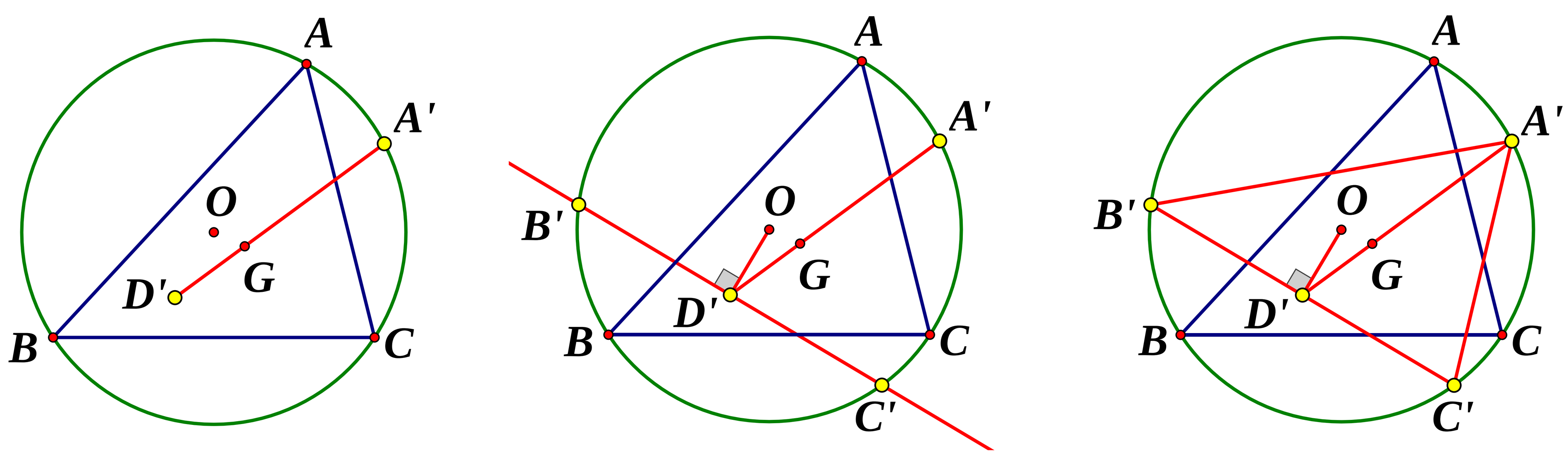


圖 4：同重心三角形作圖

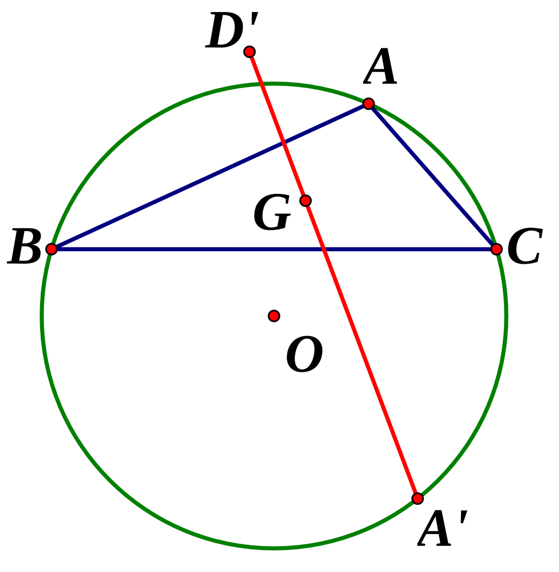


圖 5：同重心三角形不存在

**直角三角形**

**性質 1**：對於直角 $\triangle ABC$，過 $D'$ 點與 $\overline{D'O}$ 的垂線恆會通過 $A$ 點。

**定理 1**：給定直角 $\triangle ABC$，若 $A'$ 點不是通過 $\overline{OG}$ 的直徑之端點 $P$，則同重心 $\triangle A'B'C'$ 存在且 $\triangle A'B'C'$ 恆為直角三角形。

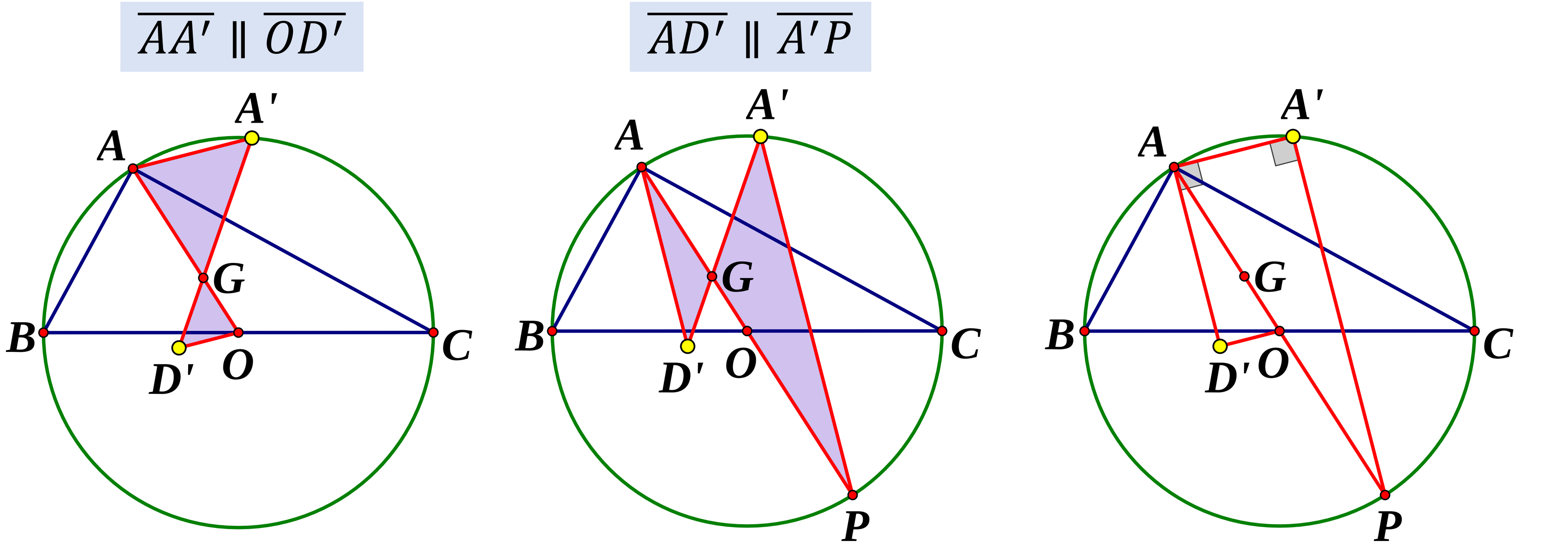



圖 6：兩組相似三角形

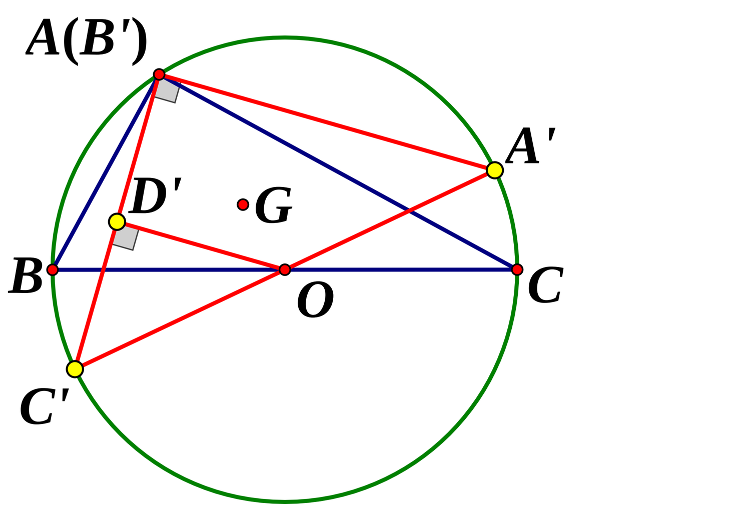


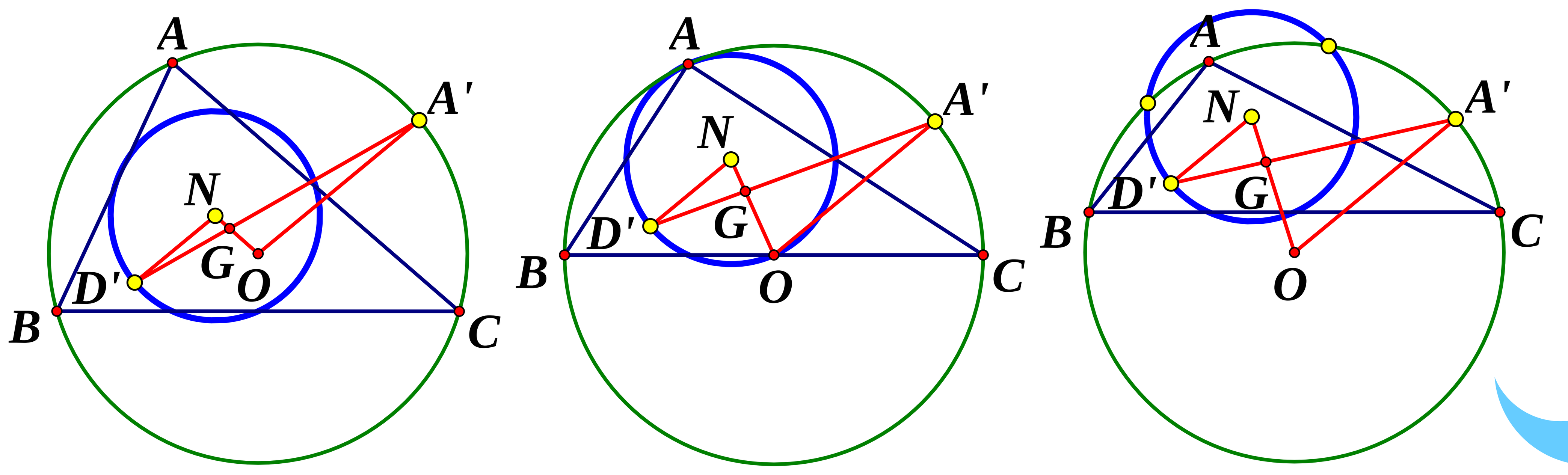
圖 7：直角同重心三角形作圖

令 $\overrightarrow{A'G}$ 交圓於 $A''$ 點，若 $0 < \dfrac{\overline{A'G}}{\overline{GA''}} < 2$，則 $D'$ 點在圓內；若 $\dfrac{\overline{A'G}}{\overline{GA''}} > 2$ 時，則 $D'$ 點在圓外。
然而圓上的 $A'$ 點有無窮多個，所以 $\dfrac{\overline{A'G}}{\overline{GA''}}$ 的值都不同，要劃分不太容易且分析過於複雜。
最終我們給出一個巧妙的幾何手法，這個手法是通用的，適用所有三角形！

**任意三角形**

**性質 3**：對於任意 $\triangle ABC$，動點 $D'$ 的軌跡是 $\triangle ABC$ 的九點圓。

**定理 2**：給定銳角 $\triangle ABC$，在外接圓上的所有點都可以構造同重心三角形。



銳角三角形　直角三角形　鈍角三角形

圖 8：$D'$ 點軌跡為九點圓

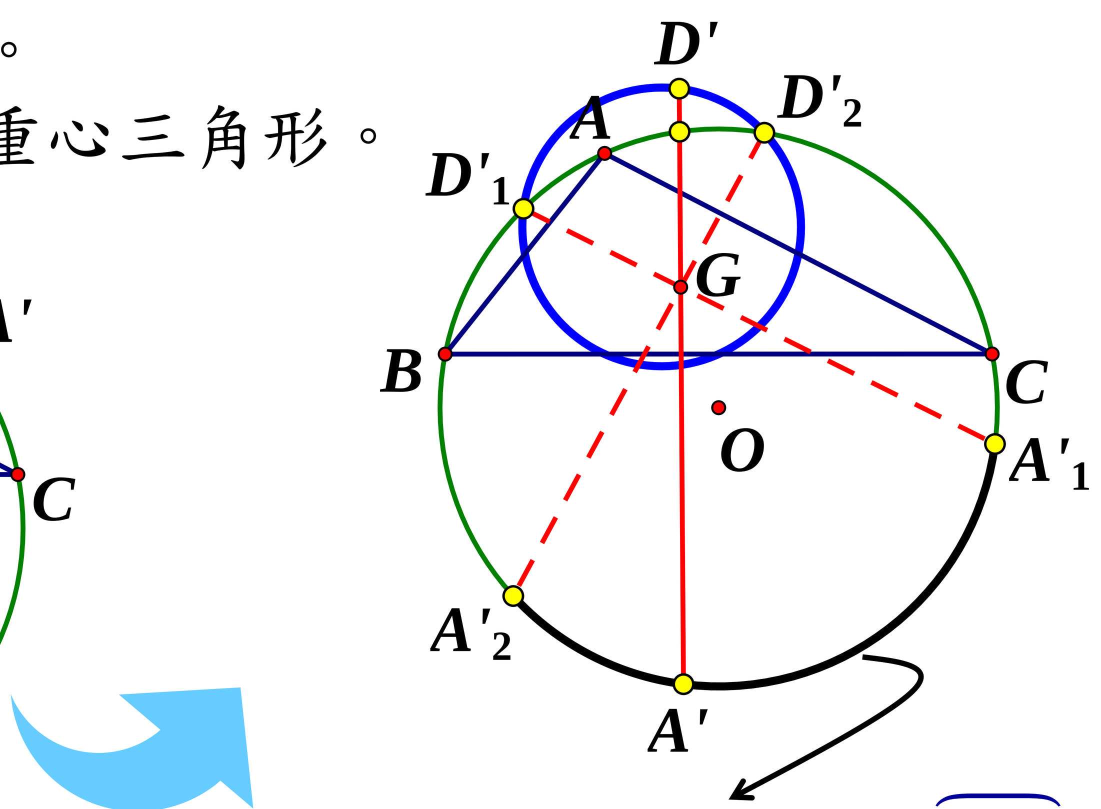



圖 9：鈍角三角形同重心三角形

**定理 3**：給定圓內接 △ $ABC$ ，其同重心 △ $A'B'C'$ 的三邊直線之包絡線：

(1) 對於直角 △ $ABC$ ，其同重心三角形的三邊直線之包絡線退化為兩點。

(2) 對於銳角 △ $ABC$ ，其同重心三角形的三邊直線之包絡線為橢圓。

(3) 對於鈍角 △ $ABC$ ，其同重心三角形的三邊直線之包絡線為雙曲線。

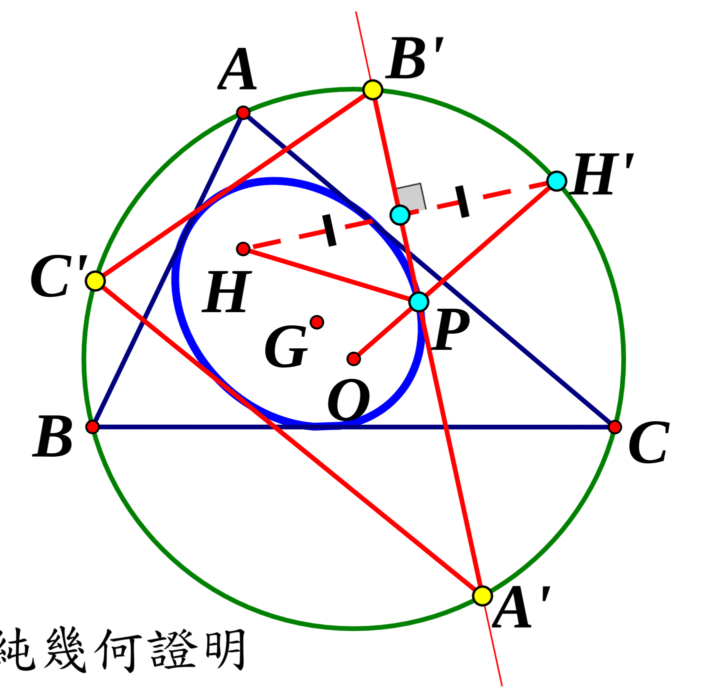
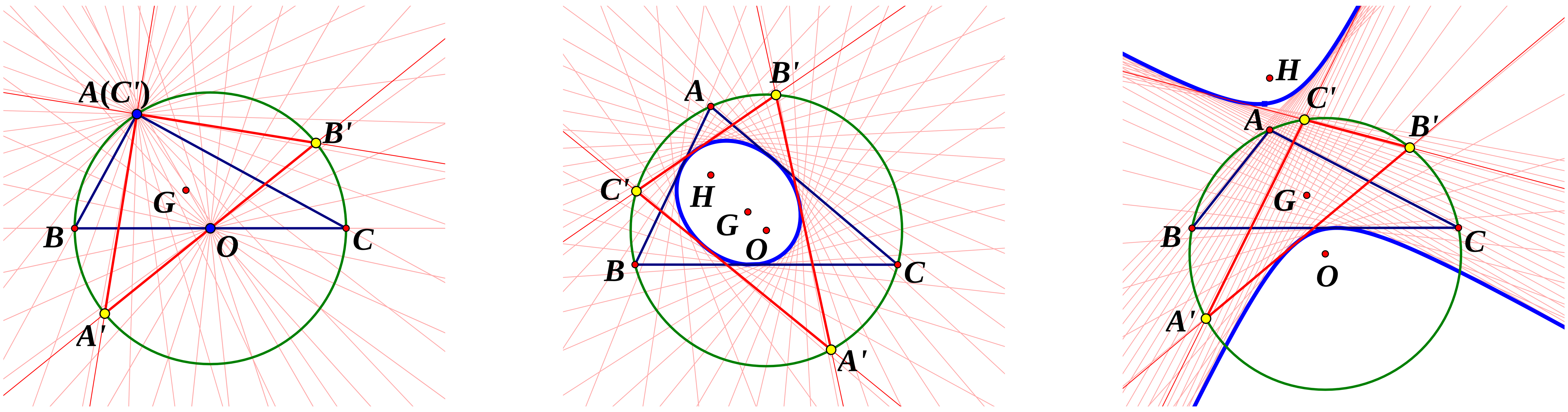


圖 10：純幾何證明

Case 1：直角三角形 | Case 2：銳角三角形 | Case 3：鈍角三角形



Macbeath inellipse　　Macbeath hyperbola

圖 11：同重心三角形三邊直線的包絡線

## (三) 圓內接同垂心的三角形

**命題 4**：對於圓 $O$ 內接 △ $ABC$ ，同垂心 △ $A'B'C'$ 的作圖步驟。

**性質 5**：同垂心 △ $A'B'C'$ 恆有 $\overline{A'H}\times\overline{HH_{A'}}=\overline{AH}\times\overline{HH_A}=\overline{BH}\times\overline{HH_B}=\overline{CH}\times\overline{HH_C}$。

$\overline{B'H}\times\overline{HH_{B'}}$ 與 $\overline{C'H}\times\overline{HH_{C'}}$ 亦同。

意味著，有 9 組四點共圓，例如： $A'$、$H_{A'}$、 $A$ 與 $H_A$。

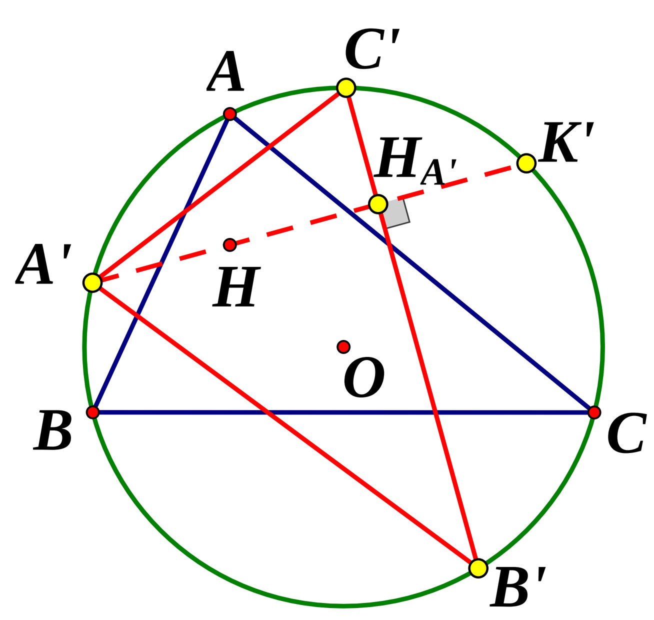


圖 12：同垂心三角形作圖

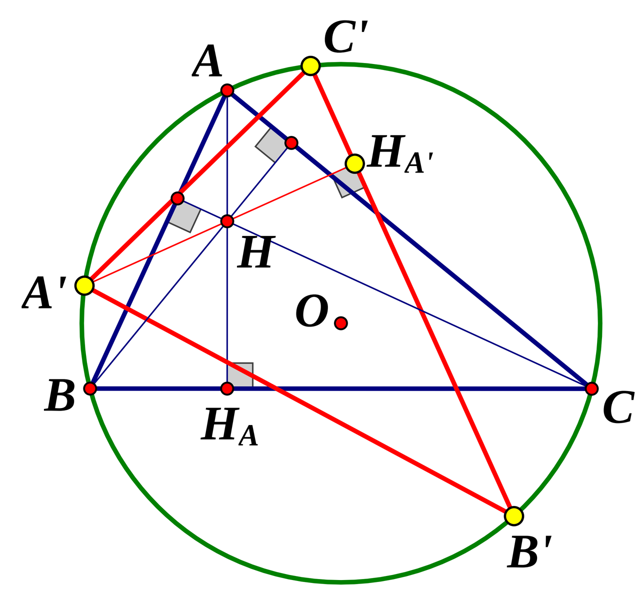


圖 13：線段乘冪不變量

## (四) 圓內接同內心三角形、同垂心（同重心）三角形之關聯性

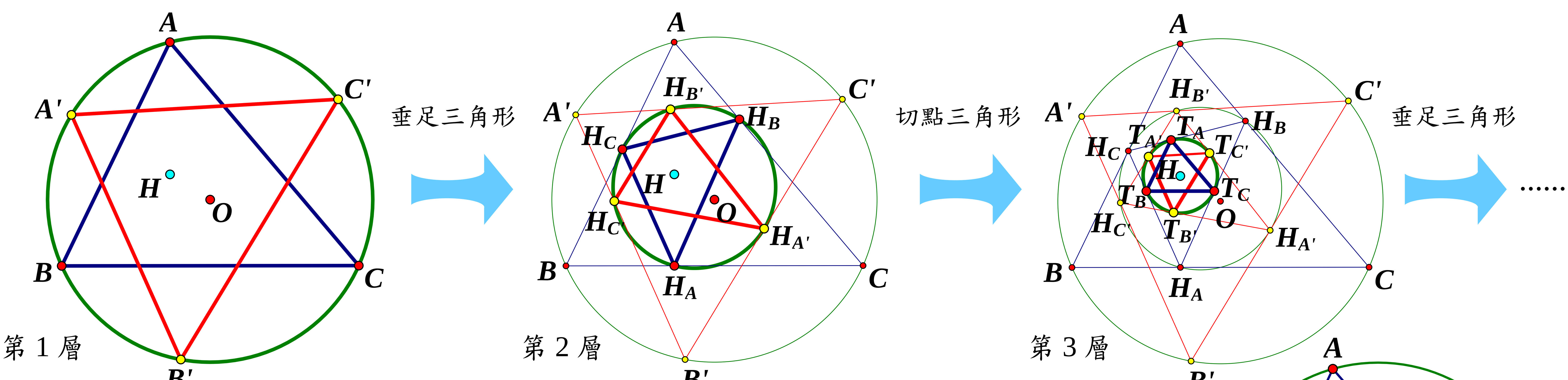



圖 14：迭作多層三角形與關聯性探討

顯然垂足三角形 △ $H_AH_BH_C$ 和 △ $H_{A'}H_{B'}H_{C'}$ 同內心。

**性質 6**：△ $ABC$ 相似於 △ $T_AT_BT_C$。

**定理 4**：切點三角形 △ $T_AT_BT_C$ 和 △ $T_{A'}T_{B'}T_{C'}$ 同垂心。

**性質 7**：△ $ABC$、△ $H_AH_BH_C$、△ $T_AT_BT_C$ 的面積成等比。

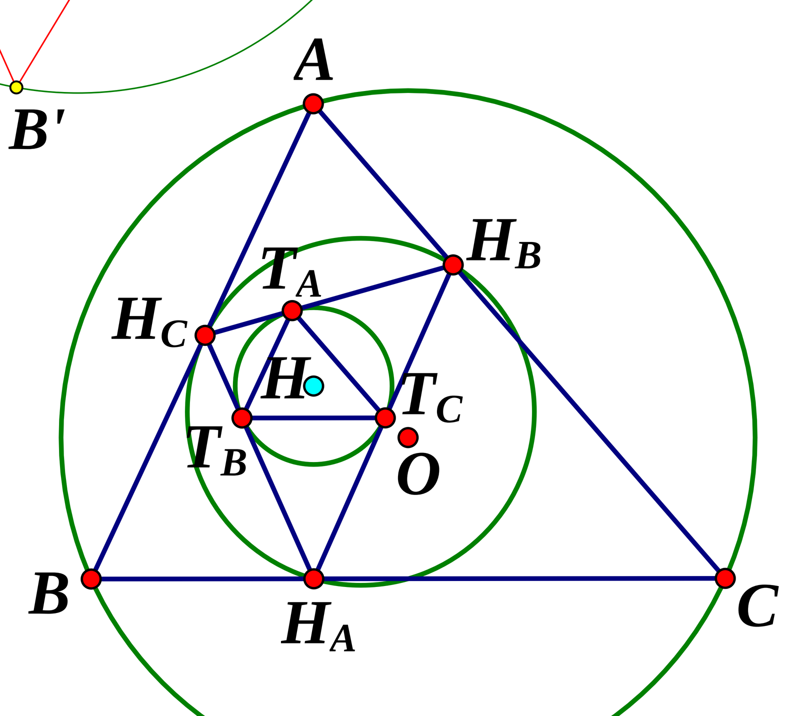


圖 15：面積成等比

# 二、圓外切同心三角形的作圖與性質

## (一) 圓外切同外心的三角形

**命題 5**：對於圓 $I$ 外切 △ $ABC$，其同外心 △ $A'B'C'$ 的作圖步驟。

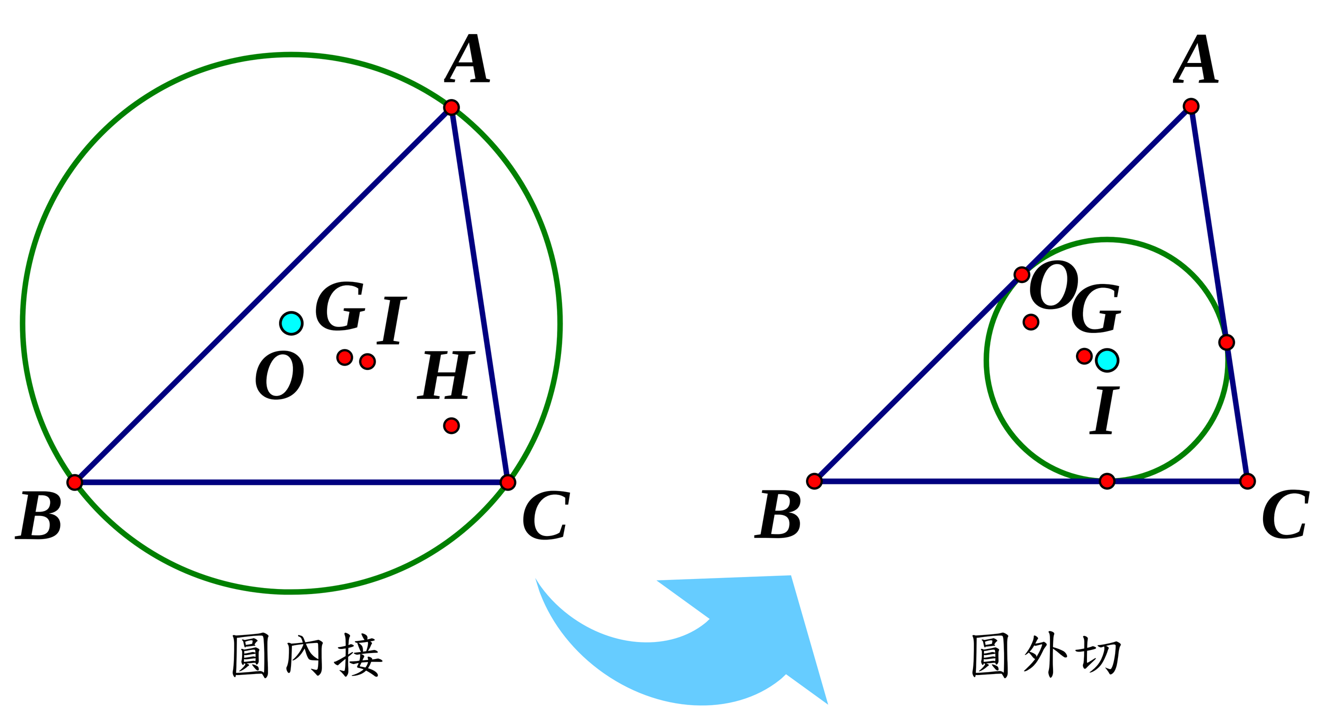



圖 16：同心三角形

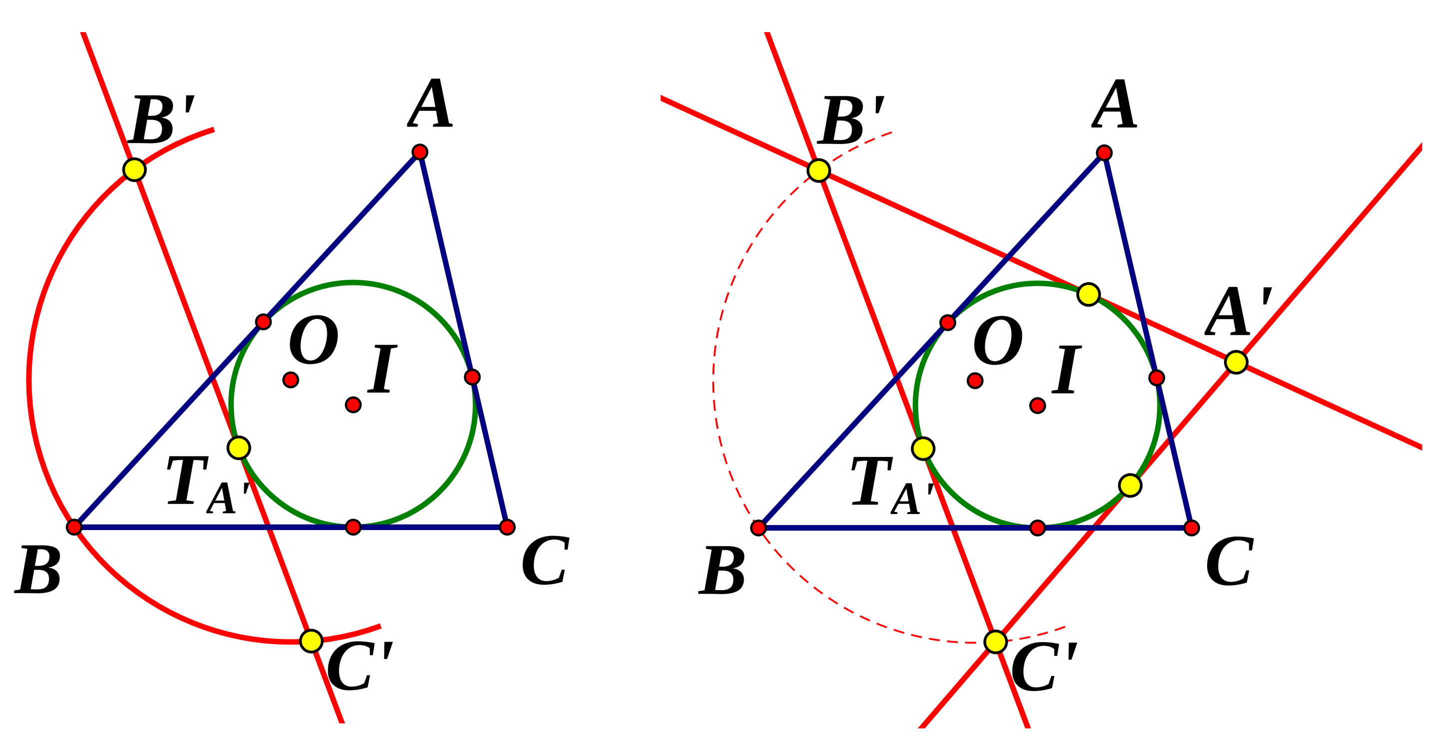


圖 17：圓外切同外心三角形作圖

## (二) 圓外切同重心的三角形

關於圓外切的同重心三角形，我們僅有邊上的切點可以使用，要能從切點反推頂點就非常難。以下利用奈格爾線 Nagel line 來解決圓外切同重心三角形的存在性作圖。

**命題 6**：對於圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$ ，其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的作圖步驟。

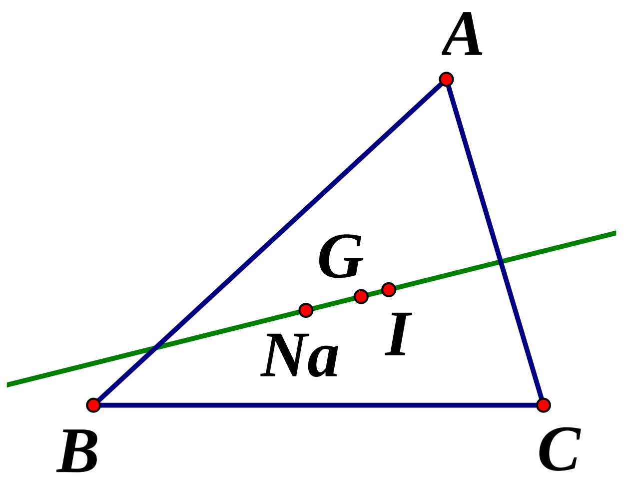



圖 18：奈格爾線

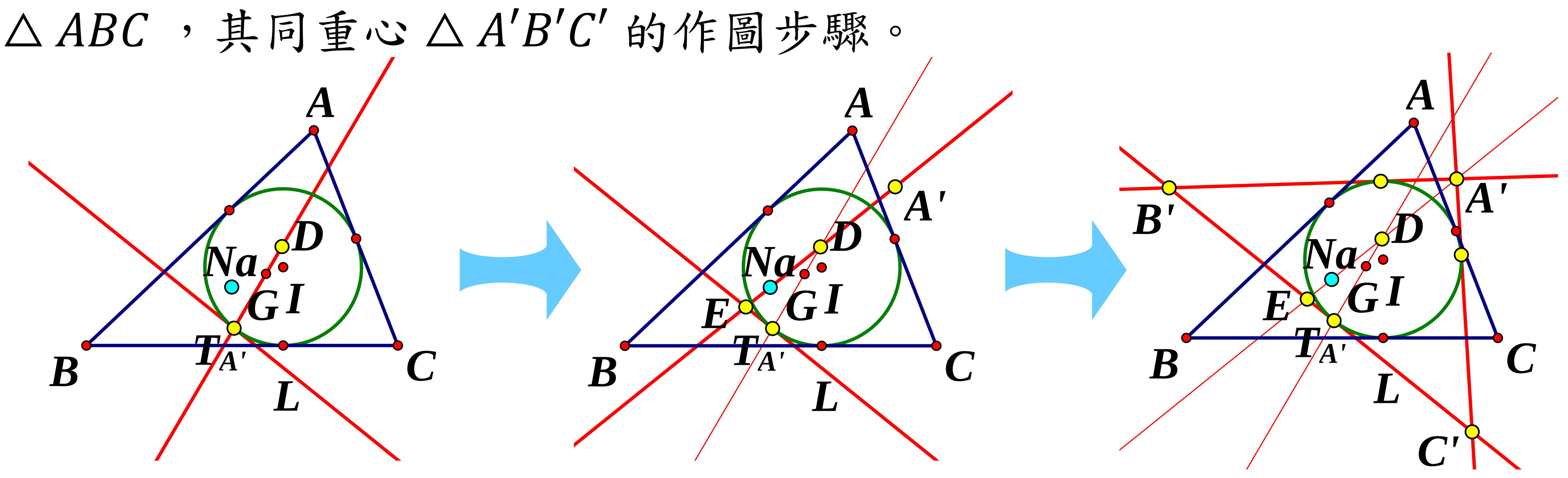



圖 19：圓外切同重心作圖步驟

**引理 3**：對於任意 $\triangle ABC$，$\overline{IG}^2=\frac{1}{9}(s^2+5r^2-16Rr)$。

**定理 5**：給定圓 $I$ 外切 $\triangle ABC$，利用 $Na$ 點位置刻劃其同重心 $\triangle A'B'C'$ 的可作條件。

(1) 當 $\prod_{\text{cyc}}(-3a+b+c)<0$ ，圓上的所有點可作同重心三角形。

(2) 當 $\prod_{\text{cyc}}(-3a+b+c)=0$ ，除了奈格爾點 $Na$ 外，圓上其他點可作同重心三角形。

(3) 當 $\prod_{\text{cyc}}(-3a+b+c)>0$，圓上某段圓弧上點皆可作同重心三角形。

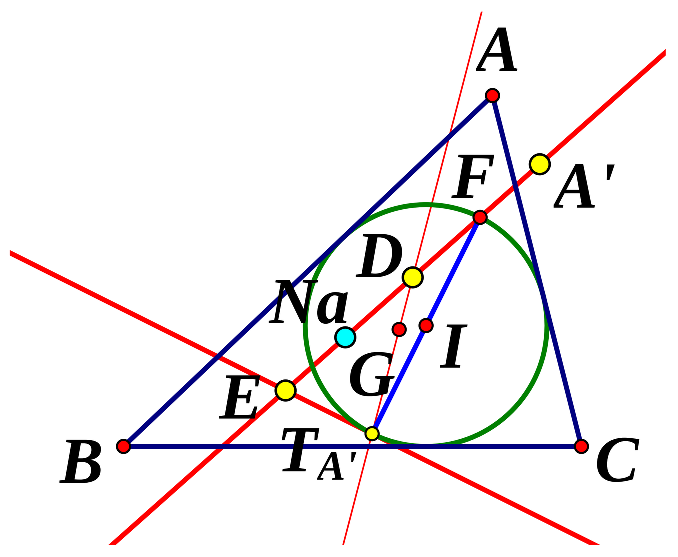



圖 20：$Na$ 點在圓內部

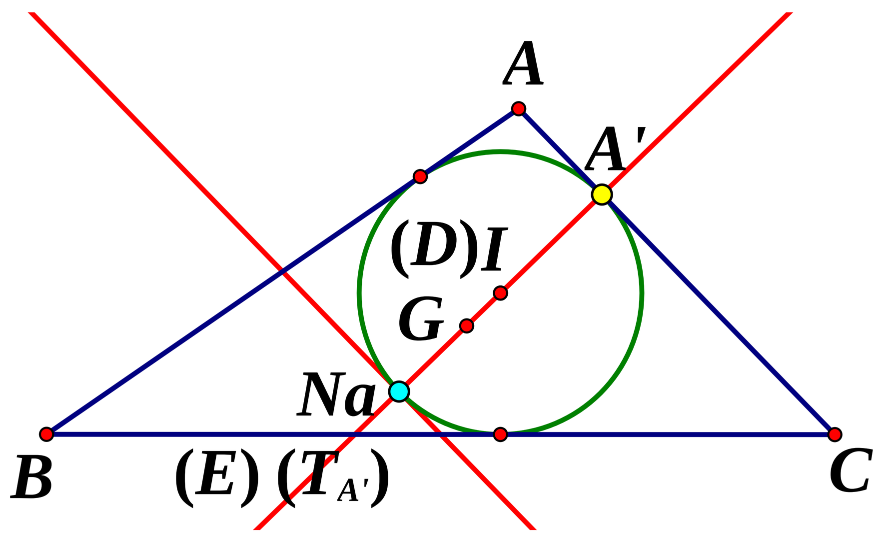



圖 21：$Na$ 點在圓上

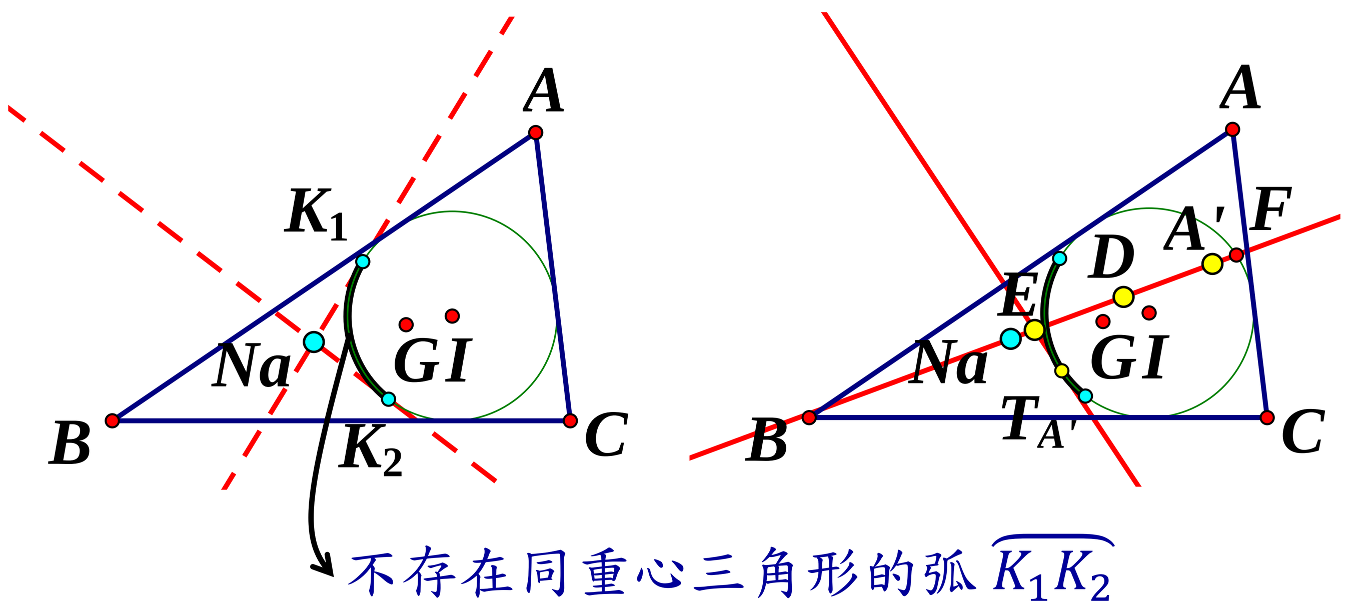



圖 22：$Na$ 點在圓外部

$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 同時外切於一個圓，根據彭賽列閉合定理（Poncelet's Closure Theorem）可得其六個頂點會在一個二次曲線上，即動點 $T_{A'}$ 關於 $\triangle ABC$ 的同重心 $\triangle A'B'C'$ 三頂點之軌跡在非退化時，是二次曲線。我們原本直觀認為 $Na$ 點在圓上時，頂點之軌跡是拋物線，但是結果卻是「一組平行線」。

**性質 8**：當 $Na$ 點在內切圓上，動點 $T_{A'}$ 關於 $\triangle ABC$ 的同重心 $\triangle A'B'C'$ 三頂點之軌跡為平行線。

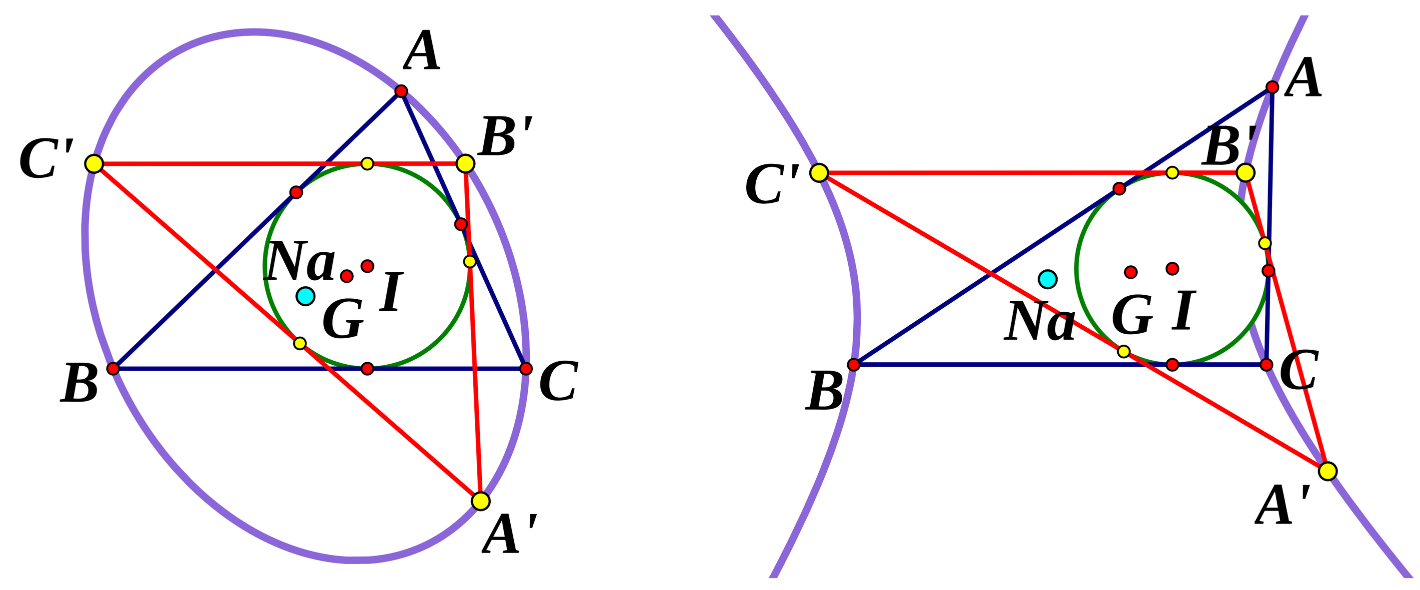



圖 23：圓外切同重心三角形的頂點軌跡（非退化）

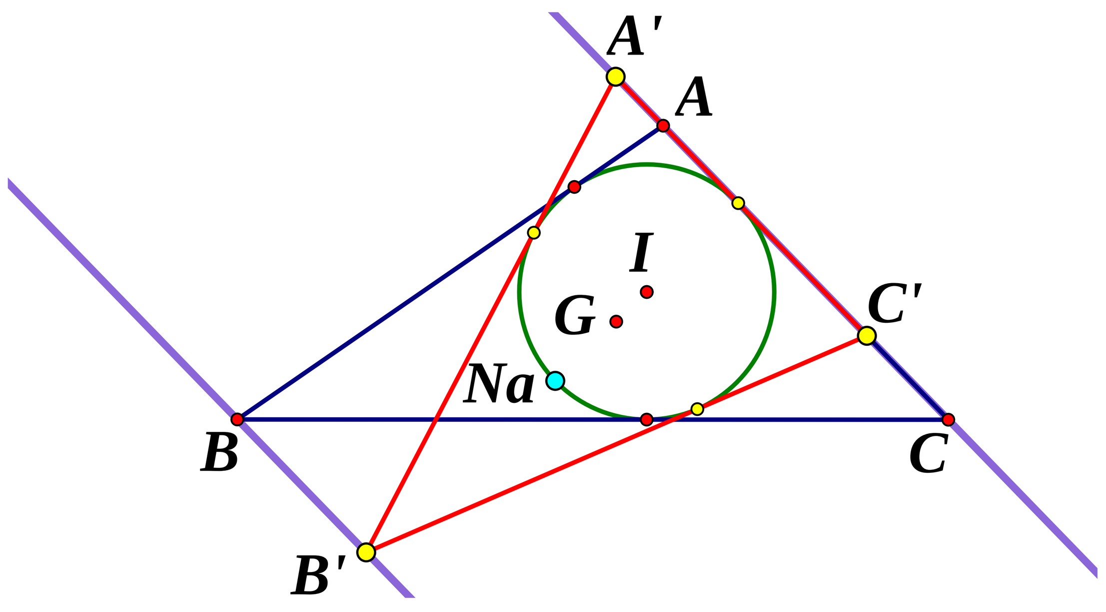



圖 24：圓外切同重心三角形的頂點軌跡（退化）

**猜想 1**：當 $Na$ 點在內切圓內部時，動點 $T_{A'}$ 關於 $\triangle ABC$ 的同重心 $\triangle A'B'C'$ 三頂點之軌跡是 $Na$ 點為中心的橢圓，且 Nagel line 為短軸。

**猜想 2**：當 $Na$ 點在內切圓外部時，動點 $T_{A'}$ 關於 $\triangle ABC$ 的同重心 $\triangle A'B'C'$ 三頂點之軌跡是 $Na$ 點為中心的雙曲線，且 Nagel line 為貫軸。

我們利用 AI 模型進行搜尋，目前沒有找到以 $Na$ 點為中心的二次曲線。

# 肆、討論與結論

## 一、圓內接同內心三角形的作圖、存在性與性質

我們先證明歐拉公式（Euler triangle formula）雙心三角形恆等式等同本研究的圓內接同內心三角形，因此圓內接同內心三角形其三邊包絡線就是內切圓。

## 二、圓內接同重心（同垂心）三角形的作圖、存在性與性質

圓內接同重心三角形與原三角形必同垂心。討論同重心三角形的三邊與其直線的包絡線，結果發現原三角形為直角三角形時，其包絡線退化為垂心和外心；銳角三角形時，其包絡線為 Macbeath inellipse；鈍角三角形時，其包絡線為 Macbeath hyperbola。

## 三、圓內接同內心三角形、同重心（同垂心）三角形之關聯性

針對不同類的圓內接同心三角形，我們給出其關聯性：同階層的垂足三角形同內心，同時同階層的切點三角形會同重心（同垂心），最後還發現三角形之間面積成等比關係。

## 四、圓外切同心三角形的存在性與圓內接同心三角形的異同

我們利用了奈格爾線成功給出圓外切同重心三角形的作圖步驟，並刻劃圓外切同重心三角形的存在性，其分類並不是原三角形的直角、銳角、鈍角（與圓內接同重心三角形不同）。我們進一步證明其臨界條件是三角形的兩邊之和為第三邊的 3 倍，這個非常有趣！

# 伍、參考資料


[1] 黃家禮（2000）。幾何明珠。臺北市：九章出版社。

[2] 張海潮（2009）。從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓。**數學傳播**，**33** (2)，pp. 48-51。

[3] Weisstein, Eric W (2025/03). “Nagel Point”. available at https://mathworld.wolfram.com/NagelPoint.html

[4] Weisstein, Eric W (2024/12). “MacBeath Inconic”. available at https://mathworld.wolfram.com/MacBeathInconic.html