

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

佳作

030419

真是知「面」、知「心」又識「高」的雙心多邊形！

學校名稱： 新竹縣立自強國民中學

作者：

國二 楊景翔

指導老師：

鄭芬如

關鍵詞： 雙心四邊形、雙心 n 邊形

真是知「面」、知「心」又識「高」的雙心多邊形！

摘要

1. 雙心 n 邊形中，過任一旁心作不相切邊的垂直線（旁心高）並與該旁切圓交於一點，再過此交點作旁心高的垂直線（旁高垂線）則
 - (1) 過內心 I 作旁心高的垂直線，則該垂足與 I 、對應切點形成一角具有旁高垂線與圓 I 是否相交的判別性質。
 - (2) 透過旁心高和旁徑、內切圓、外接圓半徑的關係，進而推導出雙心 n 邊形面積和三種半徑有關的一般式。
 - (3) 只有雙心四邊形的四條旁高垂線相交形成的旁高垂四邊形和原雙心四邊形全等，且具有對偶性。
2. 雙心 n 邊形中，過每個頂點作不相切邊的頂點高，會與對應外接圓圓心角之正弦函數值有漂亮的比值關係式。
3. 推廣文獻 1 結果到雙心四邊形，可得內切圓半徑與四個旁徑間類似的關係式。

壹、研究動機

在尋找獨立研究的題目時，我們在老師介紹的數學期刊網站讀到 2021 年第 4 期工老師發表的「三角形旁徑與高之間的三個性質」[1]的文章，裡面有多種關於三角形內切圓、外接圓半徑和旁徑之間的神奇性質，好奇如果一個四邊形也同三角形一樣具有內心和外心時是否也有些特殊的性質？從去年開始進行第一階段的研究，而有一些初步的研究成果。在發現雙心五邊形的旁高垂線與內切圓發生不相交的情況後，今年繼續深入探討不相交的判別，以及該情況下如何得到雙心 n 邊形的面積？另外，雙心 n 邊形中從每個頂點作不相切邊的頂點高之間，是否有其他有趣的關係式？於是展開了第二年的研究之路。

貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦、GSP 動態幾何繪圖軟體、Smartdraw 繪圖軟體

參、研究目的

在雙心 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中，過任一旁心作不相切邊的垂直線（旁心高）並分別交該旁切圓和不相切邊於兩點後，再過與旁切圓之交點作旁心高的垂直線（旁高垂線），探討

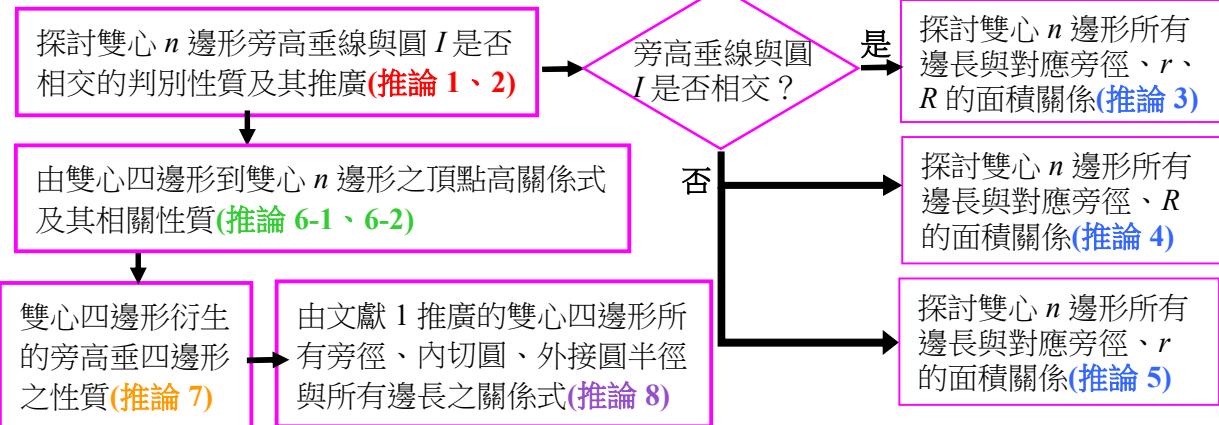
一、藉由過內心 I 作旁心高的垂直線，探討其垂足、 I 和對應切點三個點形成的角度對旁高垂線與內切圓的相交與否是否有關鍵的影響？或是其他更多相關的性質。

二、承一的結果，應用到雙心 n 邊形 ($n \geq 4$) 中，探討雙心 n 邊形面積與其邊長、旁徑和內切圓半徑 r 、外接圓半徑 R 的關係式。

三、在雙心 n 邊形中，過各頂點作不相切邊的垂直線（稱為頂點高），探討其性質。本研究中凡五邊以上之雙心 n 邊形皆由文獻 3 提及的彭賽列閉合定理作法畫出。

四、探討過每個旁心高與該旁切圓的交點作旁心高的垂直線（稱為旁高垂線），相交形成衍生旁高垂四邊形，與原雙心四邊形的關係。

五、依據文獻 1 的結果，推廣到雙心四邊形，進一步探討四個旁徑與內切圓半徑的關係式。



肆、研究過程與結果

一、名詞定義與已知性質

1. 旁心高：過旁心 I_t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) 作 $n-3$ 個不相切邊 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ($i = t+2, \dots, t+n-2$ ，當下標值 $> n$ 時，取下標值 $\bmod n$ 為新下標值) 的垂直線，取交點為 $H_{t(i,i+1)}$ ，則 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 為旁心高。如圖 1 中的 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}}$ 、 $\overline{I_2 H_{2(4,1)}}$ 。

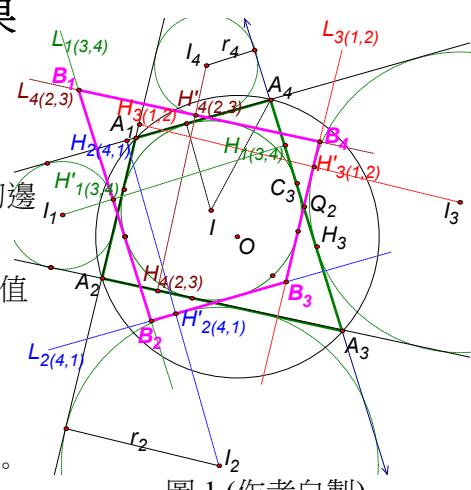


圖 1 (作者自製)

2. 旁高垂線與旁高垂四邊形：過旁心高 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 與旁切圓 I_t 的交點 $H'_{t(i,i+1)}$ 作 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 的垂直線 $L_{t(i,i+1)}$ ，即為旁高垂線。如圖 1 的 $L_{l(3,4)}$ 、 $L_{2(4,1)}$ 、....等。又圖 1 中的四條旁高垂線形成的四邊形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ ，稱為旁高垂四邊形。

3. 第一、第二旁高角：如圖 2， $L_{5(2,3)}$ 交圓 I 於 $P_{5(2,3)}$ 和 $P'_{5(2,3)}$ ，過 I 作 $L_{5(2,3)}$ 的垂直線交 $L_{5(2,3)}$ 於 $M_{5(2,3)}$ ，稱 $\angle P_{5(2,3)} IM_{5(2,3)}$ 和 $\angle P_{5(2,3)} C_2 P'_{5(2,3)}$ 分別為第一、第二旁高角。

4. 頂點高：如圖 3 的雙心四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ ，過各頂點作與不通過該頂點的邊之垂直線（稱不通過該頂點的邊為不相切邊），頂點與各垂足的連線段即為頂點高。如圖 3 中的 $\overline{A_1 D_{1(2,3)}}$ 、 $\overline{A_2 D_{2(3,4)}}$ 、...等。將其 8 個垂足交點四四分為兩組，形成兩個四邊形 $D_{l(3,4)} D_{4(l,1)} D_{3(l,2)} D_{2(3,4)}$ 與 $D_{l(2,3)} D_{4(2,3)} D_{3(4,1)} D_{2(4,1)}$ ，統一稱為頂點高四邊形。

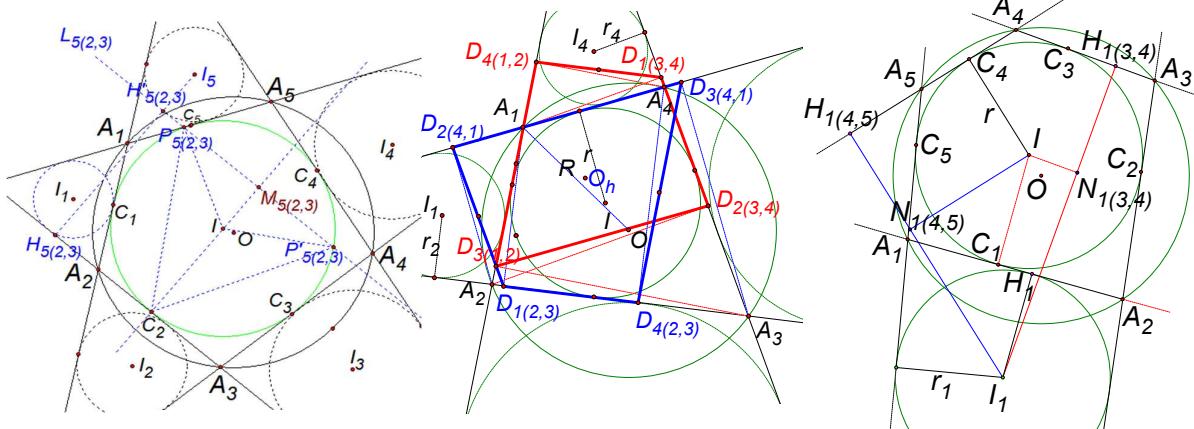


圖 2 (作者自製)

圖 3 (作者自製)

圖 4 (作者自製)

5. 判別角：如圖 4，過內心 I 作旁心高 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}}$ 的垂直線，交於點 $N_{1(3,4)}$ ，則 $\angle C_1 I N_{1(3,4)}$ 稱為判別角，用於判斷旁高垂線與內切圓的相交與否。

【性質 1】 (笛部真市郎, 2003 年)[2]若 $\triangle ABC$ 中的 $\angle ABC$ 包含的

旁切圓的圓心為 I' ，則 $\angle AI'B = \frac{1}{2} \angle ACB$ 。說明如下：

如圖 5，設 $\angle ABC$ 的內心為 I ，則 $\angle I'AI = \angle I'CI = 90^\circ$ ，

所以 A, I', C, I 四點共圓 $\Rightarrow \angle AII = \angle ACI = \frac{1}{2} \widehat{AI} = \frac{1}{2} \angle ACB$ ■

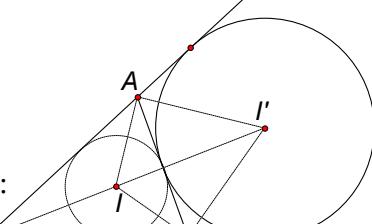


圖 5 (作者自製)

二、旁高垂線與內切圓 I 是否相交的判別性質

在雙心五邊形的作圖實驗中，首先發現旁高垂線與內切圓 I 不相交，後來又在雙心六、十邊形中也發現這情形，影響探討雙心多邊形面積關係式的一般化結果。於是找出兩種判別角來判斷旁高垂線是否與內切圓相交，且以雙心五、十邊形分別進行探討分析：

(一) 在切點 C_t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) 和 I 皆位在旁心高同側時

1. 當判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ$ 時，旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 與內切圓 I 不相交。

證明：如圖 6，以雙心五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 中的旁心 I_4 為例，

延伸 $\overrightarrow{C_4 I}$ 與旁心高 $\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 交於 $S_{4(2,3)}$ ， $Q_{4(2,3)}$ 為旁心高

$\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 與 $\overrightarrow{A_4 A_5}$ 的交點。且 $Q_{4(2,3)}$ 和 $H'_{4(2,3)}$ 兩點距離很近，

如圖 7。 $\therefore \overline{N_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} \leq \overline{N_{4(2,3)} H'_{4(2,3)}} = \overline{I M_{4(2,3)}}$ 。

過 I 作一直線平行於 $\overrightarrow{A_4 A_5}$ ，並交 $\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 於 $N'_{4(2,3)}$ 。 $\therefore \overline{Q_{4(2,3)} S_{4(2,3)}}$ 是 $\triangle Q_{4(2,3)} C_4 S_{4(2,3)}$ 的斜邊

$\therefore \overline{N'_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} > r = \overline{I C_4}$ (r 為內切圓半徑) 又 $\angle C_4 I N'_{4(2,3)} = 90^\circ < \angle C_4 I N_{4(2,3)}$ ，

$\Rightarrow \overline{N_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} > \overline{N'_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} > r \Rightarrow \overline{I M_{4(2,3)}} = \overline{N_{4(2,3)} H'_{4(2,3)}} \geq \overline{N_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} > \overline{N'_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}} > r$

故當 $\angle C_4 I N_{4(2,3)} > 90^\circ$ ($\Rightarrow \overline{I M_{4(2,3)}} > r$) 時， $L_{4(2,3)}$ 與內切圓不相交。

2. 當判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ$ 時，旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 與內切圓 I 交於兩點 $Q_{4(2,3)}$ 和 $H'_{4(2,3)}$ 。

證明：如圖 8，以雙心五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 中的旁心 I_4 為例，令旁高垂線

$L_{4(2,3)}$ 與 $\overrightarrow{I C_4}$ 交於點 $T_{4(2,3)}$ 。 $\overrightarrow{C_4 I}$ 與旁心高 $\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 交於 $S_{4(2,3)}$ 。

$\because \angle C_4 I N_{4(2,3)} < 90^\circ = \angle S_{4(2,3)} N_{4(2,3)} I \Rightarrow \overline{I S_{4(2,3)}}$ 是 $\triangle I N_{4(2,3)} S_{4(2,3)}$ 的

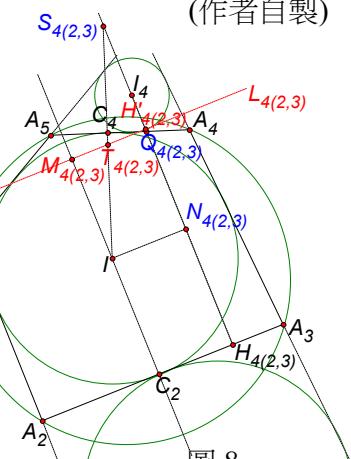
斜邊 $\Rightarrow \overline{I C_4} = r > \overline{I T_{4(2,3)}} > \overline{N_{4(2,3)} H'_{4(2,3)}} = \overline{I M_{4(2,3)}}$ 故得證。

3. 當判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ$ 時，旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 與內切圓相切。

證明：如圖 9， $\because \angle C_4 I N_{4(2,3)} = 90^\circ = \angle Q_{4(2,3)} C_4 I = \angle I N_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}$ ，

$\Rightarrow \angle C_4 Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} = 90^\circ$ ，於是 $\angle C_4 Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} = \angle I_4 Q_{4(2,3)} C_4 = \angle I_4 H_4 C_4 = 90^\circ$ ，

圖 7 放大示意圖
(作者自製)



$\Rightarrow Q_{4(2,3)}$ 和 H_4 (H_4 是旁切圓 I_4 和邊 $\overline{A_4A_5}$ 的切點) 重合，

$\Rightarrow Q_{4(2,3)}$ 也在圓 I_4 上 $\Rightarrow H'_{4(2,3)}$ 和 $Q_{4(2,3)}$ 也重合，故

$$r = \overline{N_{4(2,3)}H'_{4(2,3)}} = \overline{N_{4(2,3)}Q_{4(2,3)}} \Rightarrow L_{4(2,3)} \text{ 和內切圓相切且和 } \overline{A_4A_5} \text{ 重合}$$

(二) 在切點 C_t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) 和 I 位在旁心高不同側時

1. 如圖 10 的雙心十邊形中，設 $L_{1(5,6)}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 $G_{1(5,6)}$ ，在 $\Delta I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}$ 和 $\Delta I G_{1(5,6)} C_1$ 中， $\angle I G_{1(5,6)} C_1$ 和 $\angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}$ 皆 $< 90^\circ$ 。

(1) 當 $\angle I G_{1(5,6)} C_1 > \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}$ 時，如圖 10，則

$$\sin \angle I G_{1(5,6)} C_1 > \sin \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)} \Rightarrow \overline{IC_1} = r > \overline{IM_{1(5,6)}}$$

$\Rightarrow L_{1(5,6)}$ 與內切圓交於兩點，此時

$$\angle I G_{1(5,6)} C_1 > \frac{\angle I G_{1(5,6)} C_1 + \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}}{2} > \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}.$$

(2) 當 $\angle G_{1(5,6)} IC_1 < \angle G_{1(5,6)} IM_{1(5,6)}$ 時，如圖 11，同理可證，

$$\Rightarrow \overline{IC_1} = r < \overline{IM_{1(5,6)}} \Rightarrow L_{1(5,6)} \text{ 與內切圓不相交，此時}$$

$$\angle I G_{1(5,6)} C_1 < \frac{\angle I G_{1(5,6)} C_1 + \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}}{2} < \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}$$

(3) 當 $\angle G_{1(5,6)} IC_1 = \angle G_{1(5,6)} IM_{1(5,6)}$ 時，如圖 12，

$$\Rightarrow \overline{IC_1} = r = \overline{IM_{1(5,6)}} \Rightarrow L_{1(5,6)} \text{ 與內切圓相切，此時}$$

$$\angle I G_{1(5,6)} C_1 = \frac{\angle I G_{1(5,6)} C_1 + \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}}{2} = \angle I G_{1(5,6)} M_{1(5,6)}$$

2. 如圖 13，過 I 分別作旁心高 $\overline{I_1H_{1(5,6)}}$ 的垂直線、

平行於 $\overline{A_1A_2}$ 的直線，分別交 $\overline{I_1H_{1(5,6)}}$ 於 $N_{1(5,6)}$ 、 $N'_{1(5,6)}$ ，

作 $\angle N_{1(5,6)} I N'_{1(5,6)}$ 的角平分線交 $\overline{I_1H_{1(5,6)}}$ 於 $N''_{1(5,6)}$ 。

過 $G_{1(5,6)}$ 作直線 $L'_{1(5,6)} // \overline{IN''_{1(5,6)}}$ ， $\because \overline{IN'_{1(5,6)}} // L_{1(5,6)}$ ， $\overline{IN'_{1(5,6)}} // \overline{A_1A_2}$

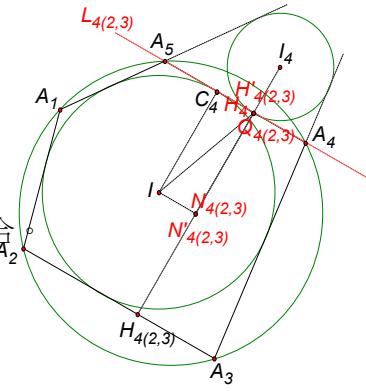


圖 9 (作者自製)

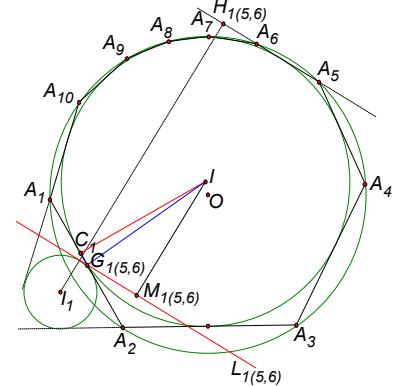


圖 10 (作者自製)

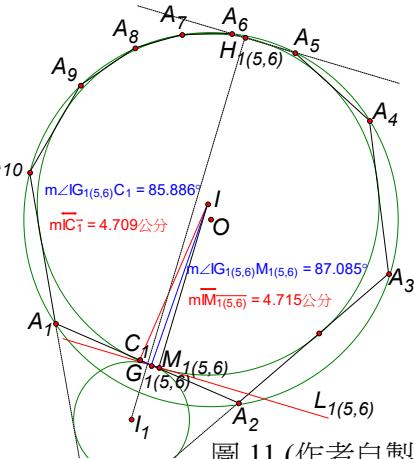


圖 11 (作者自製)

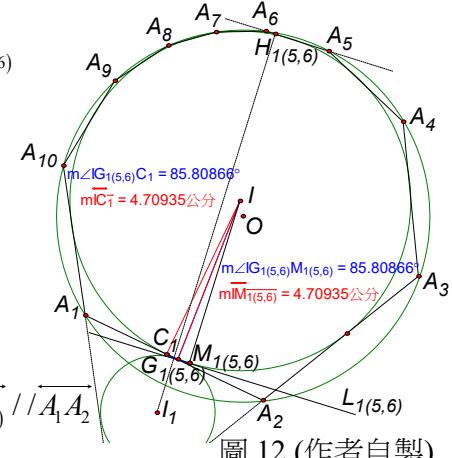


圖 12 (作者自製)

$\therefore \angle N_{1(5,6)}IN'_{1(5,6)} = L_{1(5,6)}$ 與 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 夾角，再作 $\angle C_1G_{1(5,6)}M_{1(5,6)}$ 的角平分線交 $\overrightarrow{IN''_{1(5,6)}}$ 於 $G'_{1(5,6)}$ ，

則 $\overline{G_{1(5,6)}G'_{1(5,6)}} \perp \overrightarrow{IN''_{1(5,6)}}$ 。 $\therefore \frac{\angle C_1G_{1(5,6)}M_{1(5,6)}}{2} = \angle C_1G_{1(5,6)}G'_{1(5,6)} = \angle C_1IN''_{1(5,6)}$
 $= \frac{\angle IG_{1(5,6)}C_1 + \angle IG_{1(5,6)}M_{1(5,6)}}{2}$ 。由前面(1)、(2)、(3)結果得，當 $\angle C_1IN''_{1(5,6)} < \angle IG_{1(5,6)}C_1$ 時

$\Rightarrow L_{1(5,6)}$ 與內切圓交於兩點，如圖 13；當 $\angle C_1IN''_{1(5,6)} = \angle IG_{1(5,6)}C_1$ 時 $\Rightarrow L_{1(5,6)}$ 與內切圓

相切，如圖 14；當 $\angle C_1IN''_{1(5,6)} > \angle IG_{1(5,6)}C_1$ 時 $\Rightarrow L_{1(5,6)}$ 與內切圓不相交，如圖 15。

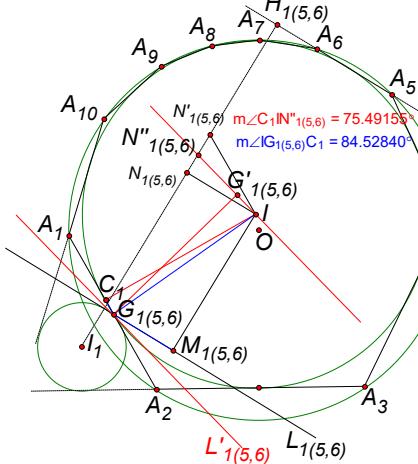


圖 13 (作者自製)

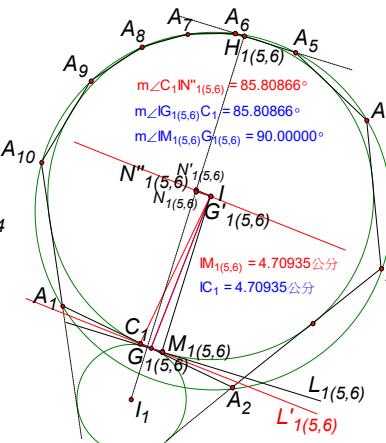


圖 14 (作者自製)

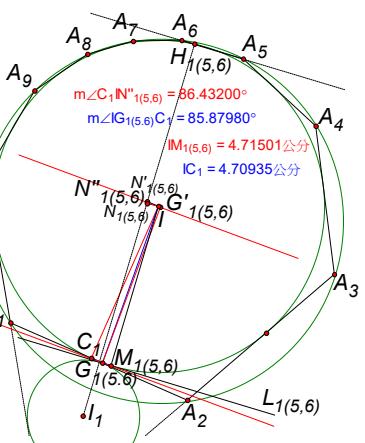


圖 15 (作者自製)

(三)兩種判別角在雙心n邊形中無論 C_i 和 I 是否在旁心高同側皆會成對出現

1.如圖 16、17，以 I_4 和 I_2 為例，分別延伸 $\overrightarrow{C_4I}$ 和 $\overrightarrow{C_2I}$ 至圓 I 並

取交點為 F_4 和 F_2 。當 $\angle C_2IC_4 > 90^\circ$ ，且點 $N_{4(2,3)}$ 和 $N_{2(4,5)}$

同時位在 $\angle F_2IF_4$ 內部（圖 16）或同時位在 $\angle C_2IC_4$

內部（圖 17）時， $\because \angle I_4H_{4(2,3)}C_2 = \angle H_{4(2,3)}C_2I = \angle IN_{4(2,3)}H_{4(2,3)} = 90^\circ$

$\therefore \angle N_{4(2,3)}IC_2 = 90^\circ$ ，同理 $\angle N_{2(4,5)}IC_4 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle C_2IN_{2(4,5)} = 90^\circ \pm \angle C_2IF_4$ 且 $\angle C_4IN_{4(2,3)} = 90^\circ \pm \angle C_4IF_2$

又 $\angle C_2IF_4 = \angle C_4IF_2 \therefore \angle C_2IN_{2(4,5)} = \angle C_4IN_{4(2,3)}$ （相等地成對出現）。

在圖 18 的雙心六邊形中，若 $N_{6(3,4)}$ 與 $N_{3(6,1)}$ 分別位於 $\angle F_3IF_6$

（或 $\angle C_3IC_6$ ）和 $\angle C_3IC_6$ （或 $\angle F_3IF_6$ ）內部時，參考圖 18-1、18-2，同理可得

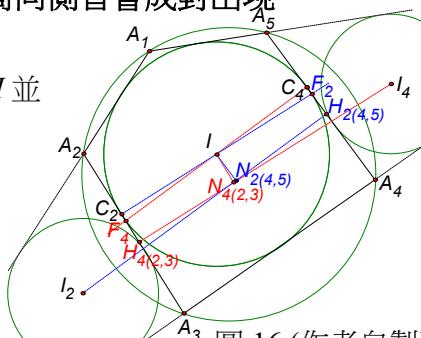


圖 16 (作者自製)

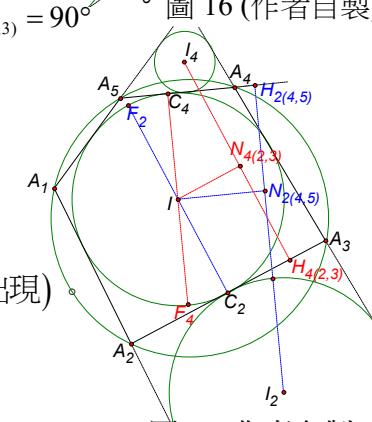
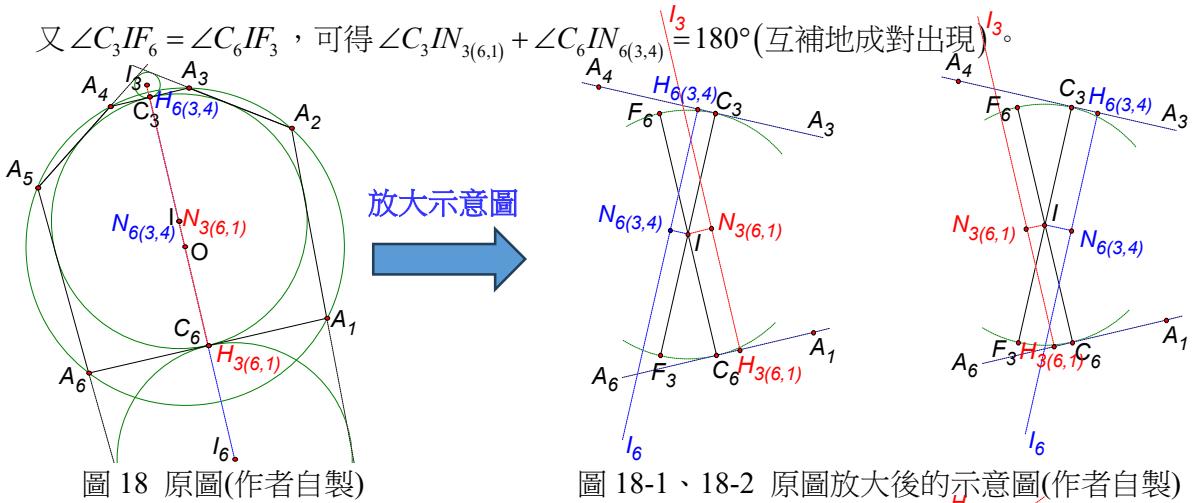
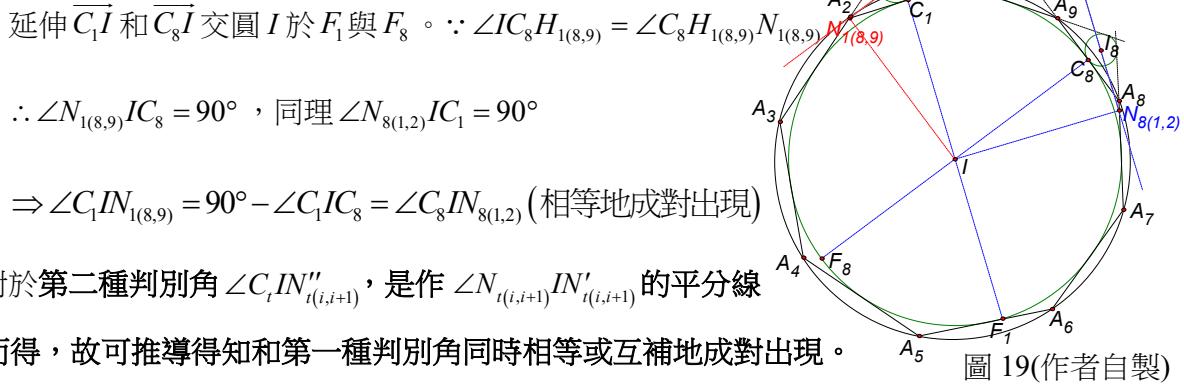


圖 17 (作者自製)

$\angle N_{6(3,4)}IC_3 = \angle N_{3(6,1)}IC_6 = 90^\circ$ 但 $\angle C_6IN_{6(3,4)} = 90^\circ \pm \angle C_6IF_3$ 且 $\angle C_3IN_{3(6,1)} = 90^\circ \mp \angle C_3IF_6$,



2.如圖 19，以雙心九邊形的 I_1 和 I_8 為例，當 $\angle C_1IC_8 < 90^\circ$ 時，分別



推論 1：在雙心 n 邊形中 ($n \geq 5$)，過 I_t ($t = 1, 2, \dots, n$) 作不相切邊 $\overrightarrow{A_tA_{t+1}}$ ($t = 2, \dots, n-2$) 的旁心高 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ ，再過 I 作 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ 的垂直線交於 $N_{t(i,i+1)}$ 。當 C_t 與 I 在 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ 同側時

第一種判別角 $\begin{cases} \angle C_tIN_{t(i,i+1)} > 90^\circ \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 不相交} \\ \angle C_tIN_{t(i,i+1)} < 90^\circ \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 交於兩點} \\ \angle C_tIN_{t(i,i+1)} = 90^\circ \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 相切並與 } \overrightarrow{A_tA_{t+1}} \text{ 重合} \end{cases}$ ；

當 C_t 和 I 在 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ 不同側時，設 $L_{t(i,i+1)}$ 交 $\overrightarrow{A_tA_{t+1}}$ 於 $G_{t(i,i+1)}$ ，過 I 作平行於 $\overrightarrow{A_tA_{t+1}}$ 的直線交 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ 於 $N'_{t(i,i+1)}$ ，再作 $\angle N_{t(i,i+1)}IN'_{t(i,i+1)}$ 的角平分線交 $\overrightarrow{I_tH_{t(i,i+1)}}$ 於 $N''_{t(i,i+1)}$ 。則

第二種判別角 $\begin{cases} \angle C_tIN''_{t(i,i+1)} > \angle IG_{t(i,i+1)}C_t \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 不相交} \\ \angle C_tIN''_{t(i,i+1)} < \angle IG_{t(i,i+1)}C_t \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 交於兩點} \\ \angle C_tIN''_{t(i,i+1)} = \angle IG_{t(i,i+1)}C_t \Rightarrow L_{t(i,i+1)} \text{ 與內切圓 } I \text{ 相切} \end{cases}$ 。

其中互為不相切邊的旁心各自作出的兩種判別角皆同時存在，且會同時相等或互補地成對出現。當下標值 $>n$ 時，取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。

三、與判別角有關的其他性質

1. 相鄰旁切圓作同一邊的旁心高形成的相似三角形

如圖 20，以雙心八邊形的 I_7 和 I_8 為例，作 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 的旁心高， A_2

並分別作點 $N_{7(1,2)}$ 和 $N_{8(1,2)}$ ， $\because \angle I_7 N_{7(1,2)} I = \angle I_7 A_8 I = 90^\circ$

$\therefore I_7, A_8, I, N_{7(1,2)}$ 四點共圓 $\Rightarrow \angle A_8 I_7 I = \angle A_8 N_{7(1,2)} I$ 。同理

$\angle A_8 I_8 I = \angle A_8 N_{8(1,2)} N_{7(1,2)}$ ，故 $\Delta N_{7(1,2)} A_8 N_{8(1,2)} \sim \Delta I_7 I I_8$ 。與其他

7 個邊的旁心高形成的三角形 $\Delta N_{7(2,3)} A_8 N_{8(2,3)} \sim \Delta N_{7(3,4)} A_8 N_{8(3,4)} \sim \dots \sim \Delta N_{7(8,1)} A_8 N_{8(8,1)}$ 同理可得皆相似於 $\Delta I_7 I I_8$ ，且

$$\frac{N_{7(7+m,7+m+1)} N_{8(7+m,7+m+1)}}{I_7 I_8} = \sin \angle I_7 I_8 N_{8(7+m,7+m+1)} , m = 0, 1, 2, \dots, 7 ,$$

當下標值 > 8 時取下標值 $\bmod 8$ 為新下標值。 ■

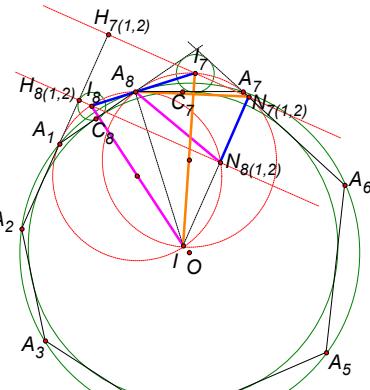


圖 20 (作者自製)

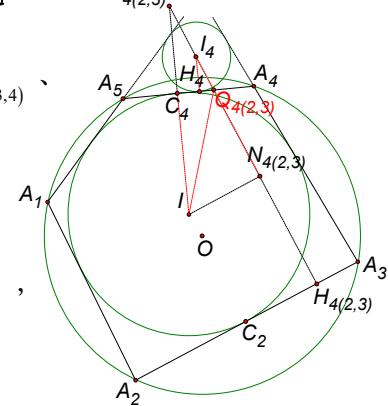


圖 21 (作者自製)

2. 判別角與特殊角 $\angle C_4 I Q_{4(2,3)}$ 、 $\angle H_4 I_4 Q_{4(2,3)}$ 和 $\angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)}$ 的關係

(1) 當 C_4 和 I 同側時，如圖 21、22，以 I_4 為例，在旁高垂線交

內切圓 I 於兩點時 ($\angle C_4 I N_{4(2,3)} < 90^\circ$)， $\overline{A_4 A_5}$ 與圓 I_4 的

切點設為 H_4 ， $\overline{I_4 H_4}$ 和 $\overline{A_4 A_5}$ 的交點 $Q_{4(2,3)}$ 可能的位置如下：

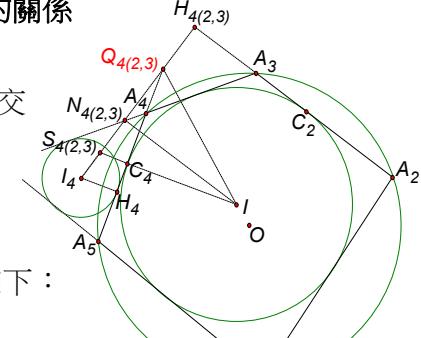


圖 22 (作者自製)

當 $Q_{4(2,3)}$ 在外接圓 O 內 (圖 21) 時， $\because \angle S_{4(2,3)} C_4 Q_{4(2,3)} = \angle I_4 H_4 Q_{4(2,3)}$

$$= 90^\circ \Rightarrow \angle H_4 I_4 Q_{4(2,3)} = \angle C_4 S_{4(2,3)} Q_{4(2,3)} \Rightarrow \angle Q_{4(2,3)} I_4 H_4 + \angle C_4 I Q_{4(2,3)}$$

$$= \angle Q_{4(2,3)} S_{4(2,3)} I + \angle C_4 I Q_{4(2,3)} = \angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)}$$

當 $Q_{4(2,3)}$ 在外接圓 O 外 (圖 22) 時，同理可得

$$\angle H_4 I_4 Q_{4(2,3)} = \angle C_4 S_{4(2,3)} Q_{4(2,3)} \therefore \angle C_4 I Q_{4(2,3)} + \angle Q_{4(2,3)} I_4 H_4$$

$$+ \angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} = \angle C_4 I Q_{4(2,3)} + \angle C_4 S_{4(2,3)} Q_{4(2,3)} + \angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} = 180^\circ \blacksquare$$

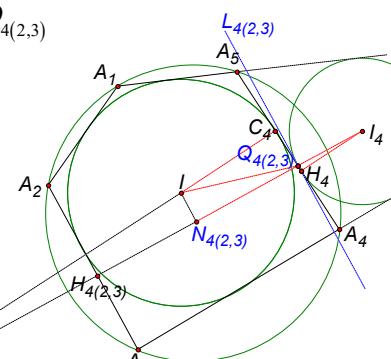


圖 23 (作者自製)

(2) 如圖 23, 當旁高垂線與內切圓 I 不相交時 ($\angle C_4 I N_{4(2,3)} > 90^\circ$),

$$\because \angle I_4 Q_{4(2,3)} H_4 = \angle C_4 Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} \text{ 且 } \angle I_4 H_4 Q_{4(2,3)} = \angle S_{4(2,3)} C_4 Q_{4(2,3)} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle H_4 I_4 Q_{4(2,3)} = \angle C_4 S_{4(2,3)} Q_{4(2,3)}$$

$$\Rightarrow \angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} + \angle H_4 I_4 Q_{4(2,3)} = \angle C_4 I Q_{4(2,3)}^\circ$$

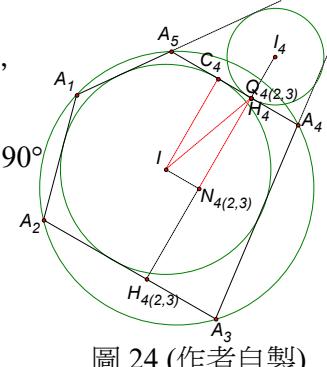


圖 24 (作者自製)

(3) 如圖 24, 當旁高垂線與內切圓 I 相切時 ($\angle C_4 I N_{4(2,3)} = 90^\circ$),

$\because I N_{4(2,3)} H_4 C_4$ 為矩形, H_4 和 $Q_{4(2,3)}$ 重合, 點 $S_{4(2,3)}$ 不存在,

則 $\overline{I Q_{4(2,3)}}$ 為其對角線 $\Rightarrow \angle I Q_{4(2,3)} N_{4(2,3)} = \angle C_4 I Q_{4(2,3)}^\circ$

(4) 當 C_t 和 I 不同側時, 如圖 25, 在 $\Delta I S_{l(5,6)} Q_{l(5,6)}$ 中,

$$\angle C_1 I Q_{l(5,6)} + \angle I Q_{l(5,6)} N_{l(5,6)} = \angle I S_{l(5,6)} N_{l(5,6)} = \angle C_1 S_{l(5,6)} Q_{l(5,6)}$$

又 $\Delta S_{l(5,6)} C_1 Q_{l(5,6)} \sim \Delta I_1 H_1 Q_{l(5,6)}$, 故 $\angle H_1 I_1 Q_{l(5,6)} = \angle C_1 S_{l(5,6)} Q_{l(5,6)} = \angle C_1 I Q_{l(5,6)} + \angle I Q_{l(5,6)} N_{l(5,6)}$ 。

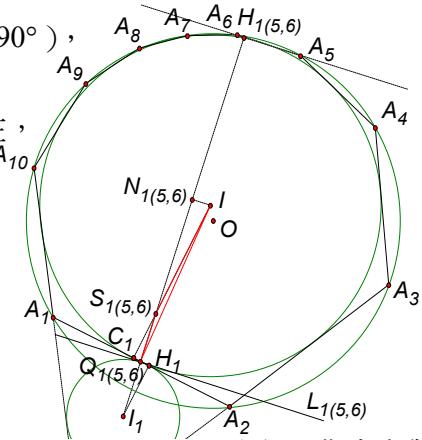


圖 25(作者自製)

推論 2 : (1) 在雙心 n 邊形中 ($n \geq 5$), 過相鄰旁心 I_t 和 I_{t+1} ($t = 1, 2, \dots, n$) 作同一邊 $\overrightarrow{A_{t+m} A_{t+m+1}}$

($m = 0, 1, \dots, n-1$) 的旁心高, 再過 I 作旁心高的垂直線得到 $N_{t(t+m, t+m+1)}$ 與 $N_{t+1(t+m, t+m+1)}$, 則

$$\Delta N_{t(t+m, t+m+1)} A_{t+1} N_{t+1(t+m, t+m+1)} \sim \Delta I_t H_{t+1} \text{ 且 } \frac{N_{t(t+m, t+m+1)} N_{t+1(t+m, t+m+1)}}{I_t I_{t+1}} = \sin \angle I_t I_{t+1} N_{t+1(t+m, t+m+1)}^\circ$$

(2) 設旁心高 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ ($t = 1, 2, \dots, n$; $i = t+2, \dots, t+n-2$) 與 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 相交於點 $Q_{t(i,i+1)}$, 旁切圓與邊的切點為 H_t 。則在第一種判別角 (當下標值 $>n$ 時, 取下標值 $\bmod n$ 為新下標值)

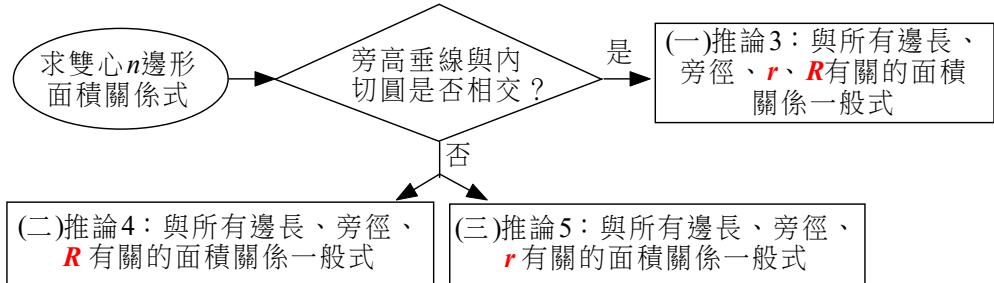
$$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ \Rightarrow Q_{t(i,i+1)} \text{ 在外接圓內} \Rightarrow \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}^\circ; \\ Q_{t(i,i+1)} \text{ 在外接圓外} \Rightarrow \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} + \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = 180^\circ$$

$$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ \Rightarrow \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = \angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}^\circ;$$

$$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ \Rightarrow \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}^\circ$$

(3) 當 C_t 和 I 不同側時, $\angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}$

有了推論 1 的結果，雙心 n 邊形 ($n \geq 4$) 的面積與所有旁徑、邊長，甚至與內切圓、外接圓半徑的關係就能進一步探討。由於旁高垂線與雙心 n 邊形的內切圓可能不相交，於是依照下列分析架構流程圖來探討不同條件下的雙心 n 邊形面積關係一般式：



四、探討雙心 n 邊形面積與其邊長、內切圓、外接圓半徑及所有旁徑的關係

(一)含旁徑、內切圓與外接圓半徑，以雙心四、五邊形為例來說明

1. 雙心四邊形 (特殊情況): 如圖 26, 雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 分別連接旁心 I_1 和 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 的線段, 並過 I_1 作

$$\begin{aligned}
 & \text{的垂直線並交於 } H_{l(3,4)}, \text{ 得四邊形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積} \\
 & = \Delta I_1A_2A_3 + \Delta I_1A_3A_4 + \Delta I_1A_4A_1 - \Delta I_1A_1A_2 \\
 & = \frac{\overline{A_2A_3} \times r_1}{2} + \frac{\overline{A_3A_4} \times \overline{I_1H_{l(3,4)}}}{2} + \frac{\overline{A_4A_1} \times r_1}{2} - \frac{\overline{A_1A_2} \times r_1}{2} \dots \dots (5)
 \end{aligned}$$

⑤式中旁心高 $I_1H_{1(3,4)}$ 未知。於是進一步找 $I_1H_{1(3,4)}$ 的旁高垂線 $L_{1(3,4)}$ ，如圖 27，恰好跟圓 I 交（切）於一點，

稱為 C'_1 。故 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}} = \overline{I_1 H'_{1(3,4)}} + \overline{H'_{1(3,4)} H_{1(3,4)}} = r_1 + 2r$ 。

證明：(1) 如圖 28，基於圓 I 和圓 I_1 是外離的關係，兩圓間

必有兩條內公切線，其中一條就是 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ ，交兩圓於

作另一條內公切線 $L_{1(3,4)}$ ，交兩圓於 C'_1 和 $H'_{1(3,4)}$ 且

和 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 交於 $G_{l(3,4)}$ ， $G_{l(3,4)}$ 必在 $\overline{I_1I}$ 上。

$$\text{又 } \angle A_2 A_1 I \stackrel{\text{令}}{=} \angle A_4 A_1 I = \angle 1, \quad \angle A_1 A_4 I \stackrel{\text{令}}{=} \angle A_3 A_4 I = \angle 2,$$

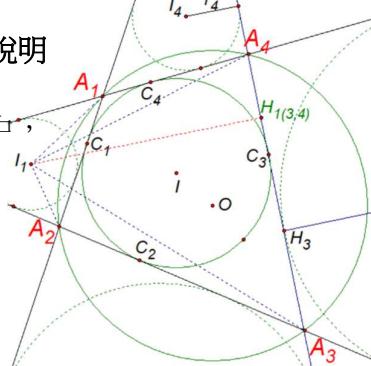


圖 26(作者自製)

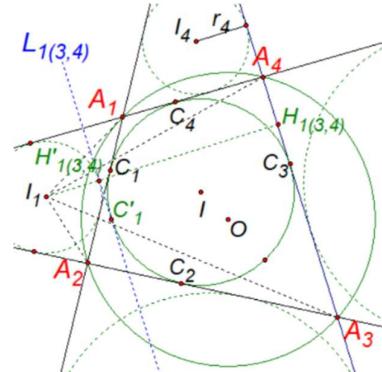


圖 27(作者自製)

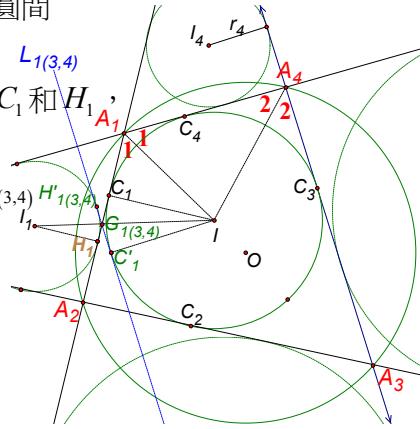


圖 28(作者自製)

$$\therefore \angle C_1 I C_4 = 180^\circ - 2\angle 1, \angle C_4 I C_3 = 180^\circ - 2\angle 2$$

∴ 四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 有外接圓, ∴ $\angle A_1 A_2 A_3 = 180^\circ - 2\angle 2$ 且 $\angle A_2 A_3 A_4 = 180^\circ - 2\angle 1$ 。

(2) 延長 $\overline{I_1 H'_{1(3,4)}}$ 至 $\overline{A_3 A_4}$ 並交於 $H_{1(3,4)}$, 如圖 29, 欲證: $\angle I_1 H_{1(3,4)} C_3 = 90^\circ$ 。

在 $\Delta C_1 I G_{1(3,4)}$ 和 $\Delta C'_1 I G_{1(3,4)}$ 中, 因為 C_1 與 C'_1 為內切圓 I 的切點

$$\therefore \Delta C_1 I G_{1(3,4)} \cong \Delta C'_1 I G_{1(3,4)} (RHS) \Rightarrow \angle C_1 I G_{1(3,4)} = \angle G_{1(3,4)} I C'_1 = \angle 3$$

$$\text{同理 } \Delta H'_{1(3,4)} I_1 G_{1(3,4)} \cong \Delta H_1 I_1 G_{1(3,4)} (RHS)$$

$$\Rightarrow \angle H'_{1(3,4)} I_1 G_{1(3,4)} = \angle H_1 I_1 G_{1(3,4)} = \angle 3$$

在四邊形 $I_1 I C_3 H_{1(3,4)}$ 中,

$$\angle I_1 H_{1(3,4)} C_3 = 360^\circ - \angle H_{1(3,4)} I_1 I - \angle I_1 I C_3 - \angle I C_3 H_{1(3,4)}$$

$$= 2\angle 1 + 2\angle 2 - 2\angle 3 - 90^\circ = 2(\angle 1 + \angle 2 - \angle 3) - 90^\circ \cdots ⑥$$

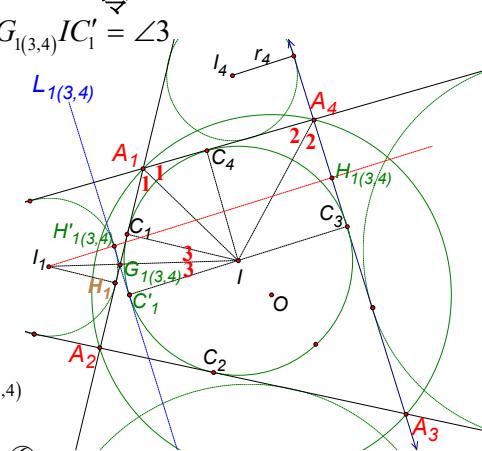


圖 29(作者自製)

(3) 延長 $\overline{A_1 A_4}$ 和 $\overline{A_2 A_3}$ 並交於 Z , 連接 $\overline{A_1 I_1}$,

如圖 30, 則圓 I 亦是 $\Delta A_4 Z A_3$ 的內切圓,

且 Z, I, I_1 三點共線。由性質 1[2] 可知,

$$\angle A_1 I_1 I = \frac{1}{2} \angle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle 2),$$

$$\text{又 } \angle A_1 I_1 I = \angle A_1 I_1 H_1 - \angle H_1 I_1 G_{1(3,4)} = \angle 1 - \angle 3,$$

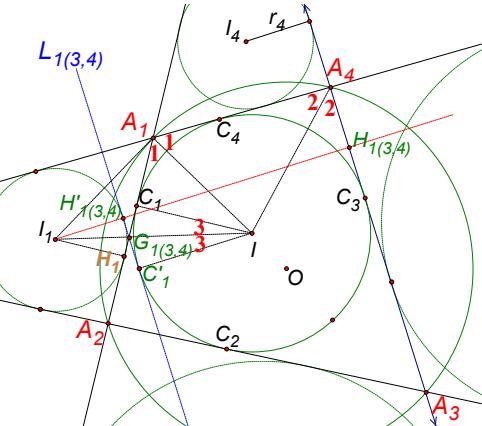


圖 30(作者自製)

$$\Rightarrow \angle 1 - \angle 3 = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle 2) \Rightarrow \angle 1 - \angle 3 = 90^\circ - \angle 2$$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = 90^\circ$ 代入 ⑥ 式 可得

$$\angle I_1 H_{1(3,4)} C_3 = 90^\circ, \text{ 所以 } \overline{I_1 H_{1(3,4)}} = r_1 + 2r$$

再回到雙心四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 面積的 ⑤ 式,

參考圖 31, 以 I_1 為例, 過 I 作 $L_{1(3,4)}$

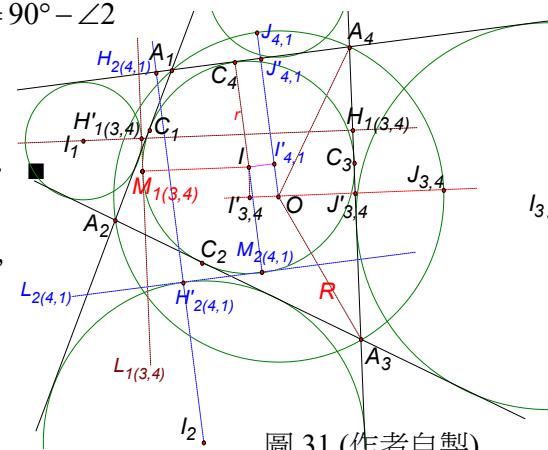


圖 31(作者自製)

垂直線交於 $M_{l(3,4)}$ ，再過外心 O 作 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 的垂直線，分別交 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 和外接圓 O 於點 $J'_{3,4}$

與 $J_{3,4}$ ，過內心 I 作 $\overrightarrow{OJ_{3,4}}$ 的垂直線，垂足為 $I'_{3,4}$ 。則 $\overline{J_{3,4}J'_{3,4}} = R - \overline{OJ'_{3,4}}$

$$= R - R \cdot \cos\left(\frac{\angle A_3 O A_4}{2}\right) = R(1 - \cos \angle J_{3,4} O A_4) \text{。所以}$$

$$\overline{H'_{1(3,4)}H_{1(3,4)}} = \overline{IM_{1(3,4)}} + \overline{I'_{3,4}O} + \overline{OJ_{3,4}} - \overline{J_{3,4}J'_{3,4}} = r + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4} O A_4$$

$$\Rightarrow \overline{I_1H_{1(3,4)}} = r_1 + r + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4} O A_4 \text{。故⑤式可寫成}$$

$$r_1(p - \overline{A_1A_2}) + \frac{1}{2} \left[\overline{A_3A_4} (r + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4} O A_4) \right] \dots \dots \text{⑦} ; \text{同理，由旁心 } I_2 \text{ 得到的面}$$

$$\text{積關係式} : r_2(p - \overline{A_2A_3}) + \frac{1}{2} \left[\overline{A_4A_1} (r - \overline{I'_{4,1}O} + R \cdot \cos \angle J_{4,1} O A_1) \right] \dots \dots \text{⑧} , \text{因為圖 30 中}$$

$$\overline{OJ'_{3,4}} < r \text{，⑦式中 } \overline{I'_{3,4}O} \text{ 前的運算符號為 } + \text{；} \overline{OJ'_{4,1}} > r \text{，} \overline{I'_{4,1}O} \text{ 前的運算符號為 } - \text{。}$$

其他旁心得到的面積關係式也以此類推，故雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面積一般式為

$$= r_t(p - \overline{A_tA_{t+1}}) + \frac{1}{2} \left[\overline{A_{t+2}A_{t+3}} (r \pm \overline{I'_{t+2,t+3}O} + R \cdot \cos \angle J_{t+2,t+3} O A_{t+3}) \right] \dots \dots \text{⑨} , t = 1, 2, 3, 4 \text{。}$$

其中當 $\overline{OJ'_{t+2,t+3}} < r$ 時，⑨式中 $\overline{I'_{t+2,t+3}O}$ 前的運算符號為 $+$ ；反之，則⑨式中 $\overline{I'_{t+2,t+3}O}$

前的運算符號為 $-$ 。

2. 雙心五邊形：如圖 32，在雙心五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，以 I_1 為例，作出旁高垂線

$L_{l(3,4)}$ 、 $L_{l(4,5)}$ ，此時兩條旁高垂線不會與圓 I 相切，

而是分別與圓 I 交於 $P_{l(3,4)}$ 、 $P'_{l(3,4)}$ 和 $P_{l(4,5)}$ 、 $P'_{l(4,5)}$ ，

又過 I 作 $L_{l(3,4)}$ 和 $L_{l(4,5)}$ 的垂直線分別交於 $M_{l(3,4)}$

和 $M_{l(4,5)}$ ；過外心 O 作 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 和 $\overrightarrow{A_4A_5}$ 的垂直線，

分別交 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overrightarrow{A_4A_5}$ 和外接圓 O 於點 $J'_{3,4}$ 與 $J_{3,4}$ 、

$J'_{4,5}$ 與 $J_{4,5}$ ；過內心 I 分別作 $\overrightarrow{OJ_{3,4}}$ 、 $\overrightarrow{OJ_{4,5}}$ 的垂直線，垂足分別為 $I'_{3,4}$ 和 $I'_{4,5}$ 。

則因為 $\overline{IM_{l(3,4)}} = r \cdot \cos \angle P_{l(3,4)} C_3 P'_{l(3,4)}$ ， $\overline{J_{3,4}J'_{3,4}} = R - R \cdot \cos\left(\frac{\angle A_3 O A_4}{2}\right) = R(1 - \cos \angle J_{3,4} O A_4) \text{。}$

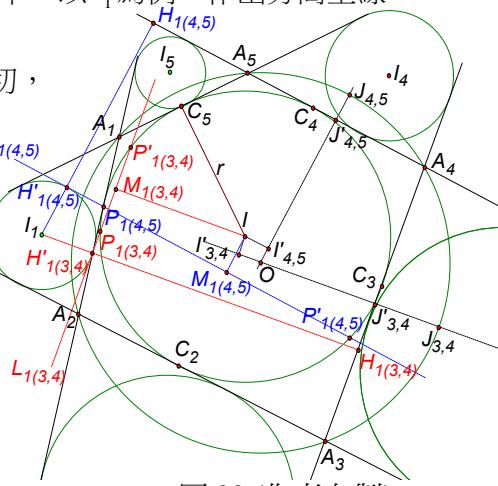


圖 32 (作者自製)

$$\therefore \overline{H'_{1(3,4)}H_{1(3,4)}} = \overline{IM_{1(3,4)}} + \overline{I'_{3,4}O} + \overline{OJ_{3,4}} - \overline{J_{3,4}J'_{3,4}} = r \cdot \cos \angle P_{1(3,4)}C_3P'_{1(3,4)} + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4}OA_4$$

$$\Rightarrow \overline{I_1H_{1(3,4)}} = r_1 + r \cdot \cos \angle P_{1(3,4)}C_3P'_{1(3,4)} + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4}OA_4 \text{。又因為 } \overline{OJ'_{4,5}} > r \text{， } \overline{I'_{4,5}O} \text{ 前}$$

$$\text{的運算符號為 } - \text{，則 } \overline{I_1H_{1(4,5)}} = r_1 + r \cdot \cos \angle P_{1(4,5)}C_4P'_{1(4,5)} - \overline{I'_{4,5}O} + R \cdot \cos \angle J_{4,5}OA_5 \text{。}$$

於是雙心五邊形同時與旁徑 r_1 、內切圓、外接圓半徑有關的面積關係一般式為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\overline{A_3A_4} \cdot (r \cdot \cos \angle P_{1(3,4)}C_3P'_{1(3,4)} + \overline{I'_{3,4}O} + R \cdot \cos \angle J_{3,4}OA_4 + r_1) \right. \\ & \left. + \overline{A_4A_5} \cdot (r \cdot \cos \angle P_{1(4,5)}C_4P'_{1(4,5)} - \overline{I'_{4,5}O} + R \cdot \cos \angle J_{4,5}OA_5 + r_1) + r_1 (\overline{A_5A_1} + \overline{A_2A_3} - \overline{A_1A_2}) \right] \\ & = r_1 (p - \overline{A_1A_2}) + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^4 \overline{A_iA_{i+1}} (r \cdot \cos \angle P_{1(i,i+1)}C_iP'_{1(i,i+1)} \pm \overline{I'_{i,i+1}O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1}) \dots \dots \text{⑩} \end{aligned}$$

其中 $\overline{OJ'_{3,4}} < r$ ，⑩式中 $\overline{I'_{3,4}O}$ 前的運算符號為 $+$ ； $\overline{OJ'_{4,5}} > r$ ， $\overline{I'_{4,5}O}$ 前的運算符號為 $-$ 。

同理可得由其它旁心所得的面積關係式。統整以上雙心四、五邊形的關係式，得雙心 n 邊形的面積與所有邊長、任一旁徑及內切圓、外接圓半徑的關係一般式如推論 3 所示。

推論 3：在雙心 n 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 中 ($n \geq 4$)，分別過 n 個旁心 I_t ($t=1,2,3,\dots,n$) 作 $n-3$

個不相切邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ ($i=t+2,\dots,t+n-2$ ，且當下標值 $> n$ 時，取下標值 $\text{mod } n$ 為新下標

值) 的旁心高以及其旁高垂線，再過外心 O 作各邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的垂直線，分別交 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 和圓 O

於點 $J'_{t,t+1}$ 、 $J_{t,t+1}$ ，過 I 作 $\overline{OJ_{t,t+1}}$ 的垂直線交 $\overline{OJ'_{t,t+1}}$ 於 $I'_{t,t+1}$ 。**在旁高垂線與圓 I 有交點時**，第

二旁高角 $\angle P_{t(i,i+1)}C_iP'_{t(i,i+1)}$ 與旁心高、 R 、 r 、 r_t 的關係式為

$$\overline{I_tH_{t(i,i+1)}} = r_t + r \cdot \cos \angle P_{t(i,i+1)}C_iP'_{t(i,i+1)} \pm \overline{I'_{i,i+1}O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1} \text{，則雙心 } n \text{ 邊形面積為}$$

$$r_t (p - \overline{A_tA_{t+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_iA_{i+1}} (r \cdot \cos \angle P_{t(i,i+1)}C_iP'_{t(i,i+1)} \pm \overline{I'_{i,i+1}O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1}) \text{，其中在 } n=4$$

時，旁高垂線皆與內切圓相切， $\angle P_{t(i,i+1)}C_iP'_{t(i,i+1)} = 0^\circ$ ，故

$$\overline{I_tH_{t(i,i+1)}} = r_t + r \pm \overline{I'_{i,i+1}O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1} \text{，} t=1,2,3,4 \text{，} i=t+2 \text{，} p \text{ 為半周長。}$$

且若 $\overline{OJ'_{i,i+1}} < r$ ，面積關係式中 $\overline{I'_{i,i+1}O}$ 前的運算符號為 $+$ ，反之， $\overline{I'_{i,i+1}O}$ 的運算符號為 $-$ 。

(二)含旁徑與外接圓半徑

如圖 33，在雙心五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中以 I_4 為例，

作出旁高垂線 $L_{4(2,3)}$ 並取其與外接圓的交點為

$K_{4(2,3)}$ 、 $K'_{4(2,3)}$ 。過外心 O 作 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 之垂直線並

分別交外接圓 O 、 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 和 $L_{4(2,3)}$ 於 $J_{2,3}$ 、 $J'_{2,3}$ 和

$M'_{4(2,3)}$ ，則 $\overline{I_4H_{4(2,3)}} = r_4 + \overline{H'_{4(2,3)}H_{4(2,3)}}$ ，其中

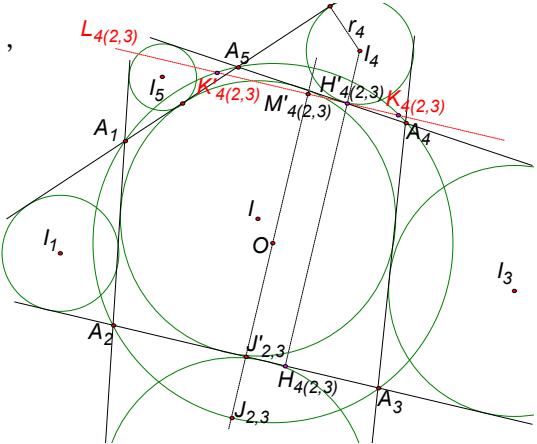


圖 33 (作者自製)

$$\overline{H'_{4(2,3)}H_{4(2,3)}} = \overline{M'_{4(2,3)}J'_{2,3}} = \overline{M'_{4(2,3)}J_{2,3}} - \overline{J_{2,3}J'_{2,3}}$$

$$= R \cdot \cos \left(\frac{\angle K_{4(2,3)}OK'_{4(2,3)}}{2} \right) + R - R(1 - \cos \angle J_{2,3}OA_3) = R(\cos \angle K_{4(2,3)}J_{2,3}K'_{4(2,3)} + \cos \angle J_{2,3}OA_3)$$

$$\Rightarrow \overline{I_4H_{4(2,3)}} = r_4 + R(\cos \angle K_{4(2,3)}J_{2,3}K'_{4(2,3)} + \cos \angle J_{2,3}OA_3),$$

$$\text{同理 } \overline{I_4H_{4(1,2)}} = r_4 + R(\cos \angle K_{4(1,2)}J_{1,2}K'_{4(1,2)} + \cos \angle J_{1,2}OA_2)$$

於是雙心五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 面積與所有邊長、旁徑 I_4 和外接圓半徑關係式為：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \overline{A_1A_2} \left[R \cdot (\cos \angle K_{4(1,2)}J_{1,2}K'_{4(1,2)} + \cos \angle J_{1,2}OA_2) + r_4 \right] \right. \\ & \left. + \overline{A_2A_3} \left[R \cdot (\cos \angle K_{4(2,3)}J_{2,3}K'_{4(2,3)} + \cos \angle J_{2,3}OA_3) + r_4 \right] + r_4 (\overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_1} - \overline{A_4A_5}) \right\} \\ & = r_4 \left(p - \overline{A_4A_5} \right) + \frac{1}{2} \left[\overline{A_1A_2} \cdot R(\cos \angle K_{4(1,2)}J_{1,2}K'_{4(1,2)} + \cos \angle J_{1,2}OA_2) \right. \\ & \left. + \overline{A_2A_3} \cdot R(\cos \angle K_{4(2,3)}J_{2,3}K'_{4(2,3)} + \cos \angle J_{2,3}OA_3) \right] \end{aligned}$$

同理可得由其它旁徑得到的面積關係式如下所示：

$$\text{由 } I_t := r_t \left(p - \overline{A_tA_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+3} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot R(\cos \angle K_{t(i,i+1)}J_{i,i+1}K'_{t(i,i+1)} + \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1}) \text{，其中}$$

$t = 1, 2, 3, 5$ 。當下標值 > 5 時，則取下標值 $\bmod 5$ 為新下標值。

同樣的推導原理，也可使其他邊數的雙心 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$ 得到相同形式的面積式，在列出其一般式後，用作出的所有雙心 n 邊形的所有旁心去重新驗證，一般式皆成立，且在任意圓內接 n 邊形中該關係一般式經驗證也成立。將上述結果統整在推論 4 中。前面的推論 3 以及後面有關雙心 n 邊形的研究結果皆由相同驗證方式而得到其一般式成立。

推論 4：在雙心（圓內接） n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$ 中，過 I_t ($t=1,2,3,\cdots,n$) 作不相切邊的

旁心高 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 及其旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ ($i=t+2,\cdots,t+n-2$)， $L_{t(i,i+1)}$ 交外接圓 O 於點 $K_{t(i,i+1)}$

和 $K'_{t(i,i+1)}$ ，過 O 作各邊 $\overline{A_t A_{t+1}}$ 的垂直線交圓 O 於點 $J_{t,t+1}$ 。則旁心高與 $\angle K_{t(i,i+1)}J_{i,i+1}K'_{t(i,i+1)}$ 、

R 、 r_t 的關係式為 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}} = R(\cos \angle K_{t(i,i+1)}J_{i,i+1}K'_{t(i,i+1)} + \cos \angle J_{i,i+1}OA_{t+1}) + r_t$ ，且該

雙心 n 邊形的面積

$$= r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \cdot R(\cos \angle K_{t(i,i+1)}J_{i,i+1}K'_{t(i,i+1)} + \cos \angle J_{i,i+1}OA_{i+1}) ,$$

其中， p 為半周長， $t=1,2,3,\cdots,n$ ，當下標值 $>n$ 時，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。

(三) 含旁徑與內切圓半徑

接下來探討只需內切圓半徑搭配所有旁徑的雙心 n 邊形面積關係式，當然在圓外切 n 邊形中該關係式皆成立。

1. 如圖 34，在雙心五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，以旁徑 I_1 為例，過 I 作旁心高 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}}$ 和 $\overline{I_1 H_{1(4,5)}}$ 的垂直線，並分別取垂足為 $N_{1(3,4)}$ 和 $N_{1(4,5)}$ 。則

$$\overline{I_1 H_{1(3,4)}} = \overline{I_1 N_{1(3,4)}} + \overline{N_{1(3,4)} H_{1(3,4)}} \quad \text{且} \quad \overline{N_{1(3,4)} H_{1(3,4)}} = \overline{I C_3} = r .$$

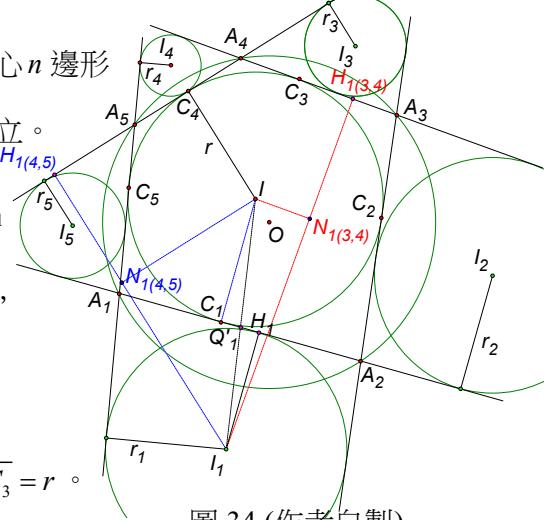


圖 34 (作者自製)

2. 令 $\overline{H_1}$ 與 $\overline{A_1 A_2}$ 的交點為 Q'_1 ，點 C_1 與 H_1 分別是 $\overline{A_1 A_2}$ 與內切圓 I 和旁切圓 I_1 的切點，則

$$\overline{H_1} = \overline{I_1 Q'_1} + \overline{Q'_1 I} = \frac{r_1}{\cos \angle H_1 I_1 Q'_1} + \frac{r}{\cos \angle C_1 I Q'_1} , \quad \text{又} \quad \Delta C_1 I Q'_1 \sim \Delta H_1 I_1 Q'_1 \Rightarrow \angle C_1 I Q'_1 = \angle H_1 I_1 Q'_1$$

$$\Rightarrow \overline{H_1} = \frac{(r+r_1)}{\cos \angle C_1 I Q'_1} \quad \therefore \overline{I_1 N_{1(3,4)}} = \overline{H_1} \cdot \cos \angle N_{1(3,4)} I_1 I = (r+r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(3,4)} I_1 I}{\cos \angle C_1 I Q'_1} \right) ,$$

$$\Rightarrow \overline{I_1 H_{1(3,4)}} = (r+r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(3,4)} I_1 I}{\cos \angle C_1 I H_1} \right) + r , \quad \text{同理可得} \quad \overline{I_1 H_{1(4,5)}} = (r+r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(4,5)} I_1 I}{\cos \angle C_1 I H_1} \right) + r$$

故由 I_1 所作雙心五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的面積關係式為

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \overline{A_3 A_4} \left[(r + r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(3,4)} I_1 I}{\cos \angle C_1 II_1} \right) + r \right] + \overline{A_4 A_5} \left[(r + r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(4,5)} I_1 I}{\cos \angle C_1 II_1} \right) + r \right] + r_1 \left(\overline{A_5 A_1} + \overline{A_2 A_3} - \overline{A_1 A_2} \right) \right\} \\
& = r_1 \left(p - \overline{A_1 A_2} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \overline{A_3 A_4} \left[(r + r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(3,4)} I_1 I}{\cos \angle C_1 II_1} - 1 \right) + 2r \right] + \overline{A_4 A_5} \left[(r + r_1) \left(\frac{\cos \angle N_{1(4,5)} I_1 I}{\cos \angle C_1 II_1} - 1 \right) + 2r \right] \right\}
\end{aligned}$$

由其它旁徑同理可得面積關係式：

$$\text{由 } I_t : r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+3} \overline{A_i A_{i+1}} \left[(r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t II_t} - 1 \right) + 2r \right], \text{ 其中, } p \text{ 為半周長,}$$

$t = 2, 3, 4, 5$ ，且當下標值 > 5 時，取下標值 $\bmod 5$ 為新下標值。

如圖 35，同理可得雙心六邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ 面積與所有邊長、旁徑及內切圓半徑的關係式為

$$\text{由 } I_t : r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+4} \overline{A_i A_{i+1}} \left[(r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t II_t} - 1 \right) + 2r \right], \quad H_{5(2,3)}, H_{5(3,4)}$$

$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，且當下標值 > 6 時，取下標值 $\bmod 6$ 為

新下標值。統整上述雙心五、六邊形的面積關係式，

得到雙心（或圓外切） n 邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_n$ 面積與

所有邊長、任一旁徑和內切圓半徑的關係一般式如推論 5 所示。

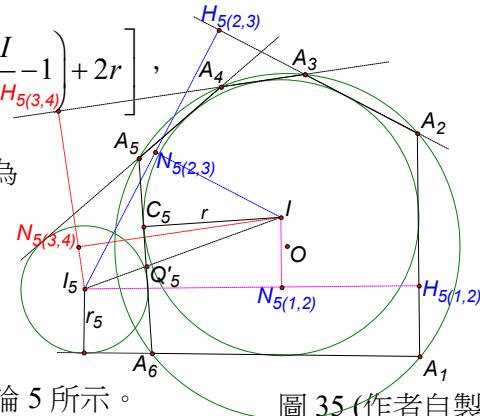


圖 35 (作者自製)

推論 5：在雙心（或圓外切） n 邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_n$ 中，過 I_t ($t = 1, 2, \dots, n$) 作不相切邊的

旁心高 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ ($i = t+2, \dots, t+n-2$)，過 I 作 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 的垂直線交 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 於 $N_{t(i,i+1)}$ ，則

旁心高與 r 、 r_t 的關係式為 $\overline{I_t H_{t(i,i+1)}} = (r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t II_t} \right) + r$ ，且該雙心 n 邊形面積為

$$r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \left[(r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t II_t} - 1 \right) + 2r \right], \text{ 其中 } p \text{ 為半周長,}$$

$t = 1, 2, 3, \dots, n$ ，且當下標值 $> n$ 時，取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。

五、雙心 n 邊形之頂點高關係式

(一) 1. 先從特殊的雙心四邊形開始探討，如圖 36，在名詞定義頂點高時，雙心四邊形

$A_1 A_2 A_3 A_4$ 中，四個頂點分別對應到 2 個不相切邊，共可作出 8 個頂點高，分別簡記為

$h_{l(2,3)}$ 和 $h_{l(3,4)}$ 、 $h_{2(3,4)}$ 和 $h_{2(4,1)}$ 、 $h_{3(4,1)}$ 和 $h_{3(1,2)}$ 、 $h_{4(1,2)}$ 和 $h_{4(2,3)}$ 。後面也如此統一簡稱頂點高。

則 $\Delta A_1 A_4 D_{4(1,2)} \sim \Delta A_1 A_2 D_{2(4,1)} \sim \Delta A_3 A_2 D_{2(3,4)} \sim \Delta A_3 A_4 D_{4(2,3)}$

$$\Rightarrow \overline{A_4 D_{4(1,2)}} : \overline{A_2 D_{2(4,1)}} : \overline{A_2 D_{2(3,4)}} : \overline{A_4 D_{4(2,3)}}$$

$$= h_{4(1,2)} : h_{2(4,1)} : h_{2(3,4)} = \overline{A_4 A_1} : \overline{A_1 A_2} : \overline{A_2 A_3} : \overline{A_3 A_4}$$

$= a_4 : a_1 : a_2 : a_3$ (設比值為 t_1)，同理可得

$\Delta A_1 A_2 D_{1(2,3)} \sim \Delta A_3 A_2 D_{3(1,2)} \sim \Delta A_3 A_4 D_{3(4,1)} \sim \Delta A_1 A_4 D_{1(3,4)}$

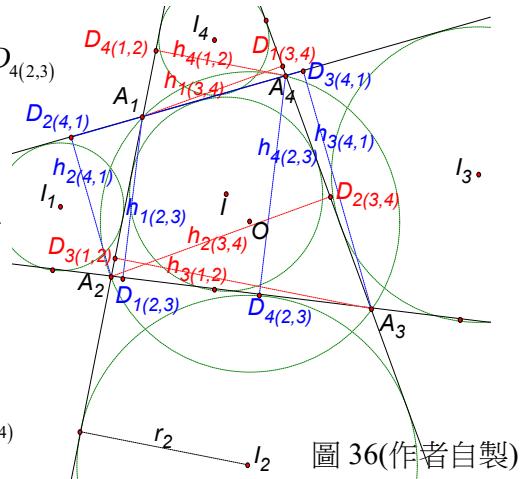


圖 36(作者自製)

$$\Rightarrow h_{l(2,3)} : h_{3(1,2)} : h_{3(4,1)} : h_{l(3,4)} = \overline{A_1 A_2} : \overline{A_2 A_3} : \overline{A_3 A_4} : \overline{A_4 A_1} = a_1 : a_2 : a_3 : a_4 \quad (\text{設比值為 } t_2)$$

$$\therefore h_{l(2,3)} + h_{3(4,1)} + h_{2(4,1)} + h_{4(2,3)} = (a_1 + a_3)(t_1 + t_2) \quad , \quad h_{2(3,4)} + h_{4(1,2)} + h_{3(1,2)} + h_{l(3,4)} = (a_2 + a_4)(t_1 + t_2)$$

$$\text{又 } a_1 + a_3 = a_2 + a_4 \Rightarrow h_{l(2,3)} + h_{3(4,1)} + h_{2(4,1)} + h_{4(2,3)} = h_{2(3,4)} + h_{4(1,2)} + h_{3(1,2)} + h_{l(3,4)} \quad \circ$$

這是雙心四邊形獨有的頂點高關係式。

2.由頂點高圍成的頂點高四邊形

由 8 個頂點高採四四分成兩組，可以得到 2 個頂點高四邊形 $D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ 和

$D_{1(2,3)}D_{4(2,3)}D_{3(4,1)}D_{2(4,1)}$ ，如圖 37 和 38。這兩個頂點高四邊形與原雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 皆

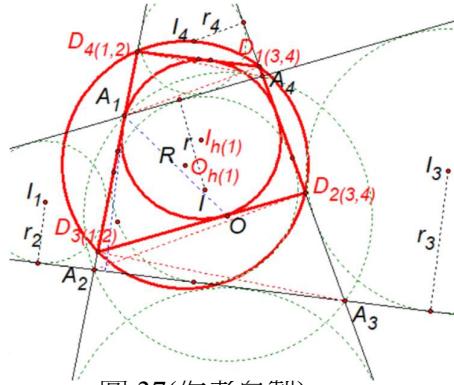


圖 37(作者自製)

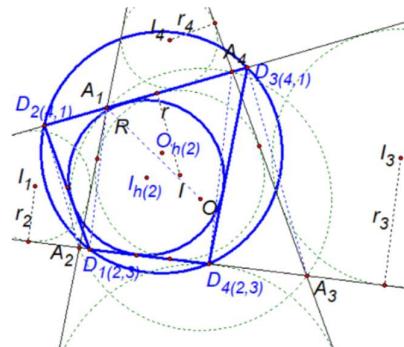


圖 38(作者自製)

是相似的雙心四邊形。說明如下：

(1)以圖 37 為例，四邊形 $D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ 的四個頂點暫用 D_1 、 D_2 、 D_3 和 D_4 簡稱之

如圖 39。 $\because A_1$ 、 A_4 、 D_1 、 D_4 四點共圓，故 $\angle D_4 D_1 A_4 = \angle A_4 A_1 A_2$ ， $\angle D_1 D_4 A_1 = \angle A_1 A_4 A_3$

同理， A_2 、 A_3 、 D_2 、 D_3 四點也共圓 $\Rightarrow \angle D_1D_2D_3 = \angle A_1A_2A_3$ ， $\angle D_2D_3D_4 = \angle A_2A_3A_4$

(2) (a) 如圖 39，在 $\Delta A_2 A_3 D_3$ 中， $\frac{\overline{A_2 A_3}}{\sin \angle A_1 A_2 A_3} = \frac{\overline{A_3 D_3}}{\dots} \dots \text{①}$ ，

在 $\Delta A_3D_3D_2$ 中, 由正弦定理得 $\frac{A_3D_3}{\sin \angle D_3D_2A_3} = \frac{\sin \angle D_3A_3D_2}{\sin \angle D_3D_2A_3} \times \frac{D_2D_3}{A_3D_3}$

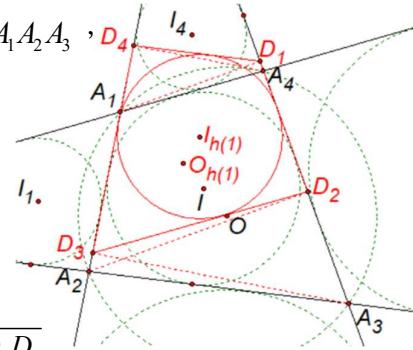


圖 39(作者自製)

代入①式搭配正弦函數補角公式可化簡成 $\Rightarrow \overline{A_2A_3} = \frac{\overline{D_2D_3}}{\sin \angle D_3A_3D_2}$ ② 同理可得

$$\overline{A_1 A_4} = \frac{\overline{D_1 D_4}}{\sin \angle D_4 A_4 D_1} \dots \dots \quad (3)$$

(b) 在圓內接四邊形 $D_4A_4D_2A_2$ 中，

$$\therefore \angle D_4 A_2 D_2 = \angle D_4 A_4 D_1 \text{ 且 } \angle D_3 A_2 D_2 = \angle D_3 A_3 D_1$$

$\therefore \angle D_4A_4D_1 = \angle D_4A_2D_2 = \angle D_3A_3D_2$ ，故前面的②式和③式可變用

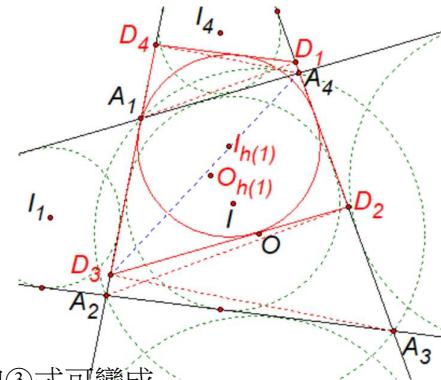


圖 40(作者自製)

$$\frac{\overline{D_2D_3}}{\overline{A_2A_3}} = \sin \angle D_3A_3D_2 \quad , \quad \frac{\overline{D_1D_4}}{\overline{A_1A_4}} = \sin \angle D_3A_3D_2$$

(c)如圖 40，作 $\overline{A_4D_3}$ ，在 $\triangle D_4D_3A_4$ 中， $\overline{D_3D_4} = \overline{D_3A_4} \times \cos \angle D_4D_3A_4 \cdots ④$ ，在 $\triangle D_3A_4A_3$

$$\text{中, } \frac{\overline{D_3A_4}}{\sin \angle D_3A_3A_4} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\sin \angle A_4D_3A_3} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\sin(90^\circ - \angle D_4D_3A_4)} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\cos \angle D_4D_3A_4}$$

$$\Rightarrow \overline{D_3A_4} = \frac{\sin \angle D_3A_3A_4}{\cos \angle D_4D_3A_4} \times \overline{A_3A_4} \dots ⑤, \text{ 將 } ⑤ \text{ 式代入 } ④ \text{ 式可得} \Rightarrow \frac{\overline{D_3D_4}}{\overline{A_3A_4}} = \sin \angle D_3A_3A_4$$

(d)如圖 41，作 $\overline{A_1D_2}$ ，也同理可得

$$\overline{D_1 D_2} = \overline{A_1 A_2} \times \sin \angle D_3 A_3 D_2 \Rightarrow \frac{\overline{D_1 D_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \sin \angle D_3 A_3 D_2$$

$$\text{故 } \frac{\overline{D_1D_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{D_2D_3}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{D_3D_4}}{\overline{A_3A_4}} = \frac{\overline{D_4D_1}}{\overline{A_4A_1}} = \sin \angle D_3A_3D_2$$

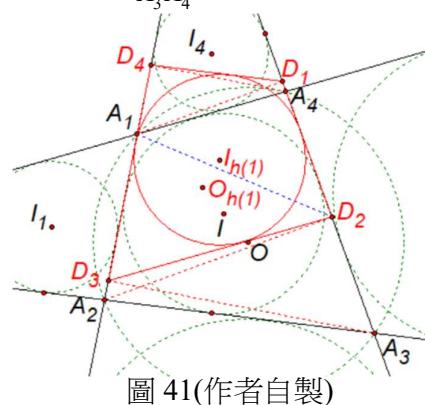


圖 41(作者自製)

所以四邊形 $D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ ~ 四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，也是一個雙心四邊形，其外接圓圓心為 $O_{h(1)}$ 。由另外 4 個頂點高形成的四邊形 $D_{1(2,3)}D_{4(2,3)}D_{3(4,1)}D_{2(4,1)}$ ，如圖 38，也同理可證為一個和原四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 相似的雙心四邊形。

推論 6-1：在雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，過 4 個頂點作不相鄰兩邊的垂直線（稱作頂點高），共有 8 個頂點高，分別為 $h_{1(2,3)}$ 和 $h_{1(3,4)}$ 、 $h_{2(3,4)}$ 和 $h_{2(4,1)}$ 、 $h_{3(4,1)}$ 和 $h_{3(1,2)}$ 、 $h_{4(1,2)}$ 和 $h_{4(2,3)}$ ，如圖 36，則

$$(1) \ h_{1(2,3)} + h_{3(4,1)} + h_{2(4,1)} + h_{4(2,3)} = h_{2(3,4)} + h_{4(1,2)} + h_{3(1,2)} + h_{1(3,4)} ;$$

(2) 若將 8 個頂點高的垂足四四分組成 2 組，分別連線作成 2 個頂點高四邊形

$D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ 和 $D_{1(2,3)}D_{4(2,3)}D_{3(4,1)}D_{2(4,1)}$ ，如圖 37 和 38，則

四邊形 $D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ ~ 四邊形 $D_{1(2,3)}D_{4(2,3)}D_{3(4,1)}D_{2(4,1)}$ ~ 四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。

(二) 接著探討其他邊數的雙心多邊形，如圖 42，在雙心六邊形中，過各頂點作不相切邊的頂點高。如圖 43，以 A_1 和 A_3 為例，過 A_1 作與 A_3 相鄰之兩邊($\overrightarrow{A_2A_3}$ 和 $\overrightarrow{A_3A_4}$)的頂點高，過 A_3 作與 A_1 相鄰之兩邊($\overrightarrow{A_1A_2}$ 以及 $\overrightarrow{A_1A_4}$)的頂點高，在此定義 $A_1 \Leftrightarrow A_3$ ，稱作 A_1 和 A_3 的對

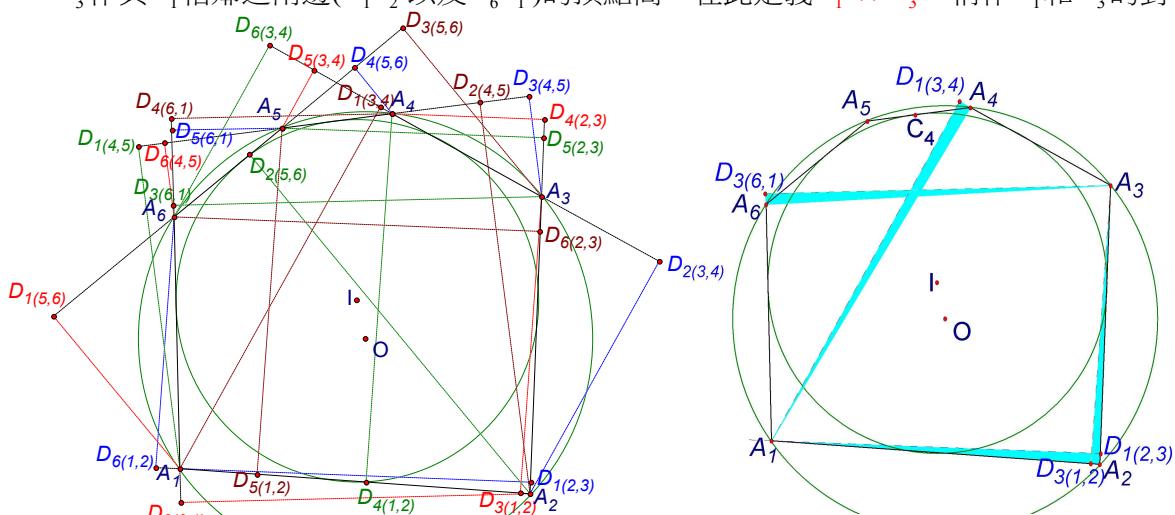


圖 42 (作者自製)

圖 43 (作者自製)

應關係。形成四個垂足分別為 $D_{1(2,3)}$ 、 $D_{1(3,4)}$ 、 $D_{3(1,2)}$ 和 $D_{3(6,1)}$ 。則

$\Delta D_{1(2,3)}A_1A_2 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_6 \sim \Delta D_{3(1,2)}A_3A_2$ 。證明如下：

$\because A_1A_2A_3A_4$ 是圓內接四邊形 $\therefore \angle A_1A_2A_3 + \angle A_3A_4A_1 = \angle A_1A_4D_{1(3,4)} + \angle A_3A_4A_1 = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_4D_{1(3,4)}$ ，又 $\angle A_1D_{1(2,3)}A_2 = \angle A_1D_{1(3,4)}A_4 = 90^\circ$ ，故

$\Delta D_{1(2,3)}A_1A_2 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4$ 。同理由圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_6$ 和 $A_1A_3A_4A_6$ 分別可得到

$\Delta D_{3(1,2)}A_3A_2 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_6$ 、 $\Delta D_{3(6,1)}A_3A_6 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4$

$\Rightarrow \Delta D_{1(2,3)}A_1A_2 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_6 \sim \Delta D_{3(1,2)}A_3A_2$ 。同理可得其它組的相似三角形共有 15 組，如表格一所示。這是頂點高形成的特殊相似三角形組。

表格一：雙心六邊形共 15 組相似三角形，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 6$

$A_k \Leftrightarrow A_{k+1}$	$\Delta D_{1(2,3)}A_1A_3 \sim \Delta D_{2(6,1)}A_2A_6$ 、 $\Delta D_{2(3,4)}A_2A_4 \sim \Delta D_{3(1,2)}A_3A_1$ 、 $\Delta D_{3(4,5)}A_3A_5 \sim \Delta D_{4(2,3)}A_4A_2$ $\Delta D_{4(5,6)}A_4A_6 \sim \Delta D_{5(3,4)}A_5A_3$ 、 $\Delta D_{5(6,1)}A_5A_1 \sim \Delta D_{6(4,5)}A_6A_4$ 、 $\Delta D_{6(1,2)}A_6A_2 \sim \Delta D_{1(5,6)}A_1A_5$
$A_k \Leftrightarrow A_{k+2}$	$\Delta D_{1(2,3)}A_1A_2 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_6 \sim \Delta D_{3(1,2)}A_3A_2$ 、 $\Delta D_{2(3,4)}A_2A_3 \sim \Delta D_{2(4,5)}A_2A_5 \sim \Delta D_{4(1,2)}A_4A_1 \sim \Delta D_{4(2,3)}A_4A_3$ 、 $\Delta D_{3(4,5)}A_3A_4 \sim \Delta D_{3(5,6)}A_3A_6 \sim \Delta D_{5(2,3)}A_5A_2 \sim \Delta D_{5(3,4)}A_5A_4$ 、 $\Delta D_{4(5,6)}A_4A_5 \sim \Delta D_{4(6,1)}A_4A_1 \sim \Delta D_{6(3,4)}A_6A_3 \sim \Delta D_{6(4,5)}A_6A_5$ 、 $\Delta D_{5(6,1)}A_5A_6 \sim \Delta D_{5(1,2)}A_5A_2 \sim \Delta D_{1(4,5)}A_1A_4 \sim \Delta D_{1(5,6)}A_1A_6$ 、 $\Delta D_{6(1,2)}A_6A_1 \sim \Delta D_{6(2,3)}A_6A_3 \sim \Delta D_{2(5,6)}A_2A_5 \sim \Delta D_{2(6,1)}A_2A_1$
$A_k \Leftrightarrow A_{k+3}$	$\Delta D_{1(3,4)}A_1A_3 \sim \Delta D_{1(4,5)}A_1A_5 \sim \Delta D_{4(6,1)}A_4A_6 \sim \Delta D_{4(1,2)}A_4A_2$ $\Delta D_{2(4,5)}A_2A_4 \sim \Delta D_{2(5,6)}A_2A_6 \sim \Delta D_{5(1,2)}A_5A_1 \sim \Delta D_{5(2,3)}A_5A_3$ $\Delta D_{3(5,6)}A_3A_5 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_1 \sim \Delta D_{6(2,3)}A_6A_2 \sim \Delta D_{6(3,4)}A_6A_4$

雙心七邊形則有 $A_k \Leftrightarrow A_{k+1} \sim A_k \Leftrightarrow A_{k+3}$ 三種相似情況，共有 $7+7+7=21$ 組相似三角形，

八邊形則是 $8+8+8+4=28$ 組，其他邊數以此類推。於是推廣至雙心 n 邊形中可以算出共

有 $\underbrace{n+n+n+\dots+n}_{\frac{n-2}{2}個n} + \frac{n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = C_2^n$ 組。

(三)如圖 44，在 $A_1 \Leftrightarrow A_3$ 的 $\Delta D_{1(2,3)}A_1A_2 \sim \Delta D_{1(3,4)}A_1A_4 \sim \Delta D_{3(6,1)}A_3A_6 \sim \Delta D_{3(1,2)}A_3A_2$ 中，由正弦函

數的定義可以找出頂點高與對應邊、對應角的關係，例如

$$\frac{h_{l(2,3)}}{A_1 A_2} = \sin\left(\angle A_1 A_2 D_{l(2,3)}\right) = \sin\left(\frac{\angle A_1 O A_3}{2}\right) = t_{1,3}$$

設定 $\sin\left(\frac{\angle A_1 O A_3}{2}\right) = t_{1,3}$ ，同理，

$$\frac{h_{l(3,4)}}{A_1 A_4} = \sin\left(\angle A_1 A_4 D_{l(3,4)}\right) = \sin\left(\angle A_1 A_2 A_3\right) = t_{1,3}$$

$$\frac{h_{3(6,1)}}{A_3 A_6} = \sin\left(\angle A_3 A_6 D_{3(6,1)}\right) = t_{1,3} \quad , \quad \frac{h_{3(1,2)}}{A_2 A_3} = t_{1,3}$$

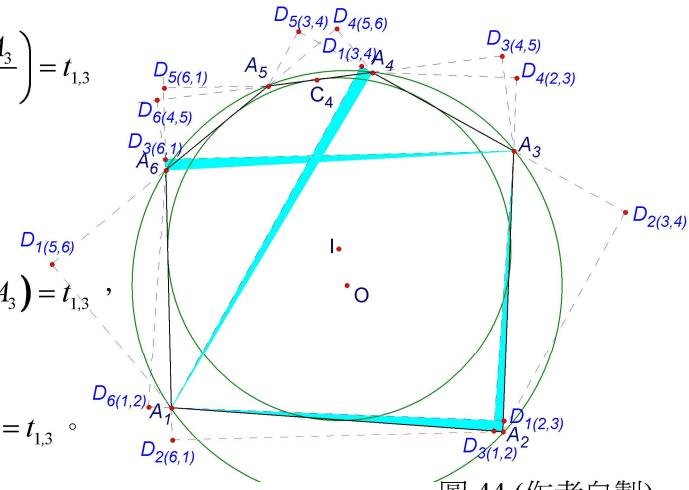


圖 44 (作者自製)

故稱 $A_l \Leftrightarrow A_3$ 相似三角形對應邊的比值為 $\sin\left(\frac{\angle A_1 O A_3}{2}\right) = t_{1,3}$ 。再用相同原理找出和所有邊長有關的比值，得到

$$\frac{h_{l(2,3)}}{t_{1,3}} = \frac{h_{2(6,1)}}{t_{2,6}} = \overline{A_1 A_2} \quad , \quad \frac{h_{2(3,4)}}{t_{2,4}} = \frac{h_{3(1,2)}}{t_{1,3}} = \overline{A_2 A_3} \quad , \quad \frac{h_{3(4,5)}}{t_{3,5}} = \frac{h_{4(2,3)}}{t_{2,4}} = \overline{A_3 A_4} \quad ,$$

$$\frac{h_{4(5,6)}}{t_{4,6}} = \frac{h_{5(3,4)}}{t_{3,5}} = \overline{A_4 A_5} \quad , \quad \frac{h_{5(6,1)}}{t_{1,5}} = \frac{h_{6(4,5)}}{t_{4,6}} = \overline{A_5 A_6} \quad , \quad \frac{h_{6(1,2)}}{t_{2,6}} = \frac{h_{l(5,6)}}{t_{1,5}} = \overline{A_6 A_1} \quad , \quad \text{又 } n \text{ 為偶數時可由隔邊和相}$$

等之性質列出頂點高和 $t_{k,k+f}$ 的比值關係式為 $2(\overline{A_1 A_2} + \overline{A_3 A_4} + \overline{A_5 A_6}) = 2(\overline{A_2 A_3} + \overline{A_4 A_5} + \overline{A_6 A_1})$

$$= \frac{h_{l(2,3)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{2(3,4)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{3(4,5)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{4(5,6)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{5(6,1)}}{t_{5,1}} + \frac{h_{6(1,2)}}{t_{6,2}} = \frac{h_{2(6,1)}}{t_{6,2}} + \frac{h_{3(1,2)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{4(2,3)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{5(3,4)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{6(4,5)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{l(5,6)}}{t_{5,1}} \quad .$$

表格一中也有其他頂點高與對應對角線有關的相似三角形，也同理可得到其他頂點高和

其他比值 $t_{k,k+f}$ 的關係式如表格二所示。

表格二：雙心六邊形所有頂點高與所有邊長、所有對角線與其對應比值 $t_{k,k+f}$ 的關係式

$\frac{h_{l(2,3)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{2(3,4)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{3(4,5)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{4(5,6)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{5(6,1)}}{t_{5,1}} + \frac{h_{6(1,2)}}{t_{6,2}} = \frac{h_{l(3,4)}}{t_{1,4}} + \frac{h_{2(4,5)}}{t_{2,5}} + \frac{h_{3(5,6)}}{t_{3,6}} + \frac{h_{4(6,1)}}{t_{4,1}} + \frac{h_{5(1,2)}}{t_{5,2}} + \frac{h_{6(2,3)}}{t_{6,3}}$ $= \frac{h_{3(1,2)}}{t_{2,3}} + \frac{h_{4(2,3)}}{t_{3,4}} + \frac{h_{5(3,4)}}{t_{4,5}} + \frac{h_{6(4,5)}}{t_{5,6}} + \frac{h_{l(5,6)}}{t_{6,1}} + \frac{h_{2(6,1)}}{t_{1,2}} = \frac{h_{3(6,1)}}{t_{3,6}} + \frac{h_{4(1,2)}}{t_{4,1}} + \frac{h_{5(2,3)}}{t_{5,2}} + \frac{h_{6(3,4)}}{t_{6,3}} + \frac{h_{l(4,5)}}{t_{1,4}} + \frac{h_{2(5,6)}}{t_{2,5}}$ $= \overline{A_1 A_3} + \overline{A_2 A_4} + \overline{A_3 A_5} + \overline{A_4 A_6} + \overline{A_5 A_1} + \overline{A_6 A_2} \cdots \cdots ②$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_{1(3,4)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{2(4,5)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{3(5,6)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{4(6,1)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{5(1,2)}}{t_{5,1}} + \frac{h_{6(2,3)}}{t_{6,2}} = \frac{h_{4(1,2)}}{t_{4,2}} + \frac{h_{5(2,3)}}{t_{5,3}} + \frac{h_{6(3,4)}}{t_{6,4}} + \frac{h_{1(4,5)}}{t_{1,5}} + \frac{h_{2(5,6)}}{t_{2,6}} + \frac{h_{3(6,1)}}{t_{3,1}} \\
& = \overline{A_1A_4} + \overline{A_2A_5} + \overline{A_3A_6} + \overline{A_4A_1} + \overline{A_5A_2} + \overline{A_6A_3} = 2(\overline{A_1A_4} + \overline{A_2A_5} + \overline{A_3A_6}) \cdots \textcircled{③}
\end{aligned}$$

同理可得雙心七邊形所有頂點高和比值 $t_{k,k+f}$ 的關係式，如表格三所示。

表格三：雙心七邊形所有頂點高與所有邊長、所有對角線與其對應比值 $t_{k,k+f}$ 的關係式

$$\begin{aligned}
& \frac{h_{1(2,3)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{2(3,4)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{3(4,5)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{4(5,6)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{5(6,7)}}{t_{5,7}} + \frac{h_{6(7,1)}}{t_{6,1}} + \frac{h_{7(1,2)}}{t_{7,2}} = \frac{h_{2(7,1)}}{t_{7,2}} + \frac{h_{3(1,2)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{4(2,3)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{5(3,4)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{6(4,5)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{7(5,6)}}{t_{5,7}} + \frac{h_{1(6,7)}}{t_{6,1}} \\
& = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_6A_7} + \overline{A_7A_1} \cdots \textcircled{①} \\
& \frac{h_{1(2,3)}}{t_{1,2}} + \frac{h_{2(3,4)}}{t_{2,3}} + \frac{h_{3(4,5)}}{t_{3,4}} + \frac{h_{4(5,6)}}{t_{4,5}} + \frac{h_{5(6,7)}}{t_{5,6}} + \frac{h_{6(7,1)}}{t_{6,7}} + \frac{h_{7(1,2)}}{t_{7,1}} = \frac{h_{1(3,4)}}{t_{1,4}} + \frac{h_{2(4,5)}}{t_{2,5}} + \frac{h_{3(5,6)}}{t_{3,6}} + \frac{h_{4(6,7)}}{t_{4,7}} + \frac{h_{5(7,1)}}{t_{5,1}} + \frac{h_{6(1,2)}}{t_{6,2}} + \frac{h_{7(2,3)}}{t_{7,3}} \\
& = \frac{h_{3(1,2)}}{t_{2,3}} + \frac{h_{4(2,3)}}{t_{3,4}} + \frac{h_{5(3,4)}}{t_{4,5}} + \frac{h_{6(4,5)}}{t_{5,6}} + \frac{h_{7(5,6)}}{t_{6,7}} + \frac{h_{1(6,7)}}{t_{7,1}} + \frac{h_{2(7,1)}}{t_{1,2}} = \frac{h_{3(7,1)}}{t_{7,3}} + \frac{h_{4(1,2)}}{t_{1,4}} + \frac{h_{5(2,3)}}{t_{2,5}} + \frac{h_{6(3,4)}}{t_{3,6}} + \frac{h_{7(4,5)}}{t_{4,7}} + \frac{h_{1(5,6)}}{t_{5,1}} + \frac{h_{2(6,7)}}{t_{6,2}} \\
& = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_4} + \overline{A_3A_5} + \overline{A_4A_6} + \overline{A_5A_7} + \overline{A_6A_1} + \overline{A_7A_2} \cdots \textcircled{②} \\
& \frac{h_{1(3,4)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{2(4,5)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{3(5,6)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{4(6,7)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{5(7,1)}}{t_{5,7}} + \frac{h_{6(1,2)}}{t_{6,1}} + \frac{h_{7(2,3)}}{t_{7,2}} = \frac{h_{1(4,5)}}{t_{1,5}} + \frac{h_{2(5,6)}}{t_{2,6}} + \frac{h_{3(6,7)}}{t_{3,7}} + \frac{h_{4(7,1)}}{t_{4,1}} + \frac{h_{5(1,2)}}{t_{5,2}} + \frac{h_{6(2,3)}}{t_{6,3}} + \frac{h_{7(3,4)}}{t_{7,4}} \\
& = \frac{h_{3(7,1)}}{t_{1,3}} + \frac{h_{4(1,2)}}{t_{2,4}} + \frac{h_{5(2,3)}}{t_{3,5}} + \frac{h_{6(3,4)}}{t_{4,6}} + \frac{h_{7(4,5)}}{t_{5,7}} + \frac{h_{1(5,6)}}{t_{6,1}} + \frac{h_{2(6,7)}}{t_{7,2}} = \frac{h_{5(1,2)}}{t_{1,5}} + \frac{h_{6(2,3)}}{t_{2,6}} + \frac{h_{7(3,4)}}{t_{3,7}} + \frac{h_{1(4,5)}}{t_{4,1}} + \frac{h_{2(5,6)}}{t_{5,2}} + \frac{h_{3(6,7)}}{t_{6,3}} + \frac{h_{4(7,1)}}{t_{7,4}} \\
& = \overline{A_1A_4} + \overline{A_2A_5} + \overline{A_3A_6} + \overline{A_4A_7} + \overline{A_5A_1} + \overline{A_6A_2} + \overline{A_7A_3} \cdots \textcircled{③}
\end{aligned}$$

統整表格一、二、三的結果，得到雙心 n 邊形所有頂點高與所有邊長、對角線、其對應比值

$t_{k,k+f}$ 的關係一般式，如推論 6-2 所示。

推論 6-2： ①在雙心 n 邊形中過各頂點 A_t ($t = 1, 2, \dots, n$) 作不相切邊 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$

($i = t+1, \dots, t+n-2$) 的垂直線 (頂點高)， $D_{t(i,i+1)}$ 為垂足，共有 $n(n-2)$ 個頂點高，

$A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ ($f = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$) 為從 A_k 作到與 A_{k+f} 相鄰的兩邊之頂點高和從 A_{k+f} 作到與 A_k

相鄰的兩邊之頂點高所形成 4 個為 1 組的相似直角三角形組 (在 $f=1$ 時是 2 個為 1 組)。

$A_k \Leftrightarrow A_{k+1}$ 的情況	$\Delta D_{k(k+1,k+2)} A_k A_{k+2} \sim \Delta D_{k+1(k-1,k)} A_{k+1} A_{k-1}$ ，共 n 組
$A_k \Leftrightarrow A_{k+j}$ 的情況 ($j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$)	$\begin{cases} \Delta D_{k(k+j-1,k+j)} A_k A_{k+j-1} \sim \Delta D_{k(k+j,k+j+1)} A_k A_{k+j+1}, \text{ 每個 } j \text{ 值各 } n \text{ 組, 其中} \\ \sim \Delta D_{k+j(k-1,k)} A_{k+j} A_{k-1} \sim \Delta D_{k+j(k,k+1)} A_{k+j} A_{k+j-1} \end{cases}$ 當 n 為偶數， $j = \frac{n}{2}$ 時共有 n 組。

②在雙心 n 邊形中，延續①將 $A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ 相似三角形的對應邊比值令為 $t_{k,k+f}$ 或 $t_{k+f,k}$ ，

且 $t_{k,k+f} = \sin\left(\frac{\angle A_k O A_{k+f}}{2}\right)$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。於是雙心 n 邊形頂點高的關係一般式為

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f-1, i+f)}}{t_{i, i+f-1}}}_{\text{第 I 部分}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f, i+f+1)}}{t_{i, i+f+1}}}_{\text{第 II 部分}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f-1(i-1, i)}}{t_{i, i+f-1}}}_{\text{第 III 部分}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f+1(i, i+1)}}{t_{i, i+f+1}}}_{\text{第 IV 部分}} = \sum_{i=1}^n \overline{A_i A_{i+f}} \quad (f = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]).$$

當下標值 $> n$ 時，取下標值 $\bmod n$ 為新下標值；在下標值為 0 時，則取 n 為新下標值。在 $f=1$ 時，第 I、III 部分不存在，只有第 II、IV 部分成立； n 為偶數時第 II、IV 部分皆

等於 $2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i-1} A_{2i}} = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i} A_{2i+1}}$ ，且在 $f = \frac{n}{2}$ 時，第 I、IV 部份一樣，第 II、III 部份一樣。

六、雙心四邊形衍生的旁高垂四邊形

雙心四邊形中共有 4 條旁高垂線，兩兩相交會形成另一個四邊形，如圖 45 和推論 7 所述。

推論 7：如圖 45，在雙心四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 中，4 條旁高垂線 $L_{1(3,4)}$ 、 $L_{2(4,1)}$ 、 $L_{3(1,2)}$ 和 $L_{4(2,3)}$ 兩

兩相交形成四邊形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ ，稱為雙心旁高垂四邊形，則四邊形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 全等於四邊形

$A_1 A_2 A_3 A_4$ ，，其外接圓圓心為 O_B ，且 O_B 、 I 、 O 三點共線，具對偶性。

證明：1. 由推論 3 得知 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}} \perp \overline{A_3 A_4}$ 、 $\overline{I_1 H_{1(3,4)}} \perp \overline{B_1 B_2}$ ，
 $\therefore \overline{B_1 B_2} \parallel \overline{A_3 A_4}$ ，同理 $\overline{B_2 B_3} \parallel \overline{A_1 A_4}$ 、 $\overline{B_3 B_4} \parallel \overline{A_1 A_2}$ 、
 $\overline{B_1 B_4} \parallel \overline{A_2 A_3}$ 。令 $\overline{B_1 B_2}$ 和 $\overline{A_2 A_3}$ 、 $\overline{A_1 A_4}$ 交於 D_1 、 D_3 ，
 $\overline{B_1 B_4}$ 和 $\overline{A_3 A_4}$ 、 $\overline{A_1 A_2}$ 交於 D_2 、 D_8 ， $\overline{B_2 B_3}$ 和 $\overline{A_3 A_4}$ 、 $\overline{A_1 A_2}$ 交於 D_4 、 D_5 ， $\overline{B_3 B_4}$ 和 $\overline{A_1 A_4}$ 、 $\overline{A_2 A_3}$ 交於 D_6 、 D_7 。

由平行四邊形 $B_1 D_1 A_3 D_2$ 、 $D_3 B_2 D_4 A_4$ 、 $D_5 B_3 D_6 A_1$ 和 $D_7 B_4 D_8 A_2$ 可得 $\angle D_1 B_1 D_2 = \angle D_1 A_3 D_2$ 、

$\angle D_3 A_4 D_4 = \angle D_3 B_2 D_4$ 、 $\angle D_5 B_3 D_6 = \angle D_5 A_1 D_6$ 、 $\angle D_7 B_4 D_8 = \angle D_7 A_2 D_8$ ，又此四個平行四邊形

共用內切圓 I ， \therefore 此四個平行四邊形皆為菱形，故每條對角線皆會通過 I 點 $\Rightarrow \overline{B_1 I} = \overline{A_3 I}$ 、

$\overline{D_1 I} = \overline{D_2 I}$ 、 $\overline{B_2 I} = \overline{A_4 I}$ 、 $\overline{D_3 I} = \overline{D_4 I}$ 、 $\overline{A_1 I} = \overline{B_3 I}$ 、 $\overline{D_5 I} = \overline{D_6 I}$ 、 $\overline{A_2 I} = \overline{B_4 I}$ 、 $\overline{D_7 I} = \overline{D_8 I}$ 。

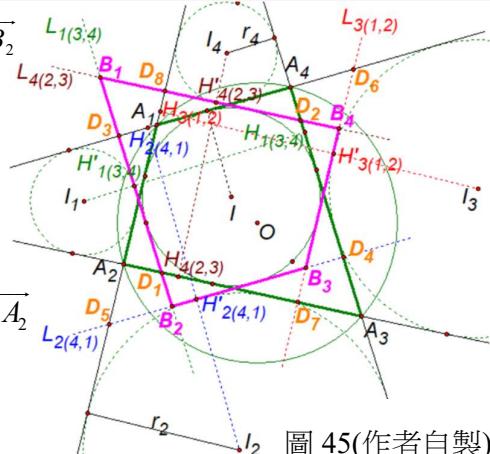


圖 45(作者自製)

又 $\Delta A_4 D_2 I \cong \Delta B_2 D_1 I$ (SAS) $\Rightarrow \overline{A_4 D_2} = \overline{D_1 B_2} \Rightarrow \overline{A_3 A_4} = \overline{A_3 D_2} + \overline{D_2 A_4} = \overline{B_1 D_1} + \overline{D_1 B_2} = \overline{B_1 B_2}$

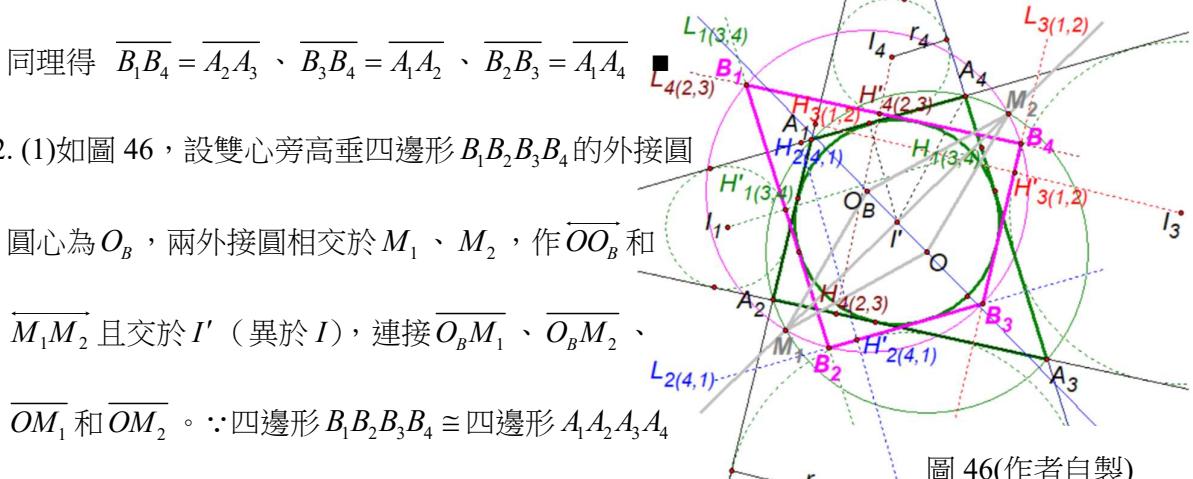


圖 46(作者自製)

$$\therefore \overline{O_B M_2} = \overline{O_B M_1} = \overline{O M_2} = \overline{O M_1} = R$$

\Rightarrow 四邊形 $O_B M_2 O M_1$ 為菱形且 $\overline{O O_B}$ 和 $\overline{M_1 M_2}$ 互相垂直平分

$$\Rightarrow \angle O_B I' M_2 = \angle O I' M_2 = 90^\circ, \overline{O_B I'} = \overline{I' O}, \overline{M_2 I'} = \overline{M_1 I'}$$

(2) 如圖 47, \because 圓 I 同時為四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 和 $B_1 B_2 B_3 B_4$

的內切圓，分別與外接圓圓心 O 、 O_B 的連心線段長相等，

$$\text{即 } \overline{IO_B} = \overline{IO}, \text{ 又 } \overline{O_B M_2} = \overline{O M_2}, \overline{IM_2} = \overline{IM_1}$$

$$\therefore \Delta O_B I M_2 \cong \Delta O I M_2 (\text{SSS}) \Rightarrow \angle O_B I M_2 = \angle O I M_2 \Rightarrow I \text{ 也在 } \overline{M_1 M_2} \text{ 上, } \text{ 圖 47(作者自製)}$$

因為 $\overline{O_B I}$ 為圓 O_B 和圓 I 的共同對稱軸 $\therefore \overline{M_2 I} = \overline{M_1 I} \Rightarrow I$ 和 I' 為同一點 ■

七、雙心四邊形旁徑的一些特殊又有趣的幾何性質

從文獻 1 探討三角形的一些有趣性質，故推廣到雙心四邊形中推導得到一些與旁徑、對角線、外接圓半徑及內切圓半徑的有趣關係式。首先介紹文獻 1 提到的性質如下：

【性質 2】 (丁遵標, 2021 年 12 月)[1]如圖 48, ΔABC 中，內切圓 I 的半徑為 r ，外接圓

O 的半徑為 R ，令 $\overline{AB} = a_1$ ， $\overline{BC} = a_2$ ， $\overline{AC} = a_3$ ， $p = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$ ，則

$$(1) \prod_{i=1}^3 (p - a_i) = r^2 p \quad (2) \sum_{i=1}^3 a_i a_{i+1} = p^2 + 4Rr + r^2 \quad (3) \prod_{i=1}^3 a_i = 4Rrp \quad .$$

(一)各邊長、半周長與內切圓半徑的關係

如圖 49，內切圓 I 的半徑為 r ，外接圓 O 的半徑為 R ，

令 $\overline{A_1A_2} = a_1$ ， $\overline{A_2A_3} = a_2$ ， $\overline{A_3A_4} = a_3$ ， $\overline{A_4A_1} = a_4$ ，

$p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$ ，則由文獻 4(蔡聰明，2009 年 2 月)中

提及的性質可推導得到，雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面積

$$= \sqrt{(p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)(p - a_4)} = rp = \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$\Rightarrow r^2 p^2 = (p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)(p - a_4) \Rightarrow \prod_{i=1}^4 (p - a_i) = r^2 p^2 \circ$$

(二)任意三邊長乘積和的關係式

由 $(p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)(p - a_4)$

$$= p^4 - p^3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + p^2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4)$$

$$- p(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) + a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \dots \textcircled{1}$$

圖 48(作者自製)

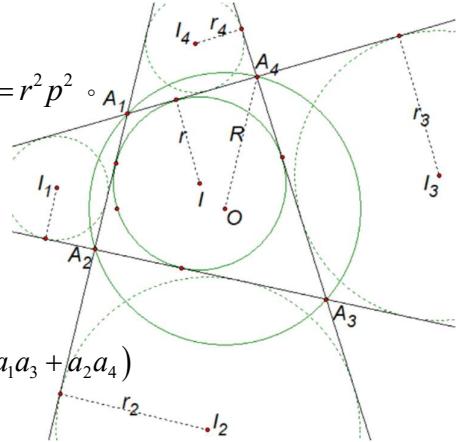


圖 49(作者自製)

又 $(p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)(p - a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4$ ， $\textcircled{1}$ 式變成

$$p^4 - p^3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + p^2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4)$$

$$- p(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 = p^3 - p^2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$+ p(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4) = p(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4) - p^3 \dots \textcircled{2}$$

再由 $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4)$ 可得

$$\Rightarrow a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4 = \frac{4p^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{2} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 式可得}$$

$$a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 = p \times \frac{4p^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{2} - p^3 = p^3 - \frac{p}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \dots \textcircled{3}$$

進一步分析 $\textcircled{3}$ 式如下，如圖 50，用對角線 $\overline{A_1A_3}$ 將四邊形

分成兩個三角形， $\Delta A_1A_2A_3$ 和 $\Delta A_1A_4A_3$ ，由正弦定理可得

$$\frac{a_1}{\sin \angle A_1 A_3 A_2} = \frac{a_2}{\sin \angle A_2 A_1 A_3} = \frac{a_3}{\sin \angle A_4 A_1 A_3} = \frac{a_4}{\sin \angle A_1 A_3 A_4} = 2R$$

$$\text{則 } a_1^2 = 4R^2 \sin^2 \angle A_1 A_3 A_2 \quad , \quad a_2^2 = 4R^2 \sin^2 \angle A_2 A_1 A_3 \quad ,$$

$$a_3^2 = 4R^2 \sin^2 \angle A_4 A_1 A_3 \quad , \quad a_4^2 = 4R^2 \sin^2 \angle A_1 A_3 A_4$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 4R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \angle A_1 A_3 A_2 + \sin^2 \angle A_2 A_1 A_3 \\ + \sin^2 \angle A_4 A_1 A_3 + \sin^2 \angle A_1 A_3 A_4 \end{pmatrix}$$

將上式代入③式可得

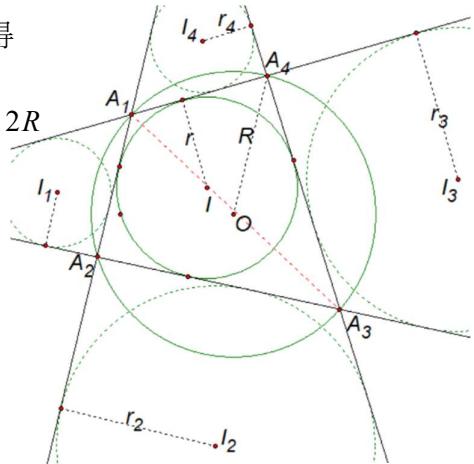


圖 50(作者自製)

再由三角函數的倍角公式 $2\sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta)$ 可得到

$$2\sin^2 \angle A_1 A_3 A_4 = 1 - \cos(2\angle A_1 A_3 A_4) = 1 - \cos \angle A_1 O A_4 \Rightarrow \sin^2 \angle A_1 A_3 A_4 = \frac{1 - \cos \angle A_1 O A_4}{2}$$

$$\text{同理 } \sin^2 \angle A_1 A_3 A_2 = \frac{1 - \cos \angle A_1 O A_2}{2}, \sin^2 \angle A_2 A_1 A_3 = \frac{1 - \cos \angle A_2 O A_3}{2}.$$

$$\sin^2 \angle A_3 A_1 A_4 = \frac{1 - \cos \angle A_3 O A_4}{2} \text{, 相加後得到}$$

$$\sin^2 \angle A_1 A_3 A_2 + \sin^2 \angle A_2 A_1 A_3 + \sin^2 \angle A_4 A_1 A_3 + \sin^2 \angle A_1 A_3 A_4$$

$$= 2 - \frac{\cos \angle A_1 O A_2 + \cos \angle A_2 O A_3 + \cos \angle A_3 O A_4 + \cos \angle A_4 O A_1}{2} \quad \text{代入④式可化簡成}$$

$$\sum a_i a_j a_k = p^3 - pR^2 (4 - \cos \angle A_1 O A_2 - \cos \angle A_2 O A_3 - \cos \angle A_3 O A_4 - \cos \angle A_4 O A_1)$$

(三)四個旁切圓半徑與內切圓半徑的關係式

如圖 50，因為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積 = $(p - a_1) \times r_1 + a_3r$ ，又四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積 = pr

$$\Rightarrow r_1 = \frac{p-a_3}{p-a_1} \times r \quad \text{同理} \quad r_2 = \frac{p-a_4}{p-a_2} \times r, \quad r_3 = \frac{p-a_1}{p-a_3} \times r, \quad r_4 = \frac{p-a_2}{p-a_4} \times r$$

$$\therefore r_1 r_2 r_3 = \frac{p-a_3}{p-a_1} \times \frac{p-a_4}{p-a_2} \times \frac{p-a_1}{p-a_3} \times r^3 = \frac{(p-a_1)(p-a_3)(p-a_4)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \times r^3 \quad \text{同理可得}$$

$$r_1r_2r_4 = \frac{(p-a_2)(p-a_4)(p-a_3)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \times r^3, \quad r_2r_3r_4 = \frac{(p-a_2)(p-a_4)(p-a_1)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \times r^3,$$

$$r_1r_3r_4 = \frac{(p-a_1)(p-a_3)(p-a_2)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \times r^3, \text{ 則}$$

$$\sum r_i r_j r_k = \left[\frac{(p-a_2)(p-a_4)(p-a_3)^2 + (p-a_1)(p-a_3)(p-a_4)^2 + (p-a_2)(p-a_4)(p-a_1)^2 + (p-a_1)(p-a_3)(p-a_2)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \right] \times r^3$$

$$\text{又 } r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \left(\frac{p-a_3}{p-a_1} + \frac{p-a_4}{p-a_2} + \frac{p-a_1}{p-a_3} + \frac{p-a_2}{p-a_4} \right) \times r$$

$$= \left[\frac{(p-a_2)(p-a_4)(p-a_3)^2 + (p-a_1)(p-a_3)(p-a_4)^2 + (p-a_2)(p-a_4)(p-a_1)^2 + (p-a_1)(p-a_3)(p-a_2)^2}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)} \right] \times r = \frac{\sum r_i r_j r_k}{r^2}, \text{ 故 } \sum r_t = \frac{\sum r_i r_j r_k}{r^2} \blacksquare$$

統整前面(一)~(三)的結果如推論 8 所示：

推論 8：如圖 49，在雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，內切圓 I 的半徑為 r ，外接圓 O 的半徑為

$$R, \text{ 令 } \overline{A_1A_2} = a_1, \overline{A_2A_3} = a_2, \overline{A_3A_4} = a_3, \overline{A_4A_1} = a_4, p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}, \text{ 則}$$

$$(1) \prod_{i=1}^4 (p-a_i) = r^2 p^2, (2) \sum a_i a_j a_k = p^3 - p R^2 \left(4 - \sum_{i=1}^4 \cos \angle A_i O A_{i+1} \right), (3) \sum r_t = \frac{\sum r_i r_j r_k}{r^2}$$

以上，當下標值 > 4 時，則取下標值 $\bmod 4$ 為新下標值。

伍、結論與討論

一、推論 1、2：旁高垂線與內切圓有三種位置關係：交於兩點、相切和不相交。又分成切

點 C_t 和內心 I 是否在旁心高同側兩種情況來分析。透過 I 作旁心高的垂直線交於 $N_{t(i,i+1)}$

得第一種判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)}$ ；又設旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 交 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 於 $G_{t(i,i+1)}$ ，過 I 作平行於 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$

的直線交 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 於 $N'_{t(i,i+1)}$ ，和作 $\angle N_{t(i,i+1)} N'_{t(i,i+1)}$ 的角平分線交 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 於 $N''_{t(i,i+1)}$ 得第二種判別角 $\angle C_t I N''_{t(i,i+1)}$ 、 $\angle I G_{t(i,i+1)} C_t$ 為一組。表格四是三種位置與二種判別角的關係。

表格四：旁高垂線和內切圓的三種位置關係與兩種判別角的判別性質

旁高垂線和內切圓	不相交	相切	交於兩點
同側	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ$	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ$	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ$
不同側	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} > \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} = \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} < \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$

雙心 n 邊形中互為不相切邊所在的旁心各自形成的兩種判別角皆同時存在，且會同時相等或互補地成對出現。推論 1 的判別性質只有在 $n \geq 5$ 的雙心 n 邊形才成立，因為在雙心四邊形中判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)} \leq 90^\circ$ ，其旁高垂線與圓 I 相切（在推論 3 探討特殊雙心四邊形時曾說明過），是除了邊 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 這條內公切線外的另一條內公切線。推論 2 的結果是在探討推論 1 時觀察到並驗證得到的 2 個有趣性質：

1. 透過相鄰的旁切圓圓心作任意同一邊 $\overrightarrow{A_{t+m} A_{t+m+1}}$ 的旁心高得到 $N_{t(t+m,t+m+1)}$ 和 $N_{t+1(t+m,t+m+1)}$ ，

則 $\Delta N_{t(t+m,t+m+1)} A_{t+1} N_{t+1(t+m,t+m+1)} \sim \Delta I_t I I_{t+1}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$)。

2. 旁心高 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 交 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 於點 $Q_{t(i,i+1)}$ ，旁心 I_t 與 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 相切於 H_t 。在 C_t 和內心 I 在旁心高同側或不同側時，旁高垂線和圓 I 的三種位置關係三種特殊角的關係式如表格五所示。

表格五：在 C_t 和 I 在旁心高同側或不同側時，第一種判別角 $\angle C_t I N_{t(i,i+1)}$ 和三種特殊角的關係

同側	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ$	$\angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = \angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}$	
	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ$	$Q_{t(i,i+1)}$ 在外接圓內	$\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}$
		$Q_{t(i,i+1)}$ 在外接圓外	$\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} + \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = 180^\circ$
不同側	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ$	$\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}$	
	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} \text{ 恒 } < 90^\circ$	$\angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}$	

二、推論 3、4、5 的面積一般式是從雙心四～七邊形開始，列出其任一旁心與邊長、內切圓外接圓半徑相關的面積關係式後，觀察關係式的規律得到面積關係一般式。再將雙心八～十二邊形中的所有參數代入此一般式去驗證，結果皆可使列出的一般式成立。

推論 3：該推論是在蒐集本研究相關資料時，湊巧發現三角形面積可透過旁徑來得到才有的推廣結果。推論 3 是將第一年雙心 n 邊形面積關係式推廣到同時包含內切圓與外接圓半徑的關係式。透過外心 O 作各邊的垂直線得到 $J_{t,t+1}$ ($t = 1, 2, \dots, n$) 進而將外接圓半徑引入原有內切圓半徑的關係式，在 $\text{旁高垂線與圓 } I \text{ 有交點}$ 時，得到旁心高和 r 、 R 、 r_t 的關係式後求得雙心 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 面積為

$$r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \left(r \cdot \cos \angle P_{t(i,i+1)} C_i P'_{t(i,i+1)} \pm \overline{I'_{i,i+1} O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1} O A_{i+1} \right), \quad \overline{I'_{i,i+1} O} \text{ 項前面}$$

加減運算也可取決於：當 $\overline{I'_{i,i+1} J_{i,i+1}} > \overline{O J_{i,i+1}} = R$ 時，為+號；當 $\overline{I'_{i,i+1} J_{i,i+1}} < R$ 時，為-號。

推論 4：由於推論 3 在旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 必須與內切圓相交或相切才成立，於是想探討 $\text{不需與圓 } I \text{ 相交或相切}$ 的旁心高關係式，又旁高垂線必會與外接圓 O 相交，故設定交於 $K_{t(i,i+1)}$ 和 $K'_{t(i,i+1)}$ ，搭配與圓 O 的交點 $J_{i,i+1}$ 得到旁心高與 $\angle K_{t(i,i+1)} J_{i,i+1} K'_{t(i,i+1)}$ 、 R 、 r_t 的關係式後，則雙心（或圓內接） n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 面積為

$$r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \cdot R \left(\cos \angle K_{t(i,i+1)} J_{i,i+1} K'_{t(i,i+1)} + \cos \angle J_{i,i+1} O A_{i+1} \right)^\circ.$$

推論 5：從推論 4 中再推廣到 $\text{不需與圓 } I \text{ 相交或相切}$ 時，得到旁心高、旁徑與內切圓半徑關係式後，則雙心（或圓外切） n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 面積為

$$r_t \left(p - \overline{A_t A_{t+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \left[(r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t II_t} - 1 \right) + 2r \right]^\circ.$$

三、推論 6：在雙心 n 邊形中，過各頂點作不相切邊的頂點高，共有 $n(n-2)$ 個頂點高，則

1. 雙心四邊形 8 個頂點高四四分組形成 2 個頂點高四邊形，皆與原雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

相似。特有的頂點高關係式為 $h_{l(2,3)} + h_{3(4,1)} + h_{2(4,1)} + h_{4(2,3)} = h_{2(3,4)} + h_{4(1,2)} + h_{3(1,2)} + h_{l(3,4)}$ 。

2. $A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ ($f = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$) 為從 A_k 作到與 A_{k+f} 相鄰和從 A_{k+f} 作到與 A_k 相鄰的兩邊之

頂點高所形成 4 個為 1 組的相似直角三角形（在 $f=1$ 時是 2 個為 1 組）。分二種情況：

$A_k \Leftrightarrow A_{k+1}$ 的情況	$\Delta D_{k(k+1,k+2)} A_k A_{k+2} \sim \Delta D_{k+1(k-1,k)} A_{k+1} A_{k-1}$ ，共 n 組
$A_k \Leftrightarrow A_{k+j}$ 的情況 ($j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$)	$\begin{cases} \Delta D_{k(k+j-1,k+j)} A_k A_{k+j-1} \sim \Delta D_{k(k+j,k+j+1)} A_k A_{k+j+1} \\ \sim \Delta D_{k+j(k-1,k)} A_{k+j} A_{k-1} \sim \Delta D_{k+j(k,k+1)} A_{k+j} A_{k+j-1} \end{cases}$ ，每個 j 值各 n 組，其中 當 n 為偶數， $j = \frac{n}{2}$ 時共有 n 組。

統整二種情況進一步得到雙心 n 邊形頂點高形成的相似三角形組數為

$$\underbrace{n+n+n+\dots+n}_{\frac{n-2}{2}個n} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = C_2^n \text{ 組。}$$

3. 若將 $A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ 的對應邊比值令為 $t_{k,k+f}$ 或 $t_{k+f,k}$ 。於是雙心 n 邊形頂點高的關係式

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f-1,i+f)}}{t_{i,i+f-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f,i+f+1)}}{t_{i,i+f+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f-1(i-1,i)}}{t_{i,i+f-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f+1(i,i+1)}}{t_{i,i+f+1}} = \sum_{i=1}^n \overline{A_i A_{i+f}} \quad (f = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]).$$

當下標值 $> n$ 或為 0 時，分別取下標值 **mod n** 或 取 n 為新下標值。在 $f=1$ 時，第 I 、

III 部分不存在，只有第 II 、 IV 部分成立； n 為偶數時，第 II 、 IV 部分皆等於

$$2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i-1} A_{2i}} = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i} A_{2i+1}} \text{，且在 } f = \frac{n}{2} \text{ 時，第 I 、 IV 部份一樣，第 II 、 III 部份一樣。}$$

四、推論 7：由雙心四邊形四條旁高垂線形成的旁高垂四邊形，與原四邊形全等且對應邊互相平行，其內心是同一個，其外心則與原外心、內心三心共線，且具有對偶性。而其他雙心 n ($n \geq 5$) 邊形不會有這個特性存在，這是一個蠻特別的現象。

五、推論 8：為性質 2[1]的推廣結果。其中第(2)條關係式說明雙心四邊形中任意三邊長的乘積和會與半周長、外接圓半徑和對應 4 個邊的外接圓心角之餘弦函數有關。若用另一條對角線（圖 50 中的 $\overline{A_2 A_4}$ ）來分割四邊形成兩個三角形，也會得到一樣的關係式。

陸、參考文獻：

1. 丁遵標(2021 年 12 月)。三角形旁徑與高之間的三個性質。數學傳播，45 卷 4 期，96-97。
2. 笹部真市郎(2003 年)，幾何學辭典，九章出版社譯。(原著出版於 1995 年)。No.436，P.89
3. 永遠的磁導(2022)，完美的雙心多邊形(三)，取自 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/558710099>。
4. 蔡聰明(2009 年 2 月)。數學的發現趣談，三民書局。第 163 頁。
5. 楊慕群、楊景翔(2024 年 5 月)。心心相映的美麗「圓」份！。新竹縣第 64 屆科展國中組數學科第二名。

【評語】030419

本作品的研究動機源自丁遵標於《數學傳播》(2021 年第 45 卷第 4 期) 所探討的「三角形旁徑與高的三個性質」。作者進一步提出問題：若某些四邊形亦同時具有內心與外心（稱為「雙心多邊形」），是否也存在類似的幾何特性？

研究中首先發現，在雙心五邊形中，旁高垂線可能與內切圓不相交，進而探討不相交的條件與此情況下的面積計算公式。同時，作者也分析從頂點作向不相切邊的高線之間是否存在幾何關係，提出新的觀察與公式。特別值得肯定的是，作者成功將原始文獻中針對三角形的結果推廣至雙心四邊形，並深入探討四條旁徑與內切圓半徑之間的關係，成果豐富。

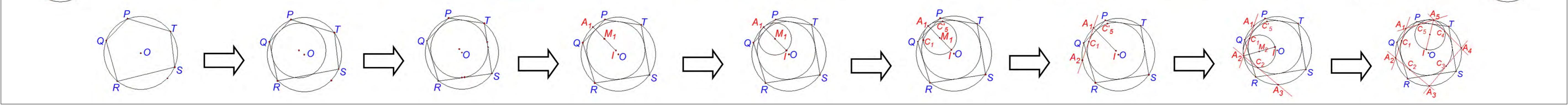
建議：

1. 圖形輔助說明的清晰度：報告中包含大量複雜的幾何圖形和符號標示，建議在圖形中多使用顏色區分或增加局部放大圖，並保持符號命名的一致性，以提高可讀性。

2. 證明過程的精簡與組織：部分推導（尤其是涉及三角函數的式子）較為冗長，若能在不失嚴謹性的前提下，對證明步驟進行適當精簡或分段組織，將使報告更易於理解。

作品海報

A large, stylized Chinese calligraphy banner featuring the phrase "真是知面又知心" (Truly understand the face and the heart) in red. The characters are surrounded by geometric diagrams, including circles, ellipses, and points labeled A1 through A12, C1, and O. Small circles with 'i' and 'o' are also present. The banner is framed by a decorative border of circles and ellipses.

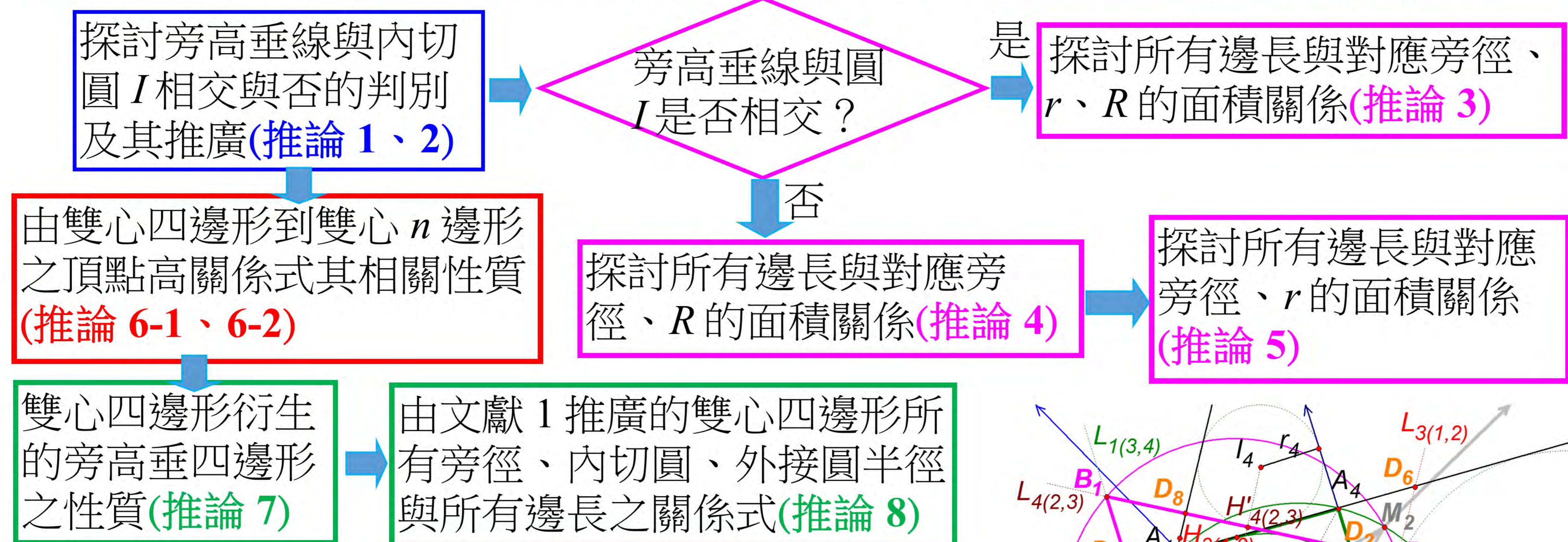


壹、研究動機：

從思考兼具有內切圓與外接圓的多邊形，有哪些奇妙、有趣的性質？今年第二年繼續延伸探討。

貳、研究目的與研究架構流程圖：

- 一、探討旁高垂線與圓 I 是否相交的判別性質及其他相關性質。
- 二、探討雙心 n ($n \geq 4$) 邊形所有邊長與對應旁徑、 r 、 R 有關的面積關係。
- 三、過各頂點作不相切邊的頂點高，探討頂點高關係式與其相關性質。
- 四、探討雙心四邊形中兩兩旁高垂線相交形成旁高垂四邊形與原四邊形的關係；推廣文獻 1 到該四邊形，探討各旁徑與內切圓半徑的關係式。



參、研究過程、方法與推論結果：

名詞定義與已知性質（所有圖形皆為作者自製）

1. 旁心高、旁高垂線、旁高垂四邊形：如圖 1，過旁心 I_t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) 作 $n-3$ 個不相切邊 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ ($i = t+2, \dots, t+n-2$) 的垂直線，分別交該旁切圓 I_t 和

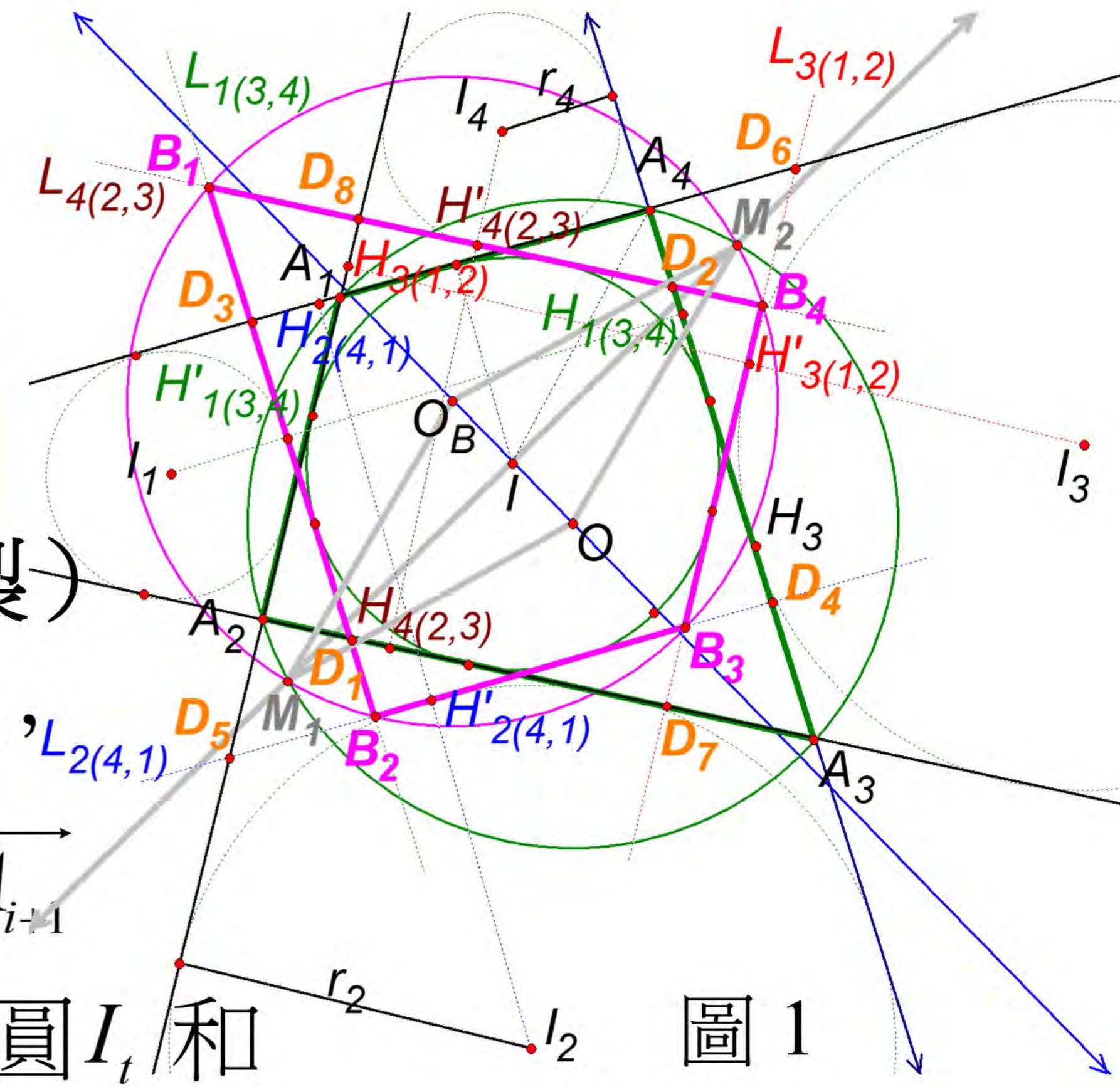


圖 1

$\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 於點 $H'_{t(i,i+1)}$ 和 $H_{t(i,i+1)}$ ， $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 為旁心高。再過 $H'_{t(i,i+1)}$ 作 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 的垂直線 $L_{t(i,i+1)}$ 即是旁高垂線，四條旁高垂線相交成四邊形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 即為旁高垂四邊形。

2. 第一、第二旁高角：如圖 2， $L_{4(2,3)}$ 交圓 I 於 $P_{4(2,3)}$ 和 $P'_{4(2,3)}$ ，過 I 作 $L_{4(2,3)}$ 的垂直線並交於 $M_{4(2,3)}$ 。稱 $\angle P_{4(2,3)} IM_{4(2,3)}$ 、 $\angle P_{4(2,3)} C_2 P'_{4(2,3)}$ 為第一、第二旁高角。

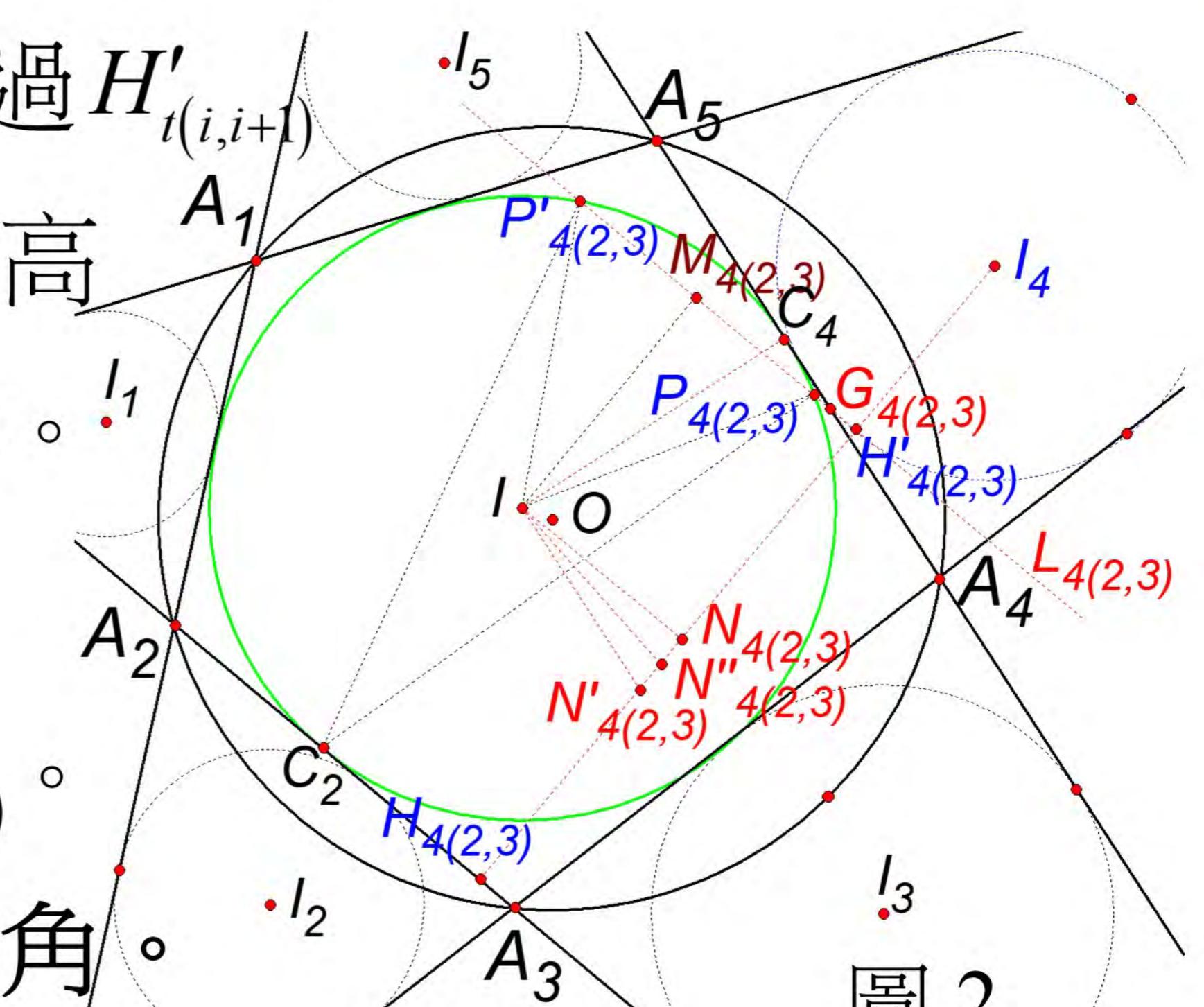


圖 2

3. 判別角：如圖 2，過 I 作旁心高 $\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 的垂線和 $\overrightarrow{A_4 A_5}$ 的平行線，交 $\overrightarrow{I_4 H_{4(2,3)}}$ 於 $N_{4(2,3)}$ 和 $N'_{4(2,3)}$ ，作 $\angle N_{4(2,3)} I N'_{4(2,3)}$ 的平分線得到交點 $N''_{4(2,3)}$ ，又 $L_{4(2,3)}$ 和 $\overrightarrow{A_4 A_5}$ 交於 $G_{4(2,3)}$ 。稱 $\angle C_4 I N_{4(2,3)}$ 、 $(\angle C_4 I N'_{4(2,3)}, \angle I G_{4(2,3)} C_4)$ 是第一、二種判別角。

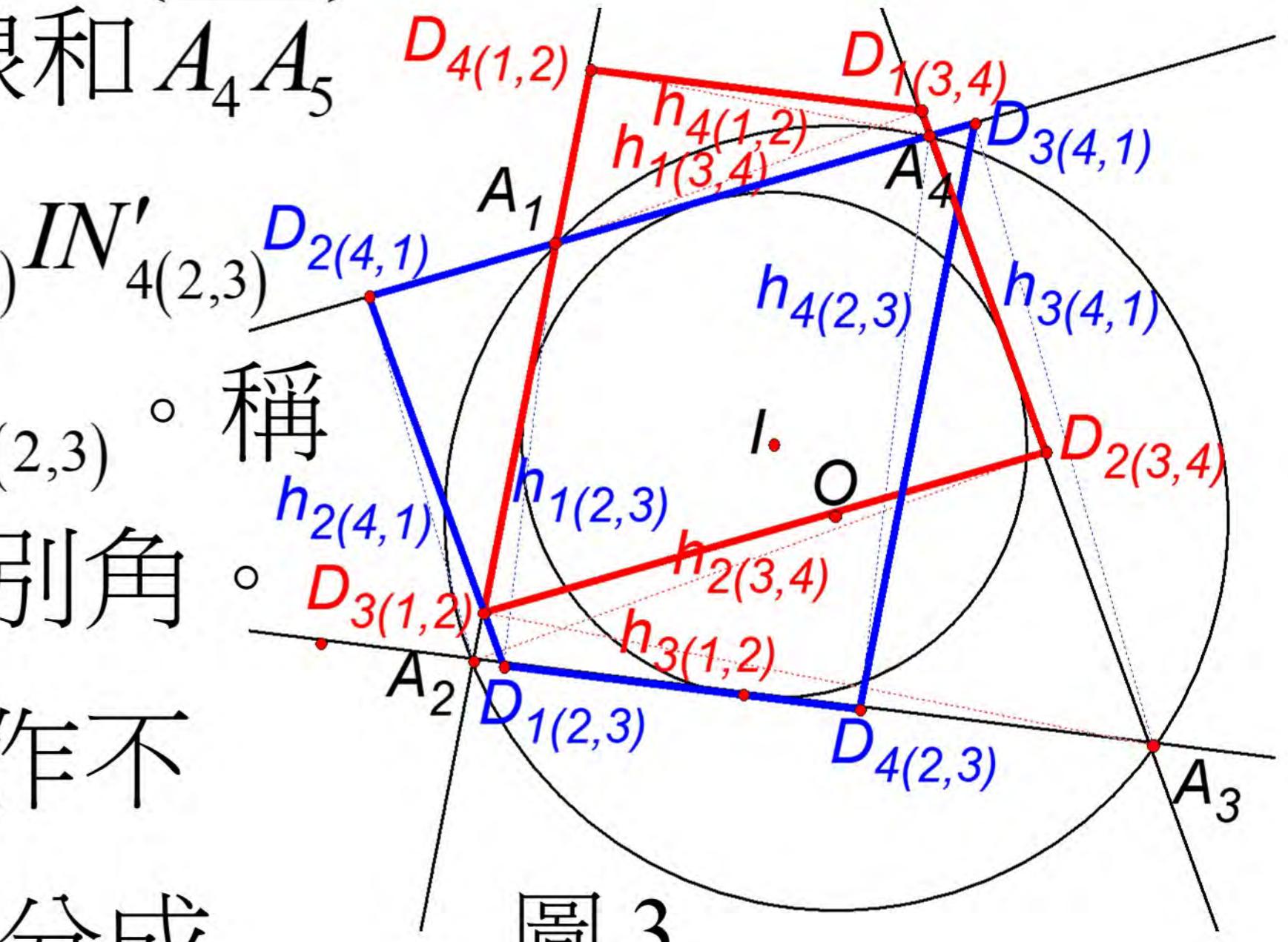


圖 3

4. 頂點高四邊形：在雙心四邊形中，過各頂點作不相切邊的垂直線（頂點高）後，將其 8 個垂足分成兩組，形成兩個頂點高四邊形，如圖 3。

性質[1]：如圖 4，若 $\triangle ABC$ 中 $\angle ABC$ 包含的旁切圓圓心為

I' ，則(1) $\angle AI'B = \frac{1}{2} \angle ACB$ ；(2)若內切圓 I 的半徑為 r ，外接圓 O 的半徑為 R ，令 $\overline{AB} = a_1$ ， $\overline{BC} = a_2$ ， $\overline{AC} = a_3$ ， $p = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$ ，則 $\prod_{i=1}^3 a_i = 4Rrp$ 、 $\prod_{i=1}^3 (p - a_i) = r^2 p$ 、 $\sum_{i=1}^3 a_i a_{i+1} = p^2 + 4Rr + r^2$ 。

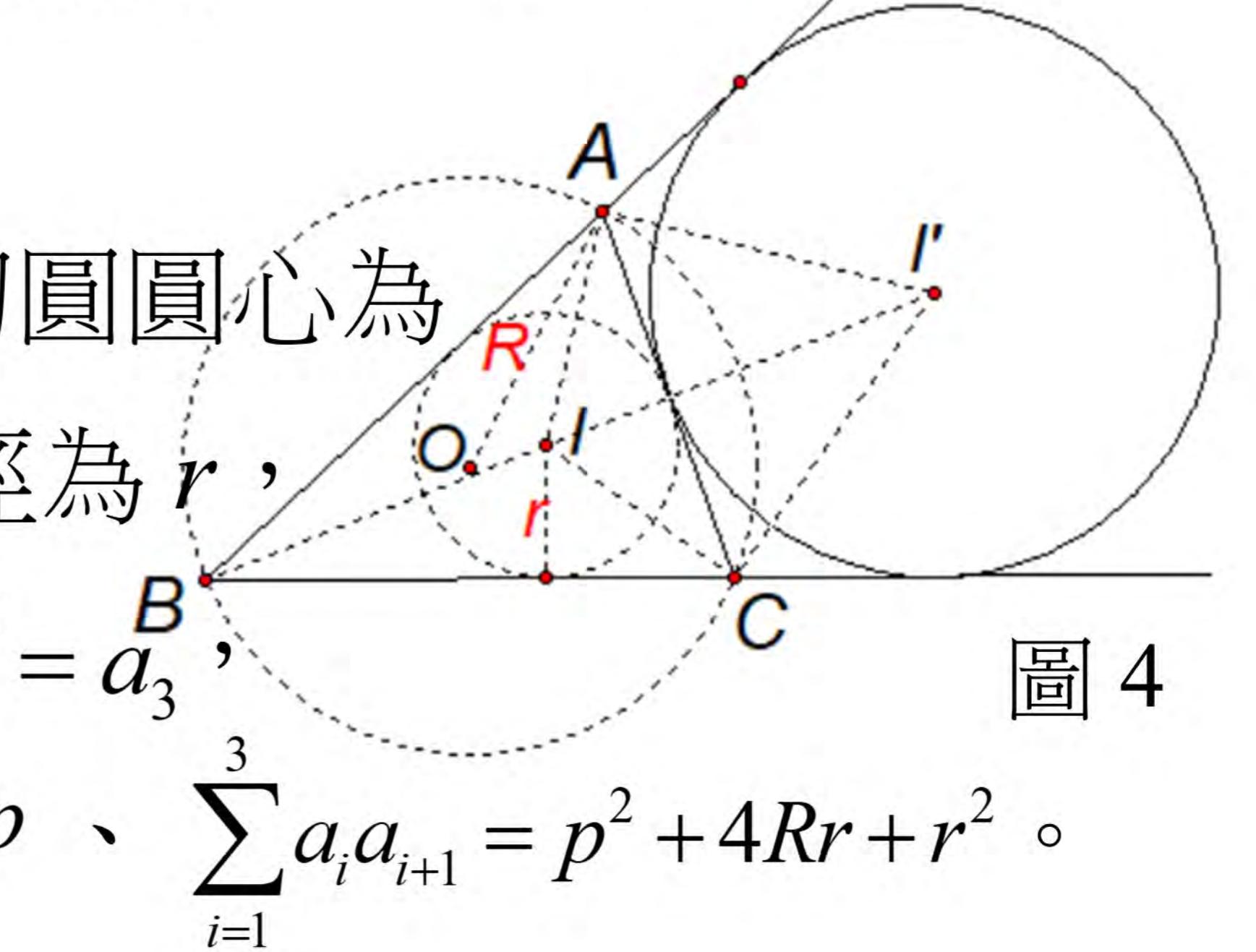


圖 4

一、雙心五邊形以上旁高垂線與內切圓相交之判別以及其他性質

推論 1 在雙心 n 邊形中 ($n \geq 5$)， $L_{t(i,i+1)}$ 交 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 於 $G_{t(i,i+1)}$

旁高垂線與內切圓	不相交(圖 7、9)	相切(圖 5、8)	相交兩點(圖 5、9)
同側	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ$	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ$	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ$
	$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = \angle C_i I N_{i(t,t+1)}$ ， $\angle C_t I N_{t(i,i+1)} + \angle C_i I N_{i(t,t+1)} = 180^\circ$		
不同側	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} > \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} = \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} < \angle I G_{t(i,i+1)} C_t$
	$\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} = \angle C_i I N''_{i(t,t+1)}$ ， $\angle C_t I N''_{t(i,i+1)} + \angle C_i I N''_{i(t,t+1)} = 180^\circ$		

推論 2 承推論 1，(1)如圖 8，雙心 n 邊形 ($n \geq 5$)，過相鄰旁心 I_t 和 I_{t+1} 作各邊 $\overrightarrow{A_{t+m} A_{t+m+1}}$ ($m=0,1,\dots,n-1$) 的旁心高，進而作圖得到 $N_{t(t+m,t+m+1)}$ 、 $N_{t+1(t+m,t+m+1)}$ ，則 $\Delta N_{t(t+m,t+m+1)} A_{t+1} N_{t+1(t+m,t+m+1)} \sim \Delta I_t I_{t+1}$ ，且 $\frac{N_{t(t+m,t+m+1)} N_{t+1(t+m,t+m+1)}}{I_t I_{t+1}} = \sin \angle I_t I_{t+1} N_{t+1(t+m,t+m+1)}$ 。

(2) 旁心高 $I_t H_{t(i,i+1)}$ 與 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 相交於 $Q_{t(i,i+1)}$ ，旁切圓與邊的切點為 H_t

$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} > 90^\circ$	如圖 7， $\angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = \angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}$
$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} < 90^\circ$ (圖 5、7)	$Q_{t(i,i+1)}$ 在外接圓內 $\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}$ $Q_{t(i,i+1)}$ 在外接圓外 $\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} + \angle Q_{t(i,i+1)} I_t H_t + \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} = 180^\circ$
$\angle C_t I N_{t(i,i+1)} = 90^\circ$	如圖 5， $\angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)}$
不同側(圖 9)	$\angle H_t I_t Q_{t(i,i+1)} = \angle C_t I Q_{t(i,i+1)} + \angle I Q_{t(i,i+1)} N_{t(i,i+1)}$

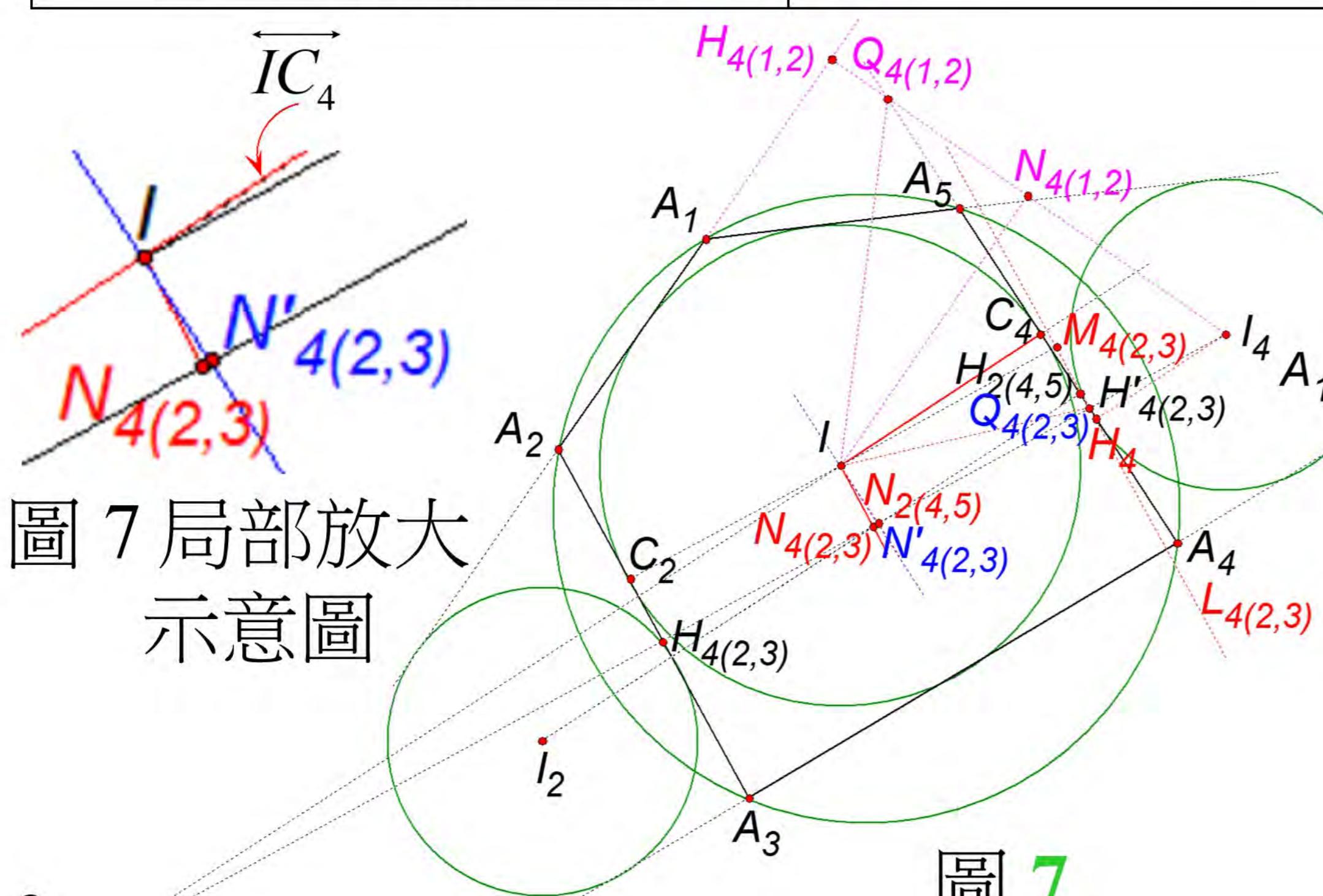


圖 7 局部放大示意圖

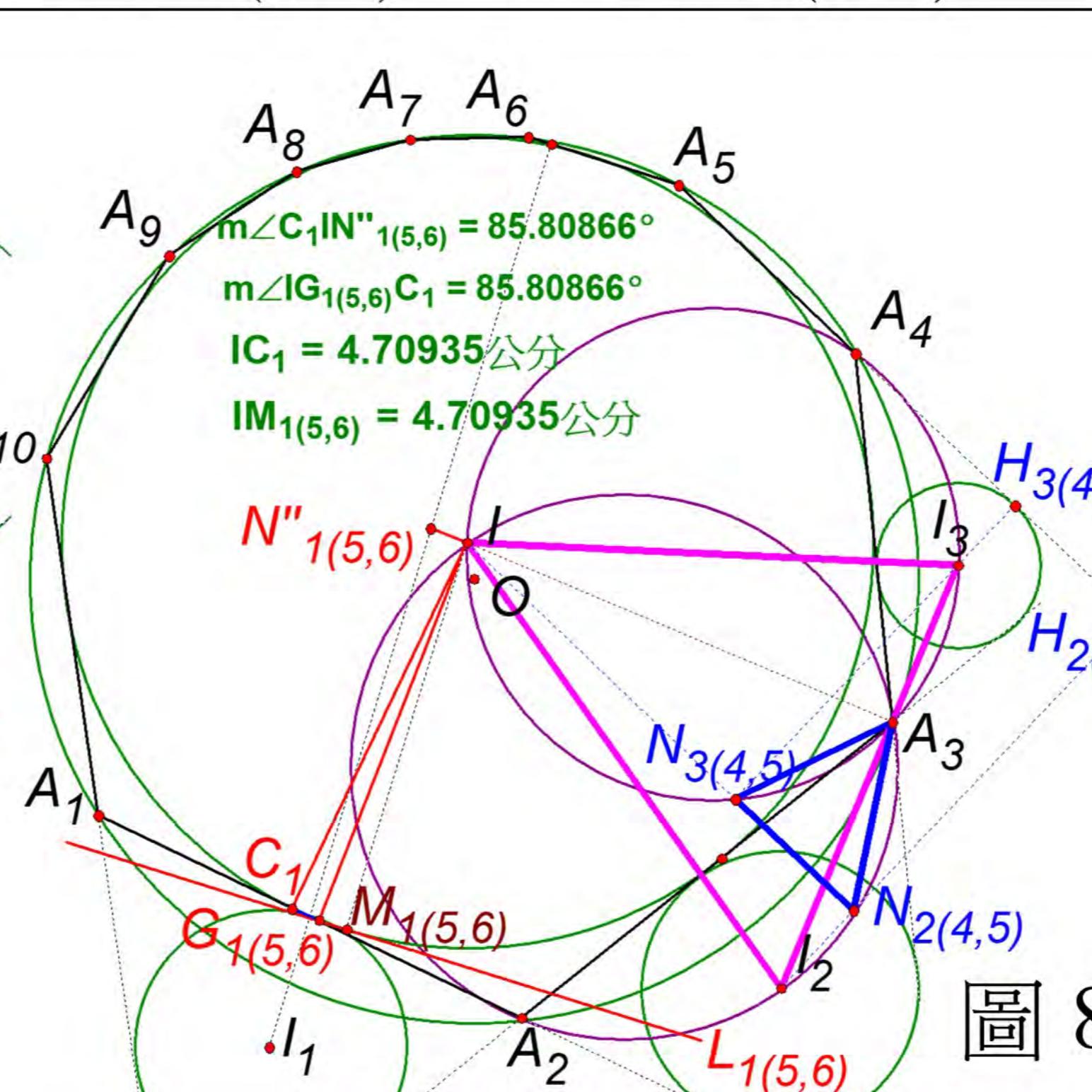


圖 7

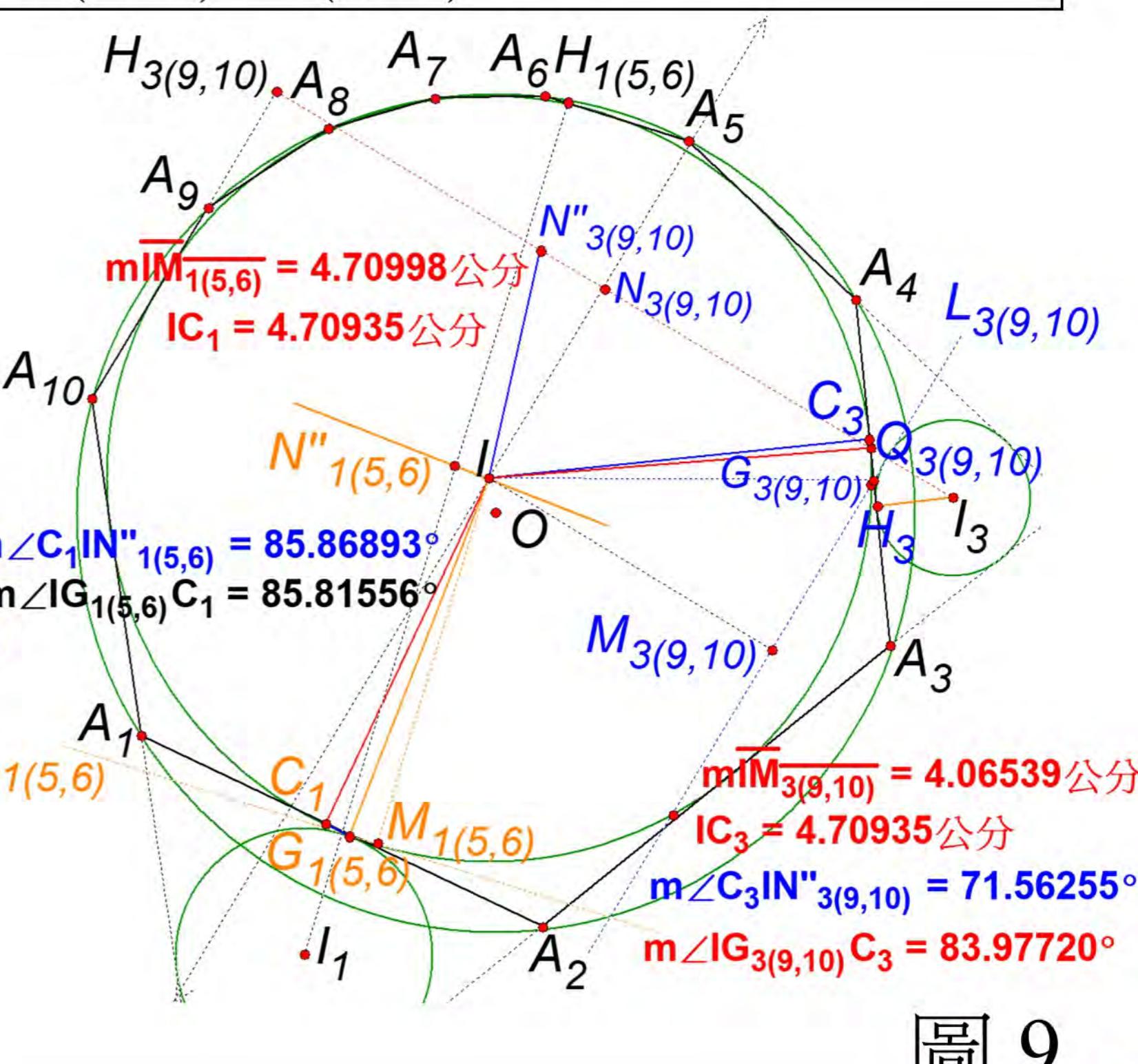


圖 9

二、雙心 n 邊形面積與其邊長、內切圓、外接圓半徑及所有旁徑的關係

推論 3 如圖 11，雙心 n 邊形中，過 n 個旁心 I_t 作不相切邊 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 之旁心高及旁高垂線，再過外心 O 作 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 的垂直線，分別交 $\overrightarrow{A_t A_{t+1}}$ 和圓 O 於點 $J'_{t,t+1}$ 、 $J_{t,t+1}$ ，過 I 作 $\overrightarrow{O J_{t,t+1}}$ 的垂直線交 $\overrightarrow{O J'_{t,t+1}}$ 於 $I'_{t,t+1}$ 。若旁高垂線與圓 I 有交點，則與 R 、 r 、 r_t 有關的面積關係式為：

$$r_t (p - \overline{A_t A_{t+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} (r \cdot \cos \angle P_{t(i,i+1)} C_i P'_{t(i,i+1)} \pm \overline{I'_{i,i+1} O} + R \cdot \cos \angle J_{i,i+1} O A_{i+1})$$
，其中，若 $\overline{O J'_{t,t+1}} < r$ (或 $\overline{I'_{i,i+1} J_{i,i+1}} > R$)，關係式中 $\overline{I'_{i,i+1} O}$ 項前面的運算符號為 $+$ ，反之，為 $-$ 。

推論 4 旁高垂線 $L_{t(i,i+1)}$ 交外接圓 O 於 $K_{t(i,i+1)}$ 和 $K'_{t(i,i+1)}$ ，則與 R 、 r_t 有關的面積關係式為

$$r_t (p - \overline{A_t A_{t+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \cdot R (\cos \angle K_{t(i,i+1)} J_{i,i+1} K'_{t(i,i+1)} + \cos \angle J_{i,i+1} O A_{i+1})$$
。

推論 5 過 I 作旁心高 $I_t H_{t(i,i+1)}$ 的垂直線交 $\overrightarrow{I_t H_{t(i,i+1)}}$ 於點 $N_{t(i,i+1)}$ ，則與 r_t 、 r 有關的面積關係式為

$$r_t (p - \overline{A_t A_{t+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=t+2}^{t+n-2} \overline{A_i A_{i+1}} \left[(r + r_t) \left(\frac{\cos \angle N_{t(i,i+1)} I_t I}{\cos \angle C_t I I_t} - 1 \right) + 2r \right]$$
。
 其中，推論 4、5 關係式無論 $L_{t(i,i+1)}$ 與內切圓是否相交皆成立。(圖 10、5)

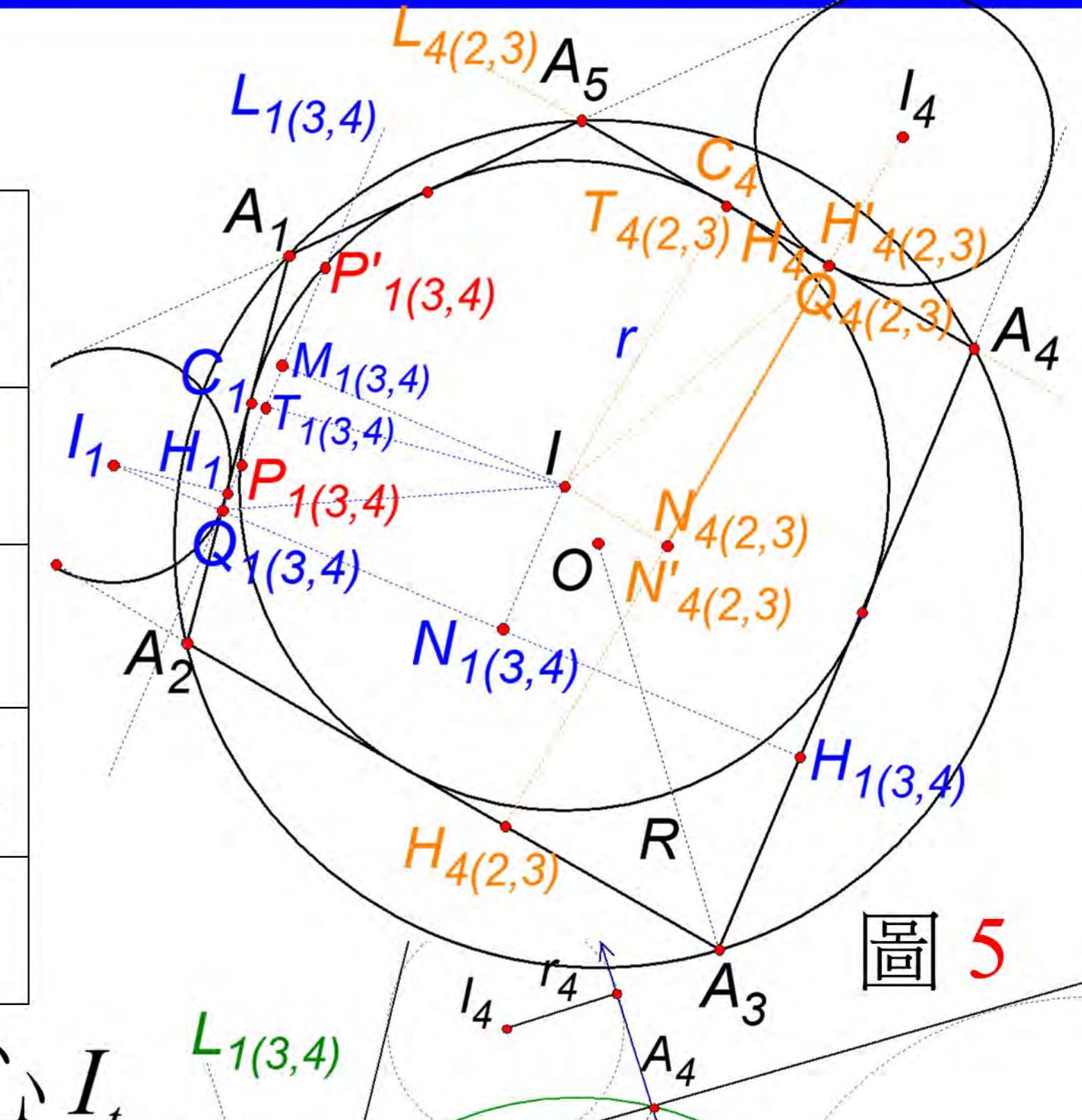


圖 5

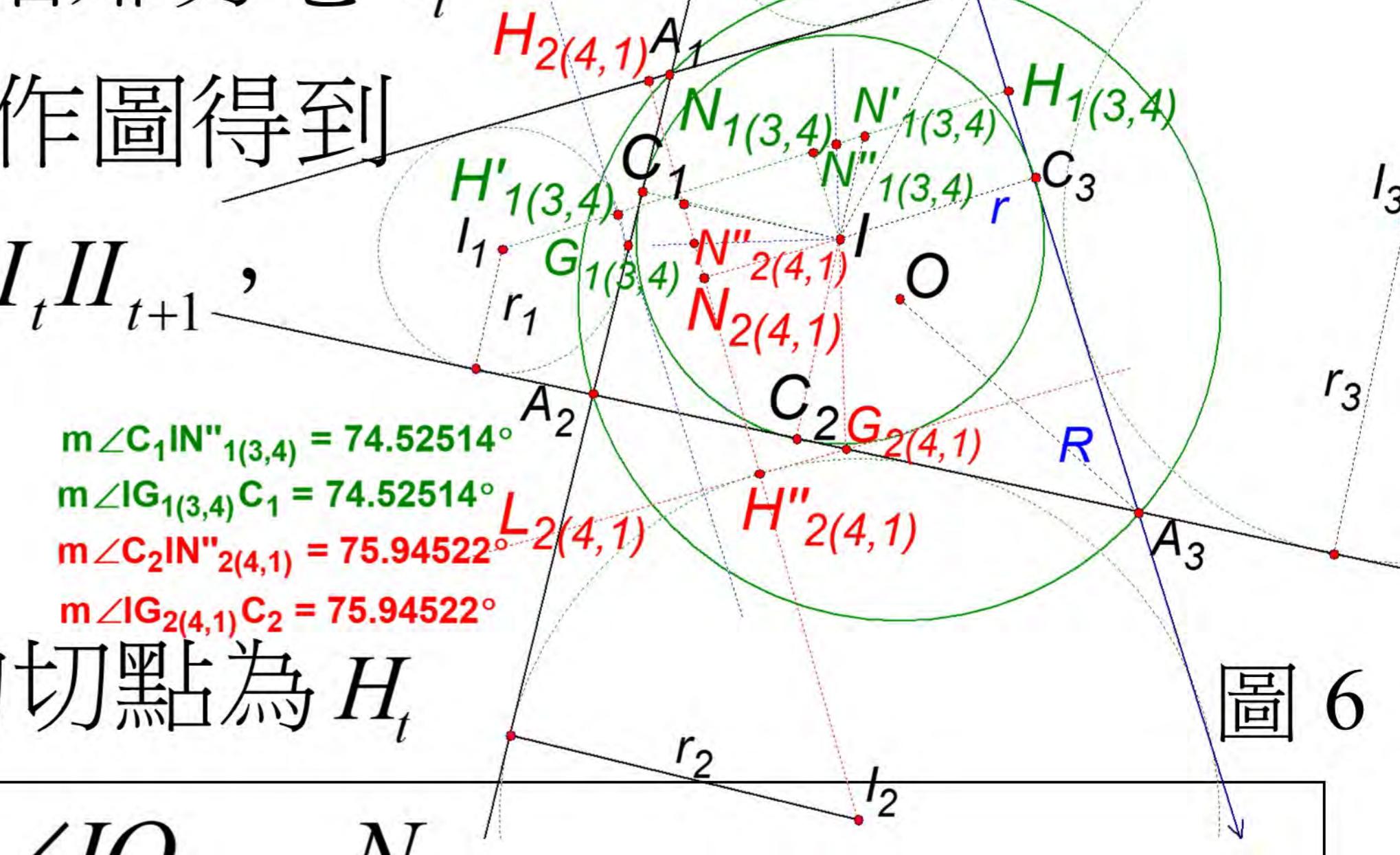


圖 6

三、雙心 n 邊形頂點高的性質及其關係式

推論 6-1 在雙心 n 邊形中，過各頂點 A_i 作不相切邊的垂直線，特別在 $n = 4$ 時有 8 個頂點高，如圖 3，則

$$(1) h_{1(2,3)} + h_{3(4,1)} + h_{2(4,1)} + h_{4(2,3)} = h_{2(3,4)} + h_{4(1,2)} + h_{3(1,2)} + h_{1(3,4)} ;$$

(2) 將 8 個頂點高的垂足分成 2 組，分別連線作成 2 個頂點高四邊形 $D_{1(2,3)}D_{4(2,3)}D_{3(4,1)}D_{2(4,1)}$ 和 $D_{1(3,4)}D_{4(1,2)}D_{3(1,2)}D_{2(3,4)}$ ，皆相似於原四邊形。

推論 6-2 如圖 12， $A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ ($f = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$) 為從 A_k 作到與 A_{k+f} 相鄰和從 A_k 作到與 A_{k+f} 相鄰的兩邊之頂點高形成 4 個為 1 組的相似直角三角形（在 $f=1$ 時是 2 個為 1 組）。分兩種情況，如下表格所示： $(k = 1, 2, \dots, n)$

$A_k \Leftrightarrow A_{k+1}$ 的情況	$\Delta D_{k(k+1,k+2)}A_kA_{k+2} \sim \Delta D_{k+1(k-1,k)}A_{k+1}A_{k-1}$ ，共 n 組。	共有 C_2^n 組
$A_k \Leftrightarrow A_{k+j}$ 的情況 ($j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$)	$\Delta D_{k(k+j-1,k+j)}A_kA_{k+j-1} \sim \Delta D_{k(k+j,k+j+1)}A_kA_{k+j+1}$ ，每個 j 值 $\sim \Delta D_{k+j(k-1,k)}A_{k+j}A_{k-1} \sim \Delta D_{k+j(k,k+1)}A_{k+j}A_{k-1}$ 各 n 組。 當 n 為偶數， $j = \frac{n}{2}$ 時共有 n 組。	

若將 $A_k \Leftrightarrow A_{k+f}$ 的比值令為 $t_{k,k+f}$ 或 $t_{k+f,k}$ 。於是雙心 n 邊形頂點高的關係式為

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f-1,i+f)}}{t_{i,i+f-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i(i+f,i+f+1)}}{t_{i,i+f+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f-1(i-1,i)}}{t_{i,i+f-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_{i+f+1(i,i+1)}}{t_{i,i+f+1}} = \sum_{i=1}^n \overline{A_iA_{i+f}}$$

當 $f=1$ 時，第 I、III 部分不存在，只有第 II、IV 部分成立；

當 n 為偶數時，第 II、IV 皆為 $2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i-1}A_{2i}} = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{A_{2i}A_{2i+1}}$ 且在 $f = \frac{n}{2}$ 時，第 I、IV 部份一樣；第 II、III 部份一樣。

四、雙心四邊形旁高垂線與旁徑的有趣性質

推論 7 如圖 1，在雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，4 條旁高垂線相交形成旁高垂四邊形與原四邊形全等且具對偶性，其外接圓圓心 O_B 與 I 、 O 三點共線。

推論 8 如圖 6，在雙心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，內切圓 I 的半徑為 r ，外接圓 O 的半徑為 R ，令 $\overline{A_1A_2} = a_1$ ， $\overline{A_2A_3} = a_2$ ， $\overline{A_3A_4} = a_3$ ， $\overline{A_4A_1} = a_4$ ， $p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$ ，則 $\prod_{i=1}^4 (p - a_i) = r^2 p^2$ 、 $\sum a_i a_j a_k = p^3 - p R^2 \left(4 - \sum_{i=1}^4 \cos \angle A_i O A_{i+1} \right)$ 、 $\sum r_i = \frac{\sum r_i r_j r_k}{r^2}$ 。

所有推論中若下標值 $> n$ 或 $= 0$ ，則分別取下標值 $\bmod n$ 或 n 為新下標值。

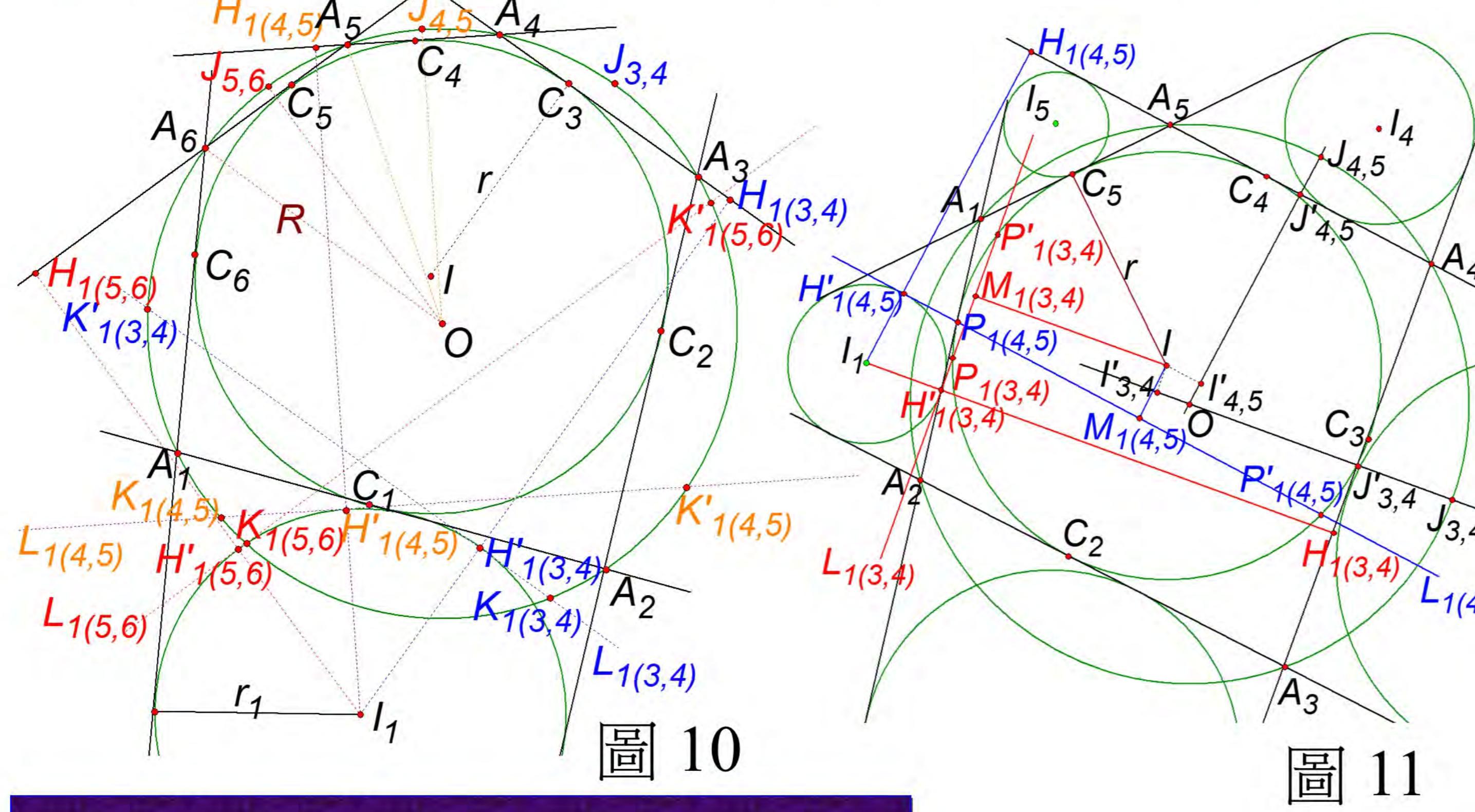


圖 11

