中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

團隊合作獎

030415

心心相連—探討五線繪製三角形的性質

學校名稱： 基隆市立銘傳國民中學

作者：	指導老師：
國二 許軒睿	陳慧敏
國二 褚子毓	陳柏瑋
國二 陳其君	

關鍵詞： 全等三角形、相似三角形、三角形五心

摘要

本研究使用幾何繪圖軟體，利用五條直線繪製至少三個三角形，進而探討這些三角形的相似、全等、五心與內部結構，分析其中存在的數學規律或幾何性質，主要探討為三角形的五心共線和重疊問題。本研究發現，五條直線有一定規則才能繪製出三到五個三角形，且特定畫法的三個相似直角三角形的外心會共線、四個相似或全等三角形的垂心會重疊、三到五個相似或全等三角形的旁心皆會共線或重疊。

壹、前言

一、研究動機

我們在看過同校學長姐的獨立研究成果發表會後，對幾何中的相似和全等三角形的性質產生了興趣。於是，我們決定以五條線繪製至少三個相似或全等三角形，並從五心共線或重疊的幾何性質進行深入探究，並且希望藉由這次的研究，能夠更深入了解幾何圖形中三角形的性質。

二、研究目的

（一）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形之情形。

（二）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形之情形。

（三）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。

（四）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。

三、文獻探討

第 51 屆科展作品《運用之妙，存乎於「心」》以幾何和代數方式深入探討三角形五心的座標與在圓內的軌跡，得到外心、旁心在特定條件下會呈現穩定幾何關係的結果；第 58 屆《用“心”》則從圖形構造出發，觀察旁心、垂心連線圖形的相似性以及重合性。我們從以上報告延伸學習，在五心的觀念、三角形與五心的幾何定理中，加入五條直線和相似、全等三角形的限制，作為我們研究的主軸。我們主要觀察各三角形五心是否共線或重疊，並進一步探討其中是否存在幾何性質或數學規律。

貳、研究設備及器材

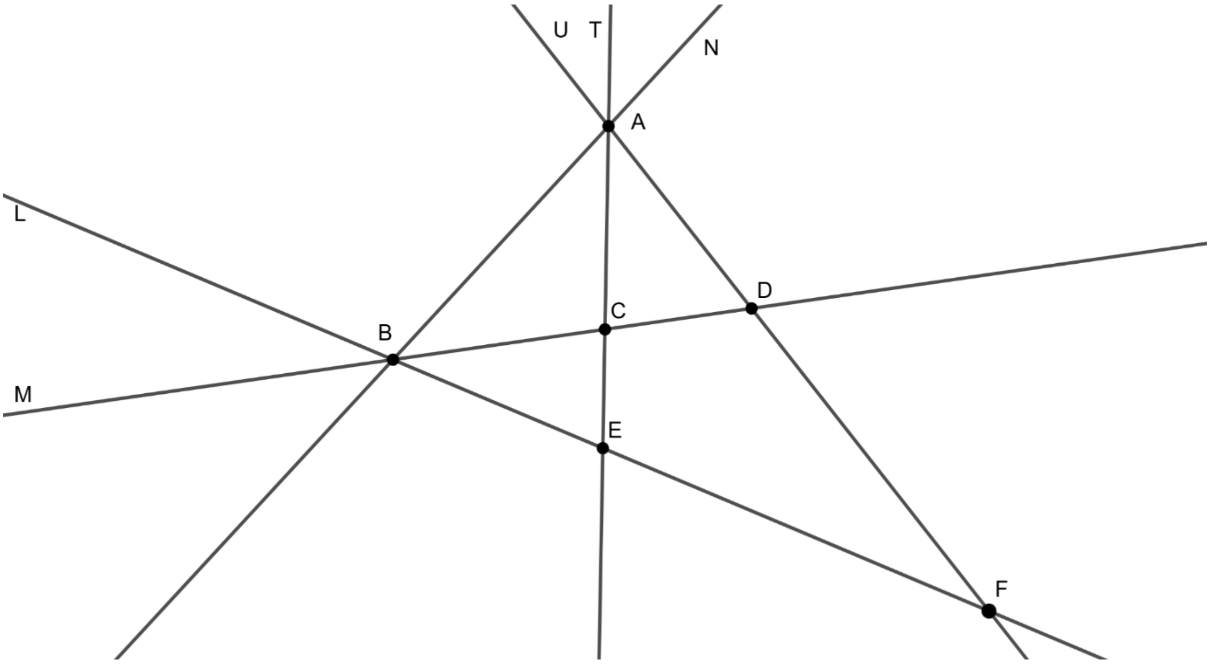
電腦、GeoGeBra 應用程式、紙、筆

參、研究過程或方法

名詞定義

（一）三角形的記數規則：只計算三角形內沒有直線通過的三角形。

如下圖，有△ABC、△BCE、△ACD、△ABE、△BDF、△AEF、△ABD 和△ABF 八個三角形，因△ABE、△BDF、△AEF、△ABD 和△ABF 內有直線通過，所以只算△ABC、△BCE、△ACD 三個三角形。



（二）貼合：指兩個三角形有一條共用邊。

如上圖，△ABC 和△ACD 為貼合三角形；△ACD 和△BCE 為不貼合的三角形。

（三）共線：本研究的共線是指多個三角形的同一種心（如旁心）落在同一直線上，若是同一種心重疊，則不納入本研究的共線範圍內，只算一點，最少三點才算共線。

（四）重疊：本研究的重疊是指多個三角形的同一種心（如垂心）落在同一個點上。

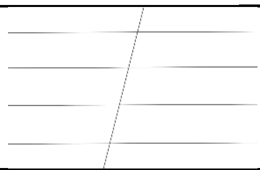
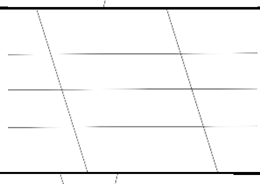
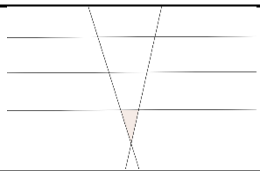
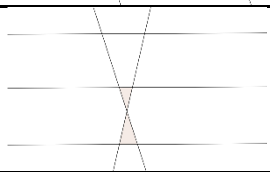
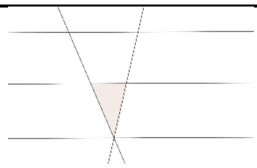
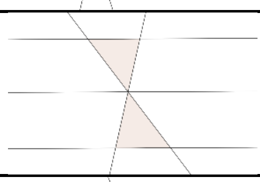
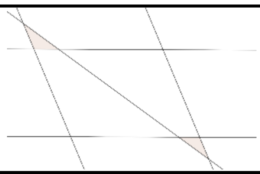
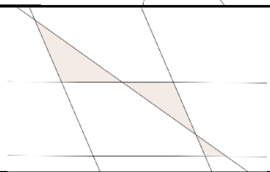
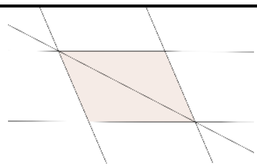
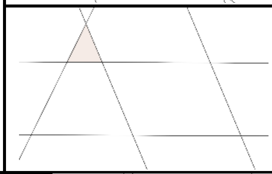
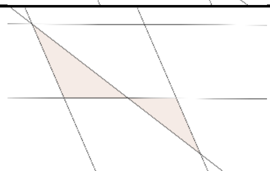
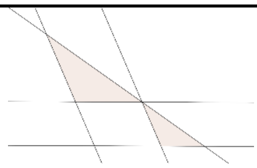
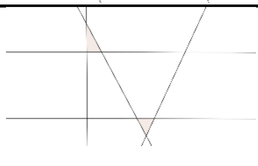
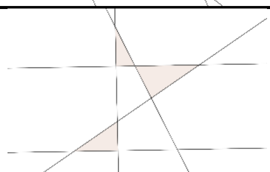
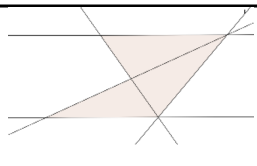
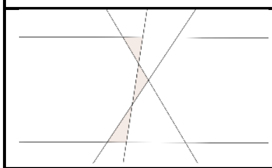
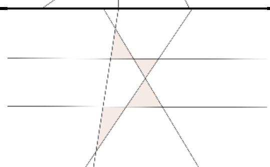
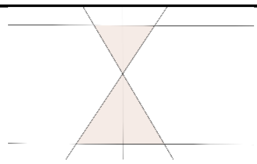
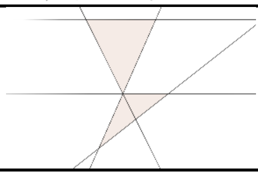
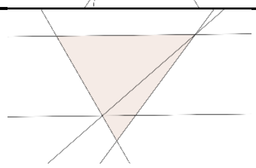
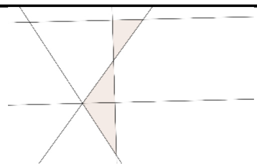
（五）旁心：在本研究旁心以 $I_{(\text{內角平分線通過的點})}$表示。

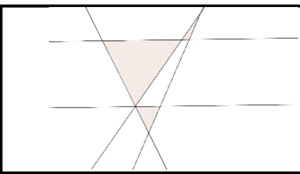
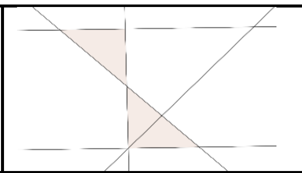
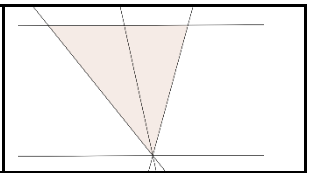
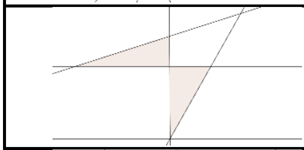
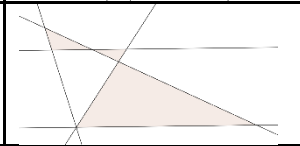
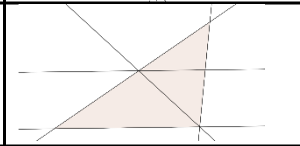
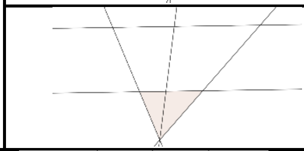
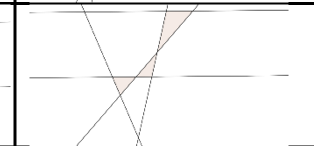
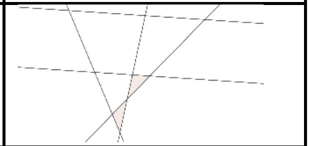
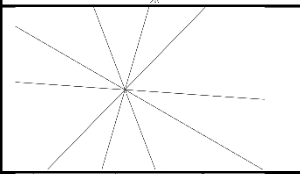
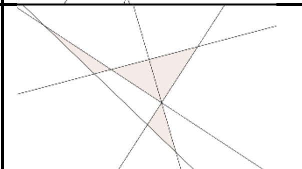
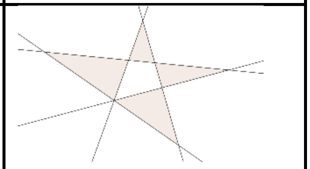
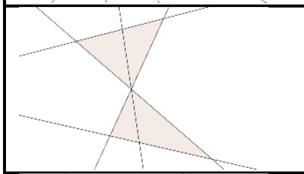
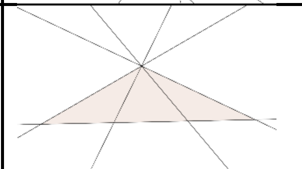
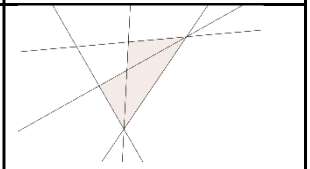
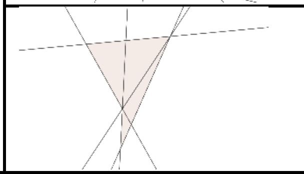
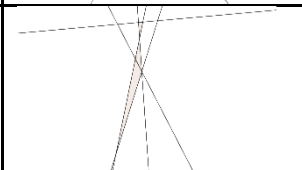
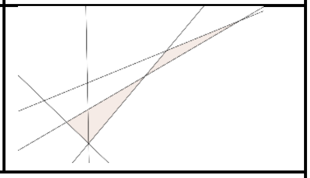
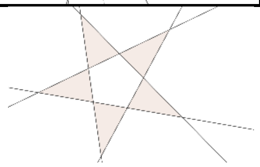
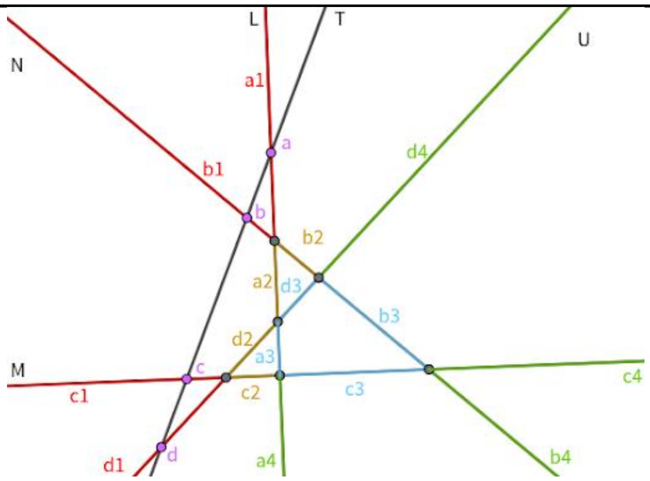
（六）外心：在本研究外心以 O 表示。

（七）垂心：在本研究垂心以 H 表示。

五線繪製三角形

如下表，我們將五線繪製三角形的所有情況列出：

五線平行				
四線平行				
三線平行	+兩平行			
	+兩不平行			
				
兩線平行	+兩平行			
				
	+三不平行			
				
				

				
				
				
五線不平行	有三條線或以上有同一交點			
				
				
	無三條線或以上有同一交點			
		 如上圖，四條不平行的直線 M、N、L、U 呈現 2 個不貼合的三角形，且無三條線或以上有同一交點。討論第五條直線 T 會經過前四條線的哪個部分(例:直線 T 經 a1,b1,c1,d1)，且直線 T 不平行前四條線、不經過前四條線任意兩條線的交點，共有 256 種排列組合可能，減去不可能出現的相交情形，共有 36 種可能 T 線段會經過的地方，數量龐大因此不列入本次的研究。		

後面研究僅探討至少三個相似或全等的三角形作為研究的圖片。

研究目的一：探討五條直線繪製三個相似及全等三角形之情形

（一）[已知]：如圖一，L1//L2；M1//M2；L1 分別與 M1、M2 交於 B、D 兩點；L2 分別與 M1、M2 交於 H、F 兩點；截線 T 分別與 L1、L2、M1、M2 交於 C、G、A、E 四點，其中兩點 C、E 在▱BDFH 相鄰兩邊上。形成△ABC、△CDE、△EFG 三個三角形。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 為三個相似三角形。

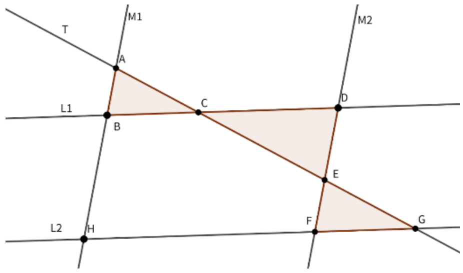
[證明]：

在△ABC、△CDE、△EFG 中；

由對頂角可知，∠ECD=∠ACB；∠FEG=∠DEC；

由內錯角可知，∠DEC=∠A；∠F=∠D=∠B；

推得△ABC~△EDC~△EFG（AA 相似性質）。



(圖一)

（二）[已知]：如圖二，L1//L2；M⊥T；N⊥L1；L1 分別與 M、N、T 交於 A、B、D 三點；L2 分別與 M、N、T 交於 F、H、G 三點；N 分別與 M、T 交於 C、I 兩點；M 與 T 交於 E 點；E 點在 L1、L2 之間；D、E、F、G 在直線 N 的同側。形成△ABC、△EFG、△GHI 三個三角形。

[求證]：△ABC、△EFG、△GHI 為三個相似三角形。

[證明]：

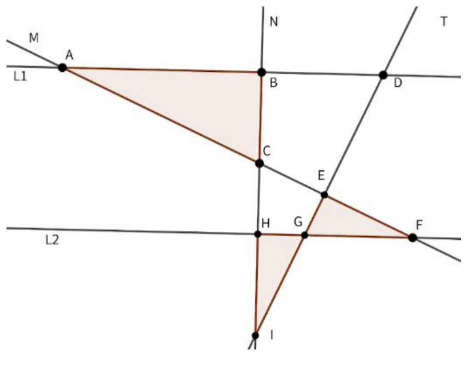
在△ABC、△EFG、△GHI 中；

由 M⊥T，N⊥L1，可知，∠B=∠E=∠H=90°；

由對頂角可知，∠FGE=∠HGI；

由內錯角可知，∠A=∠F；

推得△ABC~△FEG~△IHG（AA 相似性質）。



(圖二)

（三）[已知]：如圖三，L1//L2；M⊥T；N⊥L1；L1 分別與 M、N、T 交於 A、B、H 三點；L2 分別與 M、N、T 交於 I、F、G 三點；N 分別與 M、T 交於 C、E 兩點；M 與 T 交於 D 點；D 在 L1、L2 之間；D、H、I 皆在直線 N 的同側；D、G 在直線 N 的異側，A、G 在直線 N 的同側。形成△ABC、△CDE、△EFG 三個三角形。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 為三個相似三角形。

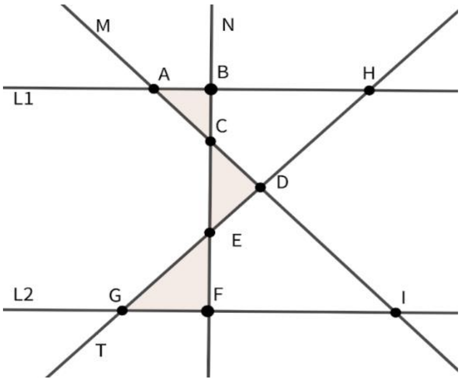
[證明]：

在△ABC、△CDE、△EFG 中；

由 M⊥T，N⊥L1 可知，∠B=∠D=∠F=90°；

由對頂角可知，∠BCA=∠ECD；∠DEC=∠GEF；

推得△ABC~△EDC~△EFG（AA 相似性質）。



(圖三)

（四）[已知]：如圖四，L1//L2，M1//M2，L1 分別與 M1、M2 交於 B、D 兩點；L2 分別與 M1、M2 交於 H、F 兩點；截線 T 分別與 L1、L2、M1、M2 交於 C、G、A、E 四點，其中兩點 C、E 為▱BDFH 相鄰兩邊$\overline{BD}$、$\overline{DF}$的中點。形成△ABC、△CDE、△EFG 三個三角形。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 為三個全等三角形。

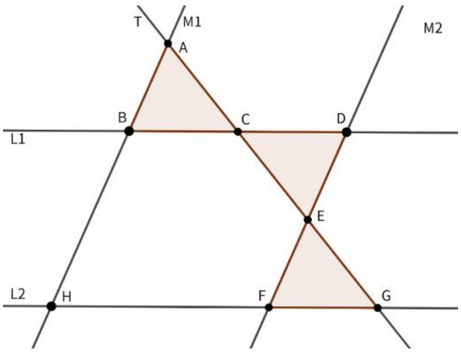
[證明]：

在△ABC、△CDE、△EFG 中；

由對頂角可知∠ECD=∠ACB；∠FEG=∠DEC；

由內錯角可知∠DEC=∠A；∠F=∠D=∠B；

由 C、E 為$\overline{BD}$、$\overline{DF}$的中點可知，$\overline{BC}$=$\overline{CD}$、$\overline{DE}$=$\overline{EF}$；
推得△ABC≅△EDC≅△EFG（ASA 全等性質）。



(圖四)

（五）[已知]：如圖五，L1//L2，M⊥T，M 交 N 於 A 點；L1 分別與 M、N 交於 B、A 兩點；L2 分別與 M、T 交於 D、E 兩點；M 交 T 於 C 點；$\overline{BD}$和$\overline{AE}$互相平分；N 分別與 MT 交於 DA 兩點。形成△ABC、△ACD、△CDE 三個三角形。

[求證]：△ABC、△ACD、△CDE 為三個全等三角形。

[證明]：

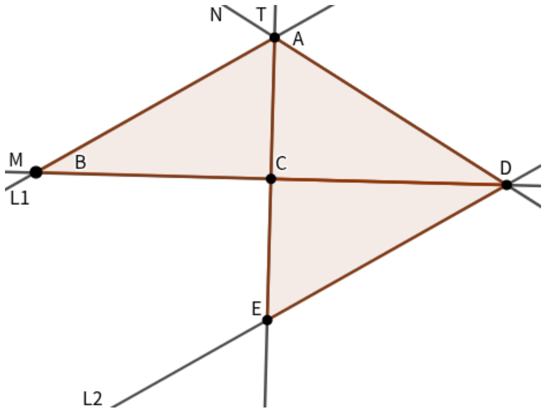
在△ABC、△ACD、△CDE 中；

由 M⊥T 可知，∠ACB=∠DCA=∠ECD=90°；

由內錯角可知，∠B=∠CDE；∠BAC=∠DEC；

由$\overline{BD}$和$\overline{AE}$互相平分可知，$\overline{AC} = \overline{CE}$；$\overline{BC}$=$\overline{CD}$；

推得△ABC≅△ADC≅△EDC（SAS 全等性質)。



(圖五)

研究目的二：探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形之情形

（一）[已知]：如圖六，L1//L2； L1 分別與 M、T 交於 A、C 兩點；L2 分別與 M、T 交於 G、E 兩點；N 為$\overline{AC}$、$\overline{EG}$的中垂線；N 分別與 L1、L2 交於 B、F 兩點；M、T 交於 D 點，D 在$\overline{BF}$上。形成△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 四個三角形。

[求證]：△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 為四個相似貼合三角形。

[證明]：

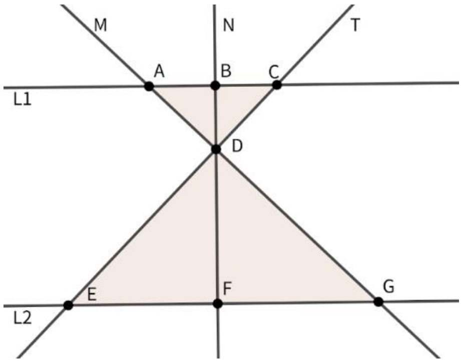
由 N⊥L1 可知，∠ABD=∠DBC=∠DFE=∠GFD=90°；

由 N 為$\overline{AC}$、$\overline{EG}$的中垂線可知，$\overline{AB}$=$\overline{BC}$；$\overline{EF}$=$\overline{FG}$；

推得△ABD≅△CBD；△DEF≅△DGF（SAS 全等性質）；

由對頂角可知，∠BDA=∠FDG，∠CDB=∠EDF；

推得△ABD~△CBD~△EFD~△GFD（AA 相似性質）。



(圖六)

（二）[已知]：如圖七，L1//L2，L1 分別與 M、T 交於 A、C 兩點；L2 分別與 M、T 交於 G、E 兩點；N 為$\overline{AC}$、$\overline{EG}$的中垂線；N 分別與 L1、L2 交於 B、F 兩點；MT 交於 D 點；D 點平分$\overline{BF}$。形成△ABD、△BCD、△DFE、△DFG 四個三角形。

[求證]：△ABD、△BCD、△DFE、△DFG 為四個全等貼合三角形。

[證明]：

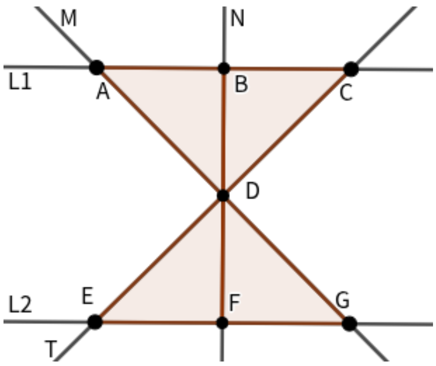
由 N⊥L1 可知，∠ABD=∠DBC=∠DFE=∠GFD =90°；

由 N 為$\overline{AC}$、$\overline{EG}$的中垂線可知，$\overline{AB}$=$\overline{BC}$；$\overline{EF}$=$\overline{FG}$；

由對頂角可知，∠BDA=∠FDG，∠CDB=∠EDF；

由 D 點平分$\overline{BF}$可知，$\overline{BD}$=$\overline{DF}$

推得△ABD≅△CBD≅△EFD≅△GFD（SAS 全等性質）。



(圖七)

（三）[已知]：如圖八，L1//L2，N⊥L1，M⊥T， L1 分別與 M、N、T 交於 C、B、D 三點；L2 分別與 M、N、T 交於 F、H、G 三點；N 分別與 M、T 交於 A、I 兩點；M 和 T 交於 E 點；E 點在 L1、L2 之間。E、C、D、F、G 皆在直線 N 的同側。形成△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 四個三角形。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 為四個相似不貼合三角形

[證明]：

由 N⊥L1，M⊥T 可得，∠B=∠H=∠DEC=∠GEF=90°；

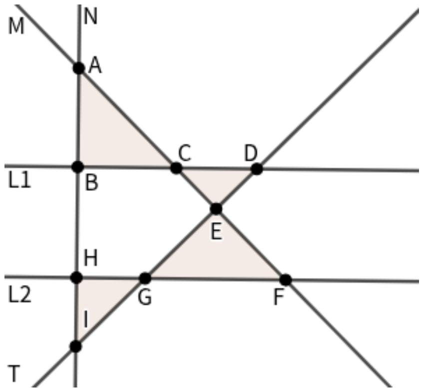
由對頂角可知∠ACB=∠ECD；∠FGE=∠HGI；

推得△ABC~△DEC（三角形 AA 相似性質）。

推得△EFG~△HIG（三角形 AA 相似性質）。

由內錯角可知∠ECD=∠EFG；∠CDE=∠FGE；

推得△ABC~△DEC~△EFG~△HIG（三角形 AA 相似性質）。



(圖八)

（四）[已知]：如圖九，L1//L2，N⊥L1，M⊥T，L1 分別與 M、N、T 交於 C、B、D 三點；L2 分別與 M、N、T 交於 F、H、G 三點，N 分別與 M、T 交於 A、I 兩點；M 與 T 交於 E 點；E 點在 L1、L2 之間；$\overline{CD}=\overline{GF}$；$\overline{BC}$=$\overline{CE}$；且 C、D、E、F、G 皆在直線 N 的同側。形成△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 四個三角形。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 為四個全等不貼合三角形。

[證明]：

∠ABC=∠DEC=∠GEF=∠IHG=90°；

由 L1//L2，$\overline{CD}=\overline{GF}$，∠DEC=∠GEF=90°可知，

四邊形 CDFG 為正方形；

推得$\overline{CE}=\overline{DE}=\overline{EG}=\overline{EF}$；

推得△CDE≅△FGE；

由對頂角可知，∠ECD=∠ACB =45°；

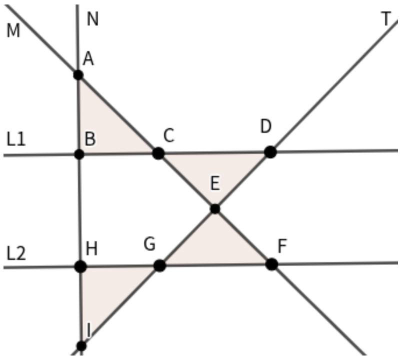
由對頂角可知，∠FGE=∠HGI=45°；

推得$\overline{AC}=\overline{IG}$；

推得△ABC≅△GHI（三角形 ASA 全等性質）；

由$\overline{BC}$=$\overline{CE}$，

推得△ABC≅△CDE≅△EFG≅△GHI（三角形 ASA 全等性質）。



(圖九)

（五）[已知]：如圖十，五邊形 ABCDE 為正五邊形，將此正五邊形的五邊延長。形成

△ABF、△BCG、△CDH、△DEI、△AEJ 五個三角形。

[求證]：△ABF、△BCG、△CDH、△DEI、△AEJ 為五個全等三角形。

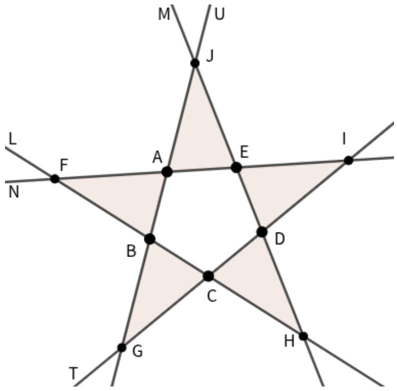
[證明]：

∠FAB=∠GBC=∠HCD=∠IDE=∠JEA=72°；

∠BFA=∠CGB=∠DHC=∠EID=∠EJA=36°；

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{AE}$；

推得△ABF≅△BCG≅△CDH≅△DEI≅△AEJ（AAS 全等性質）。



(圖十)

研究目的三：探討五條直線繪製三個三角形的五心共線、重疊之情形

註：不共線或不重疊的五心，將不會在圖片中顯示。

（一）[已知]：如圖十一，△ABC、△CDE、△EFG 是圖一畫法繪製的三個三角形。分別在 △ABC、△CDE、△EFG 畫出三個旁心。I_{C2}、I_{E1} 是△CDE 的旁心。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 的旁心會共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠DCA=∠BCE；

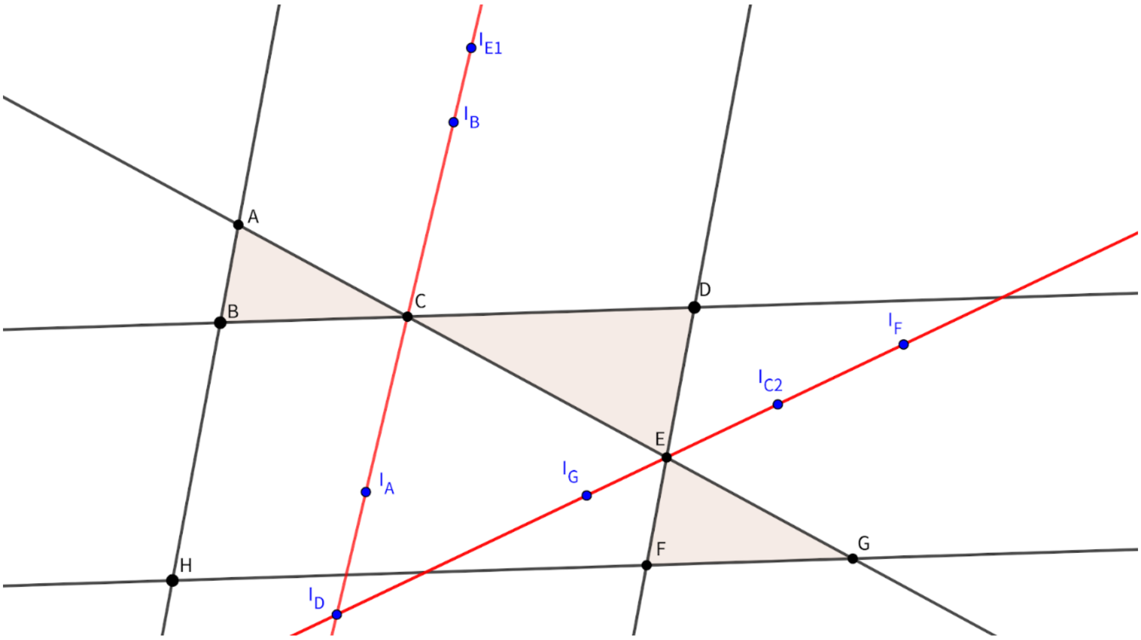
在△ABC、△CDE 中，I_A、I_B、I_D、I_{E1} 四個旁心都落在∠DCA、∠BCE 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠CEF=∠GED；

在△CDE、△EFG 中，I_{C2}、I_D、I_F、I_G 四個旁心都落在∠CEF、∠GED 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十一)

（二）[已知]：如圖十二，△ABC、△EFG、△GHI 是圖二畫法繪製的三個三角形。分別在△ABC、△EFG、△GHI 畫出三個旁心。

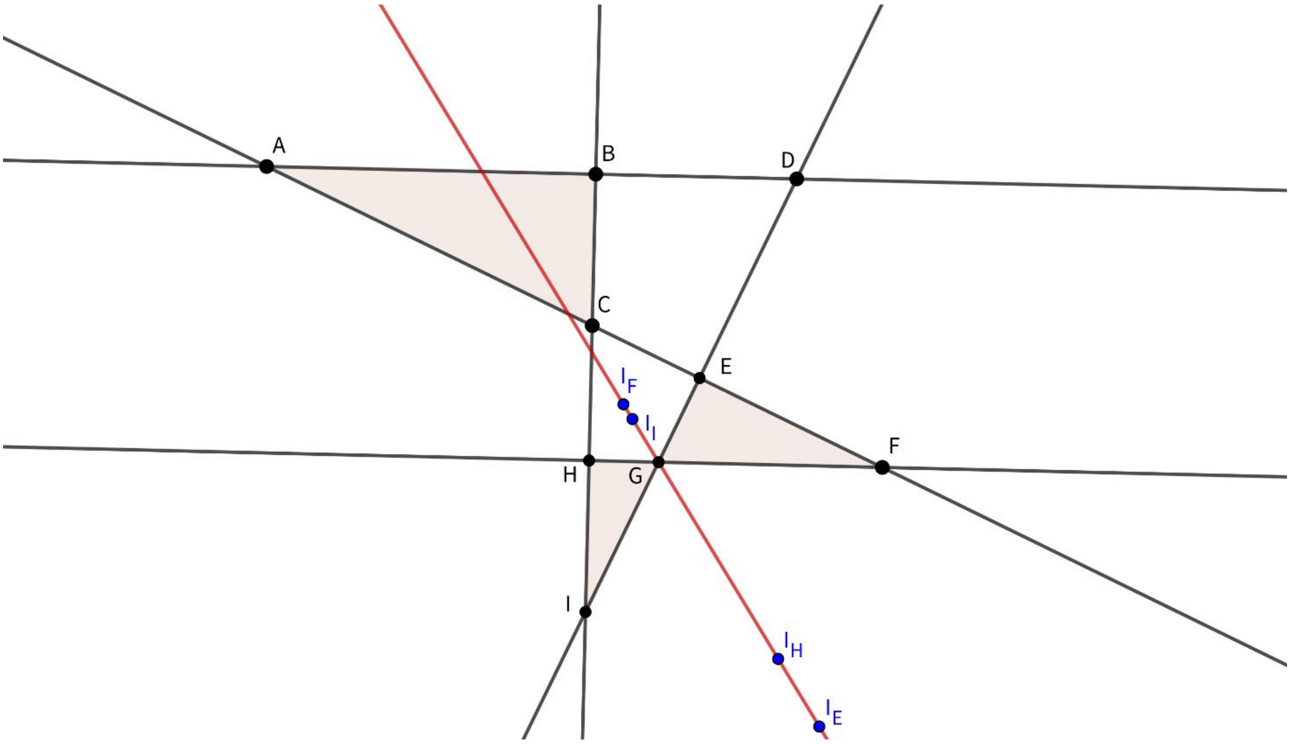
[求證]：△ABC、△EFG、△GHI 的旁心會共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠EGH=∠IGF；

在△EFG、△GHI 中，I_E、I_F、I_H、I_I 四個旁心都落在∠EGH、∠IGF 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十二)

（三）[已知]：如圖十三，△ABC、△CDE、△EFG 是圖三畫法繪製的三個三角形。分別在 △ABC、△CDE、△EFG 畫出三個旁心。I_{C2}、I_{E1} 是△CDE 的旁心。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 的旁心會共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠ACE=∠DCB；

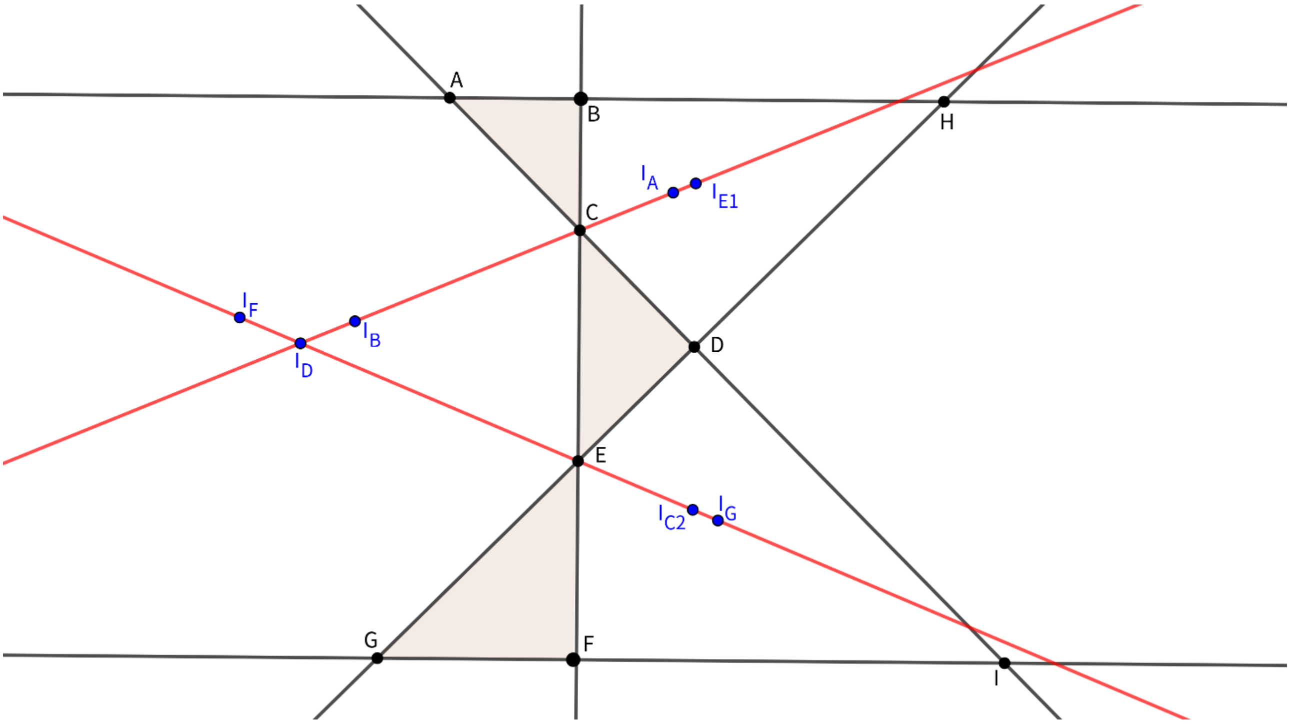
在△ABC、△CDE 中，I_A、I_B、I_D、I_{E1} 四個旁心都落在∠ACE、∠DCB 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠CEG=∠FED；

在△CDE、△EFG 中，I_{C2}、I_D、I_F、I_G 四個旁心都落在∠CEG、∠FED 的角平分線上。

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十三)

（四）[已知]：如圖十四，△ABC、△CDE、△EFG 是圖四畫法繪製的三個三角形。分別在△ABC、△CDE、△EFG 畫出三個旁心。I_{C2}、I_{E1} 是△CDE 的旁心。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 的旁心會共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠DCA=∠BCE；

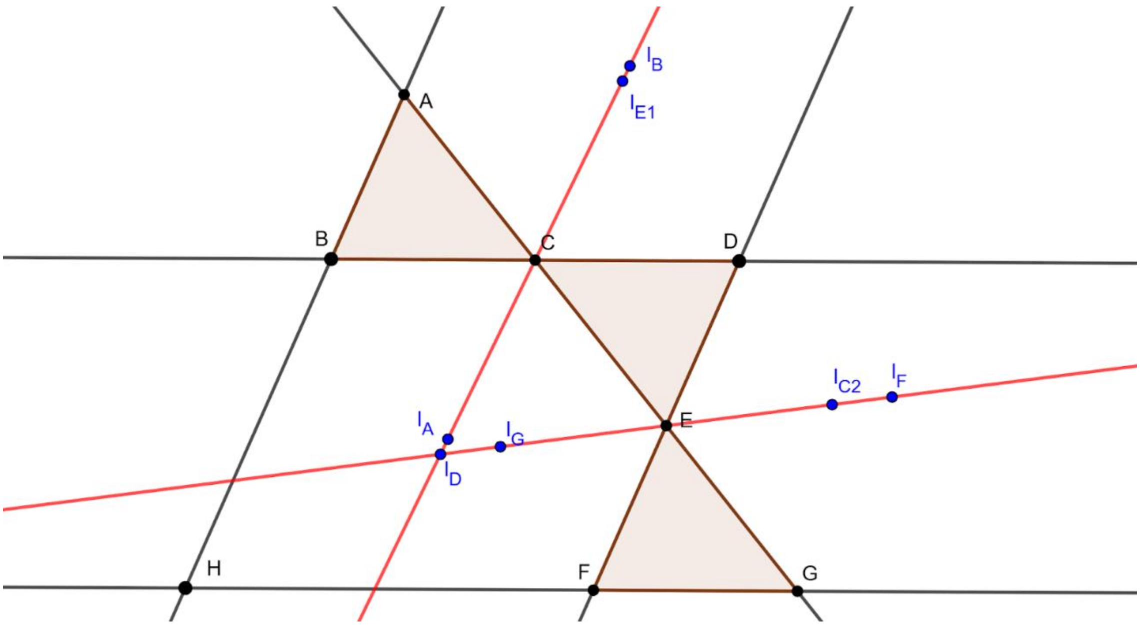
在△ABC、△CDE 中，I_A、I_B、I_D、I_{E1} 四個旁心都落在∠DCA、∠BCE 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠CEF=∠GED；

在△CDE、△EFG 中，I_{C2}、I_D、I_F、I_G 四個旁心都落在∠CEF、∠GED 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十四)

（五）[已知]：如圖十五，△ABC、△ACD、△CDE 是圖五畫法繪製的三個三角形。分別在畫出三個旁心。I_{A1}、I_{C1}是△ABC 的旁心，I_{A2}、I_{C2}、I_{D1}是△ACD 的旁心，I_{C3}、I_{D2}是△CDE 的旁心。

[求證]：△ABC、△ACD、△CDE 的旁心會共線。

[證明]：

由對頂角可知∠BCE=∠DCA；

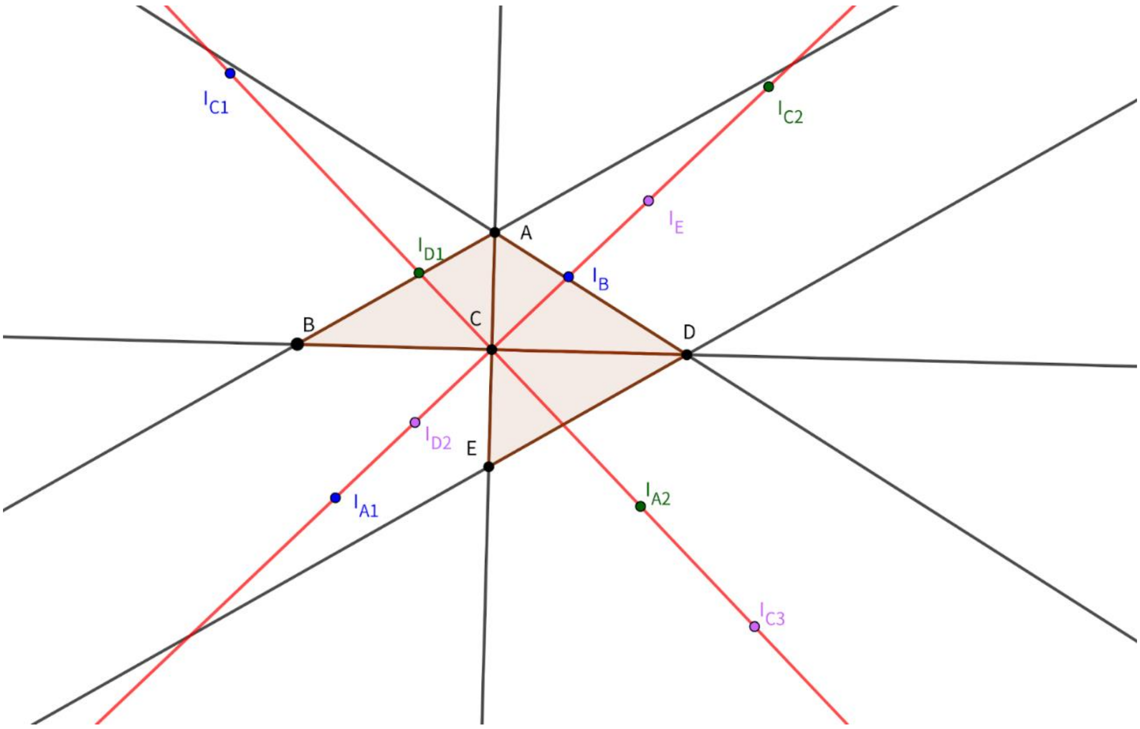
在△ABC、△ACD、△CDE 中，I_{A1}、I_B 、I_{C2} 、I_{D2}、I_E，五個旁心都落在∠BCE、∠DCA 的角平分線上；

推得會有 5 個旁心共線。

由對頂角可知∠ACB =∠ECD；

在△ABC、△ACD、△CDE 中，I_{A2}、I_{C1}、I_{C3}、I_{D1}，四個旁心都落在∠ACB、∠ECD 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十五)

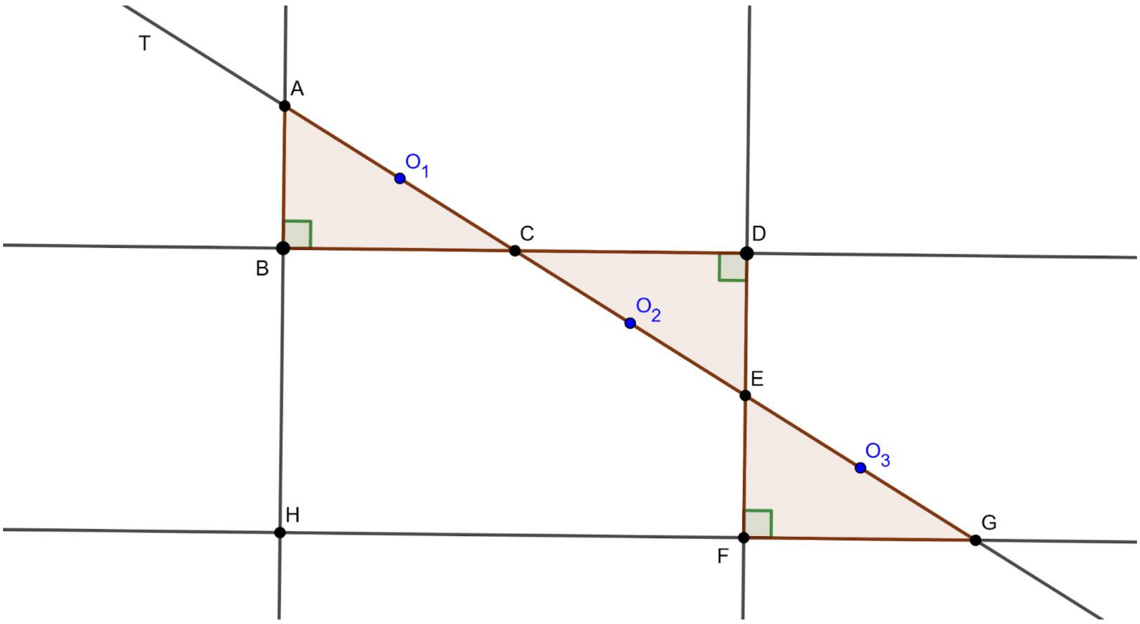
（六）[已知]：如圖十六，△ABC、△CDE、△EFG 是用圖一畫法繪製的三個直角三角形。

分別在△ABC、△CDE、△EFG 畫出外心 O_1、O_2、O_3。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG 的外心共線。

[證明]：

在△ABC、△CDE、△EFG 中，此畫法中，由截線 T 會通過三個三角形的三條斜邊，且直角三角形的外心位於斜邊中點，可知三個三角形的外心共線。



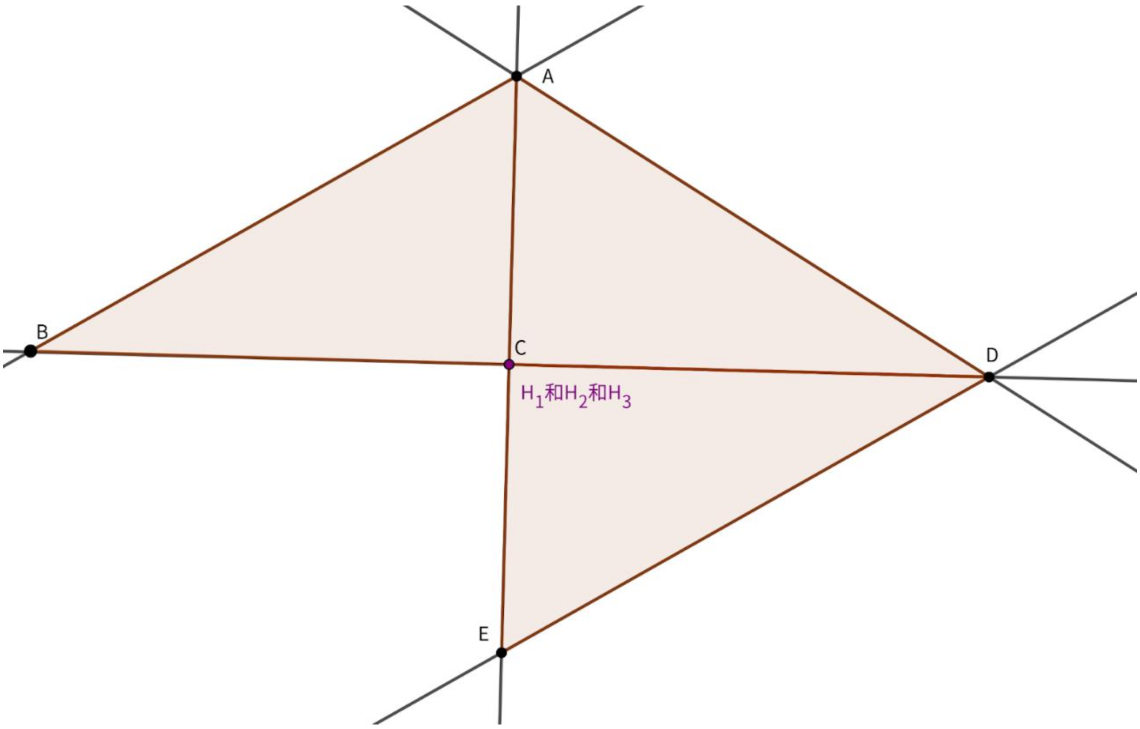
(圖十六)

（七）[已知]：如圖十七，△ABC、△ACD、△CDE 是用圖五畫法繪製的三個三角形，分別在△ABC、△ACD、△CDE 畫出垂心 H_1、H_2、H_3。

[求證]：△ABC、△ACD、△CDE 的垂心重疊。

[證明]：

在△ABC、△ACD、△CDE 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_1、H_2、H_3 重疊在 C 點。



(圖十七)

（八）三個相似或全等三角形的內心、重心無法共線或重疊，在本研究中不討論。

研究目的四：探討五條直線繪製至少四個三角形的五心共線、重疊之情形

（一）[已知]：如圖十八，△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 是圖六畫法繪製的四個三角形，分別在 △ABD、△BCD、△DEF、△DFG 畫出三個旁心。I_{B1} 是△ABC 的旁心。I_{B2} 是△BCD 的旁心。I_{F1} 是△DEF 的旁心。I_{F2} 是△DFG 的旁心。

[求證]：△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 的旁心共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠ADF=∠GDB；

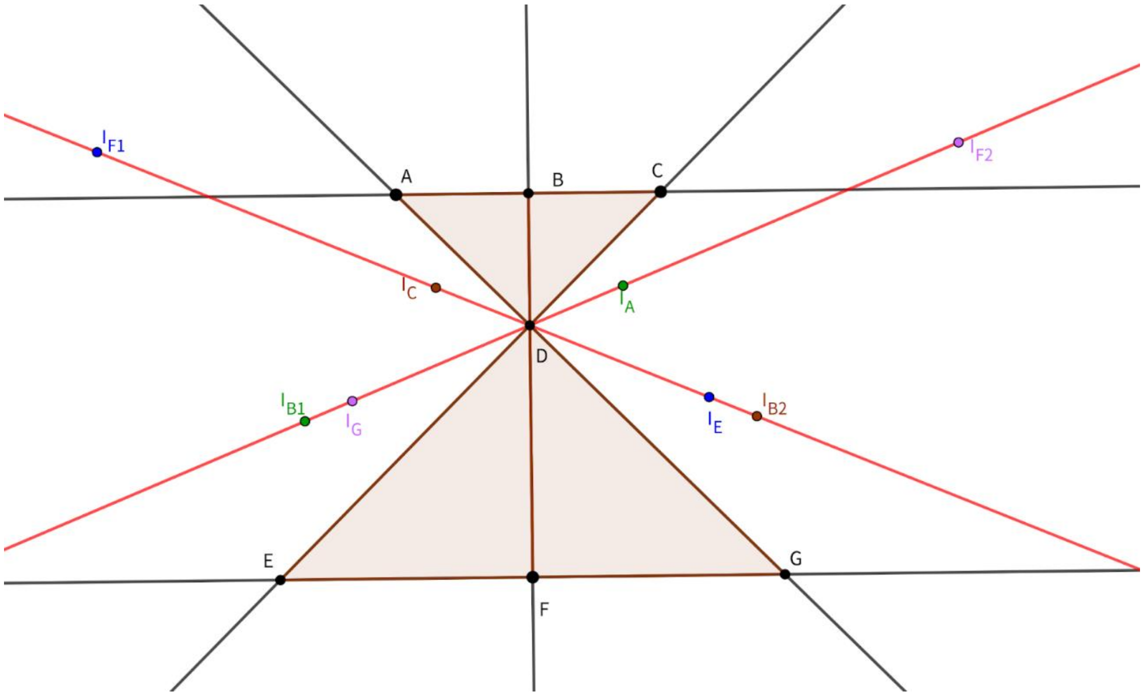
在△ABD 和△DFG 中，I_A、I_{B1}、I_{F2}、I_G 四個旁心都落在∠ADF、∠GDB 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠BDE=∠FDC；

在△BCD、△DEF 中，I_{B2}、I_C、I_E、I_{F1} 四個旁心都落在∠BDE、∠FDC 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十八)

（二）[已知]：如圖十九，△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 是圖七畫法繪製的四個三角形，分別在△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 畫出三個旁心。I_{B1} 是△ABC 的旁心。I_{B2} 是△BCD 的旁心。I_{F1} 是△DEF 的旁心。I_{F2} 是△DFG 的旁心。

[求證]：△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 的旁心共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠ADF=∠GDB；

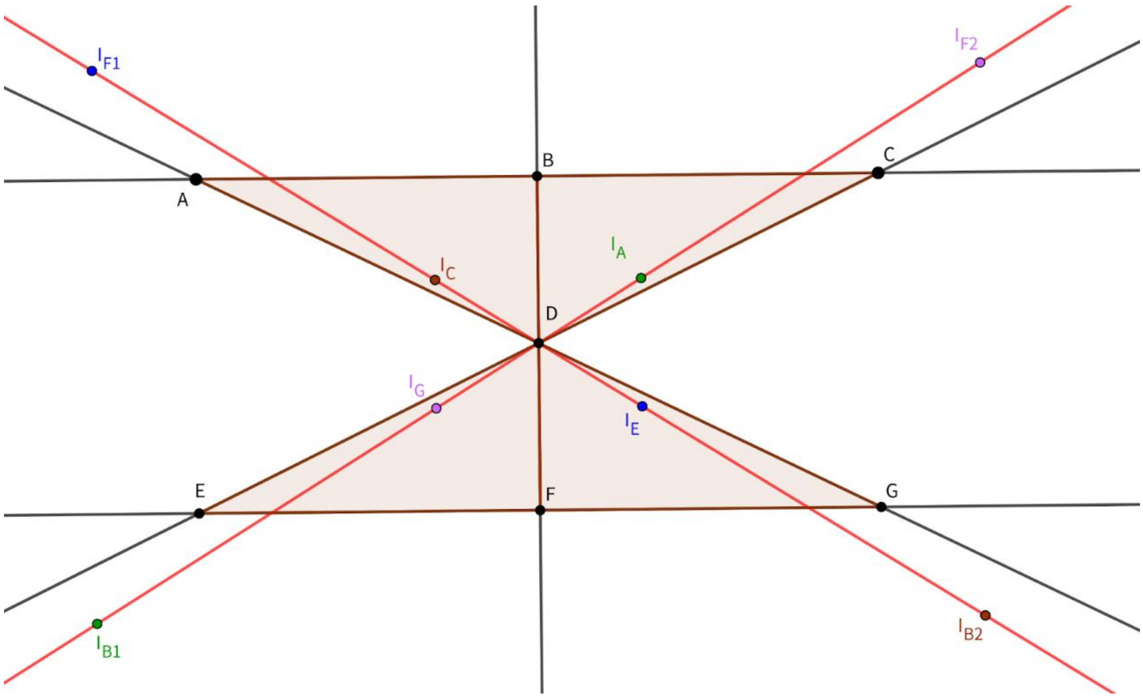
在△ABD 和△DFG 中，I_A、I_{B1}、I_{F2}、I_G 四個旁心都落在∠ADF、∠GDB 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠BDE=∠FDC；

在△BCD 和△DEF 中，I_{B2}、I_C、I_E、I_{F1} 四個旁心都落在∠BDE、∠FDC 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖十九)

（三）[已知]：如圖二十，△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 是圖八畫法繪製的四個三角形，分別在△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 畫出三個旁心。I_{C2}、I_{E1} 是△CDE 的旁心。I_{E2}、I_{G1} 是△EFG 的旁心。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 的旁心共線。

[證明]：

由對頂角可知，∠DCA=∠BCE；

在△ABC 和△CDE 中，I_A、I_B、I_D、I_{E1} 四個旁心都落在∠DCA、∠BCE 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠CEG=∠FED；

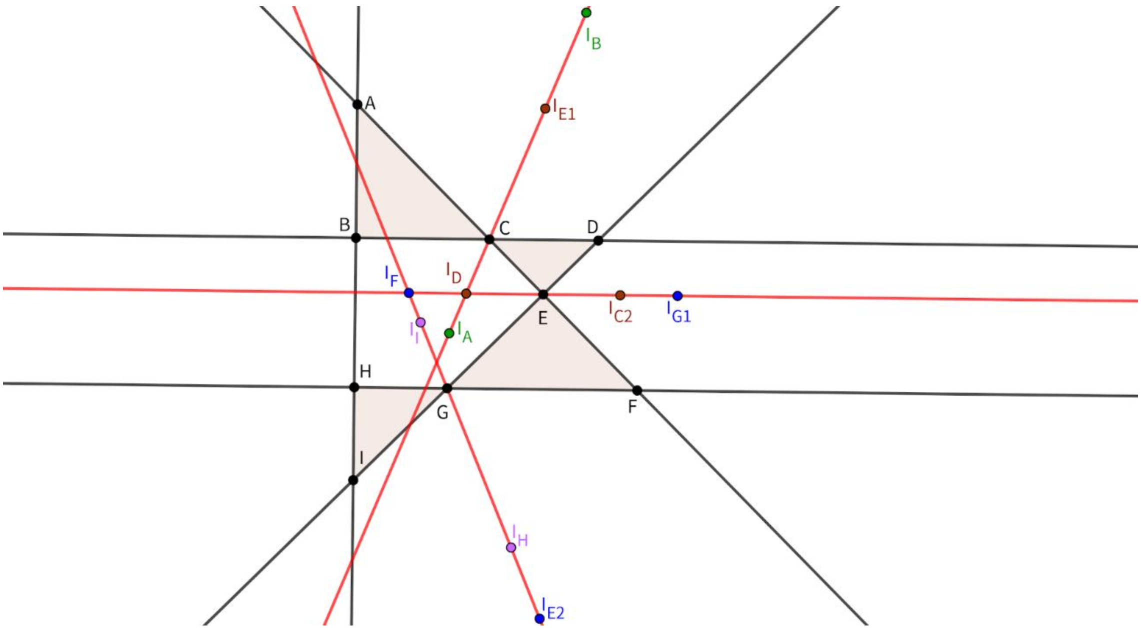
在△CDE 和△EFG 中，I_{C2}、I_D、I_F、I_G 四個旁心都落在∠CEG、∠FED 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。

由對頂角可知，∠EGH=∠IGF；

在△EFG 和△GHI 中，I_{E2}、I_F、I_H、I_I 都落在∠EGH、∠IGF 的角平分線上；

推得會有 4 個旁心共線。



(圖二十)

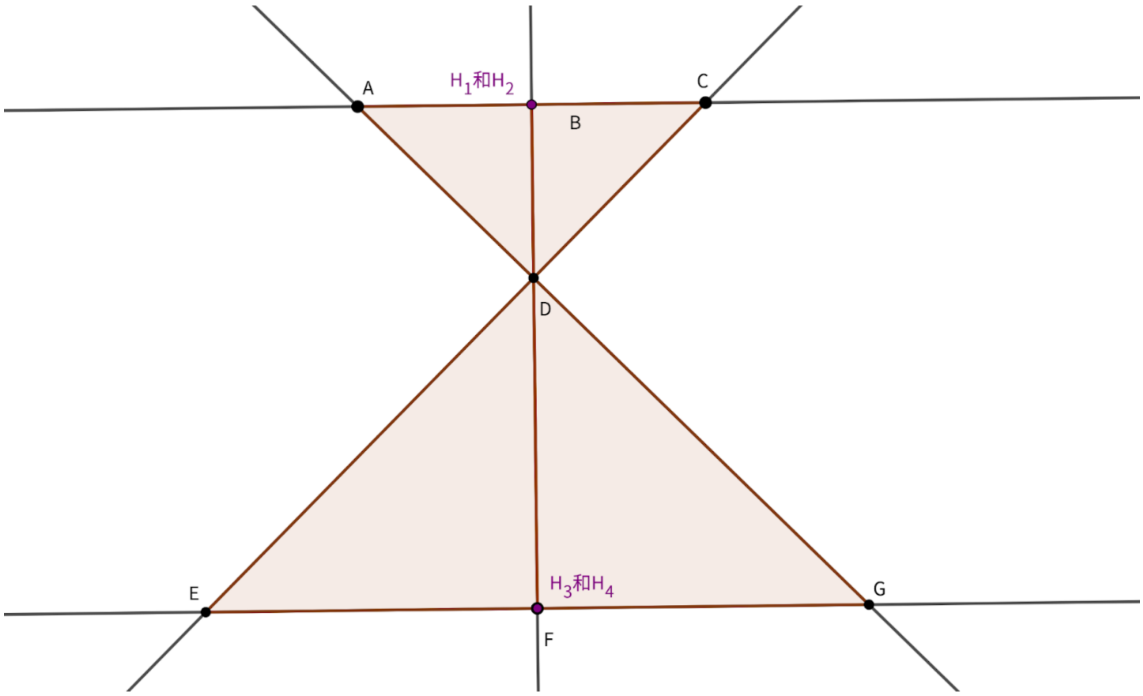
（四）[已知]：如圖二十一，△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 是圖六畫法繪製的四個三角形，分別在 △ABD、△BCD、△DEF、△DGF 畫出四個垂心 H_1、H_2、H_3、H_4。

[求證]：△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 的垂心重疊。

[證明]：

在△ABD、△BCD 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_1、H_2 重疊在 B 點。

在△DEF、△DFG 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_3、H_4 重疊在 F 點。



(圖二十一)

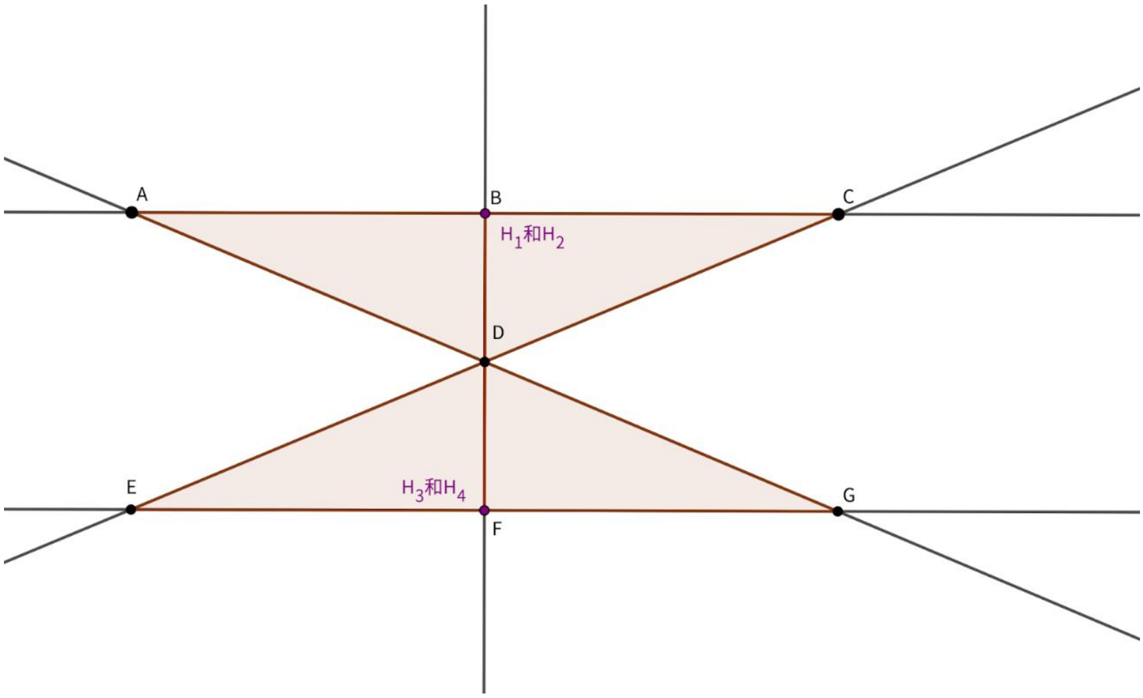
（五）[已知]：如圖二十二，△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 是圖七畫法繪製的四個三角形，分別在 △ABD、△BCD、△DEF、△DGF 畫出四個垂心 H_1、H_2、H_3、H_4。

[求證]：△ABD、△BCD、△DEF、△DFG 的垂心重疊。

[證明]：

在△ABD、△BCD 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_1、H_2 重疊在 B 點。

在△DEF、△DFG 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_3、H_4 重疊在 F 點。



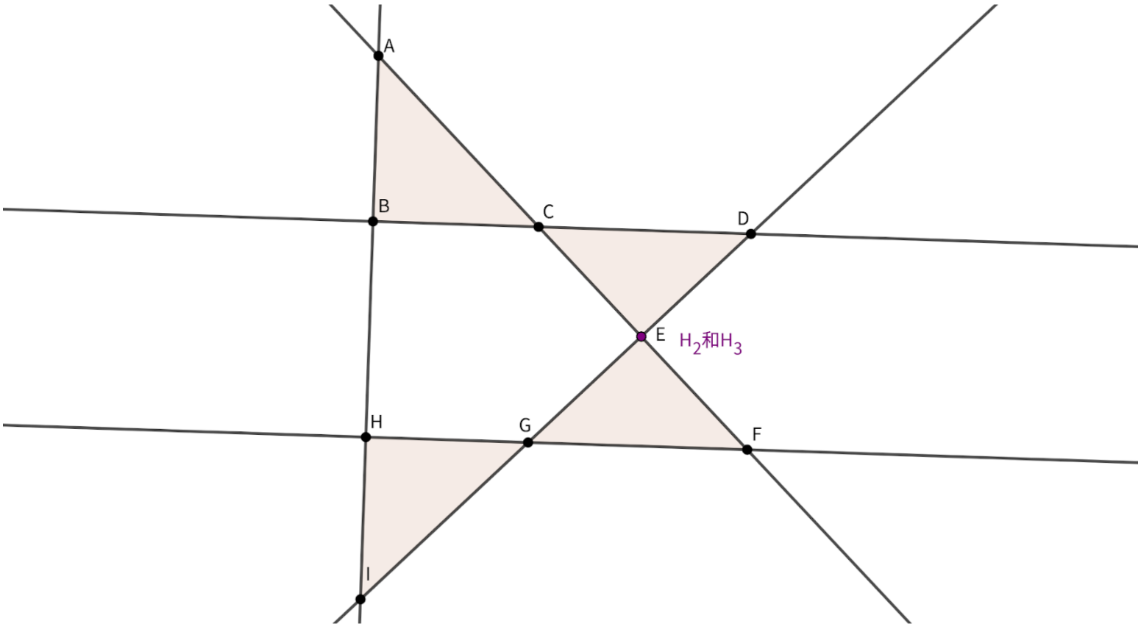
(圖二十二)

（六）[已知]：如圖二十三，△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 是圖八畫法繪製的四個三角形，分別在△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 畫出四個垂心 H_1、H_2、H_3、H_4。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 的垂心重疊。

[證明]：

在△CDE、△EFG 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_2、H_3 重疊在 E 點。



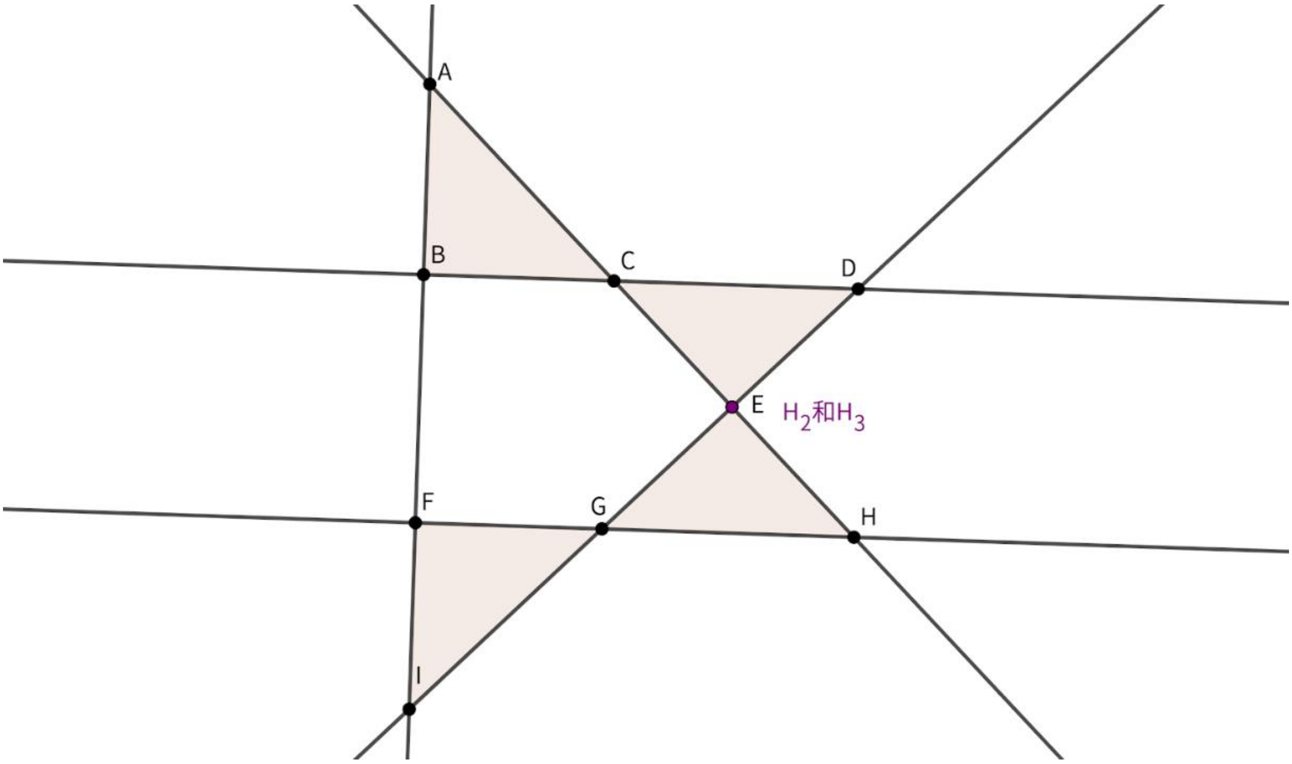
(圖二十三)

（七）[已知]：如圖二十四，△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 是圖九畫法繪製的四個三角形，分別在△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 畫出四個垂心 H_1、H_2、H_3、H_4。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 的垂心重疊。

[證明]：

在△CDE、△EFG 中，由直角三角形的垂心在直角頂點，可知 H_2、H_3 重疊在 E 點。



(圖二十四)

（八）四個相似或全等三角形的內心、外心、重心暫無特別發現，在本研究中不討論。

（九）將五個全等三角形的內心、外心、重心、垂心連接，皆會形成四個正五邊形。

肆、研究結果

一、探討五條直線繪製三個相似及全等三角形之情形

（一）兩組平行線和一條交於兩組平行線所形成的平行四邊形的相鄰兩邊的一截線，可得三個相似或全等三角形。

（二）一組平行線和一組互相垂直的直線，再加一條垂直於一組平行線的垂線。一組互相垂直的線的交點須在兩條平行線之間，兩條平行線和兩條垂直線的五個交點不皆在第五條垂線的同一側，可得三個相似或全等直角三角形。

（三）一組平行線和一組垂直線，兩條垂直線在兩條平行線內的兩線段，皆被垂直線的交點平分，和一條經過平行線和垂直線的兩個交點，可得三個全等三角形。

二、探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形之情形

（一）一組平行線和一組互相垂直的線，再加一條垂直於一組平行線的垂線。一組互相垂的線的交點須在兩條平行線之間，兩條平行線和兩條垂直線的五個交點皆在第五條垂線的同一側，可得四個相似或全等直角三角形。

（二）一組平行線和一條垂直此組平行線的垂線，再加兩條截線。兩截線交點落在垂線上，兩截線和平行線交點到垂線的距離相等，可得四個相似或全等直角三角形。

（三）將一個正五邊形的五邊延長至相交的點，可得五個全等三角形。

三、探討五條直線繪製三個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形

（一）三個三角形只有圖一畫法的直角三角形的外心共線。

（二）三個三角形的旁心會有一到兩組四個旁心共線，或是一組四個旁心共線、一組五個旁心共線。

（三）三個全等三角形只有圖五畫法的三個三角形垂心重疊。

四、探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形

（一）四個貼合三角形有兩組四個旁心共線。

（二）四個不貼合三角形有兩組四個旁心共線。

（三）四個貼合三角形有兩組兩個垂心重疊。

（四）四個不貼合三角形有一組兩個垂心重疊。

伍、討論

一、四個全等不貼合三角形旁心重疊

[已知]：如下圖，△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 是圖九畫法繪製的四個三角形。分別在△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 畫出旁心。I_{C2}、I_{E1} 是△CDE 的旁心。I_{E2}、I_{G1} 是△EFG 的旁心。

[求證]：△ABC、△CDE、△EFG、△GHI 的旁心會重疊

[證明]：

∠ABC 和∠ACD 的角平分線交於△ABC 的一旁心 I_B；連接$\overline{EI_B}$

在△ABI_B、△CEI_B 中；

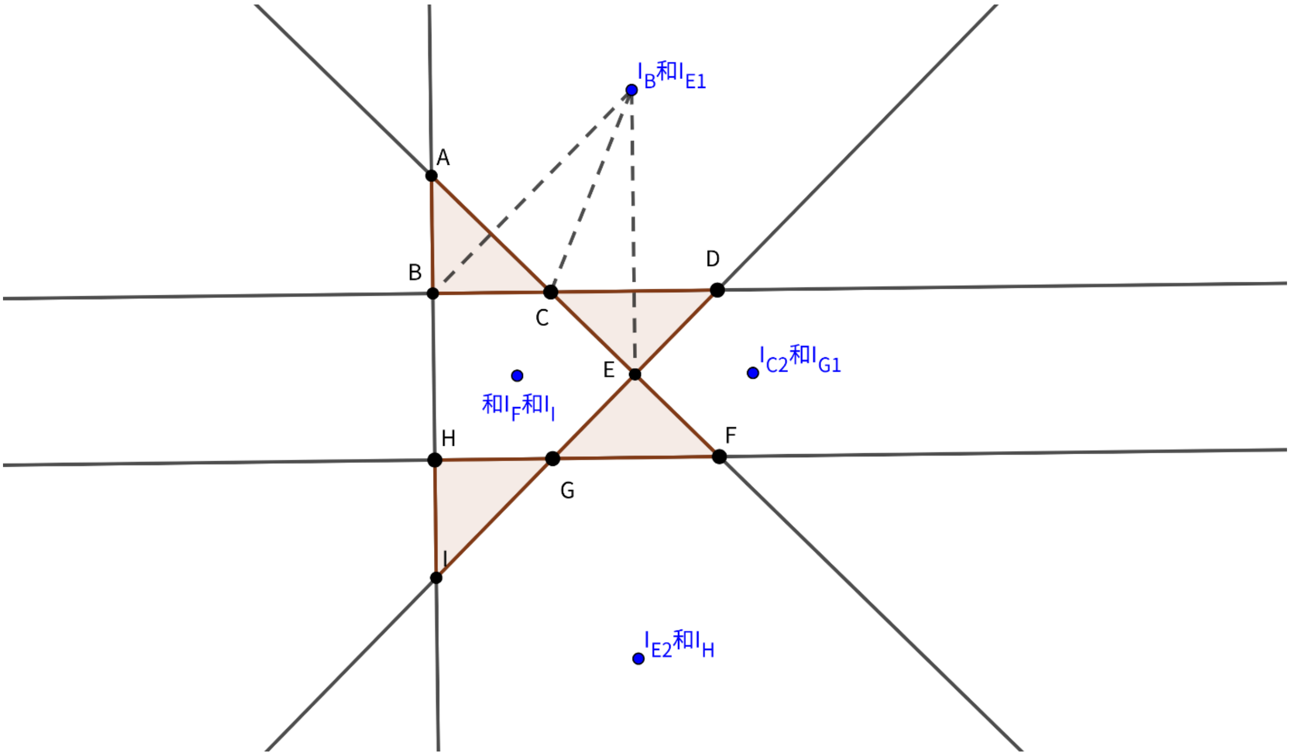
由角平分線$\overline{CI_B}$和對頂角可得∠BCI_B=∠ECI_B；$\overline{BC}$=$\overline{CE}$；$\overline{CI_B}$=$\overline{CI_B}$；

推得△BCI_B≅△ECI_B（SAS 全等性質）；

由對應角可得∠ABI_B=∠CBI_B=∠CEI_B=∠DEI_B=45°；

推得$\overline{EI_B}$為∠DEC 的角平分線，所以 I_B 重疊 I_{E1}。

同理可得其他的三角形旁心重疊。



(圖二十五)

二、五個全等三角形旁心重疊

[已知]：如下圖，△ABF、△BCG、△CDH、△DEI、△AEJ 是圖十畫法繪製的五個三角形。分別在△ABF、△BCG、△CDH、△DEI、△AEJ 畫出旁心。I_{A2}、I_{B1}是△ABF 的旁心。I_{B2}、I_{C1}是△BCG 的旁心。I_{C2}、I_{D1}是△CDH 的旁心。I_{D2}、I_{E1}是△DEI 的旁心。I_{A1}、I_{E2}是△AEJ 的旁心。

[求證]：△ABF、△BCG、△CDH、△DEI、△AEJ 的旁心會重疊。

[證明]：

∠ABF 和∠FAJ 的角平分線交於△ABF 的一旁心 I_{B1}；

連接$\overline{EI_{B1}}$；

在$\triangle ABI_{B1}$、$\triangle AEI_{B1}$中，

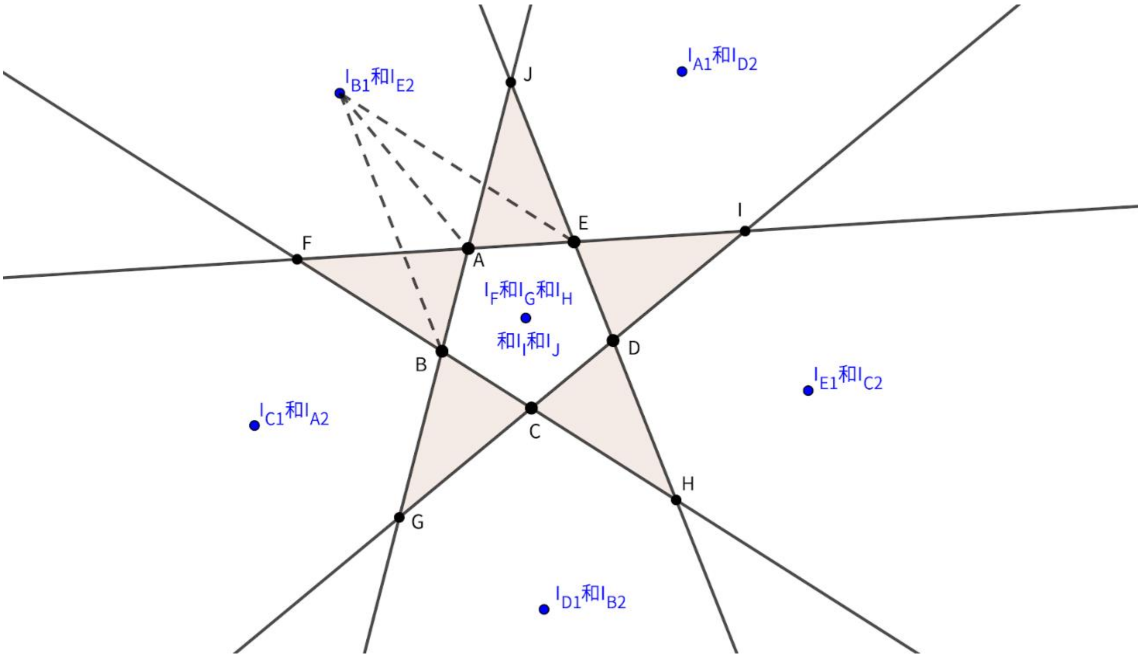
由角平分線$\overline{AI_{B1}}$和對頂角可知，$\angle BAI_{B1}=\angle EAI_{B1}$；$\overline{AB}=\overline{AE}$；$\overline{AI_{B1}}=\overline{AI_{B1}}$；

推得$\triangle ABI_{B1}\cong\triangle AEI_{B1}$（SAS 全等性質）；

由對應角可得：$\angle FBI_{B1}=\angle ABI_{B1}=\angle AEI_{B1}=\angle JEI_{B1}=36°$；

推得$\overline{EI_{B1}}$為∠JEA 的角平分線，所以 I_{B1} 重疊 I_{E2}。

同理可得其他的三角形旁心重疊。



(圖二十六)

陸、結論

一、兩組平行線和一條交於兩組平行線所形成的平行四邊形的相鄰兩邊的截線可得三個相似或全等三角形。(如圖一、圖四)

二、一組平行線和一組互相垂直的線，再加一條垂直於一組平行線的垂線。一組互相垂直的線的交點須在兩條平行線之間，兩條平行線和兩條垂直線的五個交點不皆在第五條垂線的同一側。此繪製方法可得三個相似或全等直角三角形。(如圖二、圖三)

三、一組平行線和垂直線，再加一條通過平行線和垂直線交點的截線可得三個全等三角形。(如圖五)

四、一組平行線和一條垂直此組平行線的垂線，再加兩條截線。兩線交點落在垂線上，且兩截線和平行線交點到垂線的距離相等。此繪製方法可得四個相似或全等直角三角形。(如圖六、圖七)

五、一組平行線和一組互相垂直的線，再加一條垂直於一組平行線的垂線。一組互相垂直的線的交點須在兩條平行線之間，兩條平行線和兩條垂直線的五個交點皆在第五條垂線的同一側。此繪製方法可得四個相似或全等直角三角形。(如圖八、圖九)

六、將正五邊形的五邊延長可得五個全等三角形。(如圖十)

七、三個三角形只有圖五畫法的三角形垂心重疊。(如圖十六)

八、三個三角形只有圖一畫法的直角三角形外心共線。(如圖十七)

九、四個三角形在圖六、圖七的畫法有兩組兩個垂心重疊。(如圖二十一、二十二)

十、四個三角形在圖八、圖九的畫法有一組兩個垂心重疊。(如圖二十三、二十四)

十一、 若兩個三角形的其中一個內角為對頂角，則兩個三角形的旁心會共線。(如圖十一~圖十五、圖十八~圖二十)

十二、 若兩個三角形的其中一個內角為對頂角，且以對頂角為端點的邊長呈現相等與折線的關係，則兩個三角形的旁心會重疊。(如圖二十五、圖二十六)

柒、未來展望

我們想嘗試將五線數量增加至六線至以上，三角形的數量也會上升，藉此觀察不同的圖形結構。同時也想試著將三角形間的相似與全等關係再加以分類，透過更精細的分類，列舉出更多例子，例如：五條線繪製的三個三角形中，其中有兩個三角形全等或相似，另一個則無。也想藉由觀察某些五心位置的對應關係，反推三角形的性質和圖形構圖方式，例如：從三角形外心共線，可推測三角形為直角三角形，且三條斜邊皆在一條直線上（如圖十四），且對於不同繪製方法下的不同情況加以說明。

捌、參考文獻資料

一、中華民國第 51 屆中小學科學展覽會-運用之妙，存乎於「心」。

二、中華民國第 58 屆中小學科學展覽會-用“心”。

三、旁切圓- 維基百科，自由的百科全書。

備註:

本報告內所呈現的所有圖片（未編號者及編號圖一至圖二十六）皆是作者透過 GeoGeBra 應用程式繪製完成。

【評語】030415

本作品以「心心相連—探討五線繪製三角形的性質」為題，聚焦於利用五條直線繪製至少三個三角形，並深入探討這些三角形的相似性、全等性以及其五心（外心、內心、重心、垂心、旁心）的共線或重疊現象。研究過程中運用 GeoGebra 幾何繪圖軟體進行模擬繪製與驗證，極大地提升了研究效率和精確度，是數學科展中值得肯定的作品。

作品海報

心心相連—探討五線繪製三角形的性質

摘要

本研究使用幾何繪圖軟體，利用五條直線繪製至少三個三角形，探討這些三角形的相似、全等、五心，分析其中存在的數學規律或幾何性質，主要探討為三角形的五心共線和重疊問題。本研究發現，五條直線有一定規則才能繪製出三到五個相似或全等三角形，且特定畫法的三個直角三角形外心會共線、三到四個三角形的垂心會重疊、三到五個三角形的旁心會共線或重疊。

研究目的

（一）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形之情形。
（二）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形之情形。
（三）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。
（四）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。

研究過程

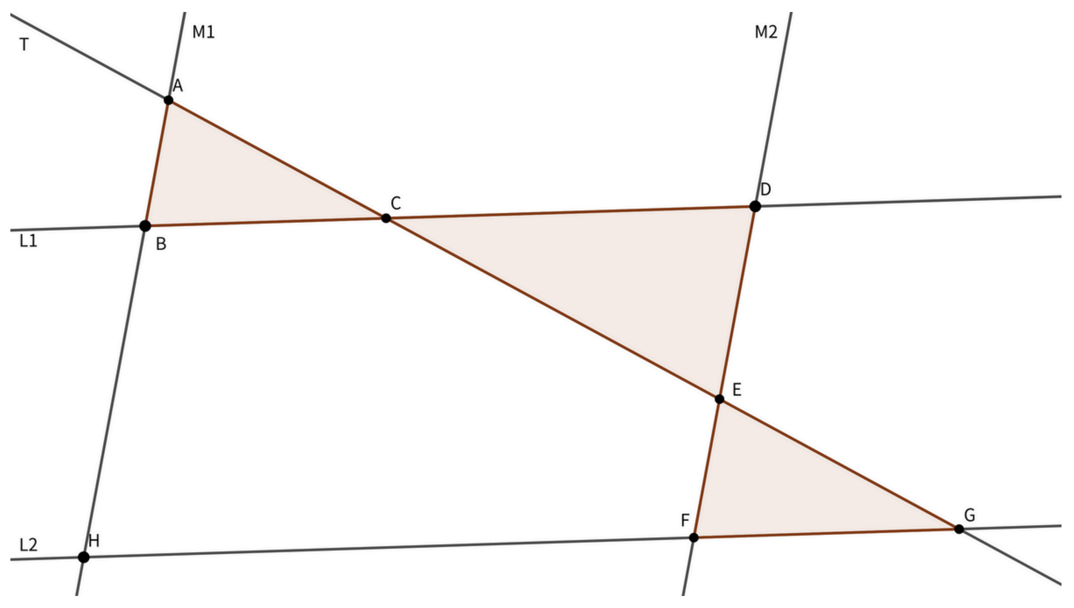
名詞定義

（一）三角形的記數規則：只計算三角形內沒有直線通過的三角形。
（二）貼合：指兩個三角形有一條共用邊。
（三）共線：本研究的共線是指多個三角形的同一種心（如旁心）落在同一直線上，
若是同一種心重疊，則不納入本研究的共線範圍內，只算一點，最少三點才算共線。
（四）重疊：本研究的重疊是指多個三角形的同一種心（如垂心）落在同一個點上。
（五）旁心：在本研究旁心以I(內角平分線通過的點)表示。
（六）外心：在本研究外心以O表示。
（七）垂心：在本研究垂心以H表示。

（一）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形之情形。

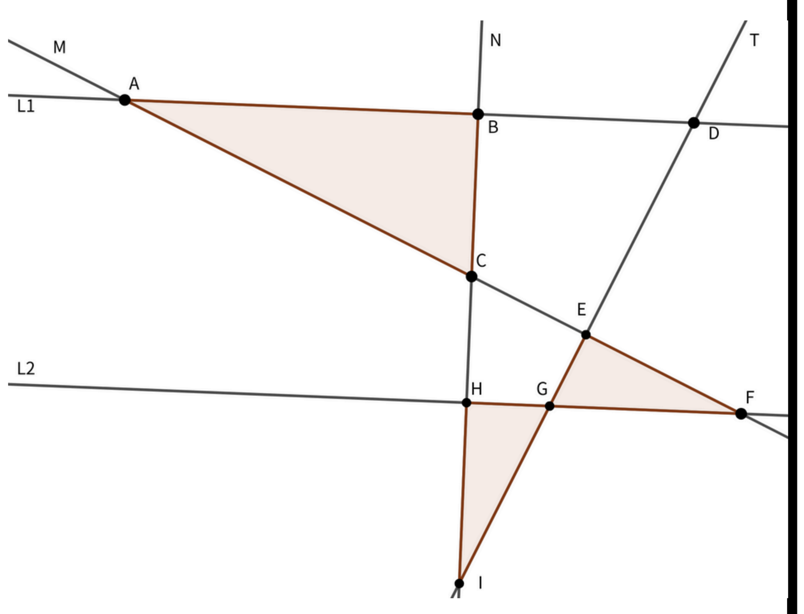
L1//L2；M1//M2；截線T分別與L1、L2、M1、M2交於C、G、A、E四點，其中兩點C、E在L1、L2、M1、M2形成的平行四邊形的相鄰兩邊上，可得三個相似三角形。

[證明]：
在△ABC、△CDE、△EFG中；
∵∠ECD=∠ACB；∠FEG=∠DEC（對頂角)；
∠DEC=∠A；∠F=∠D=∠B（內錯角)；
∴△ABC~△EDC~△EFG（AA相似性質）。



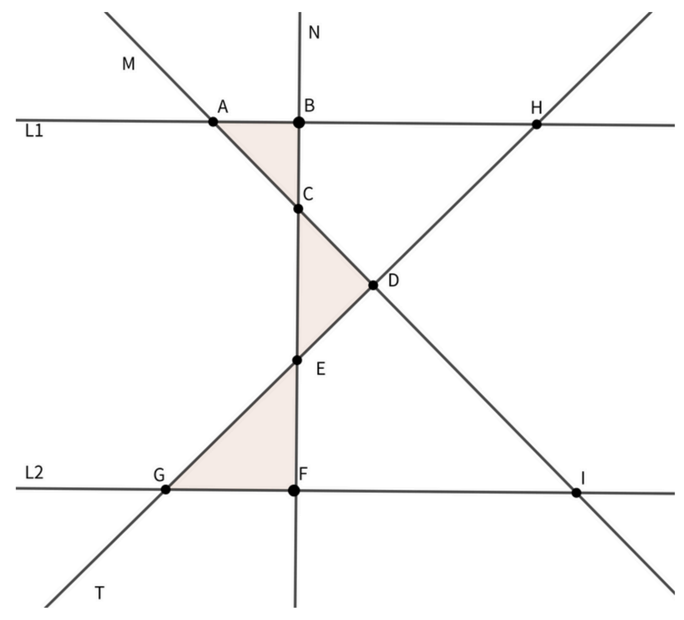
圖一、三個相似三角形

L1//L2；M⊥T；N⊥L1；L1分別與T交於D點；L2分別與M、T交於F、G兩點；M與T交於E點；E點在L1、L2之間；D、E、F、G在直線N的同側，可得三個相似三角形。



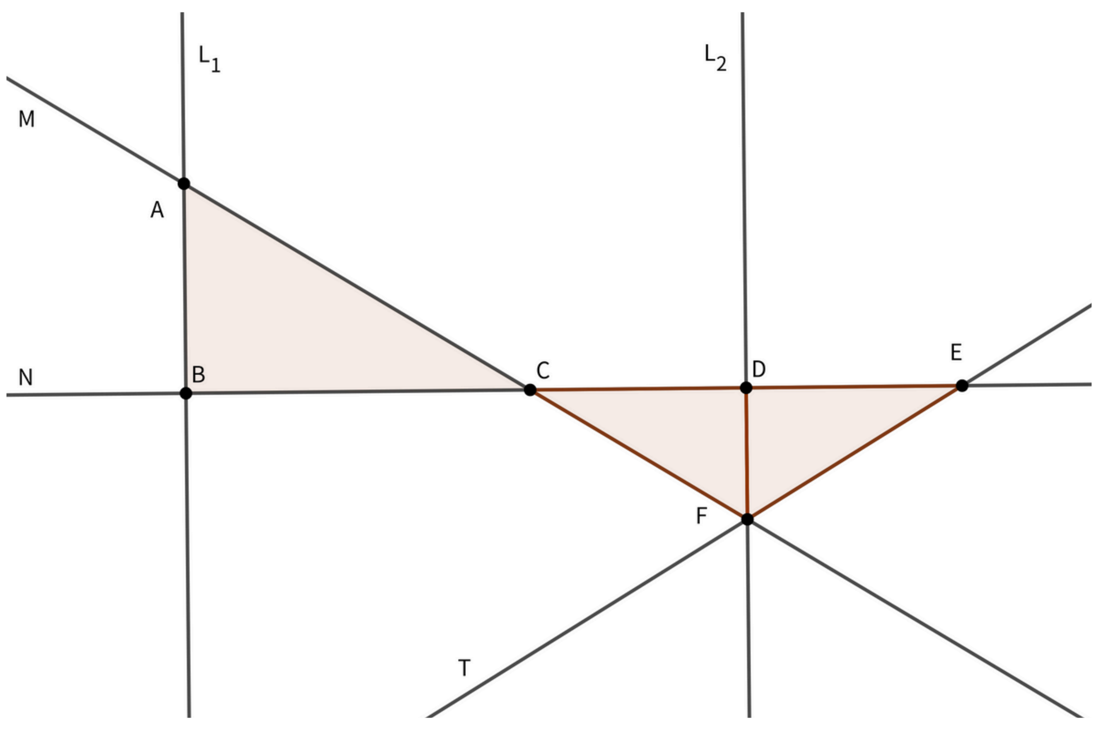
圖二、三個相似三角形

L1//L2；M⊥T；N⊥L1；L1分別與M、T交於A、H兩點；L2分別與M、T交於I、G兩點；M與T交於D點；D在L1、L2之間；D、H、I皆在直線N的同側；D、G在直線N的異側，A、G在直線N的同側，可得三個相似三角形。



圖三、三個相似三角形

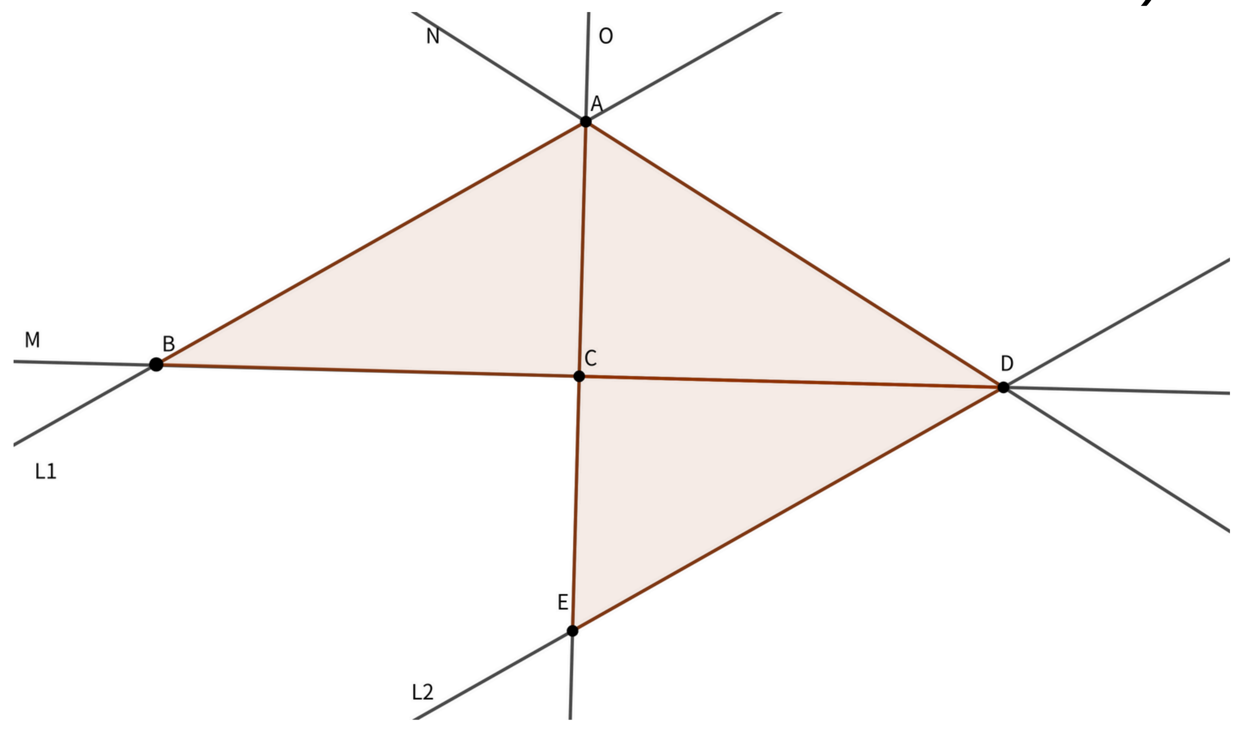
L1//L2；L1⊥N，L2、M、T交於一點F，N分別與M、T交於C、E兩點，且D為C、E的中點，可得三個相似三角形。



圖四、三個相似三角形

L1//L2，M⊥T，L1分別與M、N交於B、A兩點；L2分別與M、T交於D、E兩點；N分別與M、T交於D、A兩點，可得三個全等三角形。

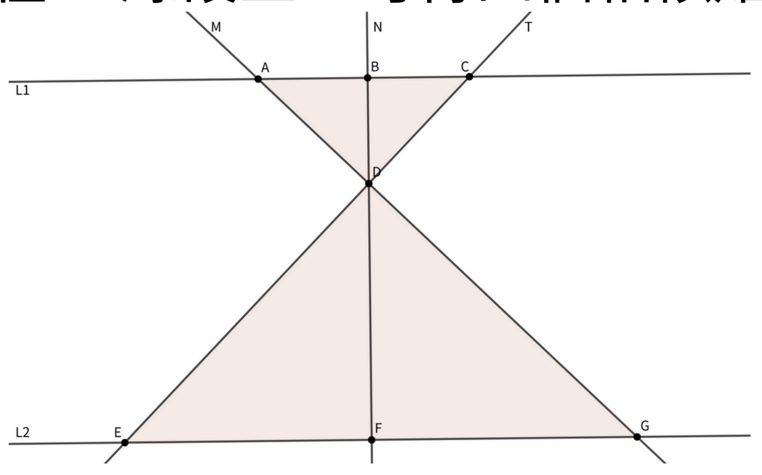
[證明]：
在△ABC、△CDE、△EFG中；
∵∠ACB=∠DCA=∠ECD=90°（M⊥T)；
$AC=CE$；$BC=CD$（BD和AE互相平分）；
∴△ABC≅△ADC≅△EDC（SAS全等性質)。



圖五、三個全等三角形

（二）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形之情形。

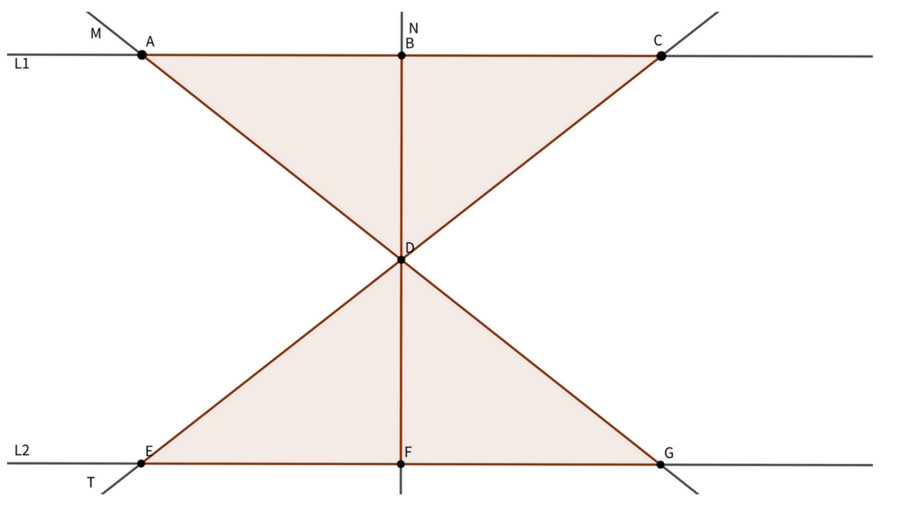
L1//L2； L1分別與M、T交於A、C兩點；L2分別與M、T交於G、E兩點；N為AC、EG的中垂線；N分別與L1、L2交於B、F兩點；M、T交於D點，D在BF線段上，可得四個相似貼合三角形。



圖六、四個相似貼合三角形

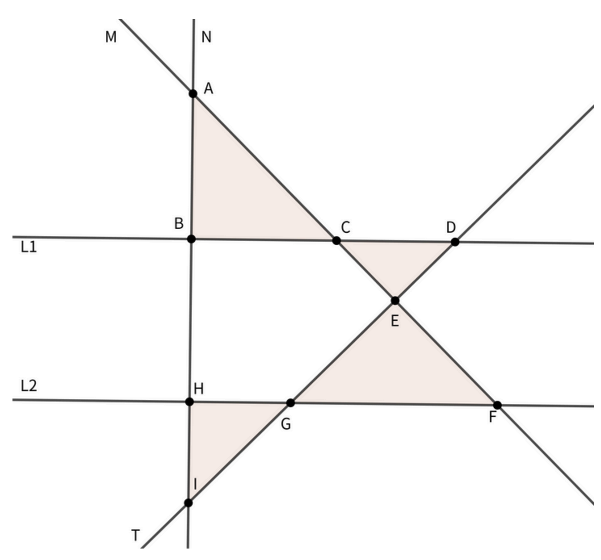
[證明]由 N⊥L1 可知，∠ABD=∠DBC=∠DFE=∠GFD=90°；由 N 為AC、EG線段的中垂線可知，AB線段=AC線段 ；EF線段 = FG線段；推得△ABD≅△CBD；△DEF≅△DGF（SAS 全等性質）；由對頂角可知，∠BDA=∠FDG；∠CDB=∠EDF；推得△ABD~△CBD~△EFD~△GFD（AA 相似性質）。

L1//L2，L1分別與M、T交於A、C兩點；L2分別與M、T交於G、E兩點；N為AC、EG的中垂線；N分別與L1、L2交於B、F兩點；M、T交於D點；D點平分BF線段，可得四個全等貼合三角形。



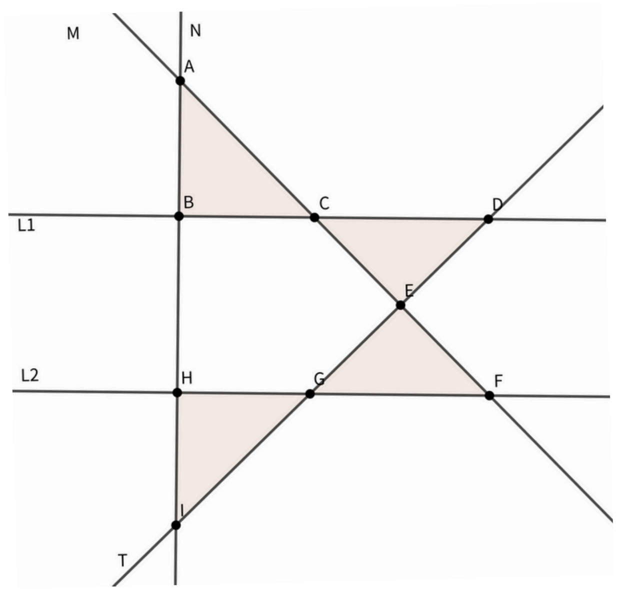
圖七、四個全等貼合三角形

L1//L2，N⊥L1，M⊥T， L1分別與M、T交於C、D兩點；L2分別與M、T交於F、G三點；M和T交於E點；E點在L1、L2之間。E、C、D、F、G皆在直線N的同側，得四個相似不貼合三角形。



圖八、四個相似不貼合三角形

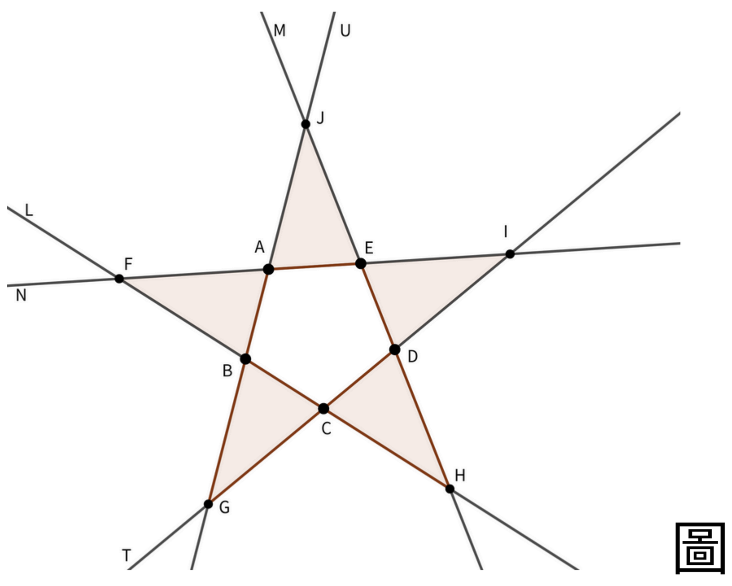
L1//L2，N⊥L1，M⊥T， L1分別與M、T交於C、D兩點；L2分別與M、T交於F、G三點；M、T交於E點；E點在L1、L2之間。E、C、D、F、G皆在直線N的同側，可得四個全等不貼合三角形。



圖九、四個全等不貼合三角形

五邊形 ABCDE 為正五邊形，將此正五邊形的五邊延長。可得五個全等三角形。

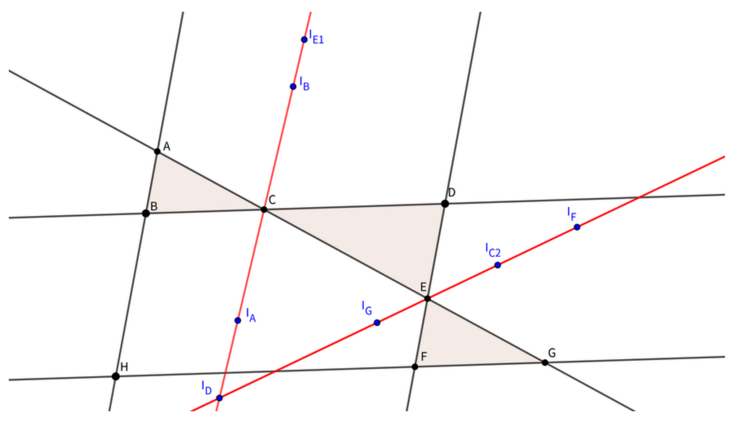
[證明]：
∠FAB=∠GBC=∠HCD=∠IDE=∠JEA=72°；
∠BFA=∠CGB=∠DHC=∠EID=∠EJA=36°；
AB=BC=CD=DE= AE線段； 推得
△ABF≅△BCG≅△CDH≅△DEI≅△AEJ
（AAS 全等性質）。



圖十、五個全等三角形

（三）探討五條直線繪製三個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。

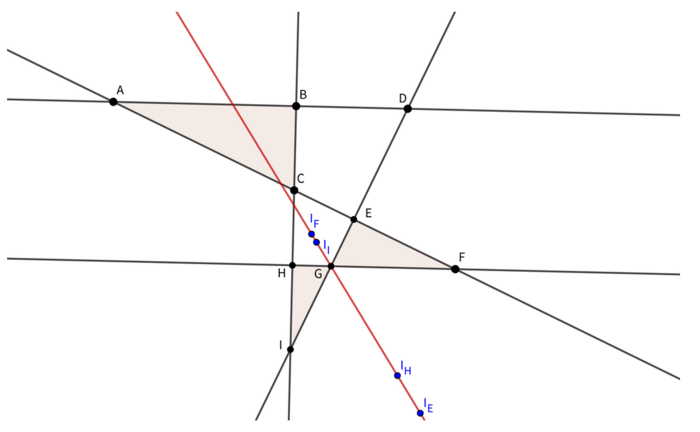
三個三角形(△ABC~△EDC~△EFG)有兩組四個旁心共線。



圖十一、三個相似三角形的旁心

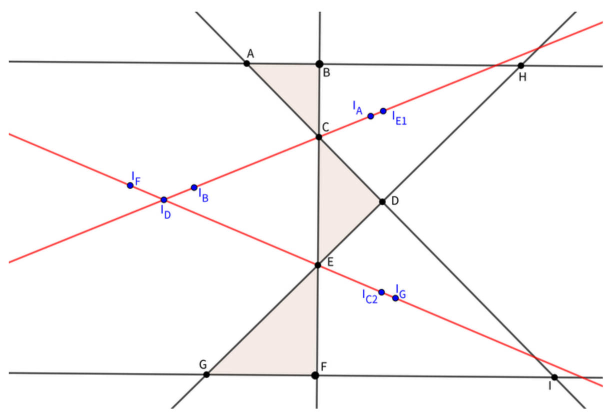
[證明]由對頂角可知，∠DCA=∠BCE； 在△ABC、△CDE 中，IA、IB、ID、IE1 四個旁心都落在∠DCA、∠BCE 的角平分線上； 推得會有 4 個旁心共線。
由對頂角可知，∠CEF=∠GED；在△CDE、△EFG 中，IC2、ID、IF、IG四個旁心都落在∠CEF、∠GED 的角平分線上； 推得會有 4 個旁心共線。

三個三角形(△ABC~△FEG~△IHG)有一組四個旁心共線。



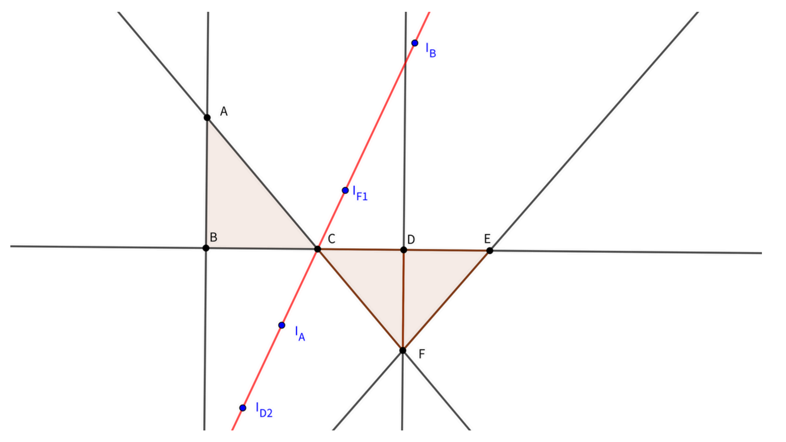
圖十二、三個相似三角形的旁心

三個三角形(△ABC~△EDC~△EFG)有兩組四個旁心共線。



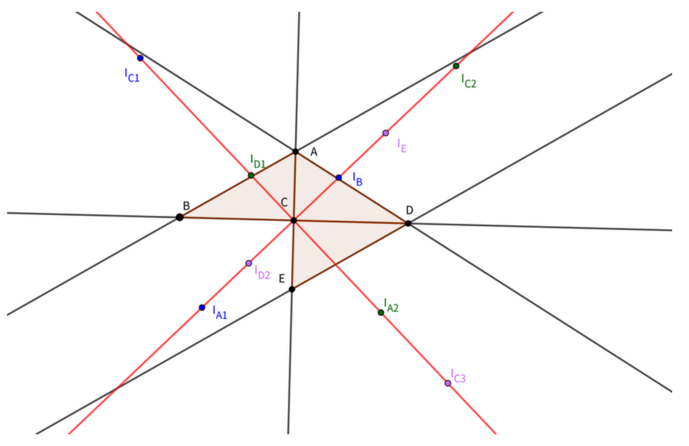
圖十三、三個相似三角形的旁心

三個三角形(△ABC~△FDC~△FDE)有一組四個旁心共線。



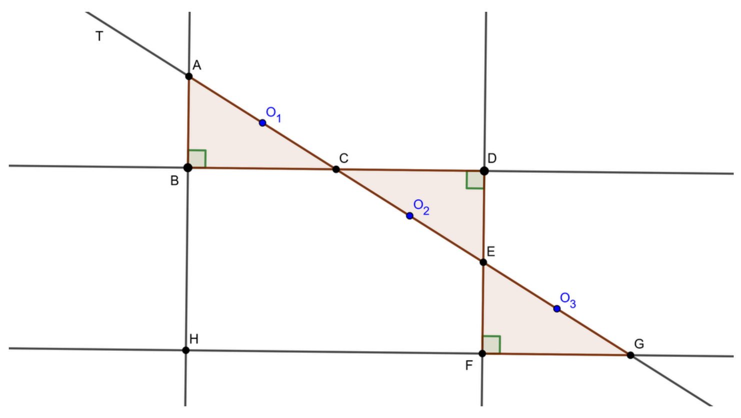
圖十四、三個相似三角形的旁心

三個三角形(△ABC≅△ADC≅△EDC)一組四個旁心、一組五個旁心共線。



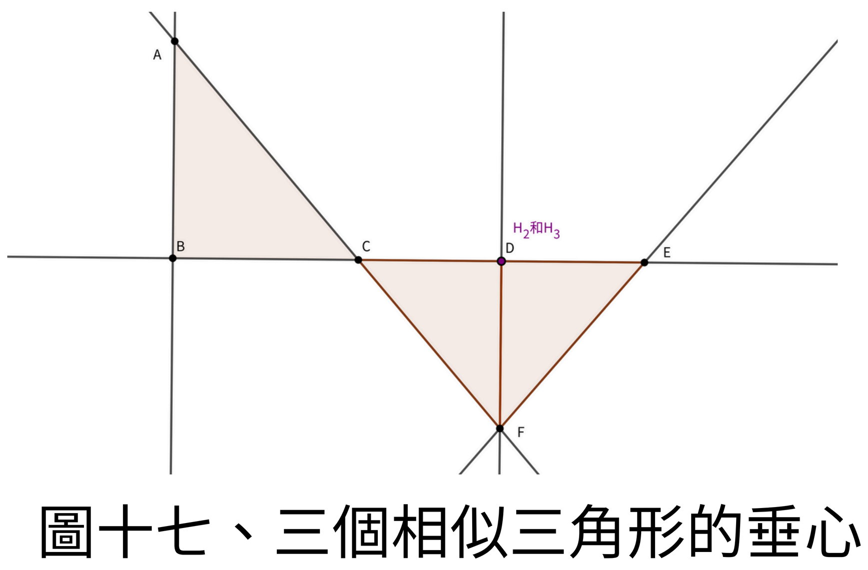
圖十五、三個全等三角形的旁心

三個直角三角形(△ABC~△EDC~△EFG)的外心共線。



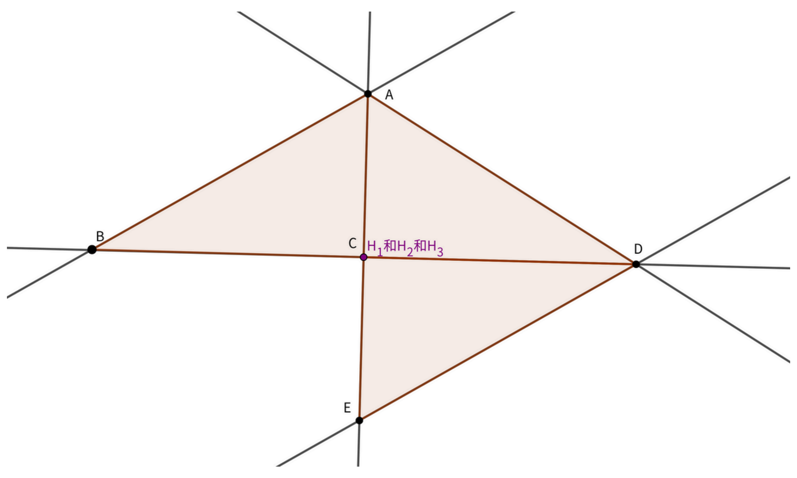
圖十六、三個相似直角三角形的外心

三個三角形(△ABC~△FDC~△FDE)有一組兩個垂心重疊。



圖十七、三個相似三角形的垂心

三個三角形(△ABC≅△ADC≅△EDC)的垂心重疊。

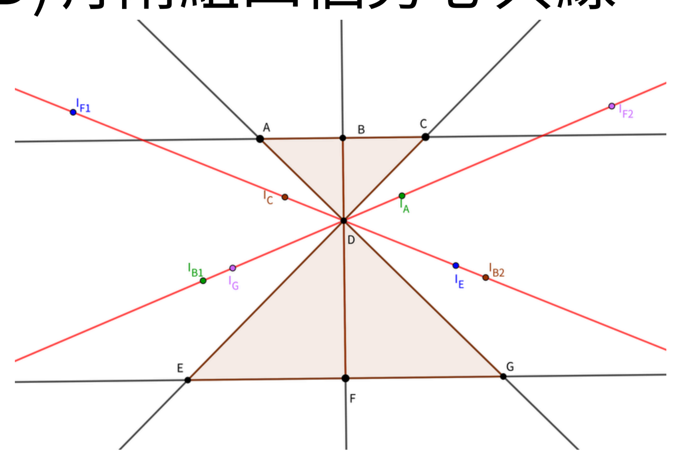


圖十八、三個全等三角形的垂心

三個相似或全等三角形的內心、重心無法共線或重疊，在本研究中不討論。

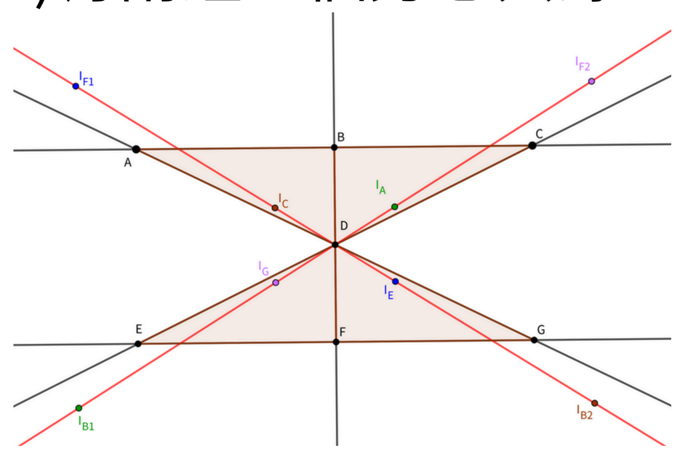
（四）探討五條直線繪製至少四個相似及全等三角形的五心共線、重疊之情形。

四個三角形
(△ABD≅△CBD~△EFD≅△GFD)有兩組四個旁心共線。



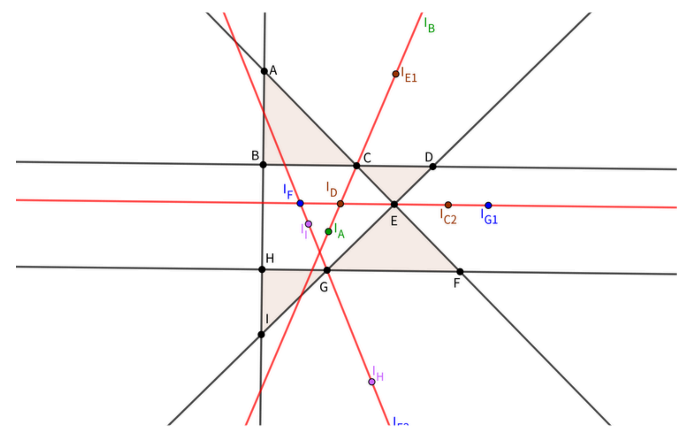
圖十九、四個相似貼合三角形的旁心

四個三角形
(△ABD≅△CBD≅△EFD≅△GFD)有兩組四個旁心共線。



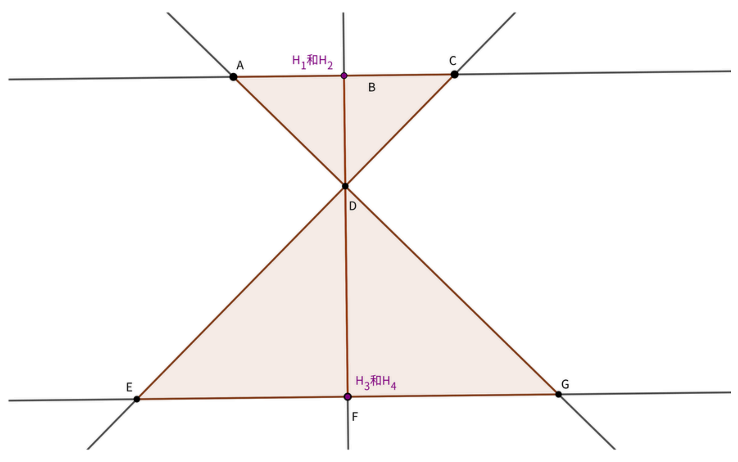
圖二十、四個全等貼合三角形的旁心

四個三角形
(△ABC~△DEC~△GEF~△GHI)有三組四個旁心共線。



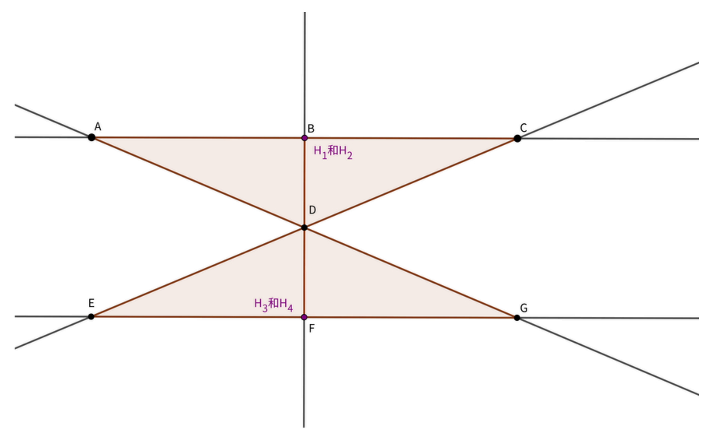
圖二十一、四個相似不貼合三角形的旁心

四個三角形(△ABD≅△CBD~△EFD≅△GFD)的垂心兩兩重疊。



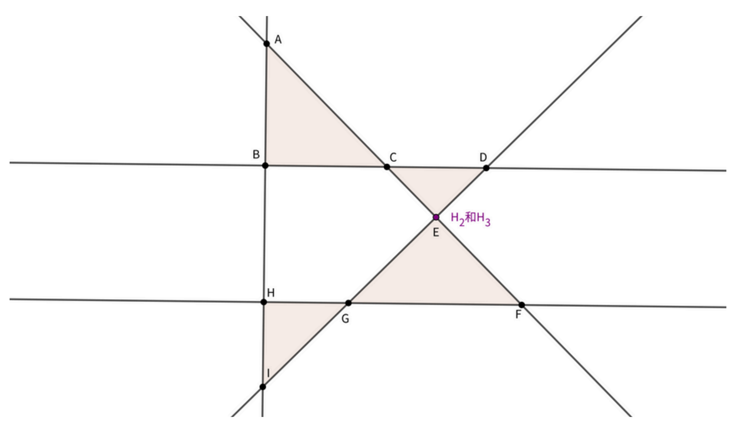
圖二十二、四個相似貼合三角形的垂心

四個三角形(△ABD≅△CBD≅△EFD≅△GFD)的垂心兩兩重疊。



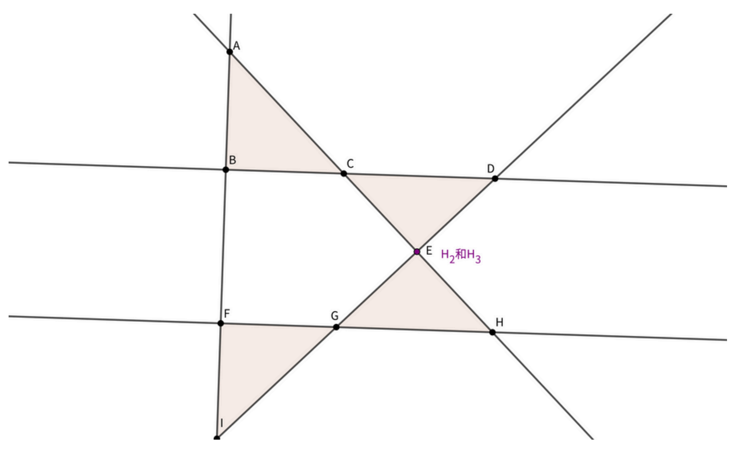
圖二十三、四個全等貼合三角形的垂心

四個三角形(△ABC~△DEC~△GEF~△GHI)的其中兩個垂心重疊。



圖二十四、四個相似不貼合三角形的垂心

四個三角形(△ABC≅△DEC≅△GEF≅△GHI)的其中兩個垂心重疊。

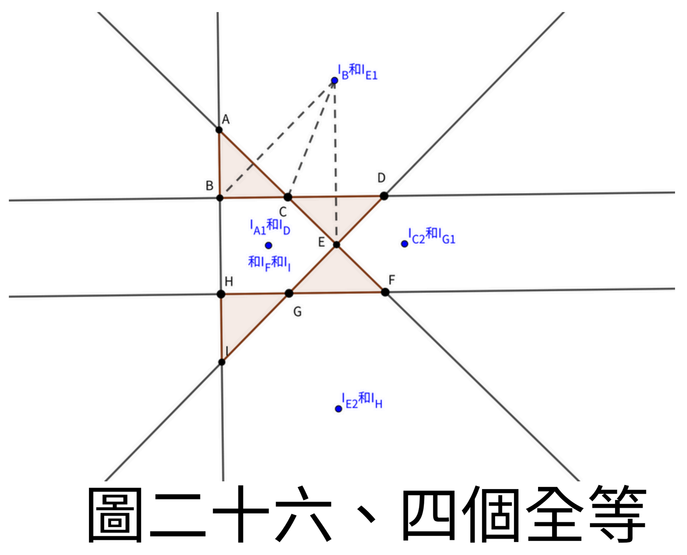


圖二十五、四個全等不貼合三角形的垂心

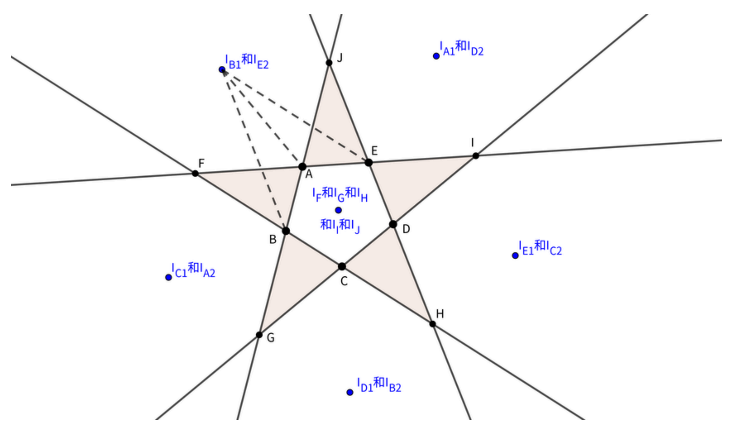
四個相似或全等三角形的內心、外心、重心暫無特別發現，在本研究中不討論。
將五個全等三角形的內心、外心、重心、垂心連接，皆會形成四個正五邊形。

討論

在（四個全等不貼合三角形/五個全等三角形）的旁心中，我們觀察到有（三組兩個旁心重疊、一組四個旁心重疊/五組兩個旁心重疊、一組五個旁心重疊）的現象，因此用其中兩個三角形的三兩個三角形的全等性質證明三條線段皆為角平分線，進而證明兩個三角形的其一旁心重疊。



圖二十六、四個全等不貼合三角形的旁心



圖二十七、五個全等三角形的旁心

結論

1.五線繪製三個以上的相似或全等三角形有許多畫法，且其五心的共線和重疊現象也不同。
(詳細研究結果皆在上述研究過程中)
2.若兩個三角形的其中一個內角為對頂角，則兩個三角形的旁心會共線。
3.若兩個三角形的其中一個內角為對頂角，且以對頂角為端點的邊長呈現相等與折線的關係，則兩個三角形的旁心會重疊。

未來展望

1. 將五線數量增加至六線至以上，三角形的繪製數量也會上升，藉此觀察不同的圖形結構。
2.將三角形間的相似與全等關係再加以分類，透過更精細的分類，列舉出更多例子，例如：五條線繪製的三個三角形中，其中有兩個三角形全等或相似，另一個則無。

本海報內所呈現的所有圖片，均為作者透過GeoGebra應用程式繪製完成