中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030414

神秘的三角格局：塗色規則下的奇幻案圖

學校名稱： 桃園市立大成國民中學

作者：	指導老師：
國一 李雨潔	陳怡君
國一 詹睿庠	顏綗威
國一 楊錫安	

關鍵詞： 方格塗色問題、巴斯卡三角形的奇數應用、二進位的應用

摘要

本研究在探討數學雜誌《Crux Mathematicorum》2024 年公告的題目 MA 288.所產生的方格紙圖案分布的規律。我們先解開該題，並透過繪製與分析不同大小的圖形，觀察圖案的規律，並利用此規律求出第 n 列及前 n 列綠色方格數的遞迴關係與一般式。

我們發現在 $n \times (n+1)$ 的方格紙中，當 n 為 2 的次方時，綠色方格圖案會形成一個類似謝爾賓斯基三角形的完整三角形，且每當 n增加 2 的 1 次方時，綠色方格圖案會利用自我複製的方式形成新的圖案。因此可以把 n 轉換成二進位的表示法，利用二進位中 1 的位置與數量推論出方格圖案的樣貌與綠色方格數。

除了利用塗色的方式觀察規律外，本研究還將原問題條件轉換成不同的敘述，方便利用 excel 繪製圖案，將問題推廣到$n \times m$方格。

壹、 前言

一、 研究動機

2024 年底在數理資優班上專題研究時，我們在老師介紹的數學雜誌《Crux Mathematicorum》上找了一題看起來非常有趣的題目，它充滿著格子的圖表像拼圖一樣，激起了我們的好奇心。不過題目的解答在 2025 年 4 月才會公告，所以我們決定先進一步的研究這個圖的關係，解開這個有趣的謎題！

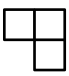
在《Crux Mathematicorum》雜誌 2024 年 10 月 Vol 50. 公告的題目 MA 288. [1]如下所示：

在一個長 21 行，寬 20 列的長方形方格紙中，每個正方形格子邊長 1 單位。

根據以下規則將每個正方形都塗成綠色或黃色：

① 左邊第一行的所有方格都是黃色的。

② 上方第一列中，只有左邊數來第二個方格是綠色的。

③ 以  方式排成的三個方格中，

只有奇數個方格會被塗成黃色。

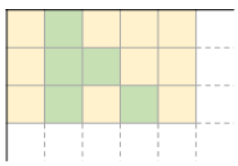


圖 1 原題的示意圖
(圖源：參考文獻[1]後，再由作者自行繪製)

方格紙左上角的部分圖形顯示如圖 1。

請問全部 $20 \times 21 = 420$ 的方格中，有多少個方格被塗成綠色？

一開始我們的解法為一格一格的分析圖形是否塗色，在塗了部分圖形後發現了一些有趣的規律，也讓我們想要知道在不同大小的方格紙中，有多少格正方形被塗成綠色。

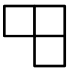
二、研究目的

原題目只有求出在長 21 行、寬 20 列方格紙中滿足條件的綠色方格數，因此我們希望能將問一般化，求出在長 $n+1$ 行、寬 n 列的長方形方格紙中，依照原本題意畫圖，求出第 n 列及前 n 列綠色方格的分布規律與數量。因此我們的研究問題為：

在一個長 $n+1$ 行，寬 n 列的長方形方格紙（$n\times(n+1)$ 的長方形方格紙）中，每個正方形格子邊長 1 單位。根據以下規則將每個正方形都塗成綠色或黃色：

① 左邊第一行的所有方格都是黃色的。

② 上方第一列中，只有左邊數來第二個方格是綠色的。

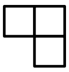
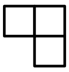
③ 以  方式排成的三個方格中，只有奇數個方格會被塗成黃色。

1. 在 $n\times(n+1)$ 的長方形方格紙中，綠色方格分佈的規律為何？

2. 在 $n\times(n+1)$ 的長方形方格紙中，第 n 列及前 n 列綠色方格的數量為何？

三、文獻探討

在我們決定研究這個題目之後，先上網搜尋了與此題目類似的研究，但因為這是 2024 年 10 月公布的題目，所以我們沒有找到相關的科展作品，同時我們也上網搜尋，並沒有找到相關的題目。

在科展作品交件之後，2025 年 3 月份的數學雜誌上公布了解答[2]，不過它的解答過程與我們的方法並不同。公布的解答是把敘述中綠色方格寫上 1，黃色方格寫上 0，因此規則③「以  方式排成的三個方格中，只有奇數個方格會被塗成黃色。」就可以看成**「在  中上面兩格寫上的數字總和除以 2 的餘數(mod 2)等於下面一格寫上的數字除以 2 的餘數(mod 2)」**，用原題的示意圖表示如圖 2。

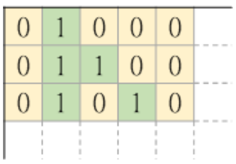


圖 2 原題示意圖的數字表示(圖源：作者自行繪製)

因為在所有方格紙中第一行的方格都是 0，且第一列中只有第二個方格為 1，其餘都是 0，因此呈現出來的數字與巴斯卡三角形類似。巴斯卡三角形的定義為：

1. 每一列的開頭和結尾都是 1，且第 n 列有 n 個數字。

2. 從第 3 列開始，第 2 個數字到第 $n-1$ 個數字等於它左上方的數字和右上方的數字相加，部分巴斯卡三角形如圖 3(a)。

此時題目還要再計算巴斯卡三角形中的數字除以 2 後的餘數，如圖 3(b)，把圖形向左對齊整理後，剩下可以用 0、1 推出所有圖形，如圖 4(a)、圖 4(b)與圖 2 相符合。
因此要求綠色方格數，其實就是算出 1 的數量，就能得出原題答案為 $1+2+2+4+2+4+4+8+2+4+4+8+4+8+8+16+2+4+4+8=99$ 個。

(a) (b)

圖 3 巴斯卡三角型與數字 mod 2 後塗色的結果(圖源：作者自行繪製)

(a) (b)

圖 4 將巴斯卡三角形的數字向左對齊(圖源：作者自行繪製)

3 月份雜誌只有公布在 20×21 的長方形方格紙中綠色方格的數量，但在公布前我們已經可以計算出所有 $n\times(n+1)$ 長方形方格紙中綠色方格的總數。

在公告解答之後，我們改成用巴斯卡三角形作為關鍵字搜尋，可以找出更多相關的文獻。許介彥（2004）[4]利用排列組合的方式與 Lucas 定理計算巴斯卡三角形每一列的奇數個數，並利用電腦畫圖顯示出巴斯卡三角形奇數的的分布與謝爾賓斯基三角形相同。郭士恩（2008）[5]的科展研究則是把巴斯卡三角形的起始數字改成 -1，並把運算規則改成乘法，他找出三角形中 1 和 -1 分布的遞迴式，並可以用公式算出某個位置的數字。因此若將我們的研究轉換成巴斯卡三角形的奇數性質，雖然使用的方式不同，但我們的研究結果與這兩個文獻相符合，且我們可以直接使用二進位直接推算出第 n 列奇數和偶數的位置。

貳、 研究設備與器材

方格紙、紀錄單、筆、電腦、Excel 軟體。

參、 研究過程與方法

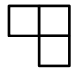
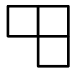
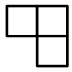
在解原本題目時，因為是我們是由第 1 列、第 2 列...依序往下畫，因此我們注意到此問題中的三個規則，規則①和規則②是要形成後面圖案的基本設定，規則③「以  方式排成的三個方格中，只有奇數個方格會被塗成黃色。」換句話說是由  圖形上面兩格的條件決定下面一格要塗哪一種顏色，所以可以改成「**在**  **圖形中，如果上面兩格有偶數格被塗成黃色（兩格同色），則下面的方格依然要塗成黃色；如果上面兩格有奇數格被塗成黃色（兩格異色），則下面的方格要塗成綠色**」。

圖 5 為我們這次的研究流程圖，在研究圖形的規律時我們發現，當 $n = 2^3, 2^4, \ldots$ 時，綠色方格的分布才會形成一個完整的三角形，所以在研究綠色方格的數量時，我們分為 $\boldsymbol{n = 2^m}$ 與 $\boldsymbol{n = 2^m + q, 1 \le q < 2^m}$ 兩種情形，並依照圖形的關係，利用等比數列與數學歸納法進行討論。

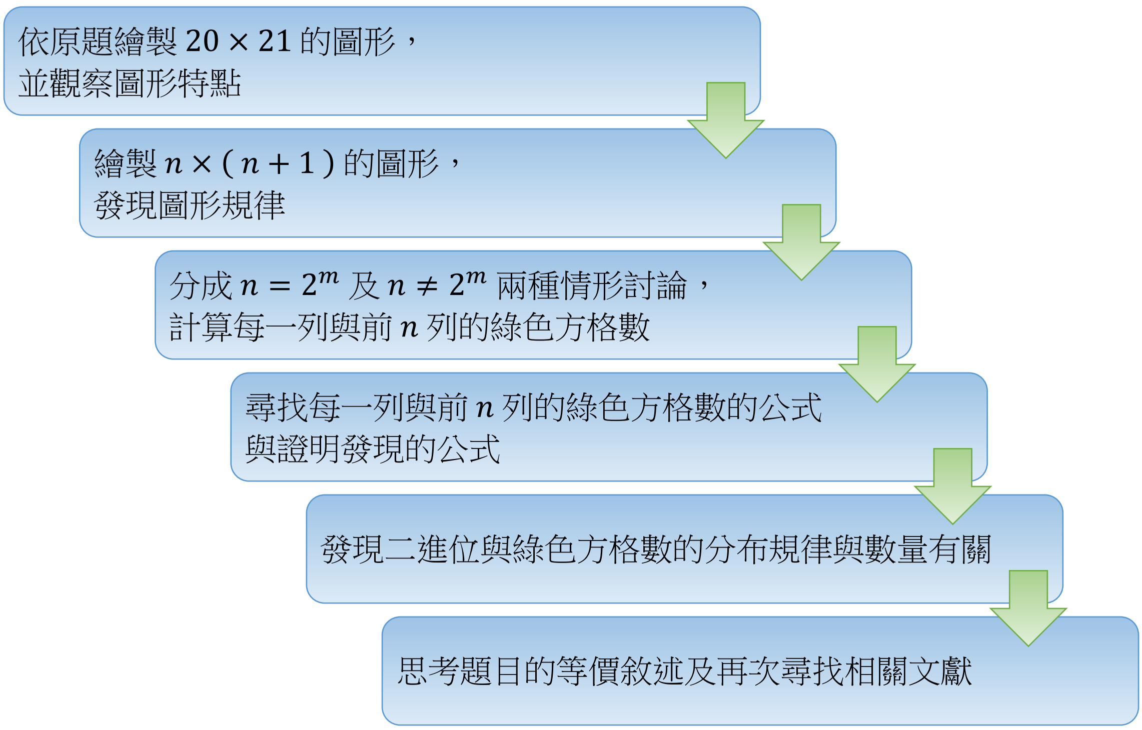


圖 5 研究流程圖(圖源：作者自行繪製)

肆、 研究結果與討論

為了研究方便討論，我們把第 i 列第 j 個方格以 (i,j) 表示。

一、 原始題目的繪圖與解答

在最一開始研究時，我們先畫了部分圖形，如圖 6。

在過程中，我們發現他有三個特點：

1. **第 2 行的方格$(i,2)$, $1 \le i \le n$ 全部都為綠色。**
2. **第 k 列的第 $k+1$ 個方格 $(k,k+1)$, $1 \le k \le n$ 都為綠色。**
3. **第 k 列的第 $k+2$ 個以後的方格 (k,j), $1 \le k \le n$, $k+2 \le j \le n+1$ 都為黃色。**

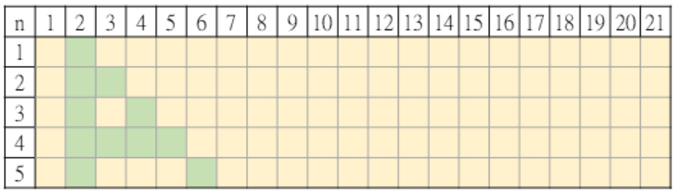


圖 6 依據原題繪製的第 1 列到第 5 列的圖形(圖源：作者自行繪製)

繼續畫下去完整圖形如圖 7。除了上面 3 點的發現外，我們還注意到**綠色方格圖案有部分會一直重複**。像是在一開始時的「第 1 列到第 4 列」的圖案與「第 5 列到第 8 列」的圖案相同（紅框），只是被重複畫了兩次。再來「第 1 列到第 8 列」的圖案與「第 9 列到第 16 列」的圖案相同（藍框），也是被重複畫了兩次。

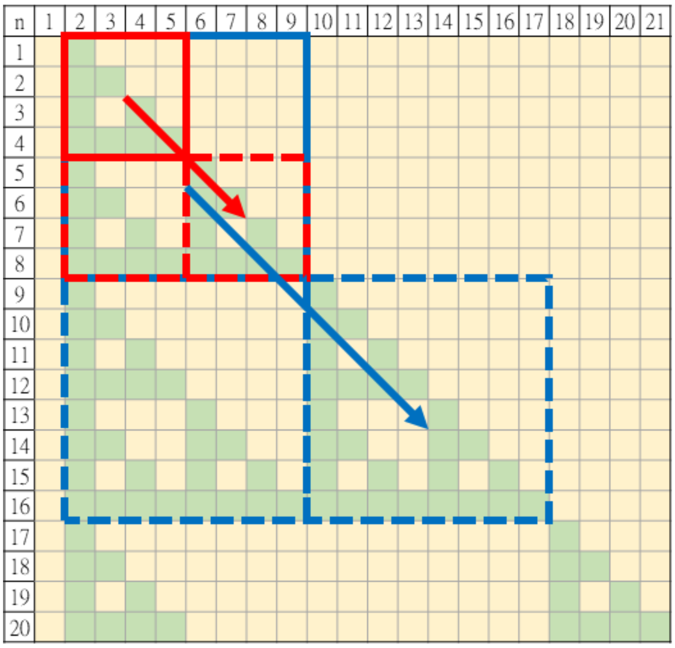


圖 7 依據原題繪製的完整圖形(圖源：作者自行繪製)

所以我們在計算的時候是先從「第 1 列到第 4 列」找一個小的完整三角形會有 9 格綠色正方形，再計算「第 1 列到第 8 列」有 $9 \times 3 = 27$ 格綠色正方形，然後再計算「第 1 列

到第 16 列」的最大的完整三角形方格數為 $27 \times 3 = 81$ 格綠色正方形，最後再加上「第 17 列到第 20 列」還有 2 個綠色方格數為 9 的小三角形。因此在 20×21 的長方形方格紙中，總共有 $81 + 2 \times 9 = 99$ 個綠色方格。

二、在 $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ 的長方形方格紙中，綠色方格分佈的規律

(一) 由圖形發想的規律

除了一開始畫圖時發現的三個特點外，我們還注意到在第 2^m 列時會出現連續的綠色方格（第 2 個到第 $2^m + 1$ 個方格），且第 $2^m + 1$ 列只有第 2 個和第 $2^m + 2$ 個方格是綠色的。因此我們先畫出 $n = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ 的情形，並推測當 $n = 2^m$ 時，若將方格的對角線連線，所有綠色方格的分布會形成一個完整的三角形，圖形類似謝爾賓斯基三角形，如圖 8 為 32×33 方格紙的圖案。

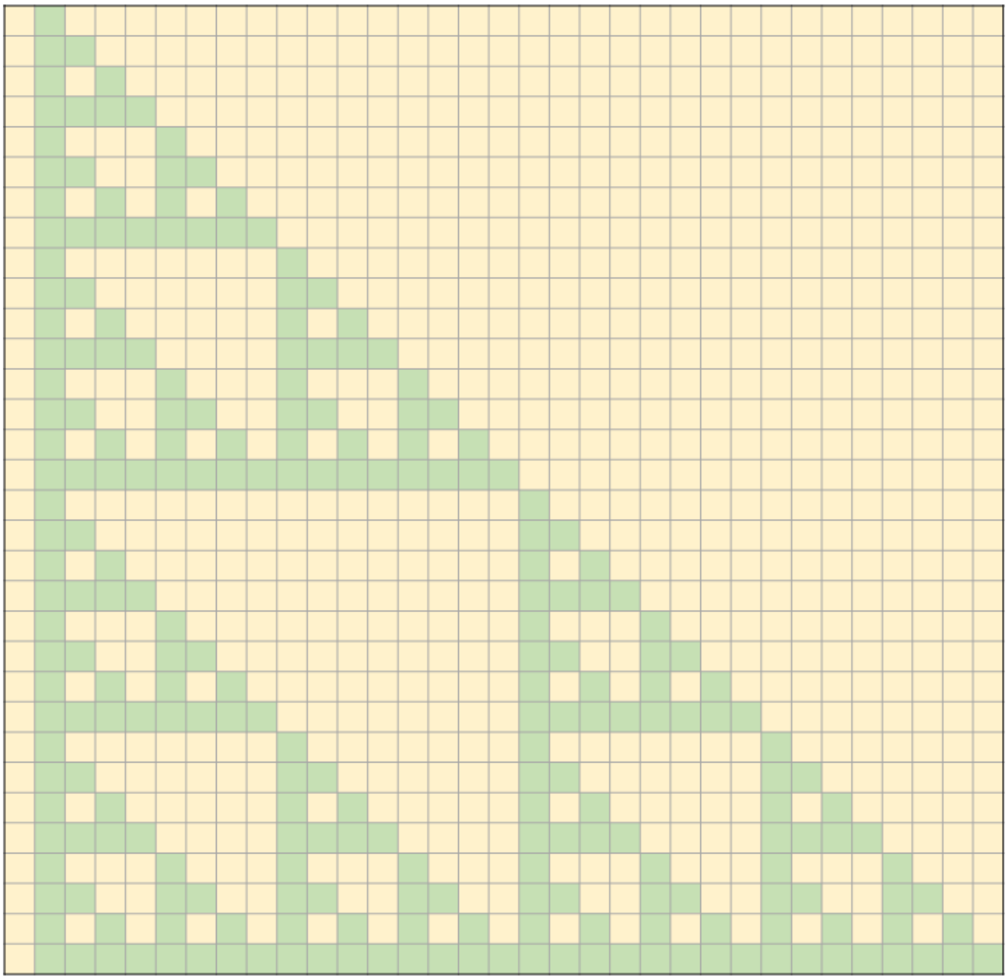


圖 8 $n = 32$綠色方格形成圖案(圖源：作者自行繪製)

謝爾賓斯基三角形的原理[3]是先取一個正三角形，如圖 9(1)。接著將原本三角形各邊中點連線形成的三角形挖空，留下三個邊長為原邊長 $\frac{1}{2}$ 的小三角形，如圖 9(2)。然後將剩餘的三個小三角形仿照前一個動作，在各挖掉一個各邊中點連線形

成的三角形，留下九個邊長為原邊長 $\frac{1}{4}$ 的小三角形，如圖 9(3)。重複進行相同的動作多次，即可完成如圖 9(5)的謝爾賓斯基三角形。因此，當重複許多次後，謝爾賓斯基三角形最外圍的三角形邊長不變，但留下的三角形會越來越小且越來越密。將謝爾賓斯基的三角形重新調整形狀，變成直角在右邊的等腰直角三角形，形成的圖案會和綠色方格形成的圖案類似，如圖 10 為等腰直角三角形型的謝爾賓斯基三角形。

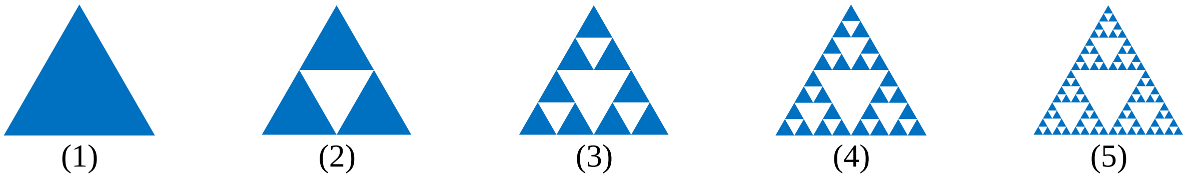


圖 9 謝爾賓斯基三角形(圖源：參考文獻[3]後，再由作者自行繪製)

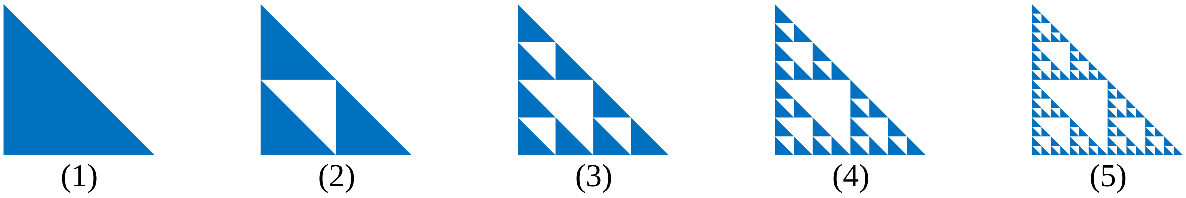


圖 10 等腰直角三角形型的謝爾賓斯基三角形(圖源：作者自行繪製)

與謝爾賓斯基三角形不同，我們依照題目規則研究畫出來的圖形卻會越來越大，由上而下依照相同規律不斷生成。我們將黃色方格改成空白格；首先第 1 列只有第 2 個方格 $(1,2)$ 被塗成綠色，沿著方格的邊長與對角線可以畫出一個底為 1 的等腰直角三角形，如下圖 11(1)。接著在正下方 $(2,2)$ 與右下方 $(2,3)$複製兩個與圖 11(1)相同的圖形，就可以形成「第 1 列到第 2 列」的圖案，沿著正方形的邊長與對角線可以畫出一個底為 2 的等腰直角三角形，如下圖 11(2)。繼續在正下方 $(3,2)$ 與右下方 $(3,4)$複製兩個與圖 11(2)相同的圖形，就可以形成「第 1 列到第 4 列」的圖形，沿著正方形的邊長與對角線畫線，就可以畫出一個底為 4 的等腰直角三角形，如下圖 11(3)。然後再次往正下方 $(5,2)$ 與右下方 $(5,6)$ 複製兩個與圖 11-(3)相同的圖形，就可以形成「第 1 列到第 8 列」的圖形，沿著正方形的邊長與對角線畫線，又可以畫出一個底為 8 的等腰直角三角形，如下圖 11(4)。重複進行相同的動作多次，即可完成 $n = 2^m$ 的圖形。之後的研究我們都稱這樣的圖形為底為 2^m 的完整三角形。

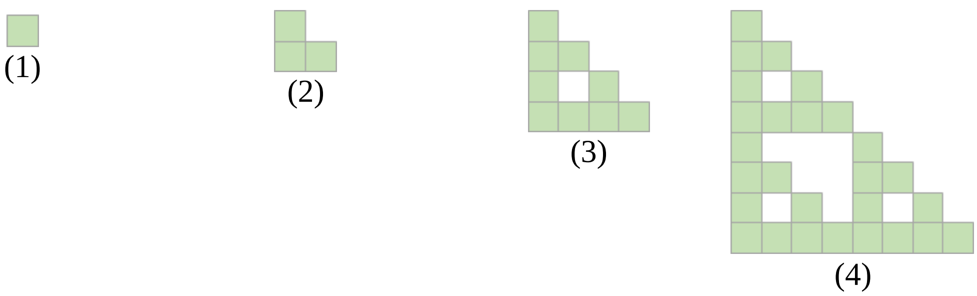


圖 11 底為 2^m 的完整三角形(圖源：作者自行繪製)

(二) 小結

$\boxed{\text{性質一}}$

在 $n\times(n+1)$ 的長方形方格紙中，根據題目的三個規則將所有的方格塗成綠色或黃色，則圖形有以下特點：

(1) 每一列的第 2 個方格$(i,2),1\le i\le n$全部都為綠色。

(2) 第 k 列的第 $k+1$ 個方格 $(k,k+1),1\le k\le n$ 都為綠色，

且第 k 列的第 $k+2$ 個以後的方格 $(k,j),1\le k\le n,k+2\le j\le n+1$ 都為黃色。

(3) 第 2^m 列的第 2 到 2^m+1 個方格 $(2^m,j),m\in\mathbb{N},2\le j\le 2^m+1$ 都為綠色，

且第 2^m+1 列的第 2 個方格 $(2^m+1,2),m\in\mathbb{N}$ 和第 2^m+2 個方格 $(2^m+1,2^m+2),m\in\mathbb{N}$ 是綠色的，兩個綠色方格的中間皆為黃色。

(4) 當 $n=2^m,m$ 為非負整數時，若把方格的對角線連線，會形成一個底為 2^m 的完整的三角形。

因此當 $n=2^{m+1}$ 時圖形的形成方式為將第 1 列到第 2^m 列的綠色方格圖案（底為 2^m 的完整的三角形），複製到第 2^m+1 列的第 2 個方格及第 2^m+1 列的第 2^m+2 個方格。

(三) 證明

按照題目的規則我們改成：

1. 如果上方的兩格方格都是黃色，則下面那格就必定是黃色，如圖 12(1)。
2. 如果上方的兩格方格只有一格是黃色，則下面那格就必定是綠色，如圖 12(2)與(3)。
3. 如果上方的兩格方格都是綠色，則下面那格就必定是黃色，如圖 12(4)。

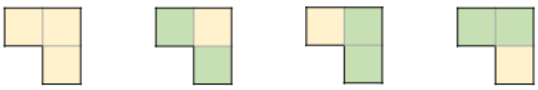


圖 12 所有三連方格的塗色情形(圖源：作者自行繪製)

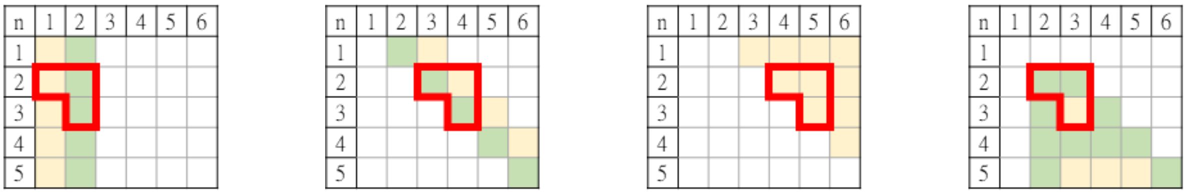
因為所有圖形都會依照圖 12 的塗色方法，所以所有的圖形都會依照性質(1)到(4)延伸下去。

性質(1)：在前面兩行中，因為每一列的方格 $(i,1),1\le i\le n$ 方格都是黃色，每一列的 $(i,2),1\le i\le n$ 方格都是綠色，按照圖 12 第(3) 種的塗法，所以圖形的下一列的 $(i+1,2)$ 方格都是綠色的，如圖 13(1)

性質(2)：在完整三角形的斜邊，因為 $(k,k+1), 1 \le k \le n$ 方格都是綠色且 $(k,k+2)$ 方格都是黃色，依照圖 12 第(2)種塗法，所以 $(k+1,k+2)$ 方格都為綠色，如圖 13(2)。

而在完整三角形的斜邊以後，因為 $(k,j), k+2 \le j \le n+1$ 方格都是黃色的，依照圖 12 第(1)種塗法，所以 $(k+1,j+1), k+2 \le j \le n+1$ 方格都為黃色，如圖 13(3)。

性質(3)：在完整三角形的底部（第 2^m 列）與下一列（第 2^m+1 列）中，因為 $(2^m,j), 2 \le j \le 2^m+1$ 方格都是綠色，根據性質(1)與性質(2)，所以 $(2^m+1,2)$ 和 $(2^m+1,2^m+2)$ 方格為綠色，又依照圖 12 第(4)種塗法，所以 $(2^m+1,j), 3 \le j \le 2^m+1$ 方格都是黃色，如圖 13(4)。



(1) (2) (3) (4)

圖 13 圖形形成的四種規律(圖源：作者自行繪製)

性質(4)：根據前面性質，因為在第 2^m+1 列的第 2 個方格 $(2^m+1,2)$ 方格和第 2^m+2 個方格 $(2^m+1,2^m+2)$ 是綠色，其他都是黃色，所以依照相同的規律往下畫，在第 2^m+1 列到第 2^{m+1} 列有會產生兩個同樣底為 2^m 的完整三角形。再加上前面的圖案，得到第 1 列到第 2^{m+1} 列的圖案是底為 2^{m+1} 的完整三角形，如圖 14。

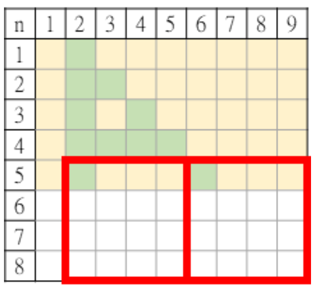


圖 14 圖形形成的循環規律(圖源：作者自行繪製)

三、在 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ 的長方形方格紙中，第 $\boldsymbol{n}$ 列及前 $\boldsymbol{n}$ 列綠色方格的數量

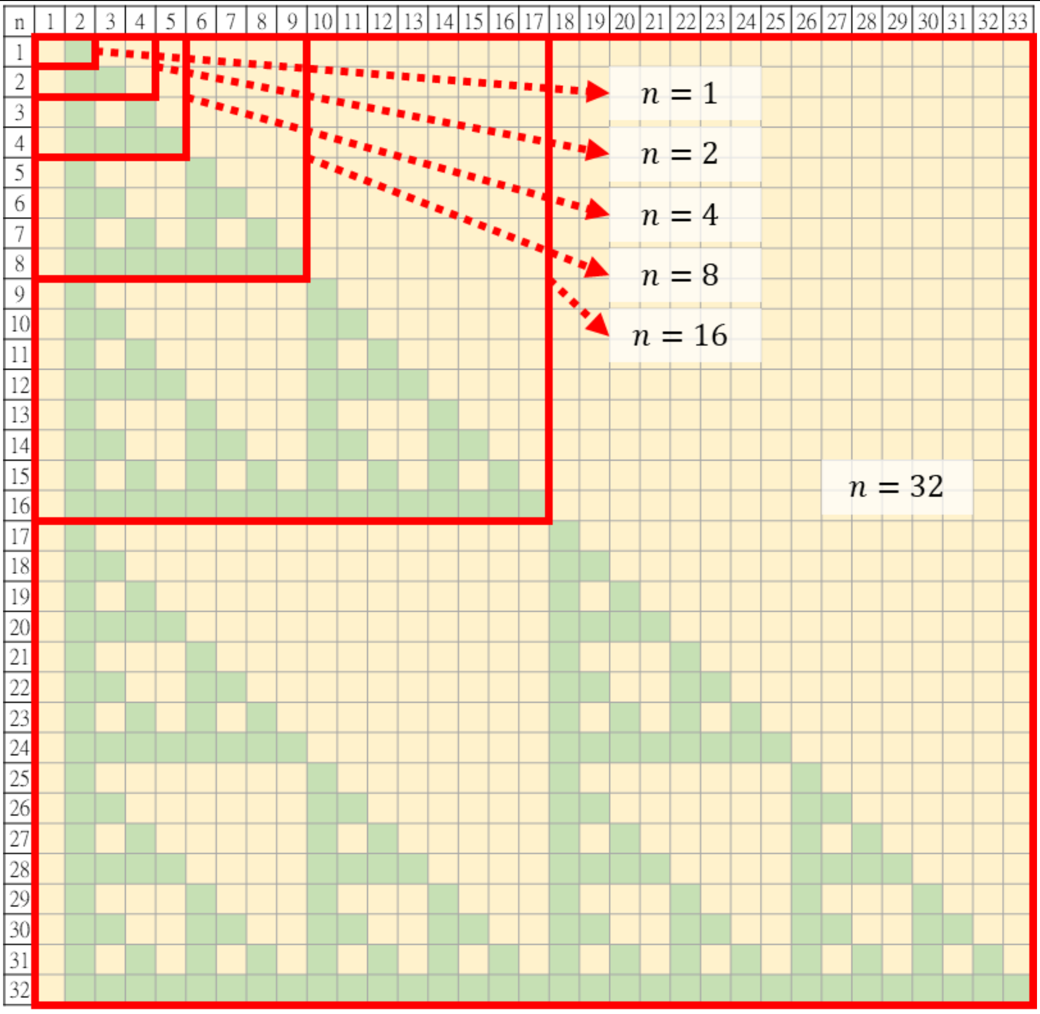
(一) 若 $n=2^m, m$ 為非負整數：

1. 由圖形發想的規律

根據性質一，當 $n=2^m$ 綠色方格會顯示完整三角形圖形，所以我們計算 $n=2^m, m=1,2,\dots,6$ 時所有圖形的綠色方格數，並用表格整理如表 1，因此我們推測**當 $\boldsymbol{n=2^m}$ 時，前 $\boldsymbol{n=2^m}$ 列的綠色方格總和 $\boldsymbol{S_n}$，有 $\boldsymbol{S_n=3\times S_{2^{m-1}}=3^m}$ 個綠色方格**。

表 1 $n=2^m, m=1,2,\dots,6$ 的綠色方格總數與圖形(圖源：作者自行繪製)

列數 n	前 n 列綠色方格數 S_n	圖形
$1=2^0$	$1=3^0$	綠色方格圖形是底為 $2^0=1$ 的完整三角形
$2=2^1$	$3=3^1$	綠色方格圖形是底為 $2^1=2$ 的完整三角形
$4=2^2$	$9=3^2$	綠色方格圖形是底為 $2^2=4$ 的完整三角形
$8=2^3$	$27=3^3$	綠色方格圖形是底為 $2^3=8$ 的完整三角形
$16=2^4$	$81=3^4$	綠色方格圖形是底為 $2^4=16$ 的完整三角形
$32=2^5$	$243=3^5$	綠色方格圖形是底為 $2^5=32$ 的完整三角形



2. 小結

$\boxed{\text{性質二}}$

在 $n\times(n+1)$ 的長方形方格紙中，根據題目的三個規則將所有的方格塗成綠色或黃色。

假設第 1 列到第 n 列總共有 S_n 個方格被塗成綠色。

當 $n=2^m, m$ 為非負整數時，$S_n=3S_{2^{m-1}}=3^m$。

3. 證明

根據$\boxed{\text{性質一}}$，當 $n=2^m$ 時，綠色方格圖案會形成一個底為 2^m 的完整三角形，其中「第 1 列第 2 行到第 2^{m-1} 列第 $2^{m-1}+1$ 行的圖案」與「第 $2^{m-1}+1$ 列第 2 行到第 2^m 列第 $2^{m-1}+1$ 行的圖案」及「第 $2^{m-1}+1$ 列第 $2^{m-1}+2$ 行到第 2^m 列第 2^m+1 行的圖案」一致，因此當 $n=2^m$ 時綠色方格數是 $n=2^{m-1}$ 時綠色方格數的 3 倍，也就是說 $S_{2^m}=S_{2^{m-1}}+2\times S_{2^{m-1}}=3\times S_{2^{m-1}}$。當 $m=1,2,3,\dots$ 依序增加時，綠色方格數會形成一個首項是 1 且公比為 3 的等比數列，可以計算一般式為 $S_{2^m}=3^m$ 個。

用數學歸納法證明「$n=2^m, m$ 為非負整數時，$S_n=3^m$」：

① 當 $n=1=2^0$ 時，$S_1=1=3^0$，推測成立

$n=2=2^1$ 時，$S_2=1+2\times1=3=3^1$，推測成立

② 假設當 $n=2^m, m$ 為非負整數時推測成立，即 $S_n=3^m$

則 $n=2^{m+1}$ 時，由圖形形成的規律可以得到

$S_{2^{m+1}}=S_{2^m}+2S_{2^m}=3\times S_{2^m}=3\times3^m=3^{m+1}$，推測也成立

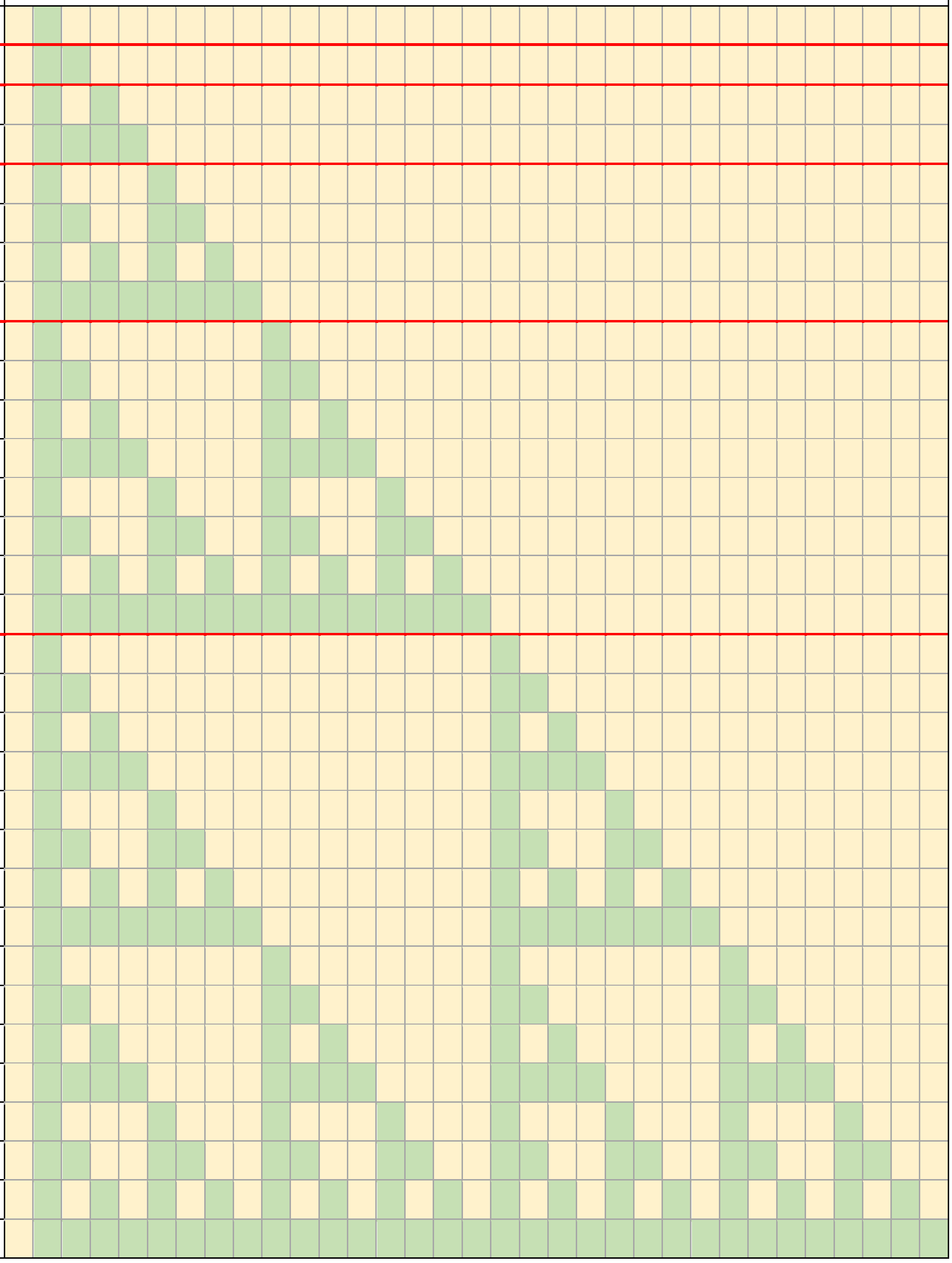
故利用數學歸納法可知，如果 $n=2^m, m$ 為非負整數時，$S_n=3^m$

(二) 若 $n=2^m+q, m$ 為非負整數，且 $1\le q\le 2^m$：

1. 由圖形發想的規律

我們先計算 $n=1,2,3,\dots,32$ 時圖形中的每一列的綠色方格數，然後再加總計算所有 $n\times(n+1)$ 長方形方格紙中的綠色方格數，如表 2 所示：

表 2 $n=1,2,\ldots,32$ 的每列綠色方格數、綠色方格總數與圖形(圖源：作者自行繪製)

列數 n	第 n 列綠色方格數 a_n	前 n 列綠色方格數 S_n	圖示
1	1	1	
2	2	3	
3	2	5	
4	4	9	
5	2	11	
6	4	15	
7	4	19	
8	8	27	
9	2	29	
10	4	33	
11	4	37	
12	8	45	
13	4	49	
14	8	57	
15	8	65	
16	16	81	
17	2	83	
18	4	87	
19	4	91	
20	8	99	
21	4	103	
22	8	111	
23	8	119	
24	16	135	
25	4	139	
26	8	147	
27	8	155	
28	16	171	
29	8	179	
30	16	195	
31	16	211	
32	32	243	

(1) 第 n 列的綠色方格數 a_n

在計算第 n 列的綠色方格數時，我們發現第 2 列的方格數是第 1 列方格數的 2 倍；第 3 列到第 4 列方格數也是第 1 列到第 2 列方格數的 2 倍；第 5 到第 8 列的方格數也是第 1 到第 4 列方格數的兩倍。整理可知第 2^m+1 列到第 $2^m+2^m=2^{m+1}$ 列的每一個數字都會是第 1 列到 2^m 列的每一個數字的兩倍。也就是說，

若 $\boldsymbol{n=2^m+q, 1\le q\le 2^m}$，則 $\boldsymbol{a_n=a_q\times 2}$。

重新整理數據，更可以清楚看出第 n 列綠色方格數的關係如圖 15，依照數列形成的規則，可以知道寫下數列的過程中得到每一個階段增加的數字（藍色箭頭）會形成一個公比為 2 的等比數列，且所對應的數字（紅色箭頭）也會形成一個公比為 2 的等比數列。

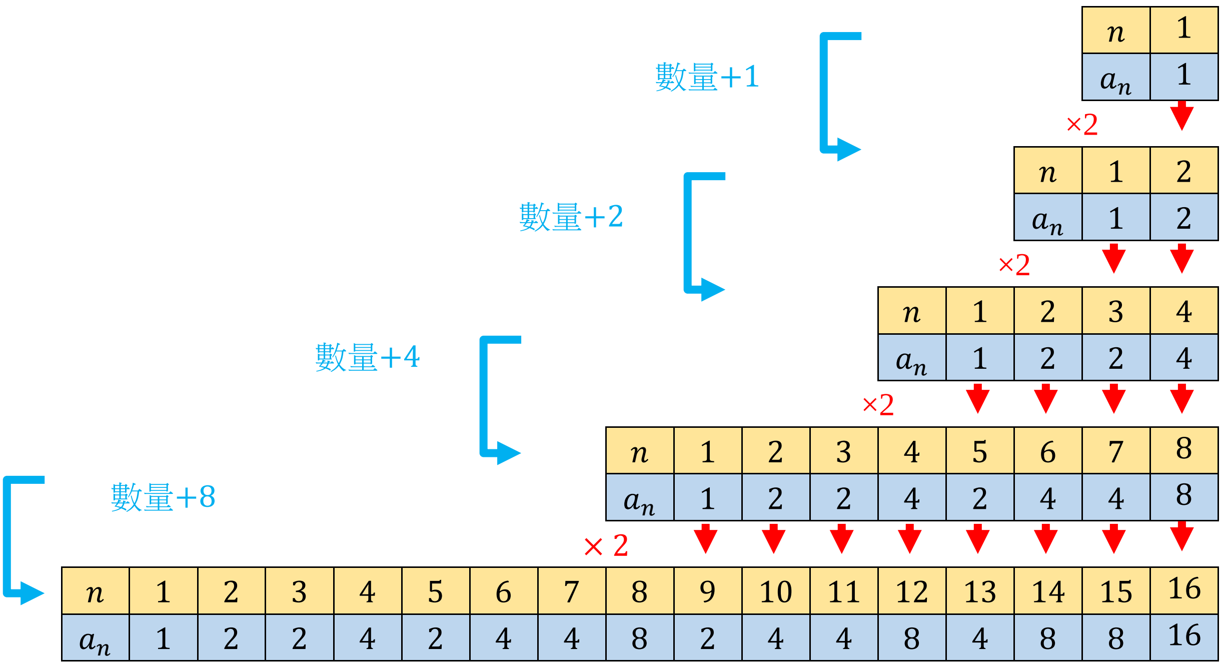


圖 15 a_n 的數列關係(圖源：作者自行繪製)

因此推測 a_n 的一般式應該可以表示成 2 的次方，且推測若把 n 拆成 k 個 2 的次方數相加時，則第 n 列有 2^k 個綠色方格，但試了幾個數字之後發現，第 n 列綠色方格數的次方其實要對應到前一列的數字才行，如表 3。

因此我們修正結果，**若 $\boldsymbol{n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}}$，其中 $\boldsymbol{r_k>r_{k-1}>\cdots>r_1\geq 0}$ 時**，也就是說把 $n-1$ 拆成 k 個 2 的次方數相加時，**則第 $\boldsymbol{n}$ 列的方格數 $\boldsymbol{a_n=2^k}$ 個**。

更進一步，因為 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}$，寫法與將 $n-1$ 轉換成二進位的過程相同。在 $n-1$ 的二進位中每一位都是用來表示 2 的次方數，所以可以先將一個數字拆解成多個 2 的次方和後，將出現的次方數加一後放在該數字的位數並表示成 1，而沒有 2 的次方的地方就用 0 表示，所以又可以把敘述改成如果 **$\boldsymbol{n-1}$ 的二進位有 $\boldsymbol{k}$ 個 1，則 $\boldsymbol{a_n=2^k}$**。例如 $n=12$，$n-1=11=2^3+2^2+2^0=(1011)_2$，有 3 個 1，所以 $a_{12}=2^3=8$。

表 3 第 n 列綠色方格數的規律

列數 n	n 寫成 2 的次方相加的項數	第 n 列綠色方格數
$1=2^0$	1	$1=2^0$
$2=2^1$	1	$2=2^1$
$3=2^1+2^0$	2	$2=2^1$
$4=2^2$	1	$4=2^2$
$5=2^2+2^0$	2	$2=2^1$
$6=2^2+2^1$	2	$4=2^2$
$7=2^2+2^1+2^0$	3	$4=2^2$
$8=2^3$	1	$8=2^3$
$9=2^3+2^0$	2	$2=2^1$
$10=2^3+2^1$	2	$4=2^2$
$11=2^3+2^1+2^0$	3	$4=2^2$
$12=2^3+2^2$	2	$8=2^3$
$13=2^3+2^2+2^0$	3	$4=2^2$
$14=2^3+2^2+2^1$	3	$8=2^3$
$15=2^3+2^2+2^1+2^0$	4	$8=2^3$
$16=2^4$	1	$16=2^4$

(2) 第 1 列到第 n 列的綠色方格總數 S_n

根據 a_n 的結果，把「第 2^m+1 列到第 2^m+q 列」的所有數字加起來，可以得到「第 2^m+1 列到第 2^m+q 列」的綠色方格總數會等於「第 1 列到 q 列」的綠色方格總數的 2 倍。又根據性質一與性質二，知道第 1 列到第 2^m 列綠色方格會形成一個長度為 2^m 的完整三角形，綠色方格數有 3^m 個。我們以此為基礎重新計算前 $n=1,2,3,\ldots,32$ 列的綠色總方格數 S_n。

以 $\boldsymbol{n=27}$ 為例，因為 $27=2^4+11=16+11$，所以總綠色方格形成的圖案是由第 1 列到第 16 列圖案（紅框）與兩個第 1 列到第 11 列圖案（藍框）組成，如圖 16。因此總綠色方格數為 $\boldsymbol{S_{27}=S_{16}+2\times S_{11}}$（$\boldsymbol{=81+2\times 37=155}$ **個**）。

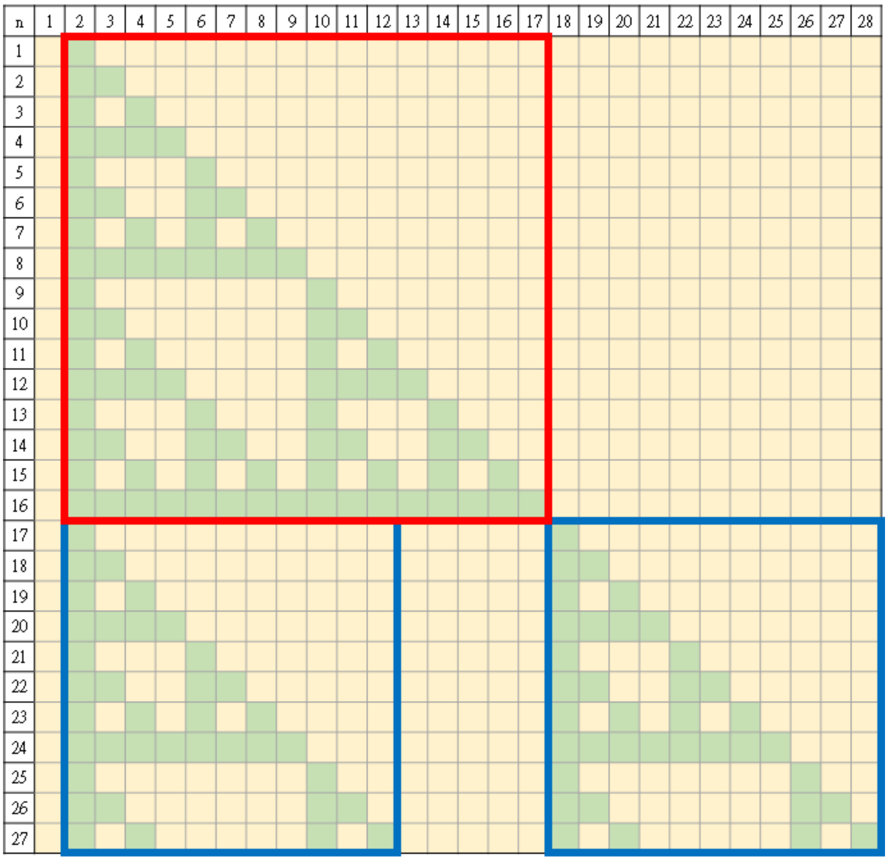


圖 16 $n=27$ 綠色方格形成圖案(圖源：作者自行繪製)

又因為 $11=2^3+3=8+3$，所以第 1 列到第 11 列綠色方格形成的圖案是由第 1 列到第 8 列圖案（紅框）與兩個第 1 列到第 3 列圖案（藍框）組成，如圖 17。因此總綠色方格數為 $\mathbf{S_{11}=S_8+2\times S_3}$ **（$\mathbf{=27+2\times5=37}$ 個）**。

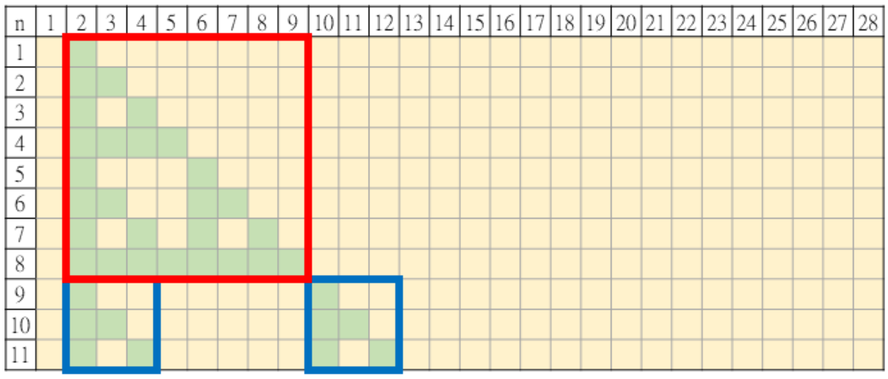


圖 17 $n=27$ 圖案中第 1 列到第 11 列綠色方格形成圖案(圖源：作者自行繪製)

最後因為 $3=2^1+1=2+1$，所以第 1 列到第 3 列綠色方格形成的圖案是由第 1 列到第 2 列圖案（紅框）與兩個第 1 列圖案（藍框）組成，如圖 18。因此總綠色方格數為 $\mathbf{S_3=S_2+2\times S_1}$ **（$\mathbf{=3+2\times1=15}$ 個）**。

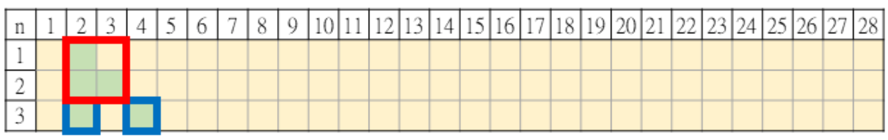


圖 18 $n=27$ 圖案中第 1 列到第 3 列綠色方格形成圖案(圖源：作者自行繪製)

綜合上面的式子可以得到，列數 $27=2^4+2^3+2^1+2^0$ 且

第 1 列到第 27 列的方格總數為

$$\begin{aligned}\mathbf{S_{27}} &= 155 = 3^4+2\times 37\\ &= 3^4+2\times(3^3+2\times 5)\\ &= 3^4+2\times 3^3+2^2\times 5\\ &= 3^4+2\times 3^3+2^2\times(3^1+2\times 1)\\ &= \mathbf{3^4+2\times 3^3+2^2\times 3^1+2^3\times 3^0}\text{。}\end{aligned}$$

再次對照整個方格圖案，其實這個算式就是與圖形中不同大小的完整三角形數量有關，在 $n=27$ 時，有 1 個最大的完整三角形－大小是 2^4，方格數為 3^4；接著有 2 個第二大的完整三角形為－大小是 2^3，方格數為 3^3；接著有 4 個第三大的完整三角形為－大小是 2^1，方格數為 3^1；最後有 8 個最小的完整三角形為－大小是 2^0，方格數為 3^0，如圖 19。

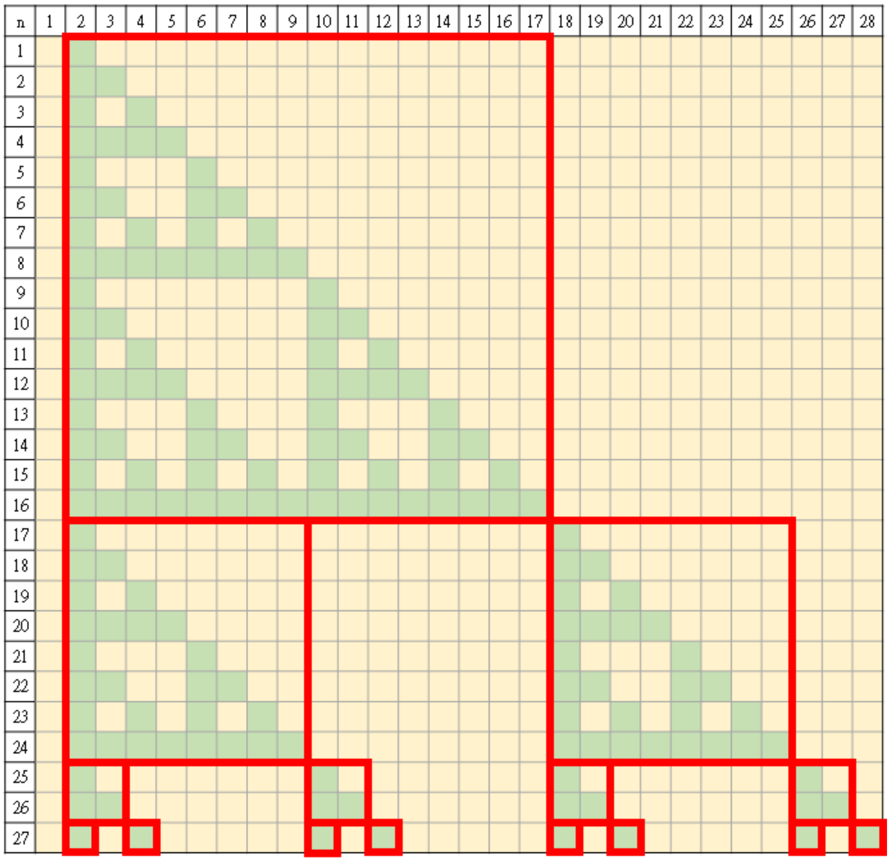


圖 19 $n=27$ 圖案中完整三角分割(圖源：作者自行繪製)

我們依照相同的計算方法，把列數 n 與所有綠色方格數的算式列在表 4。依據表格的數字，我們推測若把 n 拆成 k 個 2 的次方數相加，那綠色方格數就是 k 個 3 的次方數依次乘以 $2^0,2^1,2^3,\ldots,2^{k-1}$ 相加。

也就是說，**當 $n = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1}$，其中 $r_k > r_{k-1} > r_{k-2} > \cdots > r_1 \geq 0$ 且 r_i 皆為非負整數，則全部的方格數 $S_n = 2^0 \times 3^{r_k} + 2^1 \times 3^{r_{k-1}} + 2^2 \times 3^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{k-1} \times 3^{r_1}$ 個**。

同樣的，這也可以對應到二進位的表示法，1 的位置和數量也可以對應到圖形中完整三角形的大小與數量，**若 n 的二進位中從右到左的第 $r_i - 1$ 位為 1，則 S_n 可以寫成 $2^{k-i} \times 3^{r_i}$ 的和**。例如：$27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = (11011)_2$，所以 $S_{27} = 3^4 + 2 \times 3^3 + 2^2 \times 3^1 + 2^3 \times 3^0$。

表 4 列數 n 與第 1 列到第 n 列所有綠色方格數的規律

列數 n	所有綠色方格數
$1 = 2^0$	$1 = 3^0$
$2 = 2^1$	$3 = 3^1$
$3 = 2^1 + 2^0$	$5 = 3^1 + 2 \times 3^0$
$4 = 2^2$	$9 = 3^2$
$5 = 2^2 + 2^0$	$11 = 3^2 + 2 \times 3^0$
$6 = 2^2 + 2^1$	$15 = 3^2 + 2 \times 3^1$
$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$	$19 = 3^2 + 2 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0$
$8 = 2^3$	$27 = 3^3$
$9 = 2^3 + 2^0$	$29 = 3^3 + 2 \times 3^0$
$10 = 2^3 + 2^1$	$33 = 3^3 + 2 \times 3^1$
$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$	$37 = 3^3 + 2 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0$
$12 = 2^3 + 2^2$	$45 = 3^3 + 2 \times 3^2$
$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$	$49 = 3^3 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^0$
$14 = 2^3 + 2^2 + 2^1$	$57 = 3^3 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^1$
$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$65 = 3^3 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^1 + 2^3 + 3^0$
$16 = 2^4$	$81 = 3^4$

2. 小結

$\boxed{\text{性質三}}$

在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，根據題目的三個規則將所有的方格塗成綠色或黃色。假設第 n 列有 a_n 個方格被塗成綠色，且第 1 列到第 n 列有 S_n 個方格被塗成綠色。

(1) 若 $n = 2^m + q, 1 \leq q \leq 2^m$，

則 $a_1 = 1$ 且 $a_n = 2a_q$，$n > 1$

$S_1 = 1$ 且 $S_n = S_{2^m} + 2S_q = 3^m + 2S_q, n > 1$

(2) 若 $n - 1 = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1}, r_k > r_{k-1} > r_{k-2} > \cdots > r_1 \geq 0$，則 $a_n = 2^k$

(3) 若 $n = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1}, r_k > r_{k-1} > r_{k-2} > \cdots > r_1 \geq 0$，

則 $S_n = 2^0 \times 3^{r_k} + 2^1 \times 3^{r_{k-1}} + 2^2 \times 3^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{k-1} \times 3^{r_1}$

3. 證明

(1) 若 $n = 2^m + q, 1 \leq q \leq 2^m$：

根據$\boxed{\text{性質一}}$圖形的規律，若 $n = 2^m + q, 1 \leq q \leq 2^m$，首先畫出底為 2^m 的完整三角形，接著再複製到第 1 列到第 q 列的綠色方格圖案到這個完整三角形的正下方（第 $2^m + 1$ 列第 2 個方格）與右下方（第 $2^m + 1$ 列第 $2^m + 2$ 個方格），因此計算第 n 列綠色方格數時可以得到

$a_1 = 1$ 且 $a_n = a_q + a_q = 2a_q$

進一步相加，可以得到

$S_1 = a_1 = 1$ 且

$$
\begin{aligned}
S_n &= S_{2^m} + \left(a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + a_{2^m+3} + \cdots + a_{2^m+q}\right) \\
&= S_{2^m} + 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_q\right) \\
&= S_{2^m} + 2S_q \\
&= 3^m + 2S_q
\end{aligned}
$$

(2) 若 $n - 1 = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1}, r_k > r_{k-1} > r_{k-2} > \cdots > r_1 \geq 0$：

一開始要證明時，原本我們也想用數學歸納法證明，但是被老師提醒因為 a_n 的遞迴式和一般式中，n 的拆解方式不太一樣。

在遞迴式中，$n = 2^m + q, 1 \leq q \leq 2^m$

在一般式中，$n - 1 = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1}$

$$\Rightarrow n = 2^{r_k} + 2^{r_{k-1}} + 2^{r_{k-2}} + \cdots + 2^{r_1} + 1$$

因此在進行數學歸納法時需要做一些轉變，我們知道當 n 增加 $2^{r_{k+1}}$ 時，$n - 1$ 也

會增加 $2^{r_{k+1}}$，只是現在只能用實際的數字說明，還無法明確的用符號表示。說明如下：

① 當 $n=1$ 時，$n-1=0$，$a_1=2^0=1$，推測成立

$n=2$ 時，$n-1=1=2^0$，$a_2=2^1=2$，推測成立

$n=3$ 時，$n-1=2=2^1$，$a_3=2^1=2$，推測成立

② 先隨便選一個數字，

假設當 $n=6$ 時推測成立，即 $n-1=5=2^2+2^0$，$a_6=2^2$

則 $n=2^k+6, 2^k>6$ 時，$a_{2^k+6}=2a_6=2\times 2^2=2^3$

此時 $n-1=2^k+5=2^k+2^2+2^0$，推測也成立

因為在第②步時，n 是隨便選的，所以對不同的數字也可以做相同的推論，因此利用數學歸納法可知，如果 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，則 $a_n=2^k$。

(3) 若 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$：

根據(1)的結果，利用數學歸納法證明：

① 當 $n=1=2^0$ 時，$S_1=1=2^0\times 3^0$，推測成立

$n=2=2^1$ 時，$S_1=2=2^1\times 3^0$，推測成立

$n=3=2^1+2^0$ 時，$S_3=5=2^0\times 3^1+2^1\times 3^0=5$，推測成立

② 假設當 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$ 時推測成立，即

$S_n=2^0\times 3^{r_k}+2^1\times 3^{r_{k-1}}+2^2\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times 3^{r_1}$

則 $n=2^{r_{k+1}}+2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_{k+1}>r_k>r_{k-1}>\cdots>r_1\geq 0$ 時，

$S_n=S_{2^{r_{k+1}}}+2S_{2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}}$

$=3^{r_{k+1}}+2(2^0\times 3^{r_k}+2^1\times 3^{r_{k-1}}+2^2\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times 3^{r_1})$

$=3^{r_{k+1}}+2^1\times 3^{r_k}+2^2\times 3^{r_{k-1}}+2^3\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^k\times 3^{r_1}$

$=2^0\times 3^{r_{k+1}}+2^1\times 3^{r_k}+2^2\times 3^{r_{k-1}}+2^3\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{(k+1)-1}\times 3^{r_1}$，

推測也成立

故利用數學歸納法可知，如果 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，

則 $S_n=2^0\times 3^{r_k}+2^1\times 3^{r_{k-1}}+2^2\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times 3^{r_1}$

四、 圖形與二進位的關係

在性質三中的關察過程中，我們已經知道 $n-1$ 和 n 的二進位表示法 1 的數量與位置和 a_n 與 S_n 的數字有關，其實二進位與圖形的分布也有關聯。

(一) 第 n 列的綠色方格分布

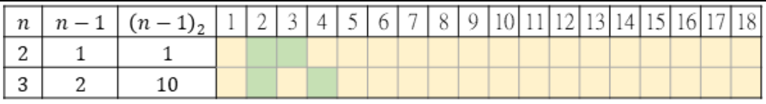
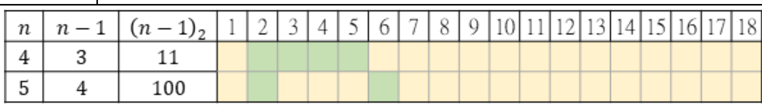
若 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，則 $a_n=2^k$。換句話說是把 $n-1$ 換成二進位後，數字中有 k 個 1，則 a_n 為 2^k。

例如：$n=26\Rightarrow n-1=25$ 換成二進位表示法是 $n-1=(11001)_2$，有 3 個 1，

所以 $a_{26}=2^3=8$。

更進一步用圖表示，如表 5，因為每一個完整三角形的底部（第 2^m 列）中，第 1 個方格與第 2^m+2 個以後的方格都是黃色，第 2 個到第 2^m+1 個方格（連續 2^m 個方格）都是綠色，所以到第 2^m+1 列時會變成第 1 個方格、第 3 個到第 2^m+1 個方格以及第 2^m+3 個以後的方格都是黃色，第 2 個與第 2^m+2 個方格是綠色，繼續往下畫下去會一直形成個新的完整三角形。因此**當 n 多 2^k 時，圖形會複製一次再往後平移 2^k 格**。如果換成二進位就是**在 $n-1$ 的二進位最左邊多寫一個 1，然後從這個 1 的位值就可以知道先複製圖案，接著再往後平移多少格**。

表 5 完整三角形底部的變化(圖源：作者自行繪製)

n	$n-1$	$(n-1)_2$	說明
2	1	1	連續 2^1 格綠色
3	2	10	第 2 格綠色往右 2 格複製，因此第 2 格、第 4 格是綠色的， 中間會有 $2^1-1=1$ 格黃色。
			
4	3	11	連續 2^2 格綠色
5	4	100	第 2 格綠色往右 4 格複製，因此第 2 格、第 4 格是綠色的， 中間會有 $2^2-1=3$ 格黃色
			

接下來數列的生成可以看成兩個步驟方法，如表 6，第一步驟為在右邊多加一個 1，意思是在原本圖形後複製兩次；第二步驟為在原本的數字和右邊多加的 1 之中放入 0，意思是往右平移，因此後面會有由 0 和 1 形成的兩種序列，詳細圖形變化如表 7(1)是由 1 形成的數列，表 7(2)是從 11 形成的另一個分支數列。

表 6 分別由 0 和 1 形成的二進位數列(圖源：作者自行繪製)

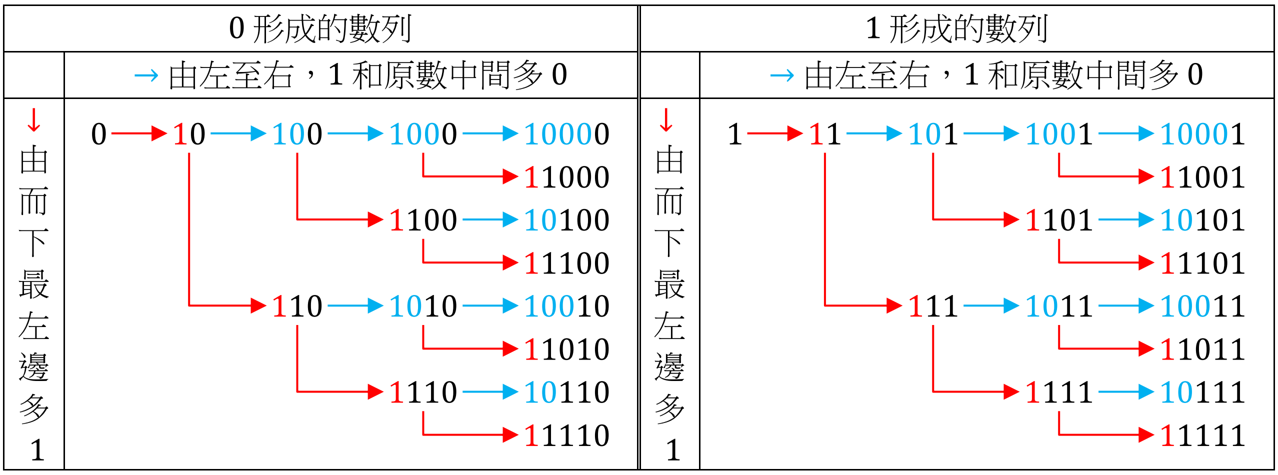
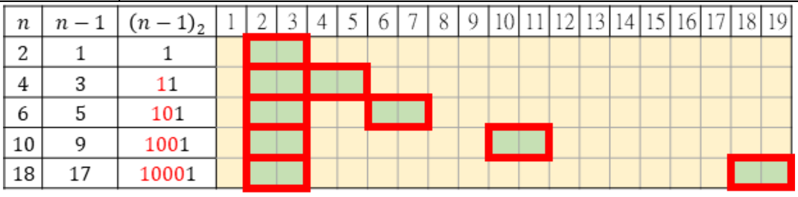


表 7 二進位數列與綠色方格圖案的關係(圖源：作者自行繪製)

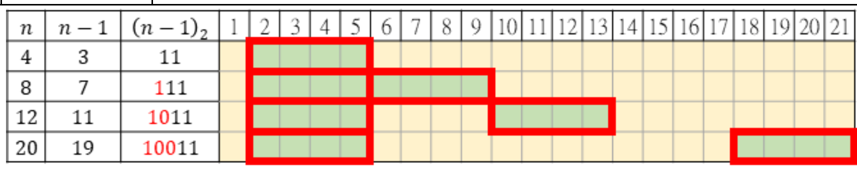
(1)

n	$n-1$	$(n-1)_2$	說明
2	1	1	表示 2 個連續的綠色
4	3	11	$11=10+1$， 因此先複製 1 的圖形，並往右平移 2^1 格， 兩個圖案之間空 $2^1-2=0$ 格黃色。
6	5	101	$101=100+1$， 因此先複製 1 的圖形，並往右平移 2^2 格， 兩個圖案之間空 $2^2-2=2$ 格黃色。
10	9	1001	$1001=1000+1$， 因此先複製 1 的圖形，並往右平移 2^3 格， 兩個圖案之間空 $2^3-2=2$格黃色。



(2)

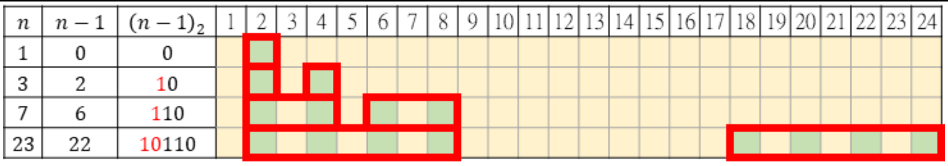
n	$n-1$	$(n-1)_2$	說明
4	3	11	表示 4 個連續的綠色
8	7	111	$111=100+11$， 因此先複製 11 的圖形，並往右平移 2^2 格， 兩個圖案之間空 $2^2-4=0$ 格黃色。
12	11	1011	$1011=1000+11$， 因此先複製 11 的圖形，並往右平移 2^3 格， 兩個圖案之間空 $2^3-4=4$格黃色。
20	19	10011	$10011=10000+11$， 因此先複製 11 的圖形，並往右平移 2^4 格， 兩個圖案之間空 $2^4-4=12$ 格黃色。



依照上面的想法，所有的數列都可以直接寫出來，例如 $n=23$ $\Rightarrow n-1=22=(10110)_2$，形成的方式為 $0\rightarrow 10\rightarrow 110\rightarrow 10110$，詳細畫法如表 8。

表 8 $n=23$ 利用二進位的數列形成圖案(圖源：作者自行繪製)

第一步	先畫出 0 的圖形－第 2 個方格畫上 1 個綠色格子。
第二步	先複製 0 的圖形，並往右平移 2^1 格，所以中間空 $2^1-1=1$ 格黃色，圖形總長度（第一個綠色到最後一個綠色）為 $2^1+1=3$ 格。
第三步	先複製 10 的圖形，並往右平移 2^2 格，所以中間空 $2^2-3=1$ 格黃色，圖形總長度（第一個綠色到最後一個綠色）為 $2^2+3=7$ 格。
第四步	先複製 110 的圖形，並往右平移 2^4 格，所以中間空 $2^4-7=9$ 格黃色，圖形總長度（第一個綠色到最後一個綠色）為 $2^4+7=23$ 格。



如果回到用 n 的二進位表示法討論，因為如果 $n'=n+2^k$，則 $n'-1=(n-1)+2^k$，所以也有相同的結果。只是要注意，前面我們定義 n 的遞迴式「當 $n=2^m+q,1\leq x\leq 2^m$ 時，$a_n=2a_q$」，2^m 可能等於 q，如果用二進位表示，就會有進位的問題，例如當 $n=4=2^2=(100)_2$，$n'=4+2^2=(100)_2+(100)_2=(1000)_2=8$，這時候不會在最左邊多一個 1，而是在 1 的後面多一個 0。

(二) 第 1 列到第 n 列的綠色方格總數 S_n

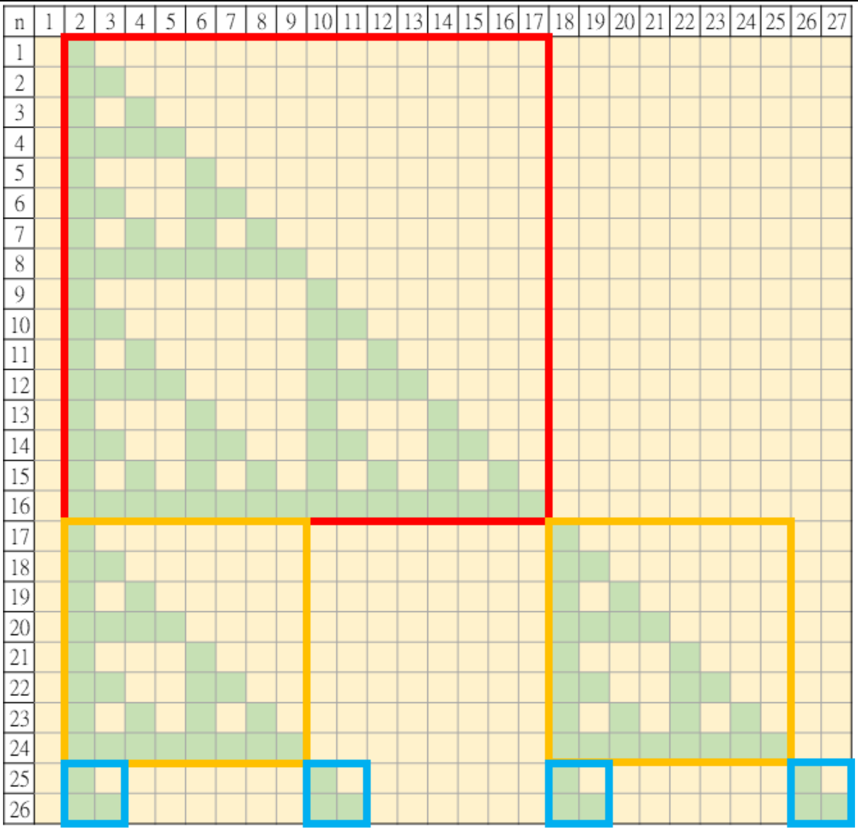
若 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，則 $S_n=2^0\times 3^{r_k}+2^1\times 3^{r_{k-1}}+2^2\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times 3^{r_1}$。因此所有綠色方格數的二進位規則有兩點：

1. 幾個 1 代表幾種不同的完整三角形及不同完整三角形的數量。
2. 1 的位值表示對應完整三角形的大小。

例如：表 9 為 $n=26$ 的說明。

表 9 $n = 26$ 二進位與前 26 列綠色方格圖案的關係(圖源：作者自行繪製)

$n = 26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = (11010)_2$，$S_{26} = 2^0 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 2^2 \times 3^1 = 147$
(1) 有三個 1，表示有三種完整三角形。最大的完整三角形有 $2^0 = 1$ 個，第二大的完整三角形有 $2^1 = 2$ 個，最小的完整三角形有 $2^2 = 4$ 個
(2) 最大的完整三角形是底為 $2^4 = 16$ 的完整三角形，綠色方格數有 $3^4 = 81$ 個 第二大的完整三角形是底為 $2^3 = 16$ 的完整三角形，綠色方格數有 $3^3 = 27$ 個 最小的完整三角形是底為 $2^1 = 2$ 的完整三角形，綠色方格數有 $3^1 = 3$ 個
因此全部有 $1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 4 \times 3^1$ 個綠色方格



五、與題目同義的不同敘述方式

因為三月公布的解答是把所有格子依照顏色分成 0 和 1，因此我們又有了想法，如果去掉框線，只留下數字，除了可以用 Excel 快速畫出圖形，且數字的寫法又可以非常多元，下面是我們和老師共同討論出來的一些相同敘述。若把第 i 列的第 j 個數字寫成 (i, j)

(一) 依照我們的塗色方法－相同塗黃色，不同塗綠色，可以設定條件：

1. 第 1 行皆為 0（塗黃色）

   第 1 列除了 $(1, 2) = 1$（塗綠色），其餘皆為 0

2. 若 $(i, j) = (i, j + 1)$，則 $(i + 1, j + 1) = 0$，塗黃色

   若 $(i, j) \neq (i, j + 1)$，則 $(i + 1, j + 1) = 1$，塗綠色

Excel 公式： A1=0，B1=2，C1=D1=…=0 A1=A2=…=0 B2=IF(A1=B1,0,1)

(二) 依照雜誌公布的解答，可以設定條件：

1. 第 1 行皆為 0（塗黃色）

   第 1 列除了 $(1,2)=1$（塗綠色），其餘皆為 0

2. 設定 $(i+1,j+1)\equiv(i,j)+(i,j+1)\ (mod\ 2)$，

   若 $(i+1,j+1)=0$，塗黃色；若 $(i+1,j+1)=1$，塗綠色

Excel 公式：
A1=0，B1=2，C1=D1=…=0
A1=A2=…=0
B2=MOD(A1+B1,2)

在這個解法中，如果單純只看 $(i,j)+(i,j+1)$ 條件，其實就是巴斯卡三角形的奇數塗成綠色，偶數塗成黃色，而後我們再用 ChatGPT 與關鍵字「巴斯卡三角形的奇數」搜尋，也可以找到相關文獻，許介彥（2004）[4]利用二項式的敘述及 Lucas 定理可以說明巴斯卡三角形中奇數的分布與第 n 列奇數的個數，與我們的結果一樣。

(三) 若把(二)運算中的加法改為減法，需要重新設定初始條件的數字：

1. 第 1 行皆為 0（塗黃色）

   第 1 列除了 $(1,2)=1$（塗綠色），其餘皆為 0

2. 設定 $(i+1,j+1)=|(i,j)-(i,j+1)|$，

   若 $(i+1,j+1)=0$，塗黃色；若 $(i+1,j+1)=1$，塗綠色

Excel 公式：
A1=0，B1=1，C1=D1=…=0
A1=A2=…=1
B2=ABS(B1-A1)

(四) 若把(二)運算中的加法改為乘法，需要重新設定初始條件的數字：

1. 第 1 行皆為 1（塗黃色）

   第 1 列除了 $(1,2)=-1$（塗綠色），其餘皆為 1

2. 設定 $(i+1,j+1)=(i,j)\times(i,j+1)$，

   若 $(i+1,j+1)=1$，塗黃色；若 $(i+1,j+1)=-1$，塗綠色

Excel 公式：
A1=1，B1=−1，C1=D1=…=1
A1=A2=…=1
B2=A1*B1

在這個敘述中，我們也有找到相關的文獻，郭士恩（2008）[5]科展研究中討論了 1 與 -1 的個數，發現 -1 的分布情形，及可利用公式推算 (i,j) 的數字。我們的研究則是發現 -1 的分布與計算第 n 列與前 n 列 -1 的個數，還可以更進一步用二進位的方式說明 -1 圖形產生的規律。

(五) 若把(二)運算中的加法改為除法，和乘法運算的形式很像：

1. 第 1 行皆為 1（塗黃色）

   第 1 列除了 $(1,2)=-1$（塗綠色），其餘皆為 1

2. 設定 $(i+1,j+1)=(i,j)/(i,j+1)$，

   若 $(i+1,j+1)=1$，塗黃色；若 $(i+1,j+1)=-1$，塗綠色

Excel 公式：
A1=1，B1=−1，C1=D1=…=1
A1=A2=…=1
B2=A1/B1

六、對任何 $n \times t$ 的長方形方格紙中綠色方格的分布與數量

從前面的討論已經知道當 $t = n + 1$ 圖綠色方格分布的規律與數量，我們想在知道對不同大小的長方形方格紙會有什麼樣的情形，因此我們分為 $t > n + 1$ 及 $t < n + 1$ 兩種情形討論。

(一) $n \times t$ 的長方形方格紙，$t > n + 1$

因為規則① $(1, j), 3 \leq j \leq t$ 都是黃色的，又由性質一已經知道在 $n \times (n + 1)$ 的長方形方格紙中，綠色方格形成的規律會透過自我複製的方式產生所有的圖形，且在 $(k, k + 1)$ 方格都為綠色，且 $(k, j), 1 \leq k \leq n, k + 2 \leq j \leq n + 1$ 方格都為黃色，因此 $(i, j), 1 \leq i \leq n, n + 2 \leq j \leq t$ 方格也都是黃色，如圖 20 為 10×15 方格紙的塗色情形。所以在 $n \times t$ 方格紙中綠色方格的數量與 $n \times (n + 1)$ 方格紙的數量相同。

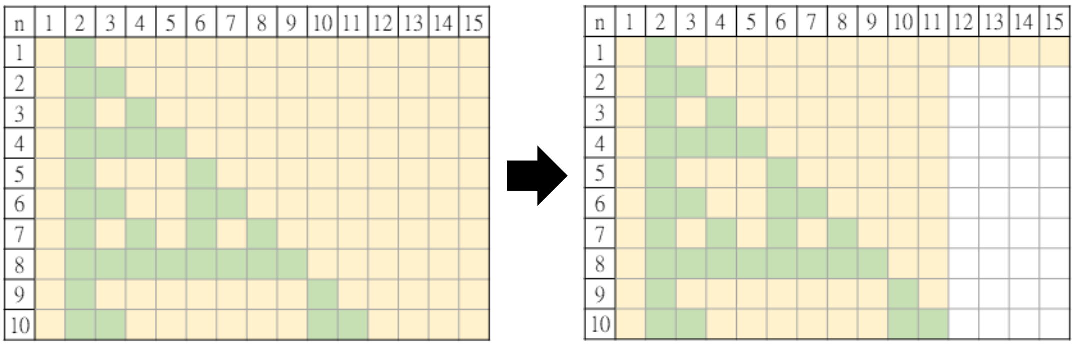


圖 20 10×15 方格紙的塗色情形(圖源：作者自行繪製)

(二) 當 $n \times t$ 的長方形方格紙，$t < n + 1$

如果暫時忽略第一行的黃色格子，因為在 $2^m \times (2^m + 1)$ 的方格紙會形成一個完整三角形，這個三角形是一個對稱圖形，對稱軸為 $(1, 2^m + 1)$ 方格與 $(2^m, 2)$ 方格的連線，如圖 21 顯示出 8×9 方格紙綠色方格圖案的對稱軸，因此當 $t < n + 1$ 可以利用圖形的對稱性解題。

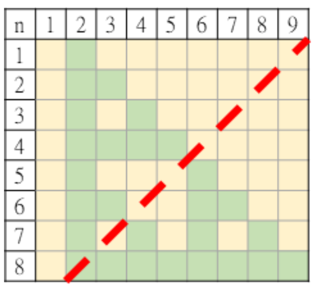


圖 21 $2^m \times (2^m + 1)$ 圖案的對稱軸(圖源：作者自行繪製)

1. 如果 $n = 2^m$，可以看成 $2^m \times (2^m + 1)$ 方格紙扣掉前面 $2^m - (t - 1)$ 列，如圖 22(1)為 8×4 方格紙的圖案、圖 22(3)為 16×7 方格紙的圖案，再利用性質三的公式就可以算出綠色方格的數量。

2. 如果 $n = 2^m + q$，則要先把圖補成完整三角形，即 $2^{m+1} \times (2^{m+1} + 1)$ 的方格紙，再扣掉前 $2^{m+1} - (t-1)$ 列的圖形與第 $2^{m+1} - (t-1) + 1$ 到 2^{m+1} 列的第 2 到 $2^m + 1 - n$ 行的圖形，如圖 22(2)為 7×4 方格紙的圖案、圖 22(4)為 12×8 方格紙的圖案，再利用$\boxed{\text{性質三}}$的公式就可以算出綠色方格的數量。

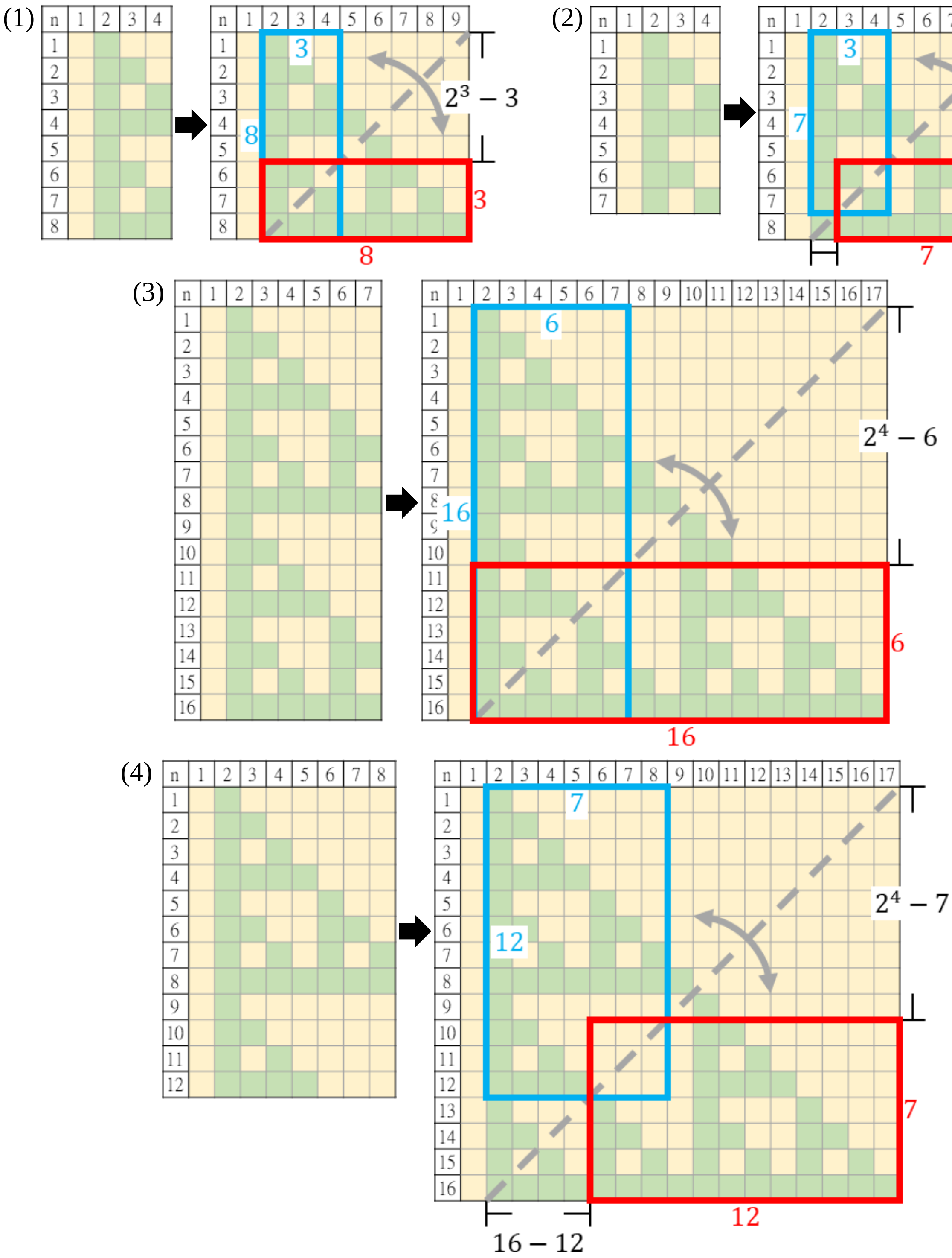


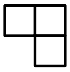
圖 22 $n \times t, t < n + 1$ 方格紙的圖案(圖源：作者自行繪製)

伍、結論

在一個長 n 行，寬 $n+1$ 列的長方形方格紙中，根據以下規則將每個正方形都塗成綠色或黃色：

① 左邊第一列的所有方格都是黃色的。

② 上方第一排中，只有左邊數來第二個方格是綠色的。

③ 以  方式排成的三個方格中，只有奇數個方格會被塗成黃色。

一、綠色方格分佈的規律：

從 $n=1$ 開始只有第 1 列的第 2 個方格被塗成綠色，之後圖形可以依照自我複製的形式持續畫下去。

當 $n=2^m, m$ 為非負整數時，將方格的對角線連線，綠色方格形成的圖案是底為 2^m 的完整三角形，圖形類似謝爾賓斯基三角形，差別在於綠色方格形成的圖案會隨著 m 的增加，而利用自我複製的方式不斷擴大。

當 $n=2^m+q, m$ 為非負整數且 $1 \le q \le 2^m$，首先畫出底為 2^m 的完整三角形，接著再複製第 1 列到第 q 列的綠色方格圖案到完整三角形的正下方（第 2^m+1 列第 2 行）與右下方（第 2^m+1 列第 2^m+1 行），形成前 n 列的圖案。此外也可以利用二進位的方式直接推論第 n 列的圖案與前 n 列的圖案。

二、綠色方格數量與 n 的關係：

(一) 當 $n=2^m+q, m$ 為非負整數且 $1 \le q \le 2^m$：

假設第 n 列有 a_n 個方格被塗成綠色，且第 1 列到第 n 列有 S_n 個方格被塗成綠色。

1. 若 $n=2^m+q, 1 \le q \le 2^k$，

   則 $a_1=1$ 且 $a_n=2a_q$、

   $S_1=1$ 且 $S_n=s_{2^p}+2s_q=3^p+2s_q$

2. 若 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1 \ge 0$，

   則 $a_n=2^k$。

3. 若 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1 \ge 0$，

   則 $S_n=2^0 \times 3^{r_k}+2^1 \times 3^{r_{k-1}}+2^2 \times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1} \times 3^{r_1}$。

(二) 將 n 和 $n-1$ 用二進位表示：

1. 若 $n-1$ 寫成二進位時，如果數字中有 k 個 1，
   則可以用 1 的數量與位值推測第 n 列綠色方格的位置，
   且第 n 列的綠色方格數 $a_n = 2^k$。
2. 若 n 寫成二進位時，如果數字中有 k 個 1，
   則可以用 1 的數量與位值推測第 1 列到第 n 列綠色方格的分布情形，包含不同完整三角形的大小與數量，進而寫出所有的綠色方格數 S_n。

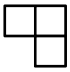
三、若將方格紙改成 $\boldsymbol{n \times t}$ 的方格紙

若改成不同大小的方格紙，綠色方格會依照相同的規律自我複製。若 $t > n+1$，則第 1 到第 $n+1$ 行的圖案與 $n \times (n+1)$ 的方格紙相同，而第 $n+1$ 行後的圖形都塗成黃色；若 $t < n+1$，可以利用對稱與分割 $n \times (n+1)$ 的方格紙的方式求出綠色方格的圖案，因此對任何大小的方格紙都可以求出綠色方格的總數。

陸、 未來展望

在最後面的研究時，除了思考與我們研究問題的相同敘述外，我們也另外思考了如果改變條件規則，那圖形會有什麼變化，是否和原本的問題一樣能找出綠色格子數量的公式。目前我們想到有兩種改變方式－改變方格塗色的數量，以及改變的形狀。

一、 改變規則③圖案裡黃色的數量

在研究出將規則③中  圖形裡面黃色格子數是奇數個過後，我們試著把第三個規則中圖形裡面的黃色格子數量改成偶數個，我們也成功的畫出了一部分的圖形，如圖23，與奇數的情形類似，但又有些不同，之後會我們還繼續尋找這個圖形的完整規律。

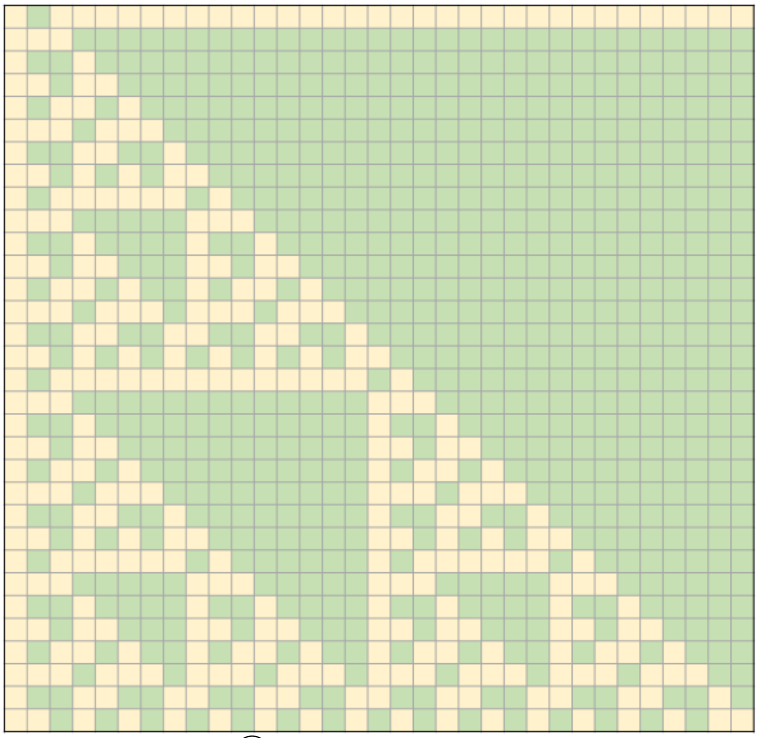
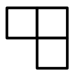
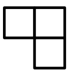


圖 23 $n = 32$ 將規則③改成偶數的圖案(圖源：作者自行繪製)

二、 改變規則③的方格的圖案

將第三個規則中原先圖案的研究做完後，我們覺得還可以試試著將規則③中  圖形改成別的樣子，像是可以把  圖案改成四個連在一起的正方形或是不同大小的長方形，不過這個還需要思考是否一開始條件要如何設定。

柒、 參考文獻資料

[1] MA 288. (2024), Crux Mathematicorum, 50(8), 389.
https://cms.math.ca/wp-content/uploads/2024/10/Wholeissue_50_8-r3.pdf

[2] MA 288. (2025) , Crux Mathematicorum, 51(3), 109.
https://cms.math.ca/wp-content/uploads/2025/03/Wholeissue_51_3.pdf

[3] 李政憲、王儷娟（2020）。從謝爾賓斯基碎形談摺紙。科學教育月刊，427，38-46。
https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62563f8f381784d09345b99a/4-%E5%BD%A9-P38-46-108044-%E6%9D%8E%E6%94%BF%E6%86%B2-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E5%BE%9E%E6%91%BA%E7%B4%99%E5%AD%B8%E8%AC%9D%E7%88%BE%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2-.pdf

[4] 許介彥（2004）。巴斯卡三角形的幾個性質。科學教育月刊，275，20-28。
https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/6256410b381784d09345bd5c/3.pdf

[5] 郭士恩（2008）。再論巴斯卡三角形。臺灣 2008 年國際科學展覽會。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2008/pdf/010016.pdf

註：圖 1 參考文獻資料[1]後，再由作者自行繪製；

圖 9 參考文獻資料[3]後，再由作者自行繪製；

除了上述圖片引自他處，本研究其他的圖表皆由作者自行繪製。

【評語】030414

本作品以數學雜誌《Crux Mathematicorum》2024 年公告的題目 MA 288 為研究起點，深入探討了特定塗色規則下形成的方格圖案分佈規律。值得一提的是，本研究團隊在該題官方解答（2025 年 3 月才公布）尚未出爐前，便能獨立發展出獨特的解題方法與成果，其研究途徑與官方解答有所不同，展現了高度的獨立思考與探究能力。研究團隊透過系統性的繪圖觀察與分析不同大小的圖形，成功歸納出第 n 列及前 n 列綠色方格數的遞迴關係與一般式。

作品海報

神秘的三角格局：
塗色規則下的奇幻圖案

壹、研究動機

在數理資優班上專題研究時，我們在老師介紹的數學雜誌《CruxMathematicorum》的題目上找了一題看起來非常有趣的題目，充滿著格子的圖表像拼圖一樣，激起了我 們的好奇心，我們決定研究這個圖的關係，解開這個有趣的謎！Crux Mathematicorum Vol 50. 公告題目MA 288.如下：

在一個長 21 行，寬 20 列的長方形方格紙中，每個正方形格子邊長 1 單位。
根據以下規則將每個正方形都塗成綠色或黃色：
① 左邊第一行的所有方格都是黃色的。
② 上方第一列中，只有左邊數來第二個方格是綠色的。
③ 以 ⊞ 方式排成的三個方格中，只有奇數格會被塗成黃色。
方格紙左上角的部分圖形顯示如圖1。
請問全部 $20 \times 21 = 420$ 的方格中，有多少個方格被塗成綠色？

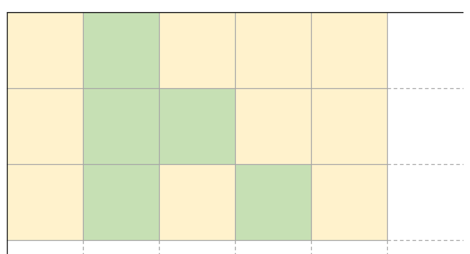


圖1 原題部分圖形

2025年4月公布的解題方法如圖2：

0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0

圖2 原題公布的解答方法

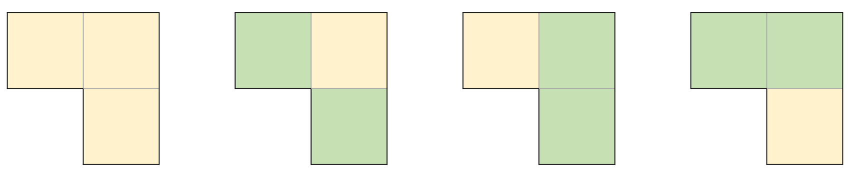
利用 0 和 1 的數量
計算綠色方格共有 99 格

貳、研究目的

將長 $n+1$ 行、寬 n 列的長方形方格紙記做 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙，依照原題目的圖色規則，尋找：
1. 在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，綠色方格分佈的規律為何？
2. 在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，第 n 列及前 n 列綠色方格的數量為何？

參、研究過程與方法

將原題目規則③的敘述改成
「在 ⊞ 圖形中，如果上面兩格有偶數格被塗成黃色（兩格同色），則下面的方格依然要塗成黃色；如果上面兩格有奇數格被塗成黃色（兩格異色），則下面的方格要塗成綠色」
所以總共以下四種圖法，如圖3：


(1) (2) (3) (4)
圖3 所有三連方格的塗色情形

依圖形特點原題繪製 20×21 方格紙的圖形，並觀察圖形特點
繪製 $n \times (n+1)$ 方格紙的圖形，發現圖形規律
分成 $n = 2^m$ 及 $n \neq 2^m$ 兩種情形討論，計算每一列與前 n 列的綠色方格數
尋找每一列與前 n 列的綠色方格數的公式與證明發現的公式
發現二進位與綠色方格數的分布規律與數量有關
思考題目的等價敘述及再次尋找相關文獻

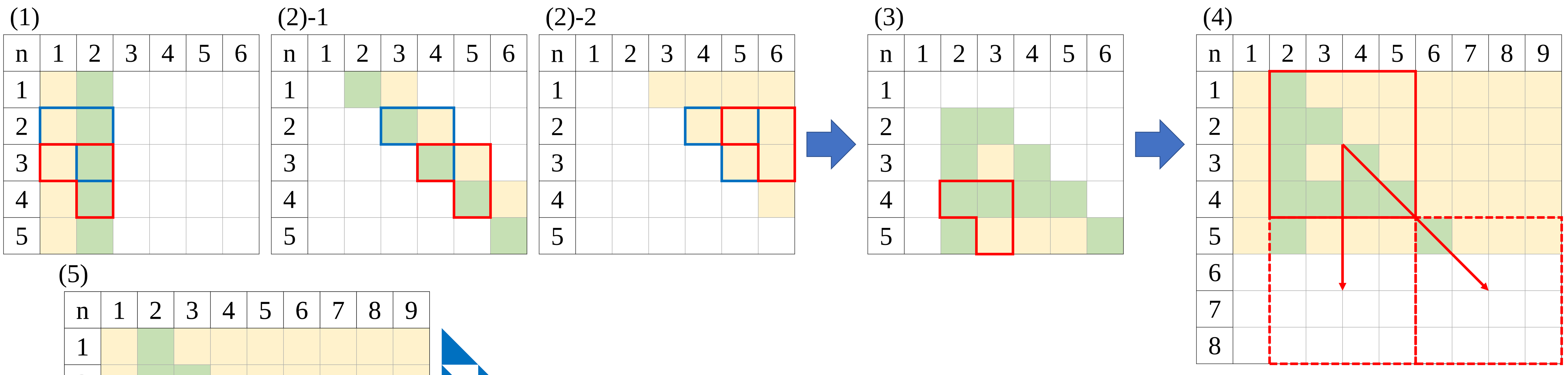
圖4 研究流程圖

肆、研究結果

一、 在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，綠色方格分佈的規律

性質一

在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，根據題目的三個規則將所有的方格塗成綠色或黃色，則圖形有以下特點：
(1) 方格 $(i,2), 1 \le i \le n$ 全部都為綠色。
(2) 方格 $(k,k+1), 1 \le k \le n$ 都為綠色，方格 $(k,j), 1 \le k \le n, k+2 \le j \le n+1$ 都為黃色。
(3) 方格 $(2^m, j), 2 \le j \le 2^m + 1$ 都為綠色，
方格 $(2^m+1, 2)$ 與方格 $(2^m+1, 2^m+2)$ 是綠色的，兩個綠色方格的中間皆為黃色。
(4) 當 $n = 2^{m+1}$ 時圖形的形成方式為將第 1 列到第 2^m 列的綠色方格圖案（底為 2^m 的完整的三角形），
複製到第 2^m+1 列的第 2 個方格及第 2^m+1 列的第 2^m+2 個方格，形成一個底為 2^{m+1} 的完整的三角形。
(5) 當 $n = 2^m$, m 為非負整數時，若把方格的對角線連線，會形成一個底為 2^m 的完整的三角形。
（圖形類似謝爾賓斯基三角形Sierpinski triangle）



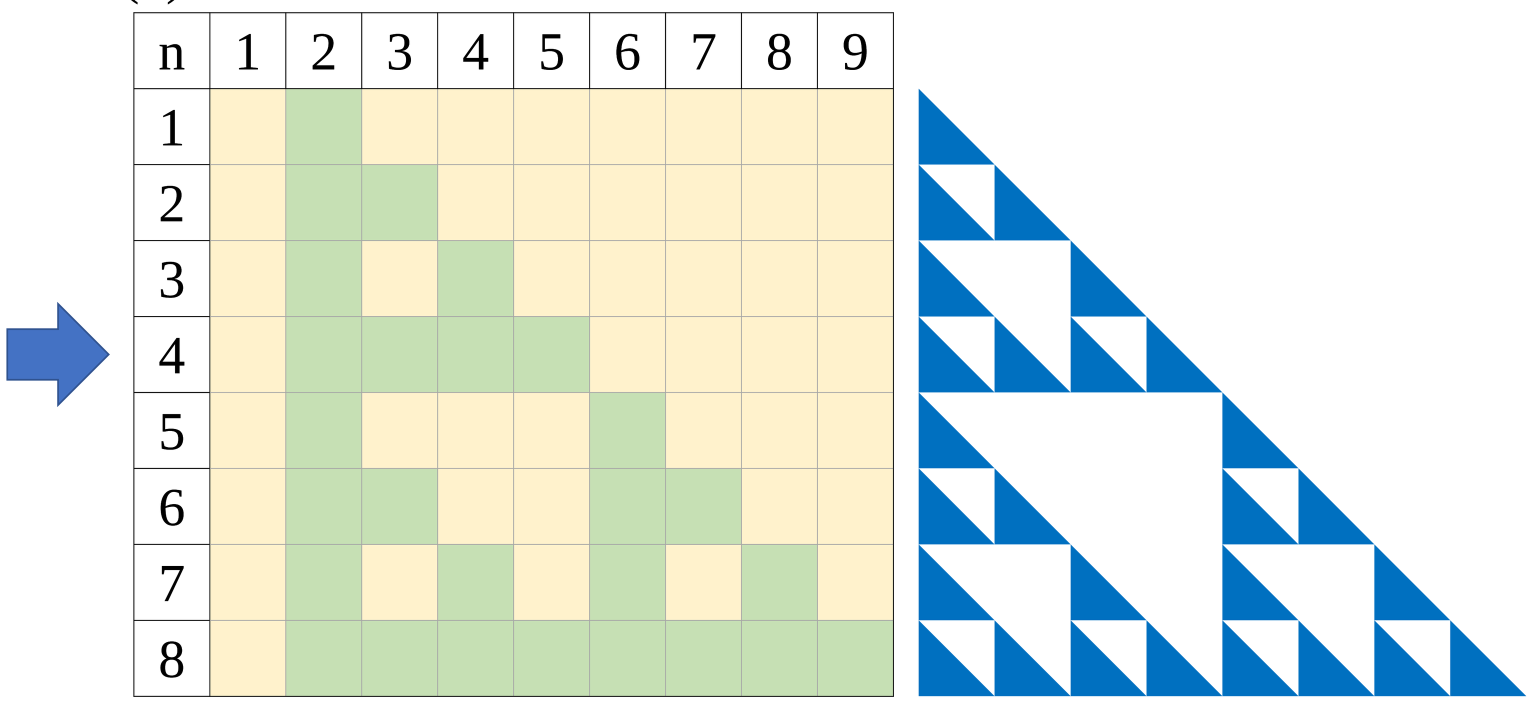


圖5 性質一中圖形形成的五種規律

二、 在 $n \times (n+1)$ 的長方形方格紙中，綠色方格數量與 n 的關係

(一) 若 $n = 2^m$, m 為非負整數：

性質二

在 $n(n+1)$ 的長方形方格紙中，
根據原題目規則將每個正方形都塗成綠色或黃色。
假設第 1 列到第 n 列有 S_n 個方格被塗成綠色。
當 $n = 2^m$ 時，$S_n = 3S_{2^{m-1}} = 3^m$。

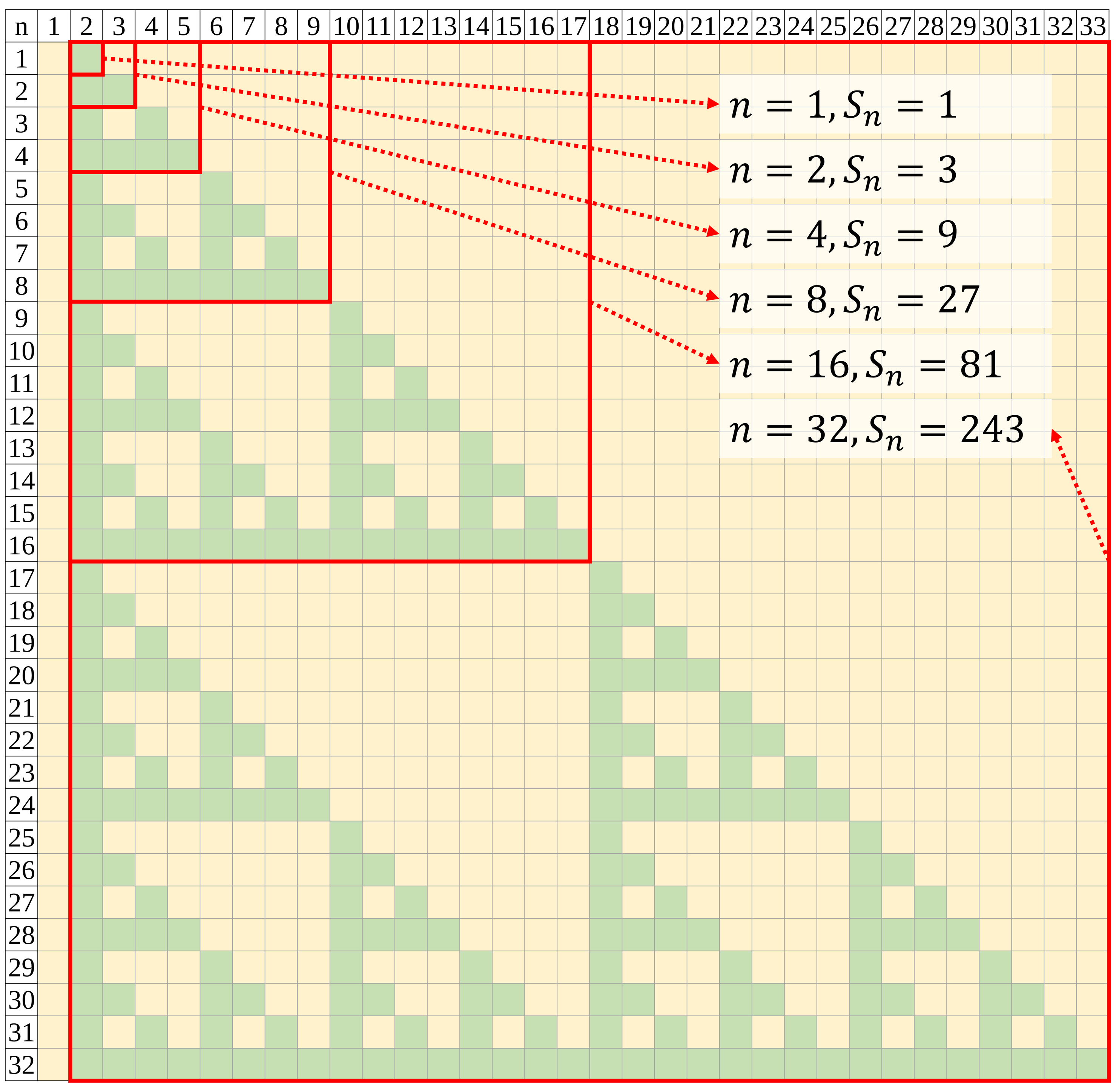


圖6 $n = 2^m, 1 \le m \le 5$ 的綠色方格總數與圖形

(二) 若 $n=2^m+q$，m 為非負整數，且 $1\le q\le 2^m$：

性質三

在 $n(n+1)$ 的長方形方格紙中，根據原題規則將每個方格都塗成綠色或黃色。
假設第 n 列有 a_n 個方格被塗成綠色，且第 1 列到第 n 列有 S_n 個方格被塗成綠色。
(1) 若 $n=2^m+q, 1\le q\le 2^m$，則 $a_1=1$ 且 $a_n=2a_q$、$S_1=1$ 且 $S_n=S_{2^m}+2S_q=3^m+2S_q$
(2) 若 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\ge 0$，則 $a_n=2^k$
(3) 若 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots 2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\ge 0$，則 $S_n=2^0\times 3^{r_k}+2^1\times 3^{r_{k-1}}+2^2\times 3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times 3^{r_1}$

1. 第 n 列的綠色方格數 a_n

由圖形發想的規律

因為在完整三角形底部都是綠色方格，
所以第 2^m+1 列的圖形會是第 1 列的圖形複製兩次
$\Rightarrow$ 第 2^m+q 列的圖形會是第 q 列的圖形複製兩次。
a_n 的遞迴規律如表1，一般式的整理如表2。

數量+1

n	a_n
1	1

$\times 2$

數量+2

n	a_n
1	1
2	2

$\times 2$

數量+4

n	a_n
1	1
2	2
3	2
4	4

$\times 2$

數量+8

n	a_n
1	1
2	2
3	2
4	4
5	2
6	4
7	4
8	8

$\times 2$

n	a_n
1	1
2	2
3	2
4	4
5	2
6	4
7	4
8	8
9	2
10	4
11	4
12	8
13	4
14	8
15	8
16	16

表1 a_n 遞迴規律

列數 n	k	第 n 列綠色方格數 a_n
$1=2^0$	1	$1=2^0$
$2=2^1$	1	$2=2^1$
$3=2^1+2^0$	2	$2=2^1$
$4=2^2$	1	$4=2^2$
$5=2^2+2^0$	2	$2=2^1$
$6=2^2+2^1$	2	$4=2^2$
$7=2^2+2^1+2^0$	3	$4=2^2$
$8=2^3$	1	$8=2^3$

表2 第 n 列綠色方格數的規律

圖形與二進位關係

因為 $n=q\Rightarrow n-1=q-1$
$n=2^m+q\Rightarrow n-1=2^m+q-1$
所以 $(2^m+q-1)_2$ 為 $(q-1)_2$ 最左邊多 1 個 1，如圖7。
此時圖形會被複製兩次，並向後平移，如圖8、9。

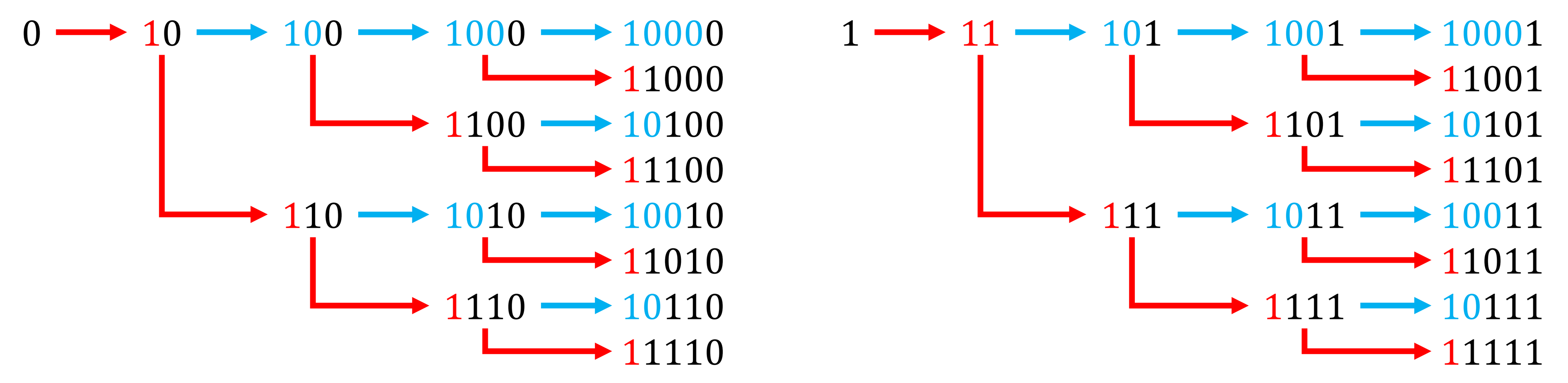


圖7 $(n-1)_2$ 形成的數列

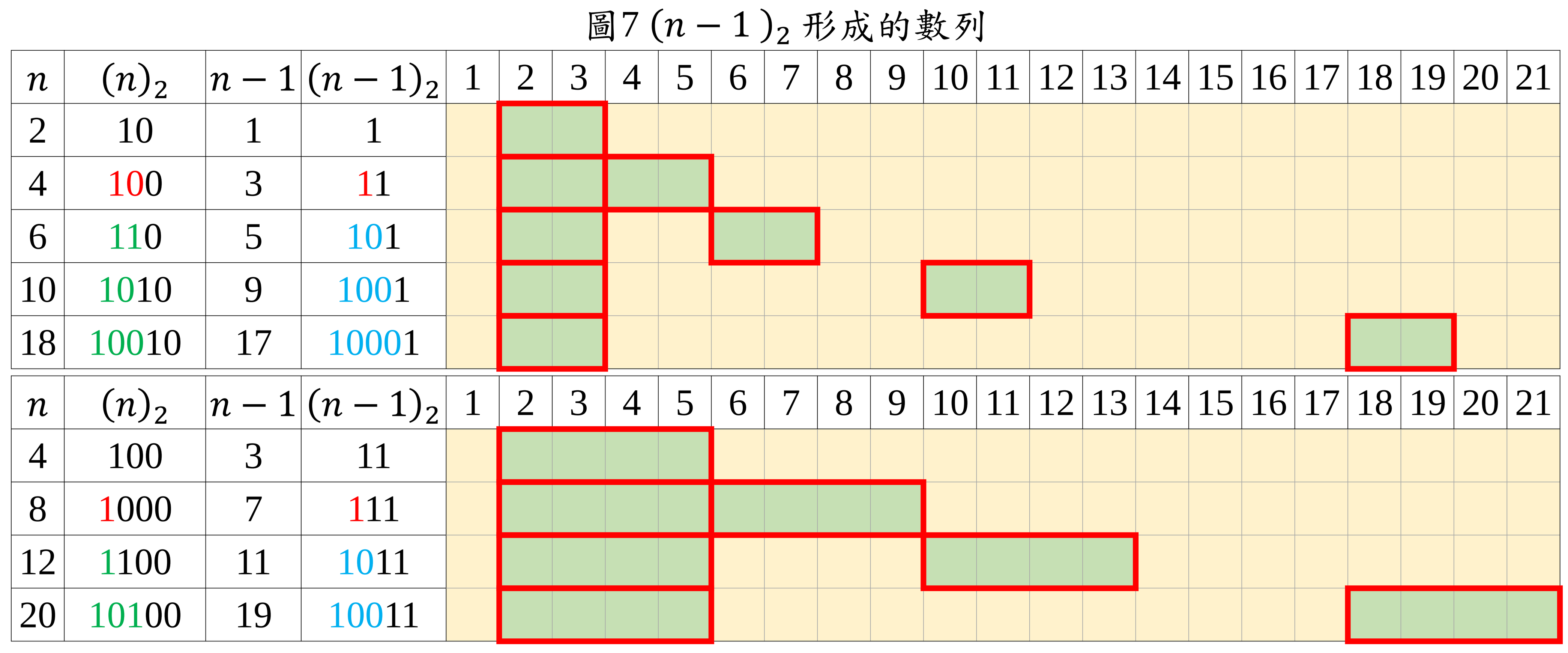


圖8 二進位生成圖形的方式

圖形的畫法（以 $n=23$ 為例）：$n=23\Rightarrow n-1=22=(10110)_2$

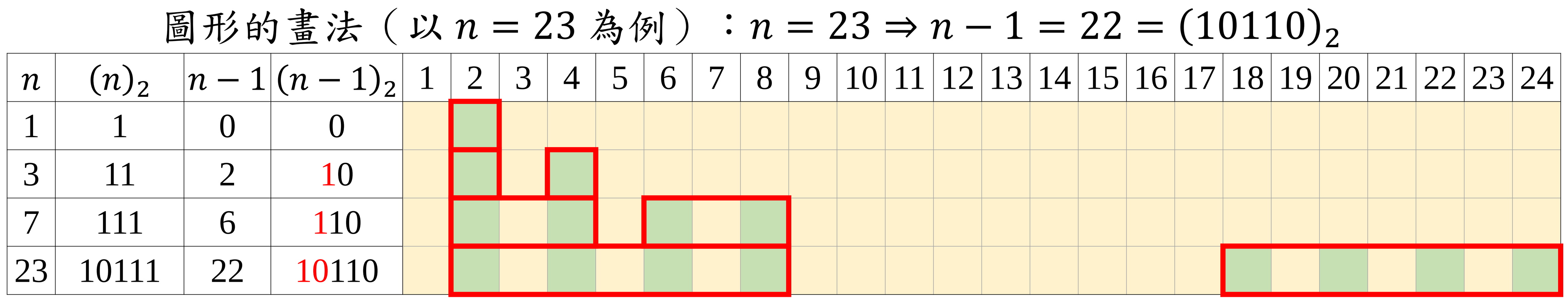


圖9 $n=23$ 圖形的畫法

2. 第 1 列到第 n 列的綠色方格數 S_n

由圖形發想的規律

當 $n=2^m+q$ 時，$a_n=2a_q$

$$\Rightarrow S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}+a_{2^m+1}+a_{2^m+q}$$
$$=S_{2^m}+2\times(a_1+a_2+\cdots+a_q)$$
$$=3^m+2S_q$$

以 $n=27$ 為例，找法如圖10：
(1) 列數 $27=2^4+11=16+11$
綠色方格數為 $81+2\times 37=155$ 個
(2) 列數 $11=2^3+3=8+3$
綠色方格數為 $27+2\times 5=37$ 個
(3) 列數 $3=2^1+1=2+1$
綠色方格數為 $3+2\times 1=5$ 個
(4) 綜合上面的式子可以得到
$155=81+2\times 37=3^4+2\times 37$
$=3^4+2\times(27+2\times 5)$
$=3^4+2\times 3^3+2^2\times 5$
$=3^4+2\times 3^3+2^2\times(3+2\times 1)$
$=3^4+2\times 3^3+2^2\times 3^1+2^3\times 3^0$。
一般式整理如表3。

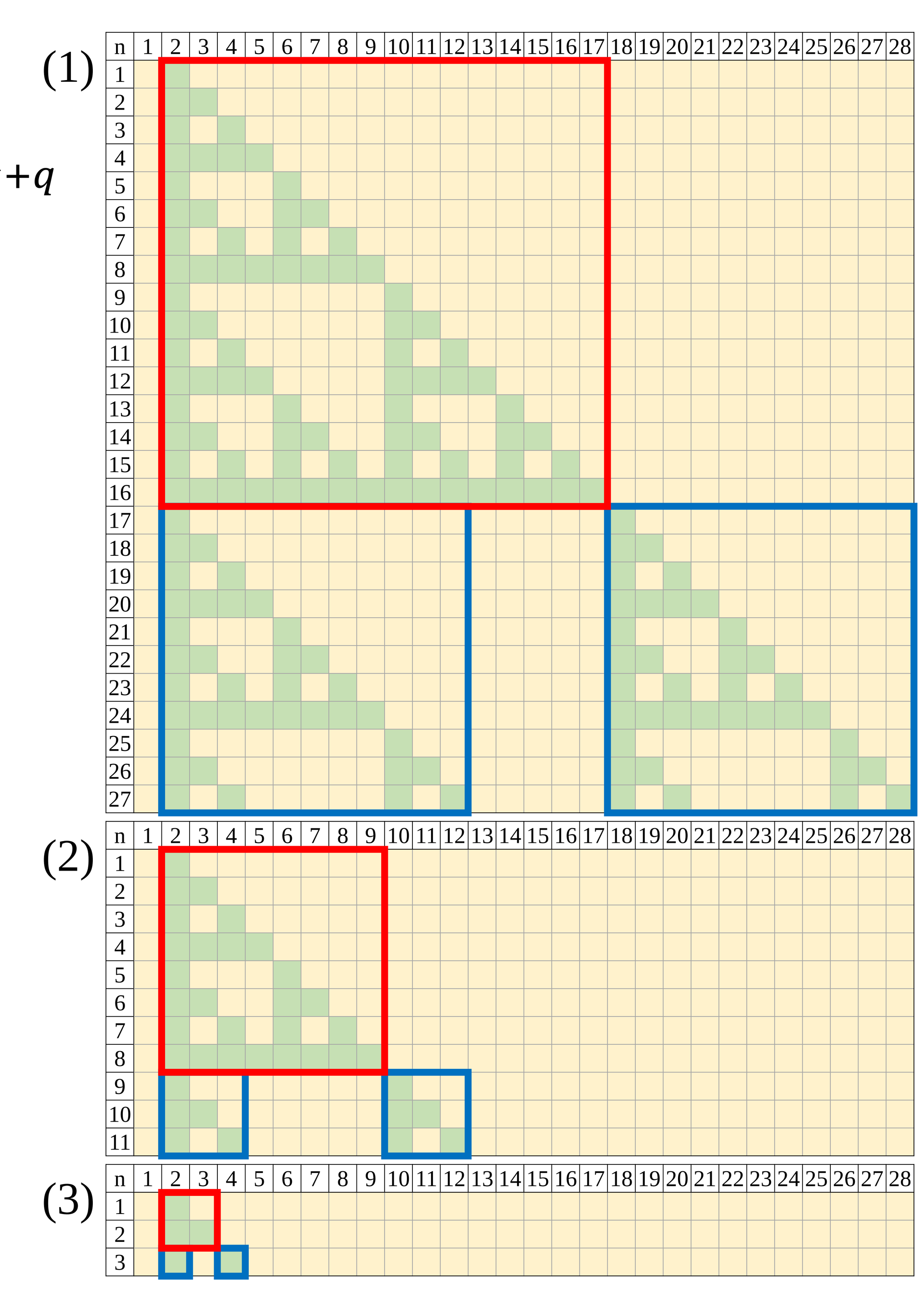


圖 10 $n=27$ 圖案中完整三角分割步驟

圖形與二進位關係

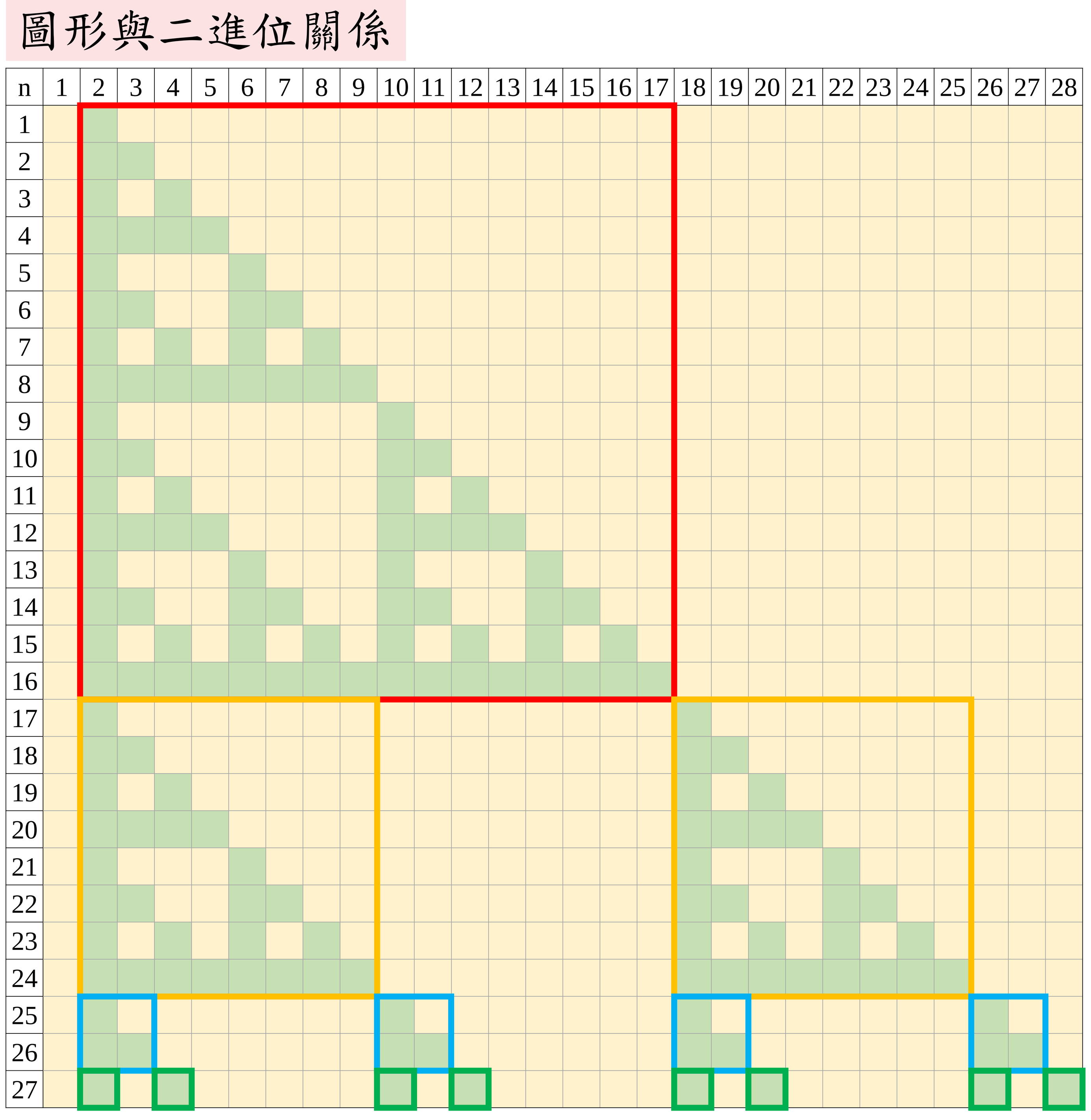


圖11 $n=27$ 綠色方格形成圖案

$n=27=2^4+2^3+2^1+2^0=(11011)_2$，如圖11。
$=2^0\times 3^4+2^1\times 3^3+2^2\times 3^1+2^3\times 3^0=155$
(1) 有四個 1，表示有四種完整三角形。
(2) 最大的完整三角形有 $2^0=1$ 個，綠色方格數有 $3^4=81$ 個
第二大的完整三角形有 $2^1=2$ 個，綠色方格數有 $3^3=27$ 個
第三大的完整三角形有 $2^2=4$ 個，綠色方格數有 $3^1=3$ 個
最小的完整三角形有 $2^3=8$ 個，綠色方格數有 $3^0=1$ 個
因此全部有 $1\times 3^4+2\times 3^3+4\times 3^1+8\times 3^0$ 個綠色方格

列數 n	所有綠色方格數 S_n
$1=2^0$	$1=3^0$
$2=2^1$	$3=3^1$
$3=2^1+2^0$	$5=3^1+2\times 3^0$
$4=2^2$	$9=3^2$
$5=2^2+2^0$	$11=3^2+2\times 3^0$
$6=2^2+2^1$	$15=3^2+2\times 3^1$
$7=2^2+2^1+2^0$	$19=3^2+2\times 3^1+2^2\times 3^0$
$8=2^3$	$27=3^3$

表3 n 與所有綠色方格數 S_n 的規律

四、對任何 $n\times t$ 的長方形方格紙中綠色方格的分布與數量

(一) $t>n+1$

綠色方格的數量與分布

和 $n\times(n+1)$ 方格紙相同

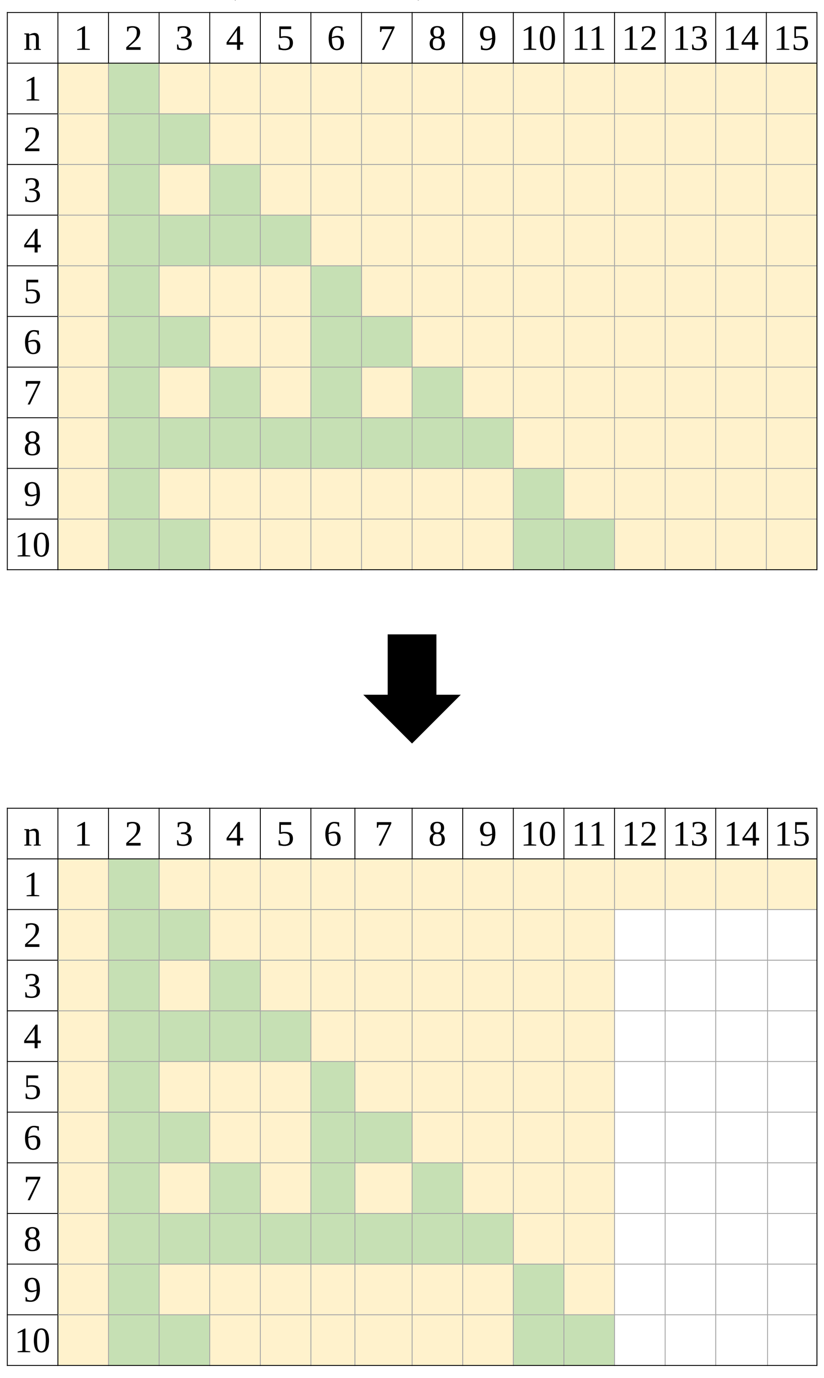


圖12 10×15 方格紙的塗色情形

(二) $t<n+1$

1. 找底為 2^m 的完整三角形（$2^m\geq n$）
2. 利用圖形的對稱性質找出 $n\times t$ 方格紙的圖案

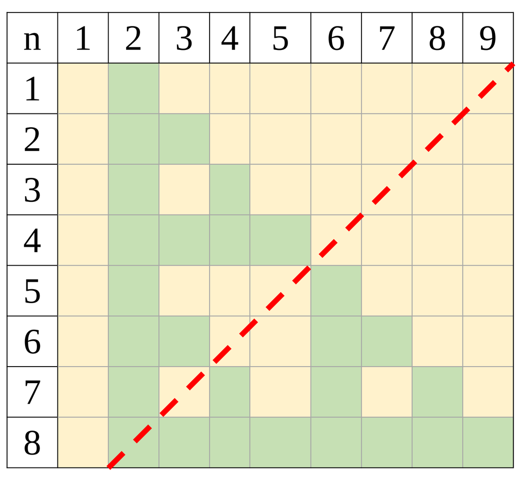


圖13 8×9 方格紙圖案的對稱軸

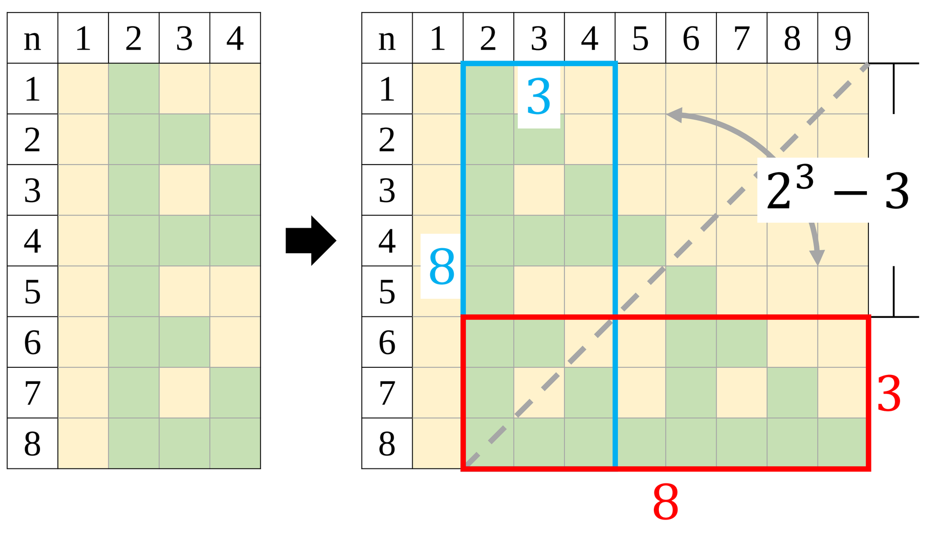


圖14 8×4 方格紙的圖案

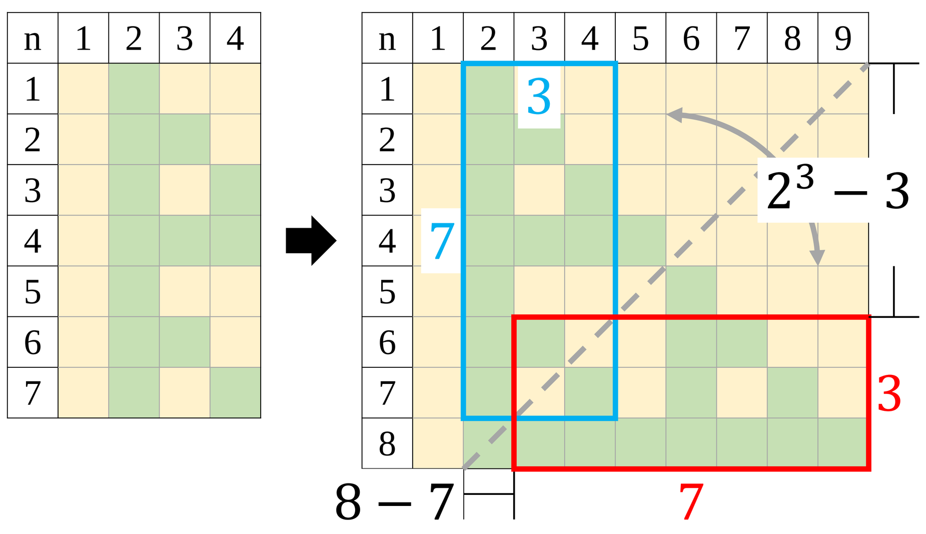


圖15 7×4 方格紙的圖案

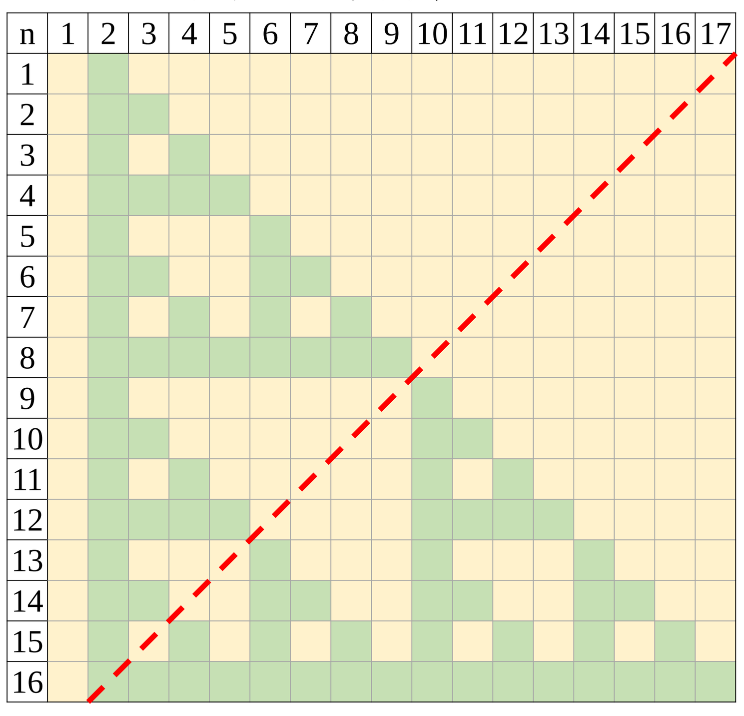


圖16 16×17 方格紙圖案的對稱軸

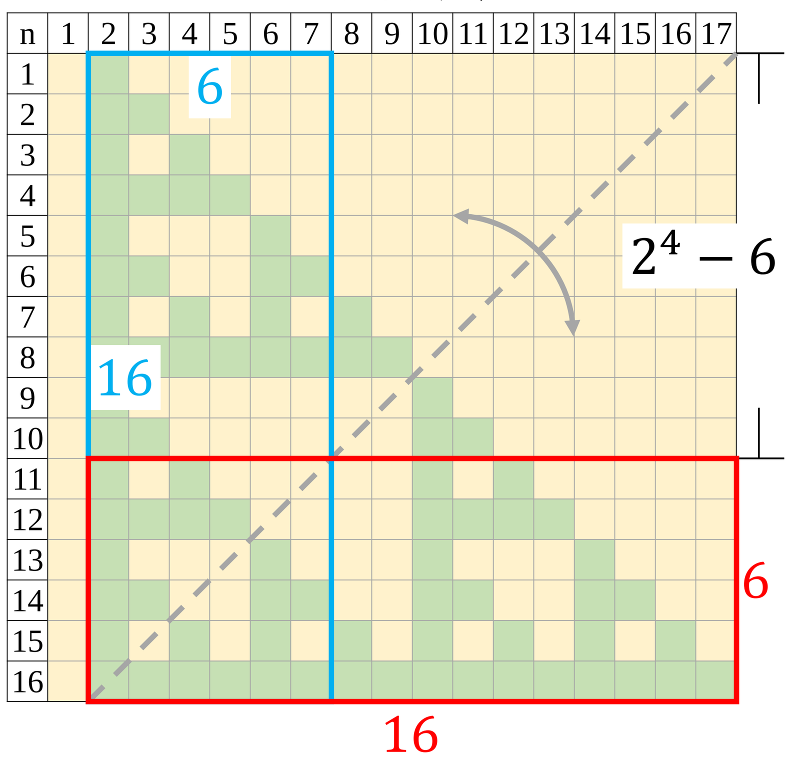


圖17 16×6 方格紙的圖案

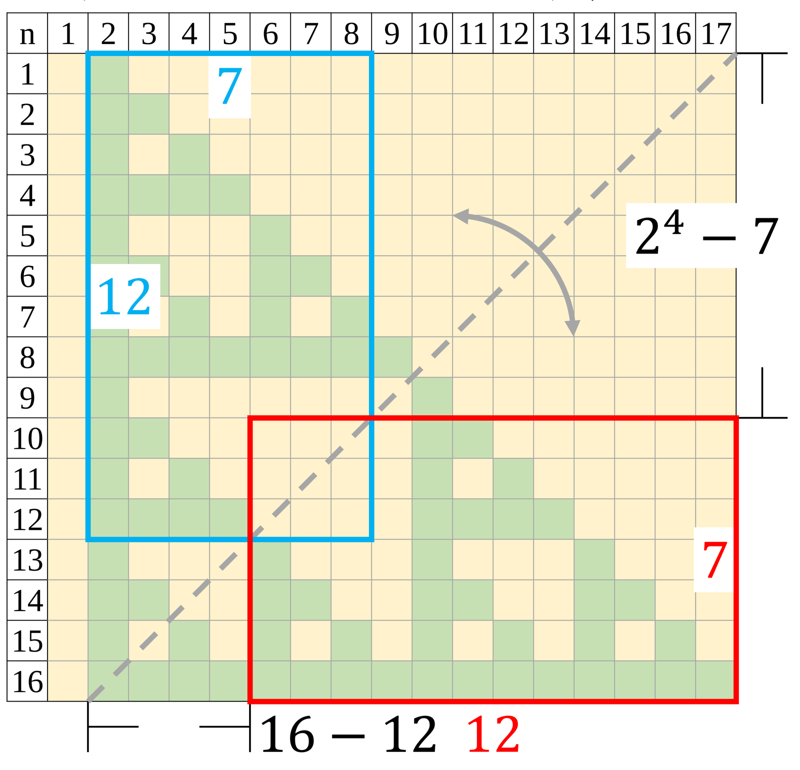


圖18 12×7 方格紙的圖案

五、與題目同義的不同敘述方式

1. 依據塗色的方式，上面兩格是否同色，可以設定條件，如圖19。
2. 利用公布的解答，上面兩格數字的加法運算，可以設定條件，如圖20。
3. 將加法運算中的加號分別更改成了減法、乘法和除法，如圖21 、圖22、圖23。

Excel公式：
A1=0，B1=1，C1=D1=…=0
A1=A2=…=0
B2=IF(A1=B1,0,1)

n	A	B	C	D	E
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1

圖19 利用是否同色畫出的圖

Excel公式：
A1=0，B1=1，C1=D1=…=0
A1=A2=…=0
B2=MOD(A1+B1,2)

n	A	B	C	D	E
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1

圖20 利用加法運算畫出的圖

Excel公式：
A1=0，B1=1，C1=D1=…=0
A1=A2=…=1
B2=ABS(B1-A1)

n	A	B	C	D	E
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1

圖21 利用減法運算畫出的圖

Excel公式：
A1=1，B1=−1，C1=D1=…=1
A1=A2=…=1
B2=A1*B1

n	A	B	C	D	E
1	1	-1	1	1	1
2	1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	1
4	1	-1	-1	-1	-1

圖22 利用乘法運算畫出的圖

Excel公式：
A1=1，B1=−1，C1=D1=…=1
A1=A2=…=1
B2=A1/B1

n	A	B	C	D	E
1	1	-1	1	1	1
2	1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	1
4	1	-1	-1	-1	-1

圖23 利用除法運算畫出的圖

伍、結論

一、綠色方格分佈的規律：

1. 從 $n=1$ 開始只有第 1 列的第 2 個方格被塗成綠色，之後圖形可以依照自我複製的形式持續畫下去。
2. 當 $n=2^m, m$ 為非負整數時，將方格的對角線連線，綠色方格形成的圖案是底為 2^m 的完整三角形。
3. 當 $n=2^m+q, m$ 為非負整數且 $1\leq q\leq 2^m$，首先畫出底為 2^m 的完整三角形，接著再複製第 1 列到第 q 列的綠色方格圖案到完整三角形的正下方（第 2^m+1 列第 2 行）與右下方（第 2^m+1 列第 2^m+1 行），形成前 n 列的圖案。

二、綠色方格數量與n的關係：

假設第 n 列有 a_n個方格被塗成綠色，且第 1 列到第 n 列有 S_n個方格被塗成綠色。

1. 若 $n=2^m+q, 1\leq q\leq 2^k$，則 $a_1=1$ 且 $a_n=2a_q$、$S_n=1$ 且 $S_1=1$ 且 $S_n=S_{2^m}+2S_q=3^m+2S_q$
2. 若 $n-1=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，則 $a_n=2^k$。
3. 若 $n=2^{r_k}+2^{r_{k-1}}+2^{r_{k-2}}+\cdots+2^{r_1}, r_k>r_{k-1}>r_{k-2}>\cdots>r_1\geq 0$，
   則 $S_n=2^0\times3^{r_k}+2^1\times3^{r_{k-1}}+2^2\times3^{r_{k-2}}+\cdots+2^{k-1}\times3^{r_1}$。

三、圖形與二進位的關係：

1. 若 $n-1$ 寫成二進位時，如果數字中有 k 個 1，則可以用 1 的數量與位值推測第 n 列綠色方格的位置，且第 n 列的綠色方格數 $a_n=2^k$。
2. 若 n 寫成二進位時，如果數字中有 k 個 1，則可以用 1 的數量與位值推測第 1 列到第 n 列綠色方格的分布情形，包含不同完整三角形的大小與數量，進而寫出所有的綠色方格數 S_n。

陸、未來展望

一、改變規則③圖案裡黃色的數量

將規則③中，圖形中黃色格子數量改成偶數個，如圖24。

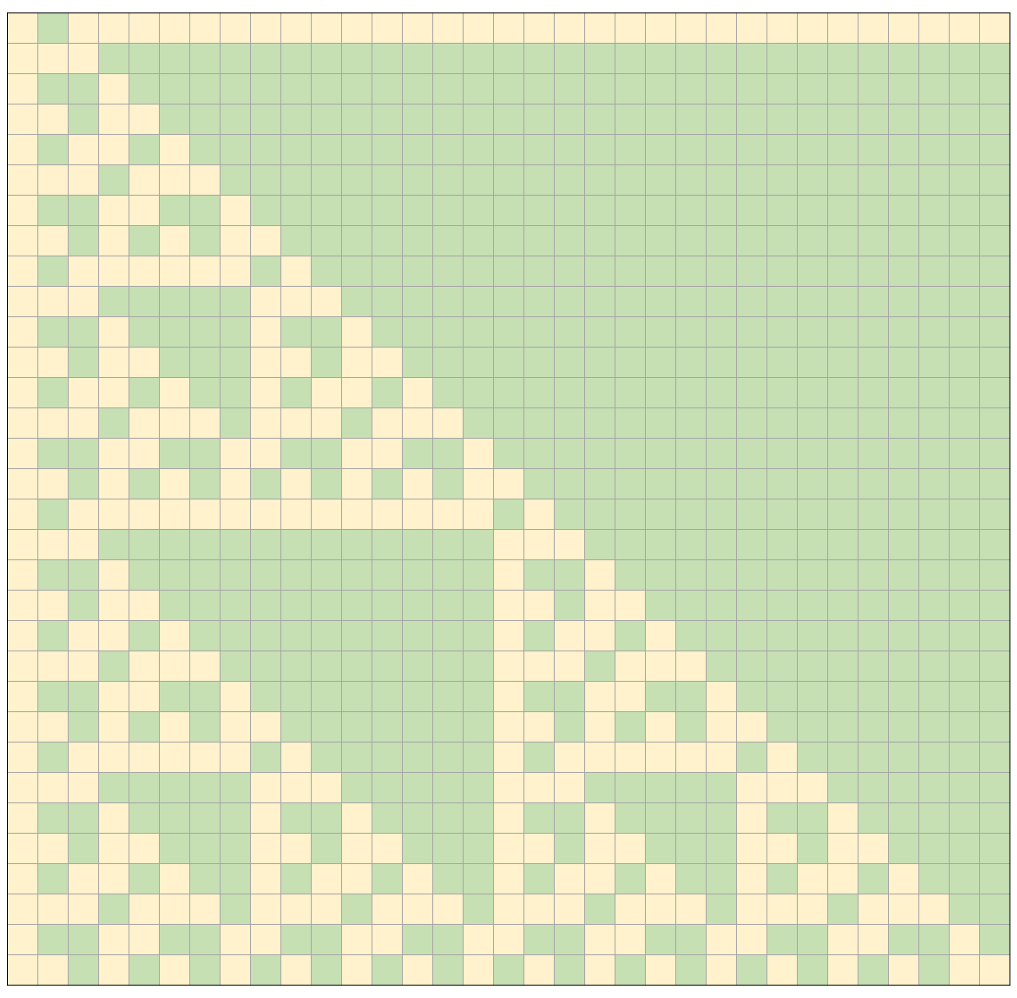


圖24 $n=32$ 將規則③改成偶數的圖案

二、改變規則③的方格的圖案

將規則③中，圖形改成正方形（圖25）或是不同大小的長方形。

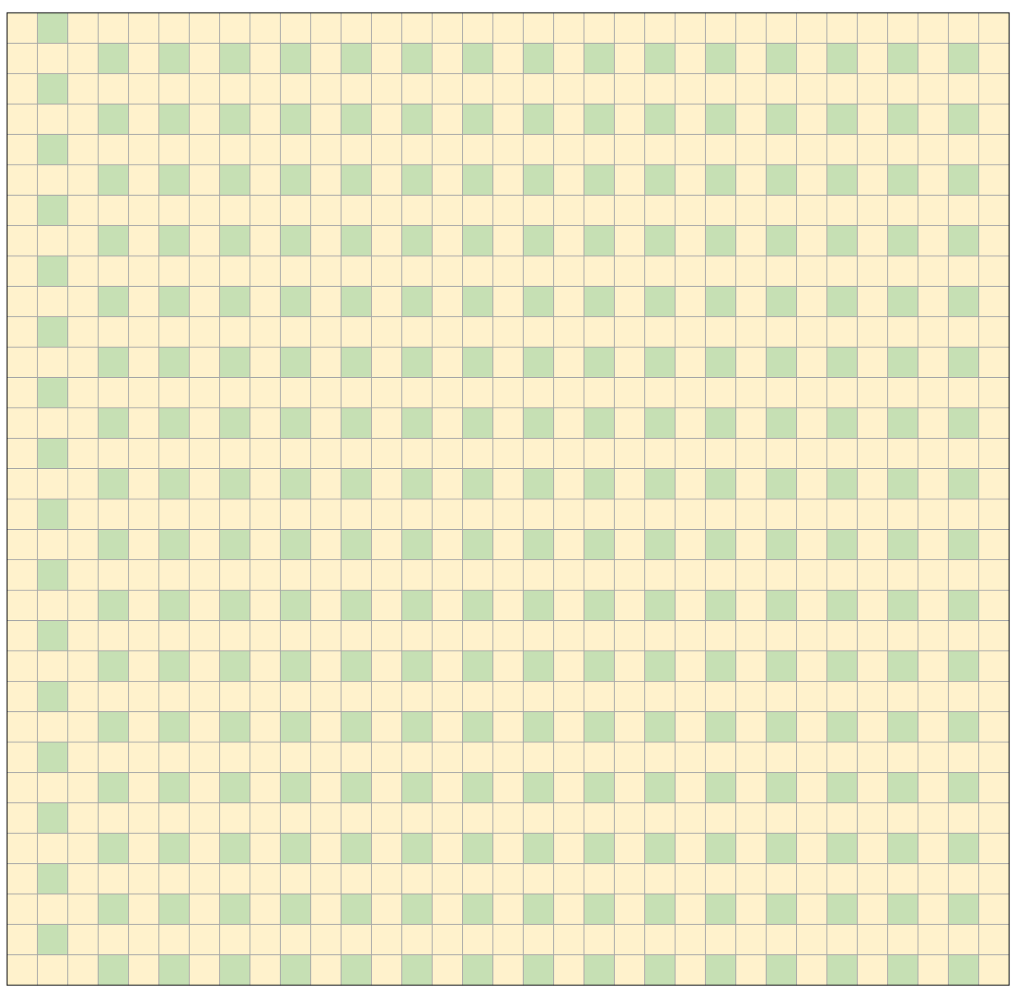


圖25 $n=32$ 將規則③形狀改成正方形的圖案

柒、參考文獻資料

[1] MA 288. (2024), Crux Mathematicorum, 50(8), 389.
[2] MA 288. (2025) , Crux Mathematicorum, 51(3), 109.
[3] 李政憲、王儷娟（2020）。從謝爾賓斯基碎形談摺紙。科學教育月刊，427，38-46。
[4] 許介彥（2004）。巴斯卡三角形的幾個性質。科學教育月刊，275，20-28。
[5] 郭士恩（2008）。再論巴斯卡三角形。臺灣2008年國際科學展覽會。

註：本展版的所有圖表皆由作者自行繪製。