中華民國第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030413

四邊形內接三角形的面積

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
國三 許必鋥	林冠成
國三 劉昱辰	龔凡凱
國三 陳琨元	

關鍵詞：比例線段、正弦定理、餘弦定理

摘要

本研究從一道科學班入學考題出發，突破傳統代數解法限制，提出創新的幾何作法，並系統性推廣至更廣泛的圖形。透過將內接三角形分為【點邊邊】，與【邊邊邊】的兩種類型。結合使用 GeoGebra 進行作圖與輔助推理。使用正弦定理、餘弦定理與相似形等幾何原理進行推導。探討其內接三角形與周圍多邊形的面積關係。從長方形開始，逐步推廣與觀察，歸納出面積公式的形式，並進一步應用至其他凸多邊形，建立更普遍性的面積關係公式與解題策略。

壹、前言

【本作品所有圖形皆由學生使用 Geogebra 自行製作】

本作品探討一道科學班入學考題。雖然網路上已有解答，皆因代數的限制而無法將公式活用。我們首先給出幾何作法，並依據我們的嶄新解法與解題方針，深入這一題更一般化的情形，將原題推廣至更複雜的情況，最後總結凸n邊形內接三角形之解題要素與結論。就我們能查到的歷屆科展作品，尚未有相關研究。

一、 原始題目：

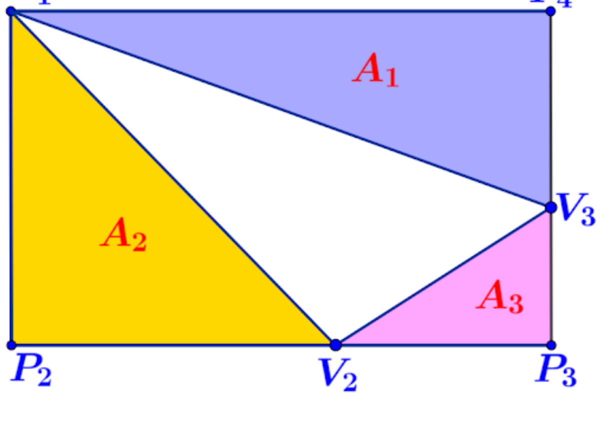

圖 1 原始題目圖形

平面上有一長方形 $P_1P_2P_3P_4$ ，V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$ 、 $\overline{P_3P_4}$ 上的點。若以 $[P_1V_2V_3]$ 表 $\Delta P_1V_2V_3$ 的面積，且 $[P_1V_3P_4]=A_1$ 、$[P_1P_2V_2]=A_2$ 、$[V_2P_2V_3]=A_3$ 。試證明 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2}$ 。

二、 研究動機：

我們對數學很有興趣，已在學習超出目前學校進度的教材，並且平時跟著指導老師鑽研各種題目，在準備各種考試前，我們不僅在許多書籍(例如:國中資優數學精要下冊)遇到此題目，也在諸多數學網站中(例如:臉書社群 Geometria Super Top)發現相關討論。自從得出幾何解法，我們意識到公式的潛力不止於此，便試著繼續探討更一般化的情形。

三、 研究目的：

(一) 給出原始題目的幾何解法。

(二) 推導凸四邊形的一般化公式。

(三) 推導凸多邊形的一般化公式。

(四) 總結 n 邊形內接三角形面積一般化要素與結論。

貳、研究設備及器材

計算紙、筆、GeoGebra

參、研究過程或方法

在本研究初期中，【點邊邊】表三角形的三頂點，其中一頂點在長方形的頂點上，另外兩個頂點在長方形的邊上，稱為【點邊邊】三角形。同理，若三角形的三頂點皆在矩形的邊上，稱為【邊邊邊】三角形。

從原題結果中可知長方形內接三角形與其周圍三塊圖形的面積關係，因此我們將原題的內接三角形歸類為【點邊邊】與【邊邊邊】的兩種情形，之後延伸的多邊形，也都從這兩種情況進行討論。

在研究過程中，我們使用了比例線段、正弦定理、餘弦定理、反三角函數等數學工具，幫助我們找出多邊形的邊長與角度，再結合原題目的面積公式，推導出多邊形內接三角形面積的一般化公式。

肆、研究結果

一、 長方形內接三角形的面積關係

(一) 長方形內接【點邊邊】三角形

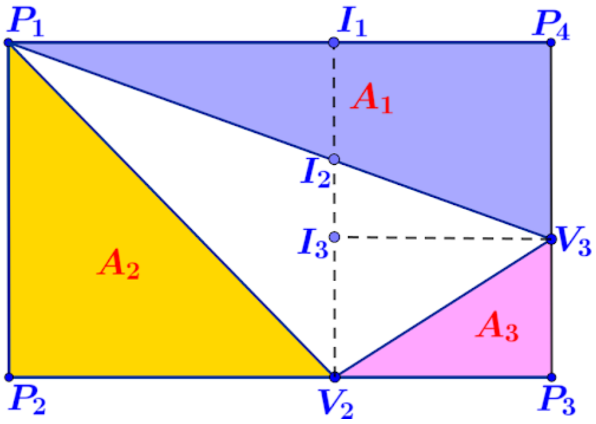

圖 2 長方形內接【點邊邊】三角形

有一長方形 $P_1P_2P_3P_4$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$ 上的點。若 $[P_1V_3P_4]=A_1$、$[P_1P_2V_2]=A_2$、$[V_2P_3V_3]=A_3$。

推導過程：

過 V_2 作平行 $\overline{P_1P_2}$ 的直線，交 $\overline{P_1P_4}$ 於 I_1，交 $\overline{P_1V_3}$ 於 I_2；過 V_3 作平行 $\overline{P_1P_4}$ 的直線，交 $\overline{I_1V_2}$ 於 I_3。

$$[P_1V_2V_3]=[P_1V_2I_2]+[I_2I_3V_3]+[I_3V_2V_3]=(A_2-[P_1I_2I_1])+[I_2I_3V_3]+A_3$$
$$=(A_2-\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1)+(\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}\times A_1\times\frac{\overline{I_3V_3}^2}{\overline{P_1I_1}^2})+A_3=A_2-\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1+\frac{\overline{I_3V_3}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1+A_3$$

$$= A_2 - \frac{\overline{P_2V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1 + \frac{\overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1 + A_3 = A_2 + A_1 - \frac{\overline{P_2P_3}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1 - \frac{\overline{P_2V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1 + \frac{\overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1 + A_3$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 - (\frac{\overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_2V_2}^2 - \overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2})A_1 = A_1 + A_2 + A_3 - (\frac{\overline{P_2P_3}^2 + (\overline{P_2V_2} + \overline{P_3V_2})(\overline{P_2V_2} - \overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}^2})A_1$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 - (\frac{\overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_2P_3}(\overline{P_2V_2} - \overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}^2})A_1 = A_1 + A_2 + A_3 - (\frac{\overline{P_2P_3} + (\overline{P_2V_2} - \overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}})A_1$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 - \frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}A_1 \quad ------(1)$$

因為$[P_1P_2P_3P_4] = A_1 + A_2 + A_3 + [P_1V_2V_3] = \overline{P_2P_3} \cdot h$，其中$h$為長方形$\overline{P_2P_3}$上的高。因此，對(1)等號兩邊同時乘以長方形的面積，得到：

$$(A_1 + A_2 + A_3)[P_1V_2V_3] + [P_1V_2V_3]^2 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 + (A_1 + A_2 + A_3)[P_1V_2V_3] - \overline{P_2P_3} \times h \times \frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}} \times A_1$$

$$[P_1V_2V_3]^2 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 - \overline{P_2P_3} \times h \times \frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}} \times A_1$$

$$[P_1V_2V_3]^2 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 - 4(\frac{1}{2}h \times \overline{P_2V_2} \times A_1)$$

$$[P_1V_2V_3]^2 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 - 4A_1A_2$$

因此$[P_1V_2V_3] = \sqrt{(A_1 + A_2 + A_3)^2 - 4A_1A_2}$，得到長方形中$[P_1V_2V_3]$與$A_1$、$A_2$、$A_3$的面積關係。

接下來，討論長方形內接【邊邊邊】三角形的情形。

(二) 長方形內接【邊邊邊】三角形

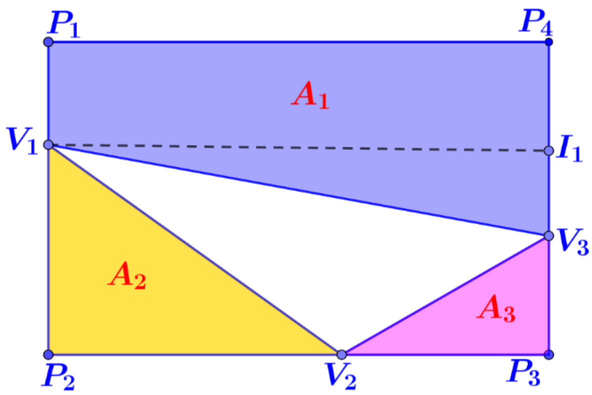

圖 3 長方形內接【邊邊邊】三角形

有一長方形$P_1P_2P_3P_4$，V_1、V_2、V_3分別為$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$上的點。若$[P_1V_1V_3P_4]=A_1$、$[V_1P_2V_2]=A_2$、$[V_2P_2V_3]=A_3$。

想法：作過V_1且平行$\overline{P_2P_3}$的直線，製造出長方形$V_1P_2P_3I_1$內接【邊邊邊】三角形。

推導過程：

過V_1作平行$\overline{P_1P_4}$的直線，交$\overline{P_1P_4}$於I_1。製造出長方形內接三角形【點邊邊】的情形。

$[V_1V_3I_1]:A_1=(\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}):(\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1})$，$[V_1V_3I_1]=\dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}A_1$。

令$\alpha=\dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}$。再由長方形內接【點邊邊】三角形面積關係可知：

$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha A_1+A_2+A_3)^2-4\alpha A_1A_2}$ 。得到長方形中$[V_1V_2V_3]$與A_1、A_2、A_3的面積關係。

接下來想試著將長方形換成平行四邊形，並利用邊長的比例關係，試著找出跟長方形內接三角形面積有相同型式的結論。

二、 平行四邊形內接三角形的面積關係

(一) 平行四邊形內接【點邊邊】三角形

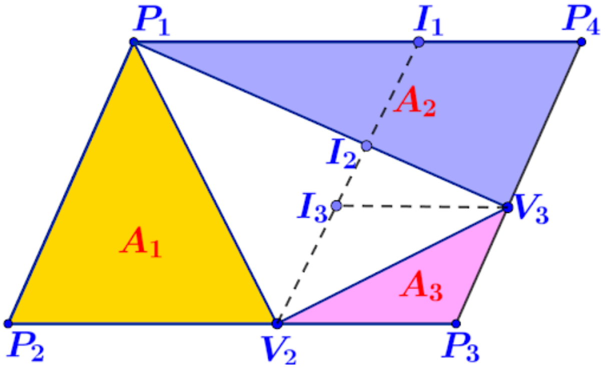

圖 4 平行四邊形內接【點邊邊】三角形

有一平行四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ ，V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$ 、 $\overline{P_3P_4}$ 上的點。若 $[P_1V_3P_4]=A_1$ 、$[P_1P_2V_2]=A_2$ 、 $[V_2P_2V_3]=A_3$ 。

推導過程：

過 V_2 作平行 $\overline{P_1P_2}$ 的直線，交 $\overline{P_1P_4}$ 於 I_1 ，交 $\overline{P_1V_3}$ 於 I_2 ；過 V_3 作平行 $\overline{P_2P_3}$ 的直線，交 $\overline{V_2I_1}$ 於 I_3 。

$$
\begin{aligned}
[P_1V_2V_3] &= [P_1V_2I_2]+[I_2I_3V_3]+[I_3V_2V_3] = (A_2-[P_1I_1I_2])+[I_2I_3V_3]+A_3 \\
&= \left(A_2-\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1\right)+\left(\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}\times A_1\times\frac{\overline{I_3V_3}^2}{\overline{P_1I_1}^2}\right)+A_3 = A_2-\frac{\overline{P_1I_1}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1+\frac{\overline{I_3V_3}^2}{\overline{P_1P_4}^2}A_1+A_3 \\
&= A_2-\frac{\overline{P_2V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1+\frac{\overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1+A_3 = A_2+A_1-\frac{\overline{P_2P_3}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1-\frac{\overline{P_2V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1+\frac{\overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}A_1+A_3 \\
&= A_1+A_2+A_3-\left(\frac{\overline{P_2P_3}^2+\overline{P_2V_2}^2-\overline{P_3V_2}^2}{\overline{P_2P_3}^2}\right)A_1 = A_1+A_2+A_3-\left(\frac{\overline{P_2P_3}^2+(\overline{P_2V_2}+\overline{P_3V_2})(\overline{P_2V_2}-\overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}^2}\right)A_1 \\
&= A_1+A_2+A_3-\left(\frac{\overline{P_2P_3}^2+\overline{P_2P_3}(\overline{P_2V_2}-\overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}^2}\right)A_1 = A_1+A_2+A_3-\left(\frac{\overline{P_2P_3}+(\overline{P_2V_2}-\overline{P_3V_2})}{\overline{P_2P_3}}\right)A_1
\end{aligned}
$$

因為

$$
= A_1+A_2+A_3-\frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}A_1 \quad \text{-----(2)}
$$

$[P_1P_2P_3P_4]=A_1+A_2+A_3+[P_1V_2V_3]=\overline{P_2P_3}\cdot h$ ，其中 h 為平行四邊形 $\overline{P_2P_3}$ 上的高。因此，對(2)等號兩邊同時乘以 $[P_1P_2P_3P_4]$ ，得到

$$
(A_1+A_2+A_3)[P_1V_2V_3]+[P_1V_2V_3]^2=(A_1+A_2+A_3)^2+(A_1+A_2+A_3)[P_1V_2V_3]-\overline{P_2P_3}\times h\times\frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}\times A_1
$$

$$
[P_1V_2V_3]^2=(A_1+A_2+A_3)^2-\overline{P_2P_3}\times h\times\frac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}\times A_1
$$

$$
[P_1V_2V_3]^2=(A_1+A_2+A_3)^2-4\left(\frac{1}{2}h\times\overline{P_2V_2}\times A_1\right)
$$

$$
[P_1V_2V_3]^2=(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2
$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2}$ 。得到平行四邊形中 $[P_1V_2V_3]$ 與 A_1、A_2、A_3 的面積關係。觀察出與長方形內接三角形【點邊邊】的結論相同，接下來，再繼續推導平行四邊形內接【邊邊邊】三角形的情形。

(二) 平行四邊形內接【邊邊邊】三角形

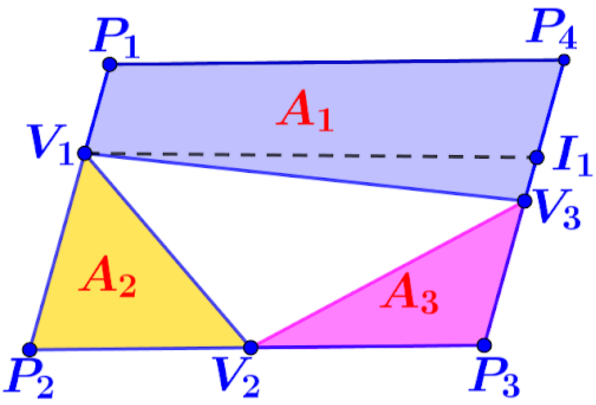

圖 5 平行四邊形內接【邊邊邊】三角形

有一平行四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，V_1 、V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_2P_3}$ 、 $\overline{P_3P_4}$ 上的點。若 $[P_1V_1V_3P_4]=A_1$ 、

$[V_1P_2V_2]=A_2$ 、$[V_2P_2V_3]=A_3$ 。

想法：作過 V_1 且平行 $\overline{P_2P_3}$ 的直線，製造出平行四邊形 $V_1P_2P_3I_1$ 內接【邊邊邊】三角形。

推導過程：

過 V_1 作平行 $\overline{P_2P_3}$ 的直線，交 $\overline{P_3P_4}$ 於 I_1 。

$[V_1V_3I_1]:A_1 = (\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}):(\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1})$，$[V_1V_3I_1] = \dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}A_1$ 。

令 $\alpha=\dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}$，將 $[V_1V_3I_1]$ 以 αA_1 表示。

再由平行四邊形內接【點邊邊】三角形的面積關係可知：

$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha A_1+A_2+A_3)^2-4\alpha A_1A_2}$ 。得到平行四邊形 $[V_1V_2V_3]$ 與 A_1 、 A_2 、 A_3 的面積關係。

有了解決平行四邊行的經驗，我們再將平行四邊形擴展至梯形來探討。

三、 梯形內接三角形

(一) 梯形內接【點邊邊】三角形

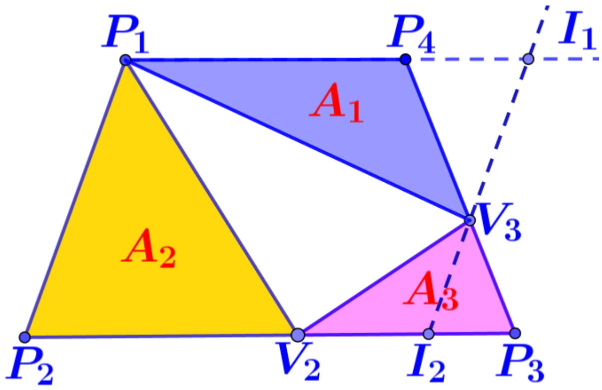

圖 6 梯形內接【點邊邊】三角形

有一梯形 $P_1P_2P_3P_4$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$ 上的點。若 $[P_1V_3P_4]=A_1$、$[P_1P_2V_2]=A_2$、$[V_2P_2V_3]=A_3$。

想法：延伸梯形平行邊的短邊，並作過 V_3 且平行 $\overline{P_1P_2}$ 的直線，製造出平行四邊形 $P_1P_2I_2I_1$ 內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

過 V_3 作平行 $\overline{P_1P_2}$ 的直線，交 $\overrightarrow{P_1P_4}$ 延長線於 I_1、交 $\overline{P_2P_3}$ 於 I_2。

由相似形比例線段可知：

$$\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{P_3V_3}}=\frac{\overline{P_4V_3}+\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_3}}=\frac{\overline{P_4V_3}}{\overline{P_3V_3}}+1=\frac{\overline{P_4I_1}}{\overline{P_3I_2}}+1=\frac{\overline{P_4I_1}+\overline{P_3I_2}}{\overline{P_3I_2}}=\frac{\overline{P_4I_1}+\overline{P_3I_2}+\overline{P_2I_2}-\overline{P_2I_2}}{\overline{P_3I_2}}$$
$$=\frac{\overline{P_2P_3}-(\overline{P_1I_1}-\overline{P_4I_1})}{\overline{P_3I_2}}=\frac{\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4}}{\overline{P_3I_2}}$$

推得 $\overline{P_3I_2}=\frac{\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3P_4}}(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})$，因此另 $\frac{\overline{V_2I_2}}{\overline{P_3V_2}}=1-\frac{\overline{P_3I_2}}{\overline{P_3V_2}}=1-\frac{(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\times\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_2}\times\overline{P_3P_4}}=\gamma$。

由於 $\frac{\overline{P_4I_1}}{\overline{P_3I_2}}=\frac{\overline{P_4V_3}}{\overline{P_3V_3}}$，得到 $\overline{P_1I_1}=\overline{P_1P_4}+\overline{P_4I_1}=\overline{P_1P_4}+\frac{\overline{P_4V_3}}{\overline{P_3V_3}}\times\overline{P_3I_2}=\overline{P_1P_4}+\frac{\overline{P_4V_3}}{\overline{P_3P_4}}\times(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})$，

並令 $\frac{\overline{P_1I_1}}{\overline{P_1P_4}}=1+\frac{(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\times\overline{P_4V_3}}{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_3P_4}}=\beta$。

透過將 $[P_1V_3I_1]$ 以 βA_1 表示，$[V_3V_2I_2]$ 以 γA_3 表示，再由平行四邊形內接【點邊邊】三角形的面

積關係可知：

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\beta A_1+A_2+\gamma A_3)^2-4\beta A_1A_2)}$ 。得到梯形中$[P_1V_2V_3]$與A_1 、 A_2 、 A_3的面積關係。

再來討論梯形內接三角形【邊邊邊】的情形。

(二) 梯形內接三角形【邊邊邊】

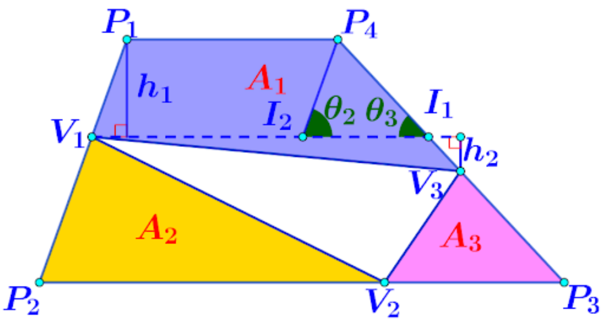

圖 7 梯形內接【邊邊邊】三角形

有一梯形$P_1P_2P_3P_4$，V_1 、V_2 、V_3分別為$\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_2P_3}$ 、 $\overline{P_3P_4}$ 上的點，且$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$ 、

$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$。若$[P_1V_1V_3P_4]=A_1$ 、$[V_1P_2V_2]=A_2$ 、$[V_2P_2V_3]=A_3$ 。

想法：以V_1作平行$\overline{P_2P_3}$的直線，製造出梯形$V_1P_2P_3I_1$內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

過V_1作平行$\overline{P_2P_3}$的直線，交$\overline{P_3P_4}$於I_1，過P_4作平行$\overline{P_1P_2}$的直線，交$\overline{V_1I_1}$於I_2 。

由同位角可知$\angle P_4I_2I_1=\angle P_1P_2P_3=\theta_2$ 、 $\angle P_4I_1I_2=\angle P_2P_3P_4=\theta_3$ 。

由相似形比例線段可知$\overline{I_1I_2}=(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_1P_2}}$ ，

則$\overline{V_1I_1}=\overline{V_1I_2}+\overline{I_1I_2}=\overline{P_1P_4}+\overline{I_1I_2}=\overline{P_1P_4}+(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_1P_2}}$ 。

再來討論A_1與$[V_1V_3I_1]$兩面積的關係。

令四邊形$P_1V_1I_1P_4$過P_1的高為$h_1=\overline{P_1V_1}\sin\theta_2$ 、$\Delta V_1V_3I_1$過V_3的高為$h_2=\overline{V_3I_1}\sin\theta_3$ 。

$[P_1V_1I_1P_4]$: $[V_1V_3I_1] = (\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1 : \overline{V_1I_1} \times h_2$

$[P_1V_1I_1P_4] = \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1}{\overline{V_1I_1} \times h_2} \times [V_1V_3I_1]$

$[V_1V_3I_1] = A_1 - [P_1V_1I_1P_4] = A_1 - \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1}{\overline{V_1I_1} \times h_2} \times [V_1V_3I_1]$

可以得到 $(1 + \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1}{\overline{V_1I_1} \times h_2}) \times [V_1V_3I_1] = A_1$ ，推得 $[V_1V_3I_1] = \dfrac{1}{(1 + \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1}{\overline{V_1I_1} \times h_2})} A_1$

令 $\dfrac{1}{(1 + \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times h_1}{\overline{V_1I_1} \times h_2})} = \dfrac{1}{(1 + \dfrac{(\overline{P_1P_4} + \overline{V_1I_1}) \times \overline{P_1V_1} \sin\theta_2}{(\overline{P_1P_4} + (\overline{P_2P_3} - \overline{P_1P_4}) \dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_1P_2}}) \times (\overline{P_4V_3} - \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \overline{P_1V_1}) \sin\theta_3})} = \alpha$

則 $[\mathrm{V_1V_3}I_1] = \alpha A_1$ 。

由正弦定理可知 $\overline{P_4I_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \overline{P_1V_1}$ 與梯形內接【點邊邊】三角形的面積關係可知：

$$\beta = 1 - \frac{(\overline{V_1I_1} - \overline{P_2P_3}) \times \overline{V_3I_1}}{\overline{V_1I_1} \times \overline{P_3I_1}} = 1 - \frac{(\overline{P_1P_4} + (\overline{P_2P_3} - \overline{P_1P_4}) \dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{V_1P_2}} - \overline{P_2P_3}) \times (\overline{P_4V_3} - \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \overline{P_1V_1})}{(\overline{P_1P_4} + (\overline{P_2P_3} - \overline{P_1P_4}) \dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{V_1P_2}}) \times (\overline{P_3P_4} - \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \overline{P_1V_1})}$$

$$\gamma = 1 + \frac{(\overline{V_1I_1} - \overline{P_2P_3}) \times \overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_2} \times \overline{P_3I_1}} = 1 + \frac{((\overline{P_1P_4} + (\overline{P_2P_3} - \overline{P_1P_4}) \dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{V_1P_2}} - \overline{P_2P_3}) - \overline{P_2P_3}) \times \overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V} \times (\overline{P_3P_4} - \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \overline{P_1V_1})}$$

$[V_1V_2V_3] = \sqrt{(\alpha\beta A_1 + A_2 + \gamma A_3)^2 - 4\alpha\beta A_1A_2}$ 。得到梯形中 $[V_1V_2V_3]$ 與 A_1 、 A_2 、 A_3 的面積關係。

接著再將梯形擴展至凸四邊形來探討。

四、 凸四邊形內接三角形

(一) 凸四邊形內接【點邊邊】三角形

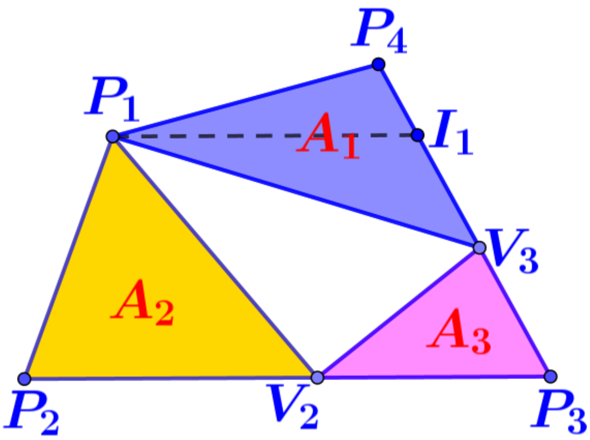

圖 8 凸四邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$ 、$\overline{P_3P_4}$ 上的點且 $\angle P_4P_1P_2=\theta_1$ 、$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$ 、$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$ 、$\angle P_3P_4P_1=\theta_4$。若$[P_1V_3P_4]=A_1$ 、$[P_1P_2V_2]=A_2$ 、$[V_2P_2V_3]=A_3$。

想法：過 P_1 作平行 $\overline{P_2P_3}$ 的直線，製造出梯形 $P_1P_2P_3I_1$ 內接【點邊邊】三角形。。

推導過程：

過 P_1 作平行 $\overline{P_2P_3}$ 的直線，交 $\overline{P_3P_4}$ 於 I_1 點。可得 $\angle P_1I_1P_4=\angle P_2P_3P_4=\theta_3$(同位角)。

在 $\Delta P_1I_1P_4$ 中，由正弦定理得知 $\dfrac{\overline{P_1I_1}}{\sin\theta_4}=\dfrac{\overline{P_1P_4}}{\sin\theta_3}=\dfrac{\overline{P_4I_1}}{\sin(\theta_3+\theta_4)}$ ，推得：

$$\overline{P_1I_1}=\frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}\ ,\ \overline{P_4I_1}=\frac{\sin(\theta_4+\theta_3)}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}\ ,\ \overline{I_1V_3}=\overline{P_4V_3}-\overline{P_4I_1}=\overline{P_4V_3}-\frac{\sin(\theta_4+\theta_3)}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}$$

並將 A_1與 $\Delta P_1V_3I_1$ 的面積進行轉換

$$[P_1V_3I_1]=\frac{\overline{I_1V_3}}{\overline{P_4V_3}}\times A_1=(1-\frac{\overline{P_4I_1}}{\overline{P_4V_3}})\times A_1=(1-\frac{\sin(\theta_4+\theta_3)}{\sin\theta_3}\times\frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_4V_3}})\times A_1\ 。$$

令$1-\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\sin\theta_3}\times\dfrac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_1V_3}}=\alpha$ ，可以將$[P_1V_3I_1]$用 αA_1來表示。

將對應邊長與角度代入梯形內接【點邊邊】三角形面積的關係可知：

令 $\beta=1-\dfrac{(\dfrac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}-\overline{P_2P_3})\times(\overline{P_4V_3}-\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4})}{\dfrac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}\times(\overline{P_3P_4}-\dfrac{\sin(\theta_4+\theta_3)}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4})}$

令 $\gamma=1+\dfrac{(\dfrac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4}-\overline{P_2P_3})\times\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_2}\times(\overline{P_3P_4}-\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\sin\theta_3}\overline{P_1P_4})}$

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+A_2+\gamma A_3)^2-4\alpha\beta A_1A_2}$ 。得凸四邊形中$[P_1V_2V_3]$與A_1 、 A_2 、 A_3的面積關係。

再來討論凸四邊形內接【邊邊邊】三角形的情形。

(二) 凸四邊形內接【邊邊邊】三角形

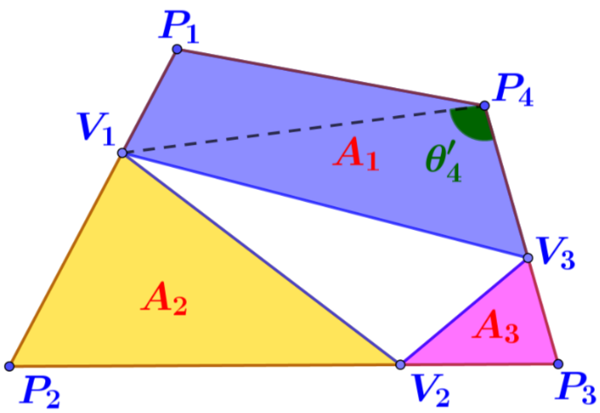

圖 9 凸四邊形內接【邊邊邊】三角形

有一凸四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，V_1 、V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_2P_3}$ 、 $\overline{P_3P_4}$ 上的點，且 $\angle P_4P_1P_2=\theta_1$ 、

$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$ 、 $\angle P_2P_3P_4=\theta_3$ 、 $\angle P_3P_4P_1=\theta_4$ 。若 $[P_1V_1V_3P_4]=A_1$ 、 $[V_1P_2V_2]=A_2$ 、 $[V_2P_2V_3]=A_3$ 。

想法：連接 $\overline{P_4V_1}$ ，製造出凸四邊形 $V_1P_2P_3P_4$ 內接【邊邊邊】三角形。

推導過程：

連接 $\overline{P_4V_1}$ ，由正弦定理知 $\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\sin\angle P_1P_4V_1}=\dfrac{\overline{P_4I_1}}{\sin\theta_1}$ ，$\sin\angle P_1P_4V_1=\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1$ 。

由反三角函數可得到 $\angle P_1P_4V_1=\sin^{-1}(\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)$ ，則 $\angle V_1P_4V_3=\theta_4-\sin^{-1}(\dfrac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)$ 。

因此，$[V_1V_3P_4]=A_1-\dfrac{1}{2}\overline{P_1V_1}\times\overline{P_1P_4}\sin\theta_1=A_1-\varepsilon_1$

由凸四邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\alpha=1-\frac{\sin(\theta_4'-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)+\theta_3)}{\sin\theta_3}\times\frac{\overline{P_4V_1}}{\overline{P_4V_3}}$$

$$\beta=1-\frac{\left(\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1))}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}-\overline{P_2P_3}\right)\left(\overline{P_4V_3}-\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)+\theta_3)}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}\right)}{\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1))}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}\times\left(\overline{P_3P_4}-\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)+\theta_3)}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}\right)}$$

$$\gamma=1+\frac{\left(\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1))}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}-\overline{P_2P_3}\right)\times\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_2}\times\left(\overline{P_3P_4}-\frac{\sin(\theta_4-\sin^{-1}(\frac{\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_1}}\sin\theta_1)+\theta_3)}{\sin\theta_3}\times\overline{P_4V_1}\right)}$$

因此，$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)+A_2+\gamma A_3)^2-4\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)A_2}$ 。

得凸四邊形中 $[V_1V_2V_3]$ 與 A_1 、 A_2 、 A_3 的面積關係。接著再來試著將此面積關係延伸成五邊形來探討。

四、 凸五邊形內接【點邊邊】三角形

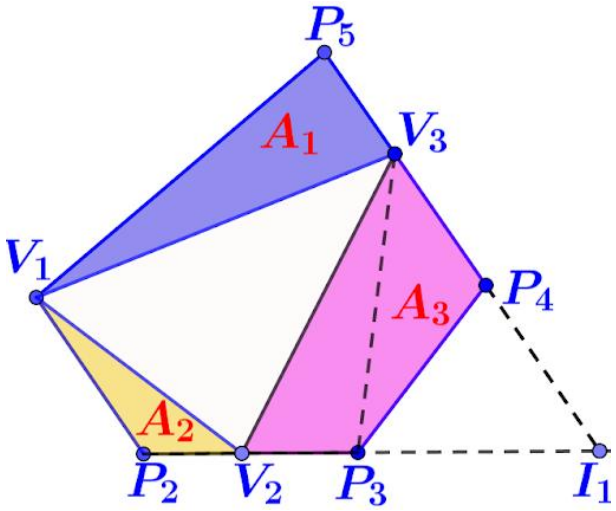

圖 10 凸五邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$ 上的點，且 $\angle P_5P_1P_2=\theta_1$、$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$、$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$、$\angle P_3P_4P_1=\theta_4$、$\angle P_4P_5P_1=\theta_5$。若 $[P_1V_3P_5]=A_1$、$[P_1P_2V_2]=A_2$、$[V_2P_3P_4V_3]=A_3$。

想法：將 A_3 補齊成一個三角形，製造出凸四邊形 $P_1P_2I_1P_5$ 內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

設 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_5P_4}$，交於 I_1，則 $\angle P_5I_1P_2=\theta_3+\theta_4-\pi$。

$$[V_3V_2I_1]=A_3+\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta_3\sin\theta_4}{\sin(\theta_3+\theta_4-\pi)}\times\overline{P_3P_4}^2=A_3+\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta_3\sin\theta_4}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4}^2=A_3+\delta$$

由凸四邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\alpha=1-\frac{\sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_5V_3}}$$

$$\beta=1-\frac{\left(\frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_1P_5}-(\overline{P_2P_3}+\frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})\right)(\overline{P_5V_3}-\frac{\sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_5P_1})}{\frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_1P_5}\times\left((\overline{P_4P_5}+\frac{\sin(\theta_3)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})-\frac{\sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_5P_1}\right)}$$

$$\gamma=1+\frac{\left(\frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_1P_5}-(\overline{P_2P_3}+\frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})\right)(\overline{P_4V_3}+\frac{\sin(\theta_3)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})}{(\overline{P_3V_2}+\frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})\left((\overline{P_4P_5}+\frac{\sin(\theta_3)}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4})-\frac{\sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_5V_1}\right)}$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+A_2+\gamma(A_3+\delta))^2-4\alpha\beta A_1A_2}$。得凸五邊形中$[P_1V_2V_3]$與$A_1$、$A_2$、$A_3$的面積關係。再來延伸至凸六邊形內接【點邊邊】三角形的情形。

五、 凸六邊形內接【點邊邊】三角形

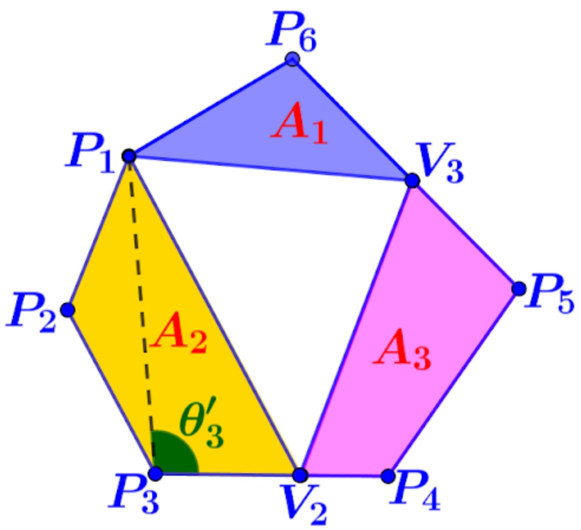

圖 11 凸六邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸六邊形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，V_2、V_3分別為$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_5P_6}$上的點，且$\angle P_6P_1P_2=\theta_1$、

$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$、$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$、$\angle P_3P_4P_5=\theta_4$、$\angle P_4P_5P_6=\theta_5$、$\angle P_5P_6P_1=\theta_6$。若$[P_1V_3P_6]=A_1$、

$[P_1P_2P_3V_2]=A_2$、$[V_2P_4P_5V_3]=A_3$。

想法：連接$\overline{P_1P_3}$，製造出凸五邊形$P_1P_3P_4P_5P_6$內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

連接$\overline{P_1P_3}$，由餘弦定理可得$\overline{P_1P_3}^2=\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_2P_3}^2-2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\cos\theta_2$。

由正弦定理可得$\angle P_1P_3P_2=\sin^{-1}(\dfrac{\sin\theta_2}{\overline{P_1P_3}}\overline{P_1P_2})$，則$\angle P_1P_3P_4=\theta_3-\angle P_1P_3P_2=\theta_3'$。

由三角形面積公式可知$[P_1P_2P_3]=\dfrac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\theta_2=\varepsilon_2$

再由凸五邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\delta = \frac{\sin\theta_4 \cdot \sin\theta_5}{-2\sin(\theta_4+\theta_5)} \cdot \overline{P_3P_4}^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{\sin(\theta_4+\theta_5+\theta_6)}{\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \frac{\overline{P_1P_6}}{\overline{P_6V_3}}$$

$$\beta = 1 - \frac{\left(\frac{\sin(\theta_6)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5})\right)\left(\overline{P_6V_3} - \frac{\sin(\theta_4+\theta_5+\theta_6)}{\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6}\right)}{\frac{\sin(\theta_6)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6} \times \left((\overline{P_5P_6} + \frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5}) - \frac{\sin(\theta_4+\theta_5+\theta_6)}{\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6}\right)}$$

$$\gamma = 1 + \frac{\left(\frac{\sin(\theta_6)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5})\right)\left(\overline{P_5V_3} + \frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5}\right)}{\left(\overline{P_4V_2} + \frac{\sin(\theta_5)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5}\right)\left((\overline{P_5P_6} + \frac{\sin(\theta_4)}{-\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_4P_5}) - \frac{\sin(\theta_4+\theta_5+\theta_6)}{\sin(\theta_4+\theta_5)} \times \overline{P_1P_6}\right)}$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3+\delta))^2-4\alpha\beta A_1(A_2-\varepsilon_2)}$。得凸六邊形中$[P_1V_2V_3]$與$A_1$、$A_2$、$A_3$的面積關係。再來延伸至凸七邊形內接【點邊邊】三角形的情形。

六、 凸七邊形內接【點邊邊】三角形

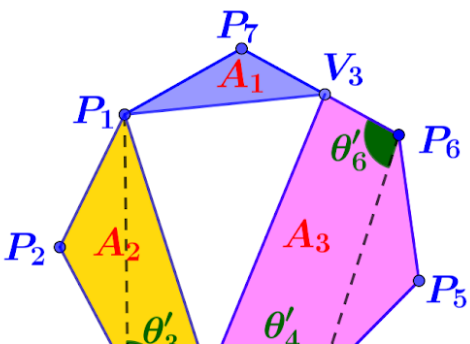

圖 12 凸七邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸七邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_6P_7}$ 上的點，且 $\angle P_7P_1P_2=\theta_1$、$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$、$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$、$\angle P_3P_4P_5=\theta_4$、$\angle P_4P_5P_6=\theta_5$、$\angle P_5P_6P_7=\theta_6$、$\angle P_6P_7P_1=\theta_7$。若 $[P_1V_3P_7]=A_1$、$[P_1P_2P_3V_2]=A_2$、$[V_2P_4P_5P_6V_3]=A_3$。

想法：連接 $\overline{P_1P_3}$ 、 $\overline{P_4P_6}$ ，製造出凸五邊形 $P_1P_3P_4P_6P_7$ 內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

連接 $\overline{P_1P_3}$ 與 $\overline{P_4P_6}$ ，由餘弦定理可得：

$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\cos\theta_2$ 、 $\overline{P_4P_6}^2 = \overline{P_4P_5}^2 + \overline{P_5P_6}^2 - 2\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\cos\theta_5$ 。

由正弦定理與反三角函數可得：

$\angle P_1P_3P_2 = \sin^{-1}(\frac{\sin\theta_2}{\overline{P_1P_3}}\overline{P_1P_2})$ ，則 $\angle P_1P_3P_4 = \theta_3 - \angle P_1P_3P_2 = \theta_3'$ 。

$\angle P_5P_4P_6 = \sin^{-1}(\frac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_5P_6})$ ，則 $\angle P_3P_4P_6 = \theta_4 - \angle P_5P_4P_6 = \theta_4'$ 。

$\angle P_4P_6P_5 = \sin^{-1}(\frac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_4P_5})$ ，則 $\angle P_4P_6P_7 = \theta_6 - \angle P_4P_6P_5 = \theta_6'$ 。

$\varepsilon_2 = [P_1P_2P_3] = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\theta_2$ 、 $\varepsilon_3 = [P_4P_5P_6] = \frac{1}{2}\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\sin\theta_5$ 。

再由凸五邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\delta = \frac{\sin\theta_4'\cdot\sin\theta_6'}{-2\sin(\theta_4'+\theta_6')}\cdot\overline{P_4P_6}^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7)}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\frac{\overline{P_1P_7}}{\overline{P_7V_3}}$$

$$\beta = 1 - \frac{(\frac{\sin(\theta_7)}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}))(\overline{P_7V_3} - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7)}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7})}{\frac{\sin(\theta_7)}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}\times((\overline{P_6P_7} + \frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}) - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7)}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7})}$$

$$\gamma = 1 + \frac{(\frac{\sin(\theta_7)}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}))(\overline{P_6V_3} + \frac{\sin(\theta_4')}{-\sin(\theta_4'+\theta_5')}\times\overline{P_4P_6})}{(\overline{P_4V_2} + \frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6})((\overline{P_6P_7} + \frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}) - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7)}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7})}$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1 + (A_2-\varepsilon_2) + \gamma(A_3-\varepsilon_3+\delta))^2 - 4\alpha\beta A_1(A_2-\varepsilon_2)}$ 。得凸七邊形中 $[P_1V_2V_3]$ 與

A_1 、 A_2 、 A_3 的面積關係。再來延伸至凸八邊形內接【點邊邊】三角形的情形。

七、 凸八邊形內接【點邊邊】三角形

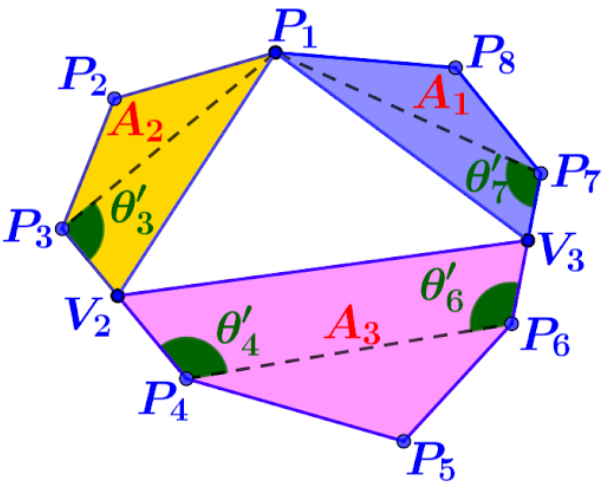

圖 13 凸八邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_6P_7}$ 上的點，且 $\angle P_8P_1P_2=\theta_1$、$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$、$\angle P_2P_3P_4=\theta_3$、$\angle P_3P_4P_5=\theta_4$、$\angle P_4P_5P_6=\theta_5$、$\angle P_5P_6P_7=\theta_6$、$\angle P_6P_7P_8=\theta_7$、$\angle P_7P_8P_1=\theta_8$。若 $[P_1V_3P_7P_8]=A_1$、$[P_1P_2P_3V_2]=A_2$、$[V_2P_4P_5P_6V_3]=A_3$。

想法：連接 $\overline{P_1P_3}$、$\overline{P_1P_7}$、$\overline{P_4P_6}$，製造出凸五邊形 $P_1P_3P_4P_6P_7$ 內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

連接 $\overline{P_1P_3}$、$\overline{P_4P_6}$ 與 $\overline{P_1P_7}$，由餘弦定理可得：

$\overline{P_1P_3}^2=\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_2P_3}^2-2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\cos\theta_2$，$\overline{P_4P_6}^2=\overline{P_4P_5}^2+\overline{P_5P_6}^2-2\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\cos\theta_5$。

$\overline{P_1P_7}^2=\overline{P_1P_8}^2+\overline{P_7P_8}^2-2\overline{P_1P_8}\cdot\overline{P_7P_8}\cos\theta_8$。

由正弦定理與反三角函數可得：

$\angle P_1P_3P_2=\sin^{-1}(\dfrac{\sin\theta_2}{\overline{P_1P_3}}\overline{P_1P_2})$，則 $\angle P_1P_3P_4=\theta_3-\angle P_1P_3P_2=\theta_3'$。

$\angle P_5P_4P_6=\sin^{-1}(\dfrac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_5P_6})$，則 $\angle P_3P_4P_6=\theta_4-\angle P_5P_4P_6=\theta_4'$。

$\angle P_4P_6P_5=\sin^{-1}(\dfrac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_4P_5})$，則 $\angle P_4P_6P_7=\theta_6-\angle P_4P_6P_5=\theta_6'$。

$\angle P_1P_7P_8=\sin^{-1}(\dfrac{\sin\theta_8}{\overline{P_1P_7}}\overline{P_1P_8})$，則 $\angle P_1P_7P_6=\theta_7-\angle P_1P_7P_8=\theta_7'$。

$\varepsilon_1=[P_1P_7P_8]=\dfrac{1}{2}\overline{P_1P_8}\cdot\overline{P_7P_8}\sin\theta_8$，$\varepsilon_2=[P_1P_2P_3]=\dfrac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\theta_2$，

$\varepsilon_3=[P_4P_5P_6]=\dfrac{1}{2}\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\sin\theta_5$ 。

再由凸五邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\delta=\frac{\sin\theta_4'\cdot\sin\theta_6'}{-2\sin(\theta_4'+\theta_6')}\cdot\overline{P_4P_6}^2$$

$$\alpha=1-\frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7')}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\frac{\overline{P_1P_7}}{\overline{P_7V_3}}$$

$$\beta=1-\frac{\left(\frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}-\left(\overline{P_3P_4}+\frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}\right)\right)\left(\overline{P_7V_3}-\frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7')}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}\right)}{\frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}\times\left(\left(\overline{P_6P_7}+\frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}\right)-\frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7')}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}\right)}$$

$$\gamma=1+\frac{\left(\frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}-\left(\overline{P_3P_4}+\frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}\right)\right)\left(\overline{P_6V_3}+\frac{\sin(\theta_4')}{-\sin(\theta_4'+\theta_5')}\times\overline{P_4P_6}\right)}{\left(\overline{P_4V_2}+\frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}\right)\left(\left(\overline{P_6P_7}+\frac{\sin(\theta_6')}{-\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_4P_6}\right)-\frac{\sin(\theta_4'+\theta_6'+\theta_7')}{\sin(\theta_4'+\theta_6')}\times\overline{P_1P_7}\right)}$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3-\varepsilon_3+\delta))^2-4\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)(A_2-\varepsilon_2)}$ 。

得凸八邊形中$[P_1V_2V_3]$與A_1、A_2、A_3的面積關係。再來延伸至凸九邊形內接【點邊邊】三角形的情形。

八、 凸九邊形內接三角形

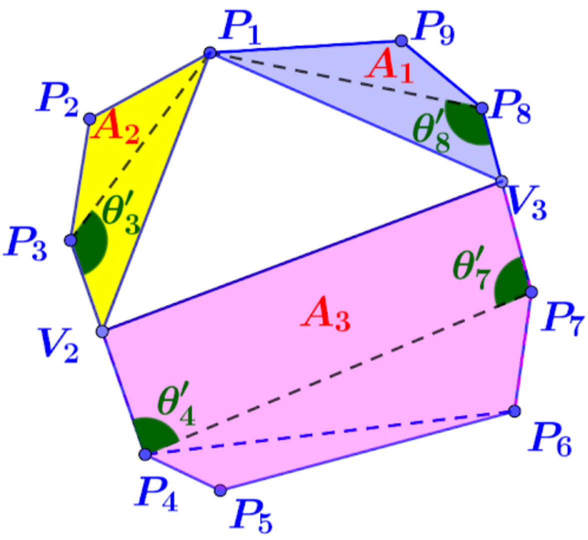

圖 14 凸九邊形內接【點邊邊】三角形

有一凸九邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9$ ，V_2 、V_3 分別為 $\overline{P_3P_4}$ 、 $\overline{P_6P_7}$ 上的點，且 $\angle P_9P_1P_2=\theta_1$ 、

$\angle P_1P_2P_3=\theta_2$ 、 $\angle P_2P_3P_4=\theta_3$ 、 $\angle P_3P_4P_5=\theta_4$ 、 $\angle P_4P_5P_6=\theta_5$ 、 $\angle P_5P_6P_7=\theta_6$ 、 $\angle P_6P_7P_8=\theta_7$ 、

$\angle P_7P_8P_9=\theta_8$ 、 $\angle P_8P_9P_1=\theta_9$ 。若 $[P_1V_3P_8P_9]=A_1$ 、$[P_1P_2P_3V_2]=A_2$ 、$[V_2P_4P_5P_6P_7V_3]=A_3$ 。

想法：連接 $\overline{P_1P_3}$ 、 $\overline{P_1P_8}$ 、 $\overline{P_4P_6}$ 、 $\overline{P_4P_7}$ ，製造出凸五邊形 $P_1P_3P_4P_6P_7$ 內接【點邊邊】三角形。

推導過程：

連接 $\overline{P_1P_3}$ 、 $\overline{P_4P_6}$ 與 $\overline{P_1P_8}$ ，由餘弦定理可得：

$\overline{P_1P_3}^2=\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_2P_3}^2-2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\cos\theta_2$ ， $\overline{P_4P_6}^2=\overline{P_4P_5}^2+\overline{P_5P_6}^2-2\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\cos\theta_5$ ，

$\overline{P_4P_7}^2=\overline{P_4P_6}^2+\overline{P_6P_7}^2-2\overline{P_4P_6}\cdot\overline{P_6P_7}\cos\theta_6'$ ， $\overline{P_1P_8}^2=\overline{P_1P_9}^2+\overline{P_8P_9}^2-2\overline{P_1P_9}\cdot\overline{P_8P_9}\cos\theta_9$

由正弦定理與反三角函數可得：

$\angle P_1P_3P_2=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_2}{\overline{P_1P_3}}\overline{P_1P_2})$ ，則 $\angle P_1P_3P_4=\theta_3-\angle P_1P_3P_2=\theta_3'$ 。

$\angle P_5P_4P_6=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_5P_6})$ ， $\angle P_6P_4P_7=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_6'}{\overline{P_4P_7}}\overline{P_6P_7})$ ，

則 $\angle P_3P_4P_7=\theta_4-\angle P_5P_4P_6-\angle P_6P_4P_7=\theta_4'$ 。

$\angle P_4P_6P_5=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_5}{\overline{P_4P_6}}\overline{P_4P_5})$ ，則 $\angle P_4P_6P_7=\theta_6-\angle P_4P_6P_5=\theta_6'$ 。

$\angle P_4P_7P_6=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_6'}{\overline{P_4P_7}}\overline{P_4P_6})$ ，則 $\theta_7'=\angle P_4P_7P_8=\theta_6-\angle P_4P_7P_6$ 。

$\angle P_1P_8P_9=\sin^{-1}(\frac{\sin\theta_9}{\overline{P_1P_8}}\overline{P_1P_9})$ ，則 $\angle P_1P_8V_3=\theta_8-\angle P_1P_8P_9=\theta_8'$ 。

$$\varepsilon_1=[P_1P_8P_9]=\frac{1}{2}\overline{P_1P_9}\cdot\overline{P_8P_9}\sin\theta_9$$

$$\varepsilon_2=[P_1P_2P_3]=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\theta_2$$

$$\varepsilon_3=[P_4P_5P_6P_7]=\frac{1}{2}\overline{P_4P_5}\cdot\overline{P_5P_6}\sin\theta_5+\frac{1}{2}\overline{P_4P_6}\cdot\overline{P_6P_7}\sin\theta_6'$$

再由凸五邊形內接【點邊邊】三角形的面積結論可得到：

$$\delta=\frac{\sin\theta_4'\cdot\sin\theta_7'}{-2\sin(\theta_4'+\theta_7')}\cdot\overline{P_4P_7}^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{\sin(\theta_4' + \theta_7' + \theta_8')}{\sin(\theta_4' + \theta_7')} \times \frac{\overline{P_1P_8}}{\overline{P_8V_3}}$$

$$\beta = 1 - \frac{\left(\frac{\sin(\theta_8')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7})\right)\left(\overline{P_8V_3} - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_7'+\theta_8')}{\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8}\right)}{\frac{\sin(\theta_8')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8} \times \left((\overline{P_7P_8} + \frac{\sin(\theta_4')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7}) - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_7'+\theta_8')}{\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8}\right)}$$

$$\gamma = 1 + \frac{\left(\frac{\sin(\theta_8')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8} - (\overline{P_3P_4} + \frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7})\right)\left(\overline{P_7V_3} + \frac{\sin(\theta_4')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7}\right)}{\left(\overline{P_4V_2} + \frac{\sin(\theta_7')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7}\right)\left((\overline{P_7P_8} + \frac{\sin(\theta_4')}{-\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_4P_7}) - \frac{\sin(\theta_4'+\theta_7'+\theta_8')}{\sin(\theta_4'+\theta_7')} \times \overline{P_1P_8}\right)}$$

因此，$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3-\varepsilon_3+\delta))^2-4\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)(A_2-\varepsilon_2)}$ 。

九、 n 邊形的概括整理：

(一) 給出任凸 n 邊形內接三角形所需的定義

1. 以任意頂點為基準，逆時鐘以 $P_1 \cdots P_n$ 命名 n 邊形的每個頂點。
2. 內接三角形三頂點為 V_1 、V_2 、V_3 (同樣以以任意頂點為基準，逆時鐘命名)，其中為內接【點邊邊】三角形情況時，$P_1 = V_1$ 、三角形 $V_1V_2V_3$ 面積為 $[V_1V_2V_3]$ 。
3. 所有邊長用兩點連線段表示，例如：$\overline{P_1P_2}$ 一律以逆時鐘排序頂點。
4. 多邊形內角用 $\theta_1 \cdots \theta_n$ 依序表示，其中 θ_1 對應 P_1 內角，θ_2 對應 P_2 內角，以此類推。
5. 內區三角形外的周圍三塊圖形知面積，以 P_1 為基準順時鐘接續的面積稱之 A_1 ，逆時鐘者稱之 A_2 ，剩餘者 A_3 。
6. 裁切*後的五邊形一律以頂點命名，例如：$P_1P_3P_4P_5P_7$ 。
7. 經過裁切的角度，為五邊形內的角(意即五邊形內角)用 θ_k' ，k 對應該頂點數字 P_k 為五邊形頂點)，五邊形外的角因不參與公式運算，指逆時針排列的三個頂點標示。

註:「裁切」具體的意義會在後面說明

(二) 給出任凸 n 邊形內接三角形的解題方針：

透過整理多邊形的研究結果，我們將解決 n 邊形內接三角形面積的方式分為裁切方法和裁切面積。在此具體搭配九邊形【邊邊邊】圖片說明：

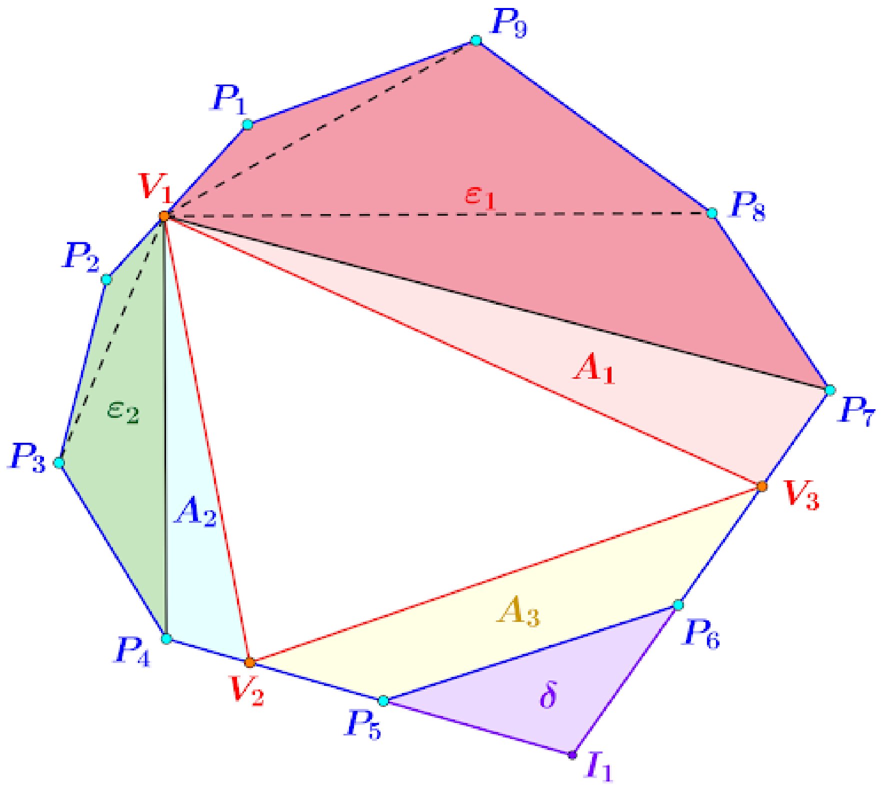

圖 15 裁切示意圖

1. 定義裁切: 令裁切指將兩個頂點連線，可以切割 A_k 的最大面積(A_k 就是三多邊形 A_1 、 A_2 、 A_3 的其中一塊)。在裁切 A_1 、 A_2 時(與 V_1 相鄰的兩塊面積)，一律以 V_1 為基準畫裁切線(意即若有裁切線存在，此裁切線必通過 V_1 ，其目的是為了使裁切後呈現五邊形【點邊邊】的形式，以方便計算，且當同塊面積裁切線為兩條以上，為了方便計算面積，每一條線都標示，至於計算裁切面積的方法整理將在後面解釋。如圖，以 $V_1V_3P_7P_8P_9P_1$ 為例， $\overline{V_1P_7}$ 為可以切割 A_2 的最大面積的裁切線， $\overline{V_1P_8}$ 過小， $\overline{V_1P_6}$ 則過大，超出原 A_1 範圍)。而裁切最終的目的，就是減少多邊形的邊數，畫簡成五邊形的形狀，而求出裁切面積便是精簡畫圖形的必要途徑。

2. 定義裁切三角形：

連接最終的裁切線後，練線裁切線的兩點之間所有頂點，而這會分割成不等三角形，任一個三角形皆被稱為裁切三角形。

3. 定義裁切面積：

(1) 裁切面積是指裁切後凸五邊形以外的多餘的面積，也是同 Ak 內所涵的裁切三角形的總和，並將其稱之為 ε_k。如上圖 A_1，五邊形 $V_1P_7P_8P_9P_1$ 為原六邊形 $V_1V_3P_7P_8P_9P_1$ 不包含五邊形內 $V_1V_3P_7$ 的面積，左邊 $V_1P_2P_3P_4$ 亦是如此，接下來將透過下圖詳細解析裁切三角形面積的步驟。

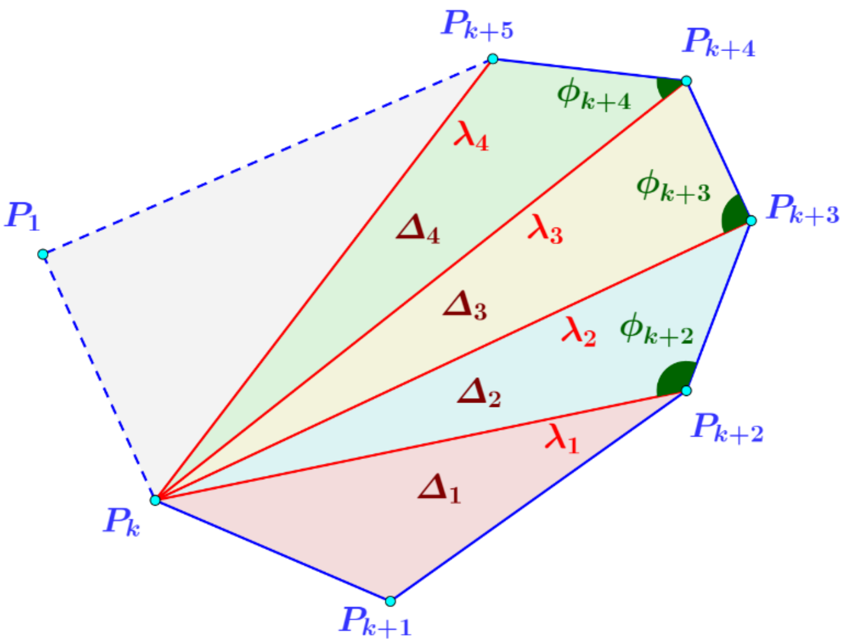

圖 16　n 邊形的局部區域，供解釋裁切面積的運算。

(2) 符號註解：

θ_k、$\theta_{k+1}\cdots$ 此為 n 邊形內角，其中 θ_k 代表 P_k 的內角，以此類推。

ϕ_k 對應頂點 Pk 使用三角形面積公式之夾角，例：$\Delta P_kP_{k+2}P_{k+3}$ 中，$\angle P_kP_{k+2}P_{k+3}$ 為套用三角形面積公式之夾角。

s_k 表示 n 邊形的邊長，圖中畫輔助線的基準點 P_k 逆時連接的邊為 s_1，其餘依序 s_1、s_2 排列。

λ_k 為裁切線，雖上述均以連線段表示，但由於公式簡潔而使用 λ_k，同樣依序 λ_1、λ_2 排列。

Δ_k 代表第 k 個裁切三角形，同樣依序 Δ_1、Δ_2 排列。

其餘未被定義線段或角度(例如 $\angle P_k P_{k+2} P_{k+3}$)皆用頂點排列標示

(3) 面積運算會依照四個步驟循環：

- 透過三角形面積公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 算出第 k 個裁切三角形面積
- 用餘弦定理算出第 k 個裁切三角形的第三邊長
- 以知面積，透過三角形面積公式及正弦函數找出第 k 個裁切三角形內一角
- 用已知角算出下個裁切三角形的一角

由上述內容可知，真正用來算面積的只有第一步驟(從圖中可直接用 $\frac{1}{2}s_1 s_2 \sin\theta_{k+1}$ 算出第一裁切三角形面積)，第二到四步驟主要在補齊下個裁切三角形的面積。但是無論如何，此四步驟都必須進行，因為即使沒有下一個三角形，還是需經過此四步驟而後補齊裁切後之五邊形的所有必要條件而代入公式。

(4) 說明五邊形需要第 2~4 步驟補足條件：

使用圖 16，令 P_k 為頂點，裁切線為 λ_3，有一動點在線段 $\overline{P_4P_5}$ 上。則最後一塊裁切角形面積為 Δ_3。則根據步驟，透過 λ_2、線段 $\overline{P_{k+3}P_{k+4}}$、$\phi_{k+3}$ 便可知道答案，但算完面積後 λ_3 以及 ϕ_{k+4} 仍為未知，且五邊形內要套用公式必須要用到此兩要素，且透過正弦、餘弦定理和三角形面積公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 得出五邊形一邊長和內角。因此，算裁切三角形必須完成所有步驟。

註:要素為 $ab\sin C$ 所需的兩邊及一角。

(5) 最終整理上述步驟，可以得出一個公式表示裁切三角形面積(不包含補齊要素)：

假設裁切線以 P_k 為基準， A_k 內，有 x 個裁切三角形，則所有裁切三角形總和

$$\sum \Delta = \frac{1}{2} s_1 s_2 \sin(\theta_{k+1}) + \sum_{a=0}^{x-1} \sum_{b=0}^{x-1} \sum_{c=0}^{x-1} \frac{1}{2} \lambda_a s_{(b+2)} \sin(\phi_{k+c+1})$$

且定義 $\lambda_0 = 0$ 、 $s_0 = 0$ ，使 $x = 1$ 時後半部分公式為 0 。

我們的演算法是：正弦、餘弦、再一次正弦、找角。

依據裁切的方法，裁切後多為凸五邊形(若兩動點屬於的邊相鄰則為凸四邊形)，因此，在將 A_1 、 A_2 、 A_3 多餘的面積扣除後，便可直接帶入五邊形的公式結論。(多為五邊形是因為構成兩動點邊和三條輔助線湊成五個邊，其餘歸類為特殊狀況，像是裁切後剩四條邊。)接下來，將進入結論整理。

(三) 公式結論：

根據研究，所有的公式均可以表示為以下樣貌：

$$[V_1V_2V_3] = \sqrt{(S_1A_1 + S_2A_2 + S_3A_3)^2 - 4S_4A_1A_2}$$

其中 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 為四個係數集合，而這些係數可能以加、減、或乘，參與 A_k 的運算(以在上述係數結論提到)

(四) 套用公式的限制：

1. 不可含有 0 、 ∞ 等不合理的邊長或不合理的角度。
2. 依據目前的研究，此公式只適用於凸多邊形

(五) 套用公式所需要的條件-

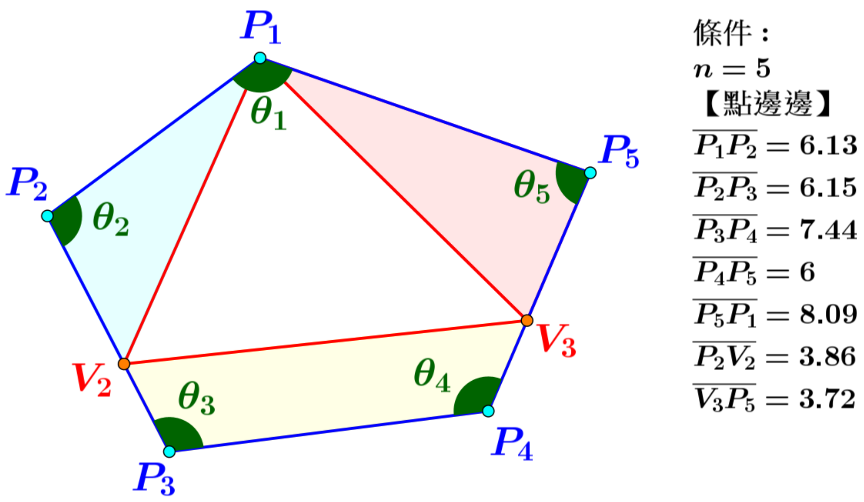

圖 17 正五邊形範例

1. 給一個 n 多邊形
2. 判斷內接三角形為【點邊邊】還是【邊邊邊】
3. 內接三角形的動點在 n 多邊形的哪幾條邊上
4. n 邊形的所有邊長(不一定每個都用上)
5. n 邊形的所有內角(不一定每個都用上)
6. $\overline{P_iV_2}$ 、$\overline{V_3P_j}$ 的長度(及動點邊上分割兩段其中一段的長度，在此一律採用 A_3 外的兩條邊，而 P_i 、 P_j 為相鄰 V_2 、V_3 且遵守逆時針命名規則的點)，如果為【邊邊邊】情況，則需要 $\overline{V_1P_k}$ （P_k 是以 V_1 為基準逆時鐘沿 n 邊形邊長遇到的第一個 P 點)。
7. 確認所提供的條件存在一個圖形(可以發現，要透過此公視求出面積，在要求提供所有邊常及角度時，圖形的全貌也是必要的。)

滿足以上結論，便可透過這一公式，解決任凸 n 邊形內接三角形的面積。涵蓋從簡單到複雜，四邊形到多邊形，【點邊邊】到【邊邊邊】。不論條件的內接三角形面積，皆用最一開始的，一行公式：$[V_1V_2V_3] = \sqrt{(S_1A_1 + S_2A_2 + S_3A_3)^2 - 4S_4A_1A_2}$

伍、討論

本研究從長方形內接三角形的幾何面積推導切入，嘗試突破以往代數公式無法靈活延伸的限制。透過自定義的分類方式【點邊邊】與【邊邊邊】，在不同類型的凸多邊形中進行有系統的分類與幾何推導。

在長方形與平行四邊形中，面積公式呈現簡單穩定的結構。我們進一步延伸至梯形與凸四邊形後發現，雖然公式形式變得更複雜，但仍可利用三角函數與比例線段加以描述與代換。至五邊形、六邊形乃至九邊形的推導中，面積公式漸趨繁瑣，須分段處理面積，但整體公式仍保有統一模式。

值得注意的是，當邊數增加時，需處理的角度與比例條件亦隨之提升，對圖形構造與三角函數關係的掌握要求更高。但透過 GeoGebra 工具與正弦、餘弦定理的使用，本研究得以準確描繪各步驟，驗證推導結果的正確性。

陸、結論

一、將長方形內接三角形面積公式延伸至凸四邊形。

二、利用連接線段與補三角形的方式，將公式擴展至凸五邊形到凸九邊形。並針對每一圖形給出內接三角形面積的關係式。

三、給出凸多邊形圖形拆解的演算法，與其內接三角形的面積公式。

$$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(S_1A_1+S_2A_2+S_3A_3)^2-4S_4A_1A_2}$$

柒、參考文獻資料

[1]臺南第一高級中學科學班（2020）。*109 學年度甄選試題*。

[2]康軒文教事業教科書編輯委員會（2023a）。*比例線段*（《國民中學數學課本》第五冊）。國家教育研究院。

[3]康軒文教事業教科書編輯委員會（2023b）。*相似形三角形的應用*（《國民中學數學課本》第三冊）。國家教育研究院。

[4]龍騰文教事業教科書編輯委員會（2023）。*三角比的性質*（《高級中等學校數學課本》第二冊）。國家教育研究院。

【評語】030413

本研究從一道科學班的入學試題為起點,作者們不僅僅滿足於找到問題的答案，更是獨創性地提出一套幾何分析方法，藉此突破傳統代數解法在應用上的侷限性 。研究的核心亮點在於其系統性的推廣過程，從最初的長方形案例出發，作者有條不紊地將其結論延伸至平行四邊形、梯形，並最終成功地推廣至任意凸多邊形，展現了清晰的研究脈絡與企圖心。

以國中生的水準而論,本作品呈現了相當優異的數學推導能力與處理複雜問題的潛力。在整個研究過程中，作者們熟練地運用了比例線段、正弦定理與餘弦定理等幾何學工具來進行公式的推導與驗證 。此外，研究報告也明確指出，團隊善於利用 GeoGebra 軟體進行輔助作圖、推理及結果驗證，顯示其具備結合現代工具解決數學問題的能力,這使得繁複的推導過程得以準確地呈現與檢視 。整體而言，這是一件結構完整且具深度的研究作品。如果能更加凸顯結果的獨特性，能讓作品更加深一個層次。

作品海報

四邊形內接三角形的面積

壹、前言

一、研究動機：

平面上有一長方形 $P_1P_2P_3P_4$，V_2、V_3 分別為 $\overline{P_2P_3}$ 、$\overline{P_3P_4}$ 上的點。若以 $[P_1V_2V_3]$ 表 $\Delta P_1V_2V_3$ 的面積，且 $[P_1V_3P_4]=A_1$、$[P_1P_2V_2]=A_2$、$[V_2P_3V_3]=A_3$。試證明 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2}$ [1]。

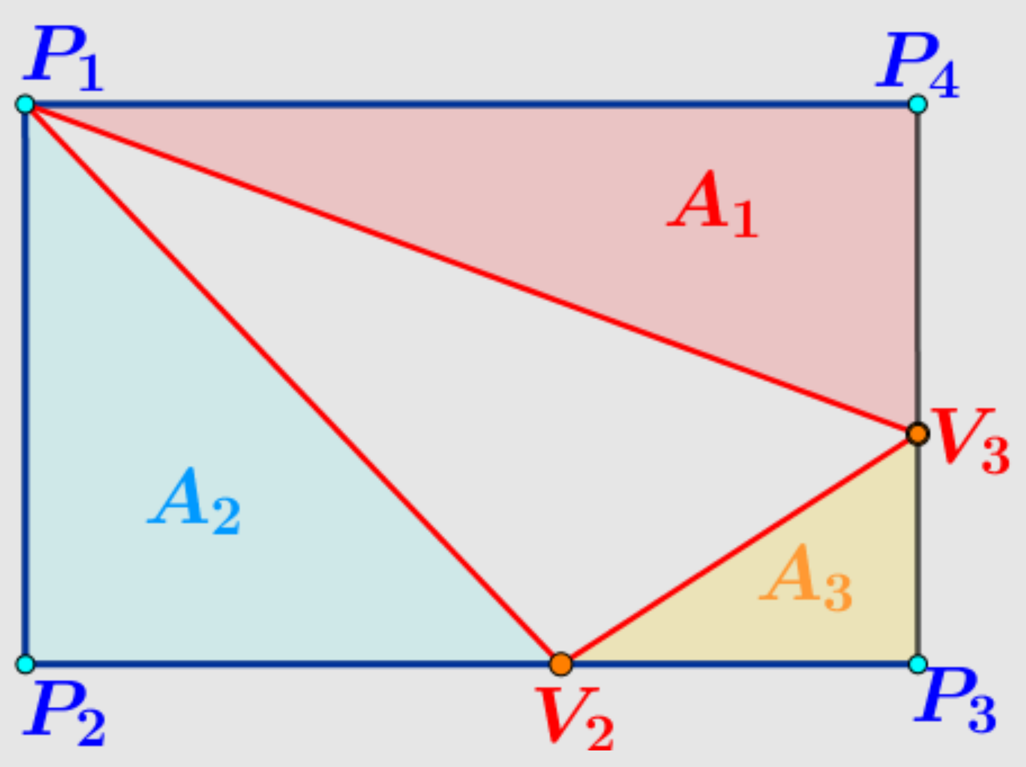

圖1 原始題目圖形

二、研究目的：

(一) 給出原始題目的幾何解法。
(二) 推導凸四邊形的一般化公式。
(三) 推導凸多邊形的一般化公式。
(四) 總結 n 邊形內接三角形面積一般化要素與結論。

參、研究過程或方法

在本研究初期中，【點邊邊】表三角形的三頂點，其中一頂點在長方形的頂點上，另外兩個頂點在長方形的邊上，稱為【點邊邊】三角形。同理，若三角形的三頂點皆在矩形的邊上，稱為【邊邊邊】三角形。

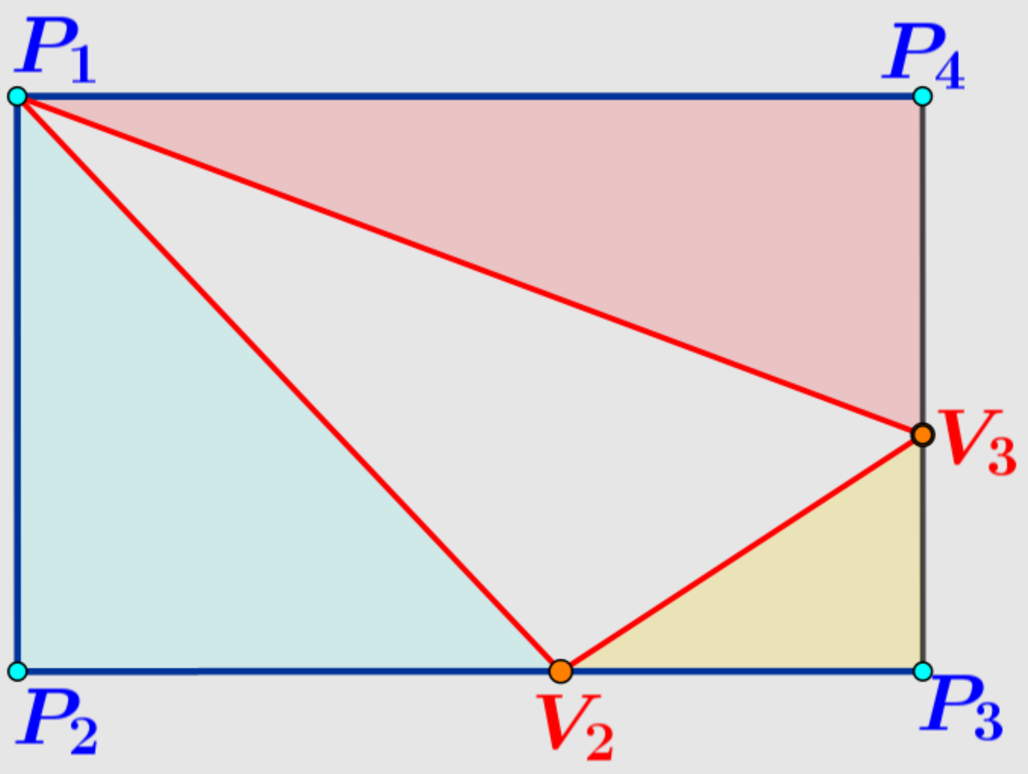

圖2 長方形內接【點邊邊】三角形

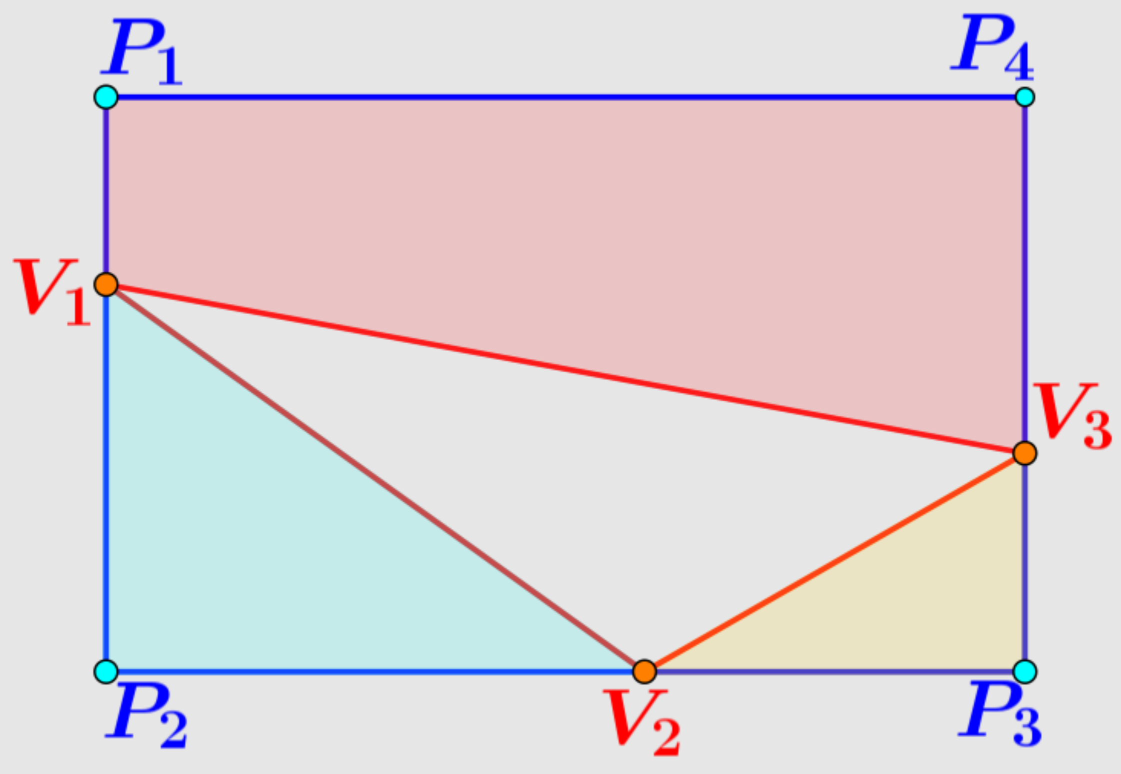

圖3 長方形內接【點邊邊】三角形

肆、研究結果

一、給出原始題目的幾何解法

(一) 長方形內接【點邊邊】三角形

$[P_1V_2V_3]=A_1+A_2+A_3-\dfrac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}A_1$ 。

$[P_1P_2P_3P_4]=A_1+A_2+A_3+[P_1V_2V_3]=\overline{P_2P_3}\cdot h$ ，h 為長方形 $\overline{P_2P_3}$ 上的高。

$(A_1+A_2+A_3)[P_1V_2V_3]+[P_1V_2V_3]^2$

$=(A_1+A_2+A_3)^2+(A_1+A_2+A_3)[P_1V_2V_3]-\overline{P_2P_3}\times h\times\dfrac{2\overline{P_2V_2}}{\overline{P_2P_3}}\times A_1$

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2}$ 。

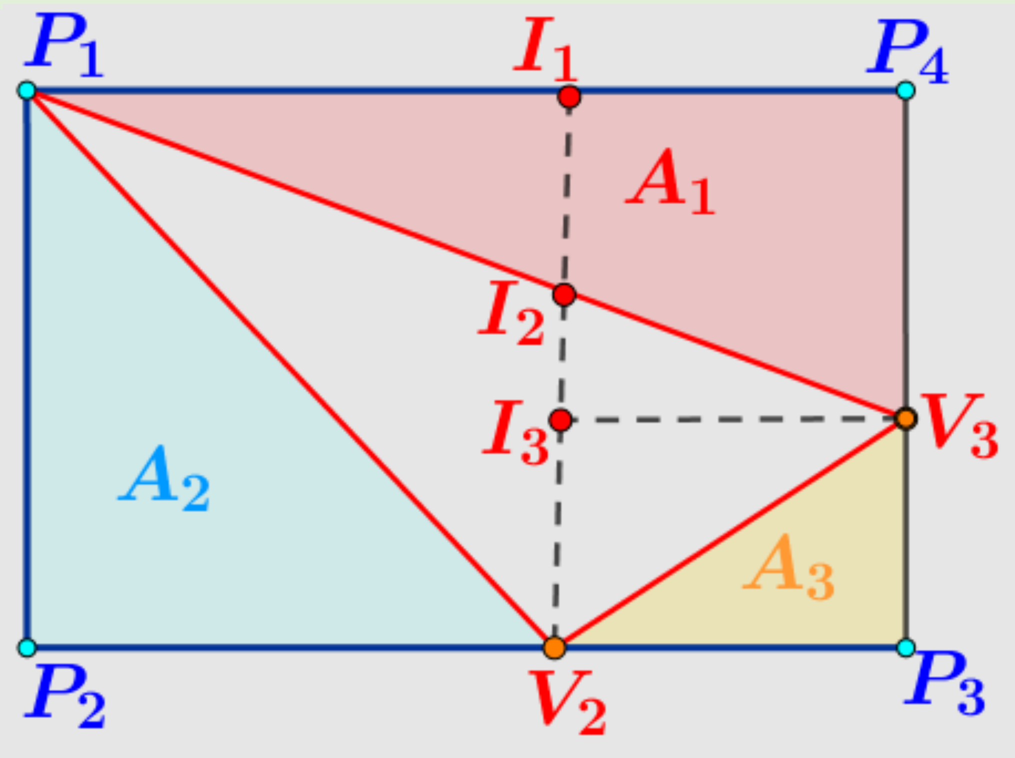

圖4 長方形內接【點邊邊】三角形

(二) 長方形內接【邊邊邊】三角形

$[V_1V_3I_1]:A_1=(\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}):(\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1})$，$[V_1V_3I_1]=\dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}A_1$ 。

令 $\alpha=\dfrac{\overline{P_4V_3}-\overline{P_1V_1}}{\overline{P_4V_3}+\overline{P_1V_1}}$ 。$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha A_1+A_2+A_3)^2-4\alpha A_1A_2}$ 。

【本作品所有圖形皆由學生使用Geogebra自行製作】

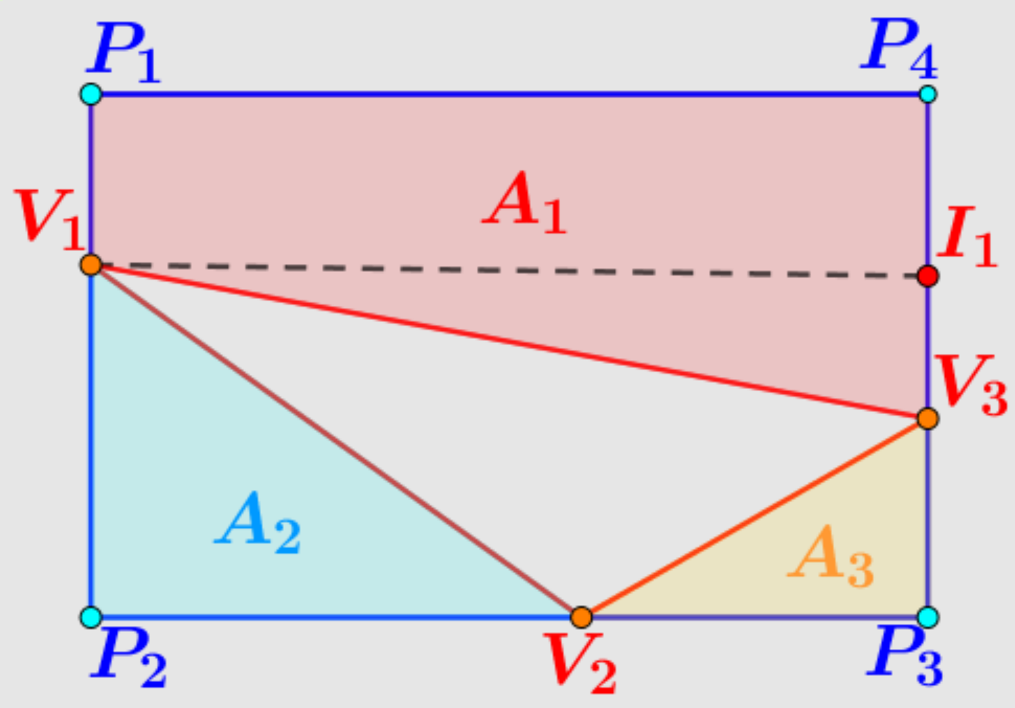

圖3 長方形內接【邊邊邊】三角形

二、推導凸四邊形的一般化公式

(一) 平行四邊形內接【點邊邊】三角形

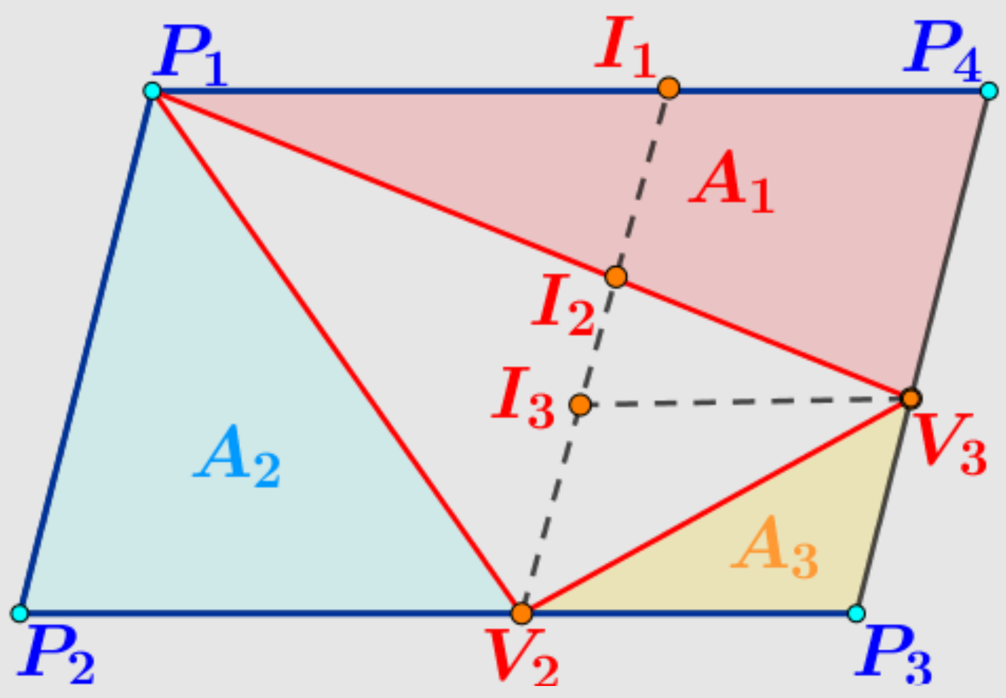

圖4 平行四邊形內接【點邊邊】三角形

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(A_1+A_2+A_3)^2-4A_1A_2}$ 。

(二) 平行四邊形內接【邊邊邊】三角形

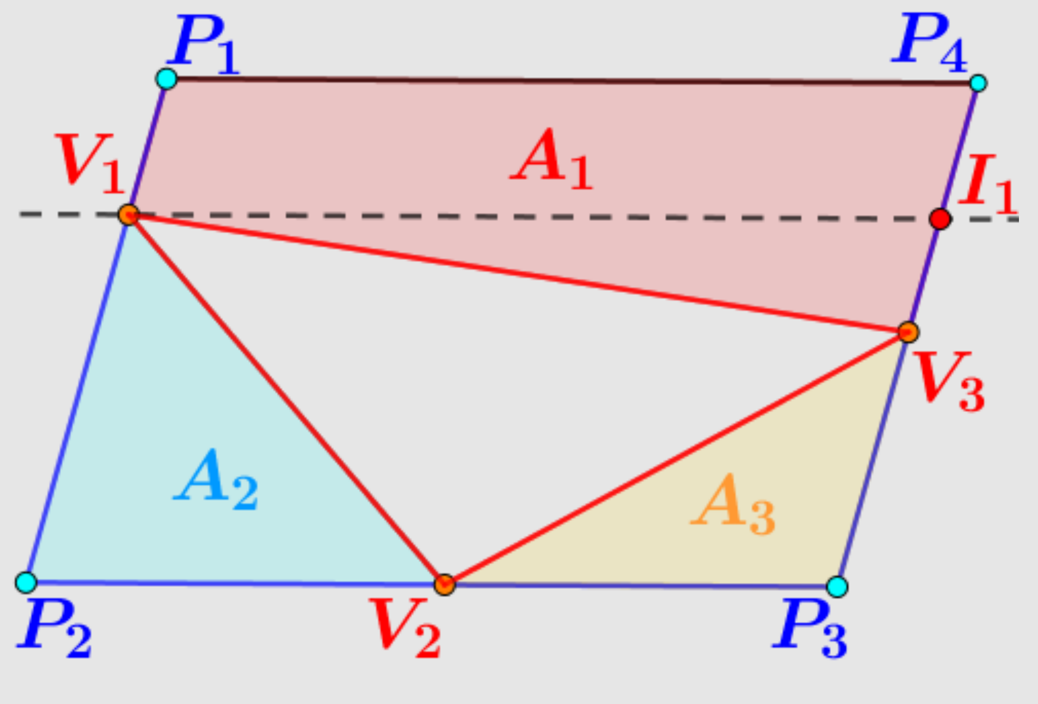

圖5 平行四邊形內接【邊邊邊】三角形

$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha A_1+A_2+A_3)^2-4\alpha A_1A_2}$ 。

(三) 梯形內接【點邊邊】三角形

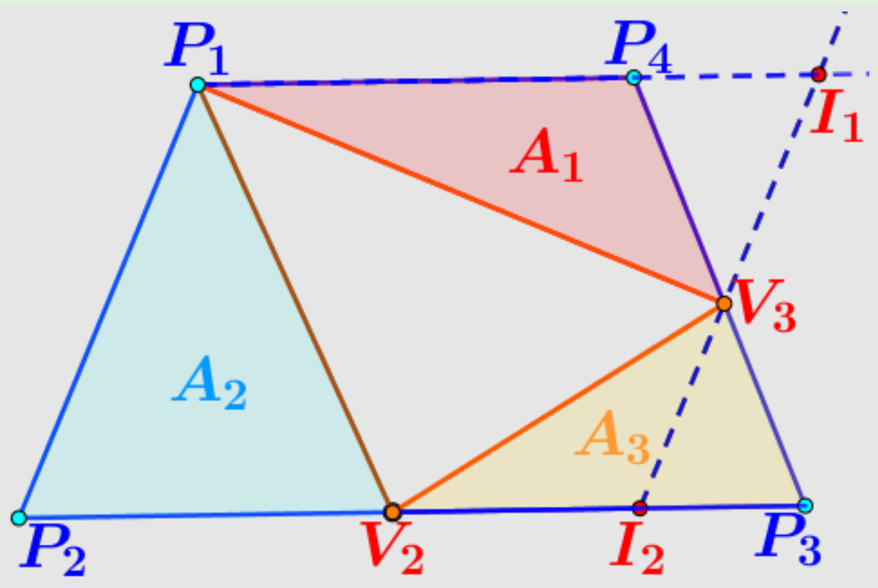

圖8 梯形內接【點邊邊】三角形

$$\frac{\overline{V_2I_2}}{\overline{P_3V_2}}=1-\frac{\overline{P_3I_2}}{\overline{P_3V_2}}=1-\frac{(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\times\overline{P_3V_3}}{\overline{P_3V_2}\times\overline{P_3P_4}}=\gamma \text{ ，}$$

$$\frac{\overline{P_1I_1}}{\overline{P_1P_4}}=1+\frac{(\overline{P_2P_3}-\overline{P_1P_4})\times\overline{P_4V_3}}{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_3P_4}}=\beta \text{ 。}$$

$[P_1V_3I_1]$ 以 βA_1 表示，$[V_3V_2I_2]$ 以 γA_3 表示，

得到 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\beta A_1+A_2+\gamma A_3)^2-4\beta A_1A_2)}$ 。

(四) 梯形內接三角形【邊邊邊】

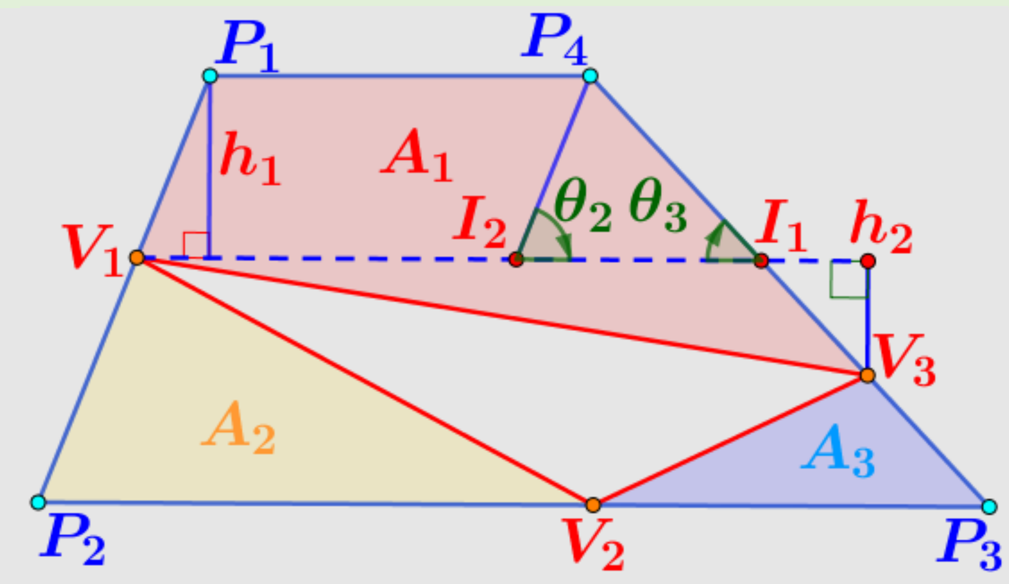

圖9 梯形內接【邊邊邊】三角形

令 $[V_1V_3I_1]=\alpha A_1$ 。

得到 $[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+A_2+\gamma A_3)^2-4\alpha\beta A_1A_2}$ 。

【本作品所有圖形皆由學生使用Geogebra自行製作】

(五) 凸四邊形內接【點邊邊】三角形

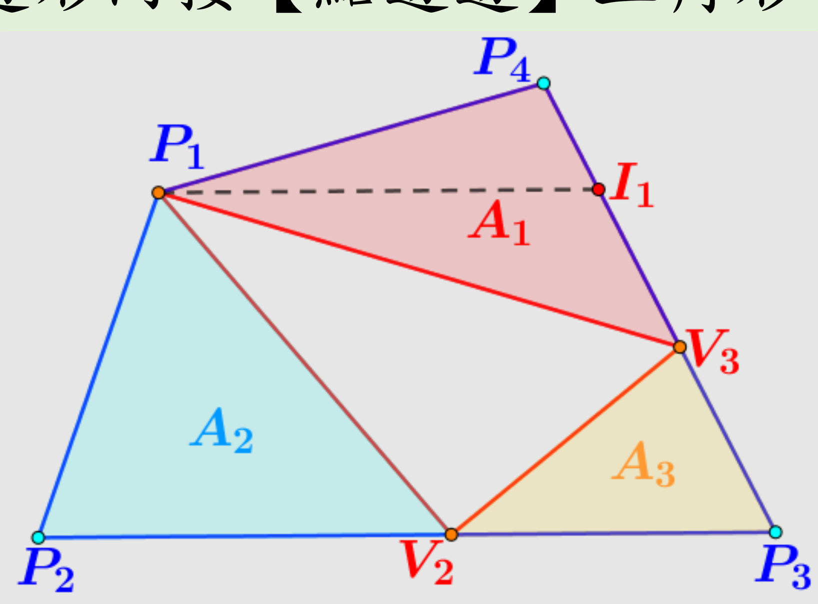

圖10 凸四邊形內接【點邊邊】三角形

得到 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+A_2+\gamma A_3)^2-4\alpha\beta A_1A_2}$ 。

(六) 凸四邊形內接【邊邊邊】三角形

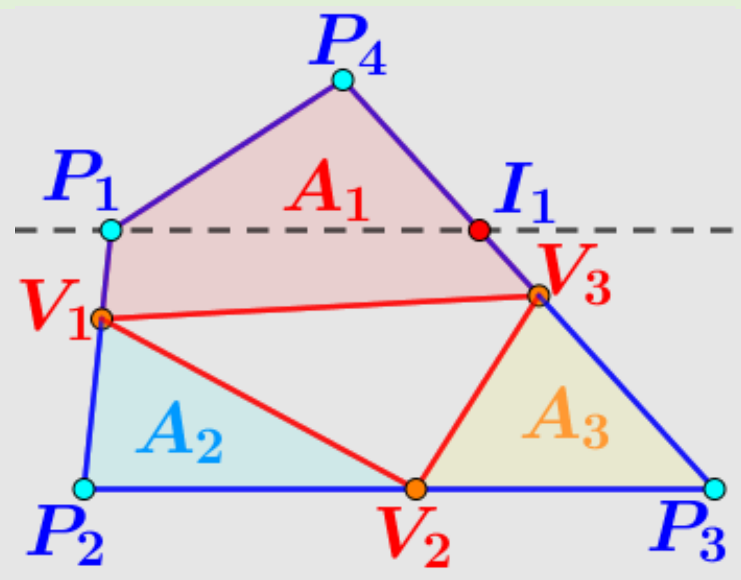

圖11 凸四邊形內接【邊邊邊】三角形

$[V_1V_3P_4]=A_1-\frac{1}{2}\overline{P_1V_1}\times\overline{P_1P_4}\sin\theta_1=A_1-\varepsilon_1$ 。

得到 $[V_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)+A_2+\gamma A_3)^2-4\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)A_2}$ 。

三、推導凸多邊形的一般化公式

(一) 凸五邊形內接【點邊邊】三角形

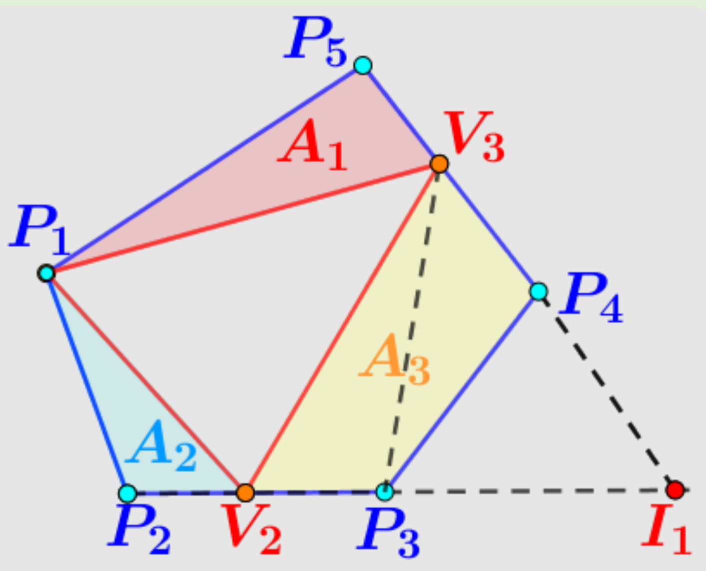

圖12 凸五邊形內接【點邊邊】三角形

$$[V_3V_2I_1]=A_3+\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta_3\sin\theta_4}{-\sin(\theta_3+\theta_4)}\times\overline{P_3P_4}^2=A_3+\delta \text{ 。}$$

得到 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+A_2+\gamma(A_3+\delta))^2-4\alpha\beta A_1A_2}$ 。

(二) 凸六邊形內接【點邊邊】三角形

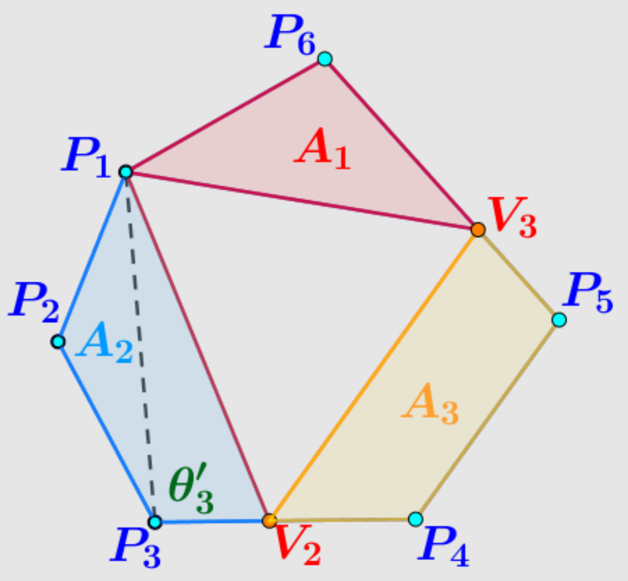

圖13 凸六邊形內接【點邊邊】三角形

得到 $[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3+\delta))^2-4\alpha\beta A_1(A_2-\varepsilon_2)}$

(三) 凸七邊形內接【點邊邊】三角形

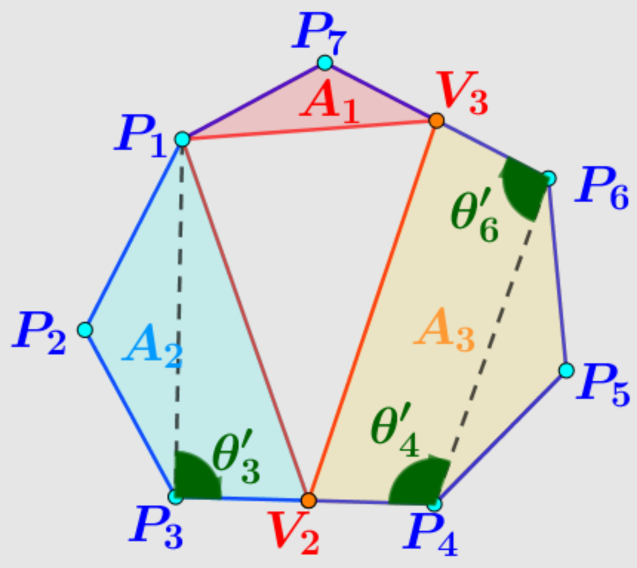

圖14 凸七邊形內接【點邊邊】三角形

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta A_1+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3-\varepsilon_3+\delta))^2-4\alpha\beta A_1(A_2-\varepsilon_2)}$ 。

(四) 凸八邊形內接【點邊邊】三角形

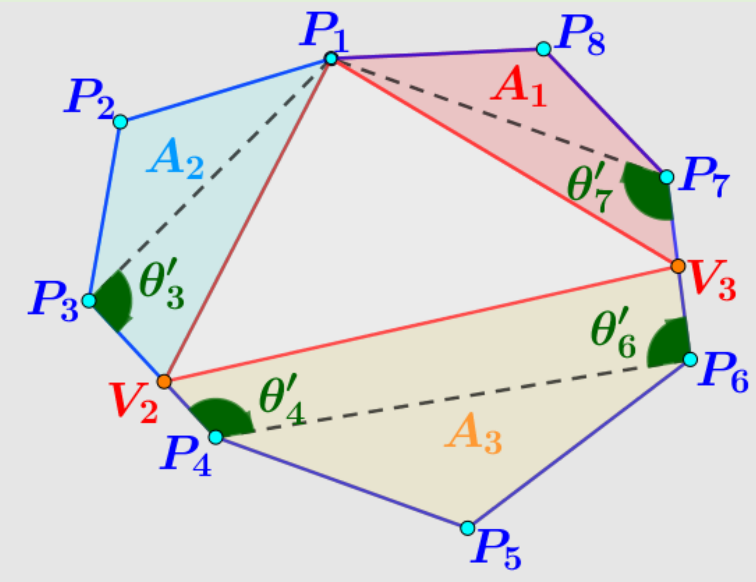

圖15 凸八邊形內接【點邊邊】三角形

$[P_1V_2V_3]=\sqrt{(\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)+(A_2-\varepsilon_2)+\gamma(A_3-\varepsilon_3+\delta))^2-4\alpha\beta(A_1-\varepsilon_1)(A_2-\varepsilon_2)}$ 。

四、總結 n 邊形內接三角形面積一般化要素與結論

(一) 給出任凸 n 邊形內接三角形所需的定義：

1. 定義裁切：指將兩個頂點連線，可以切割 A_k 的最大面積。在裁切 A_1 、 A_2 時，一律以 V_1 為基準畫裁切線，其目的是為了使裁切後呈現五邊形【點邊邊】的形式，以方便計算，且當同塊面積裁切線為兩條以上，會將每一條線都標示。如圖，以 $V_1V_3P_7P_8P_9P_1$ 為例，$\overline{V_1P_7}$ 為可以切割 A_2 的最大面積的裁切線，$\overline{V_1P_8}$ 過小，$\overline{V_1P_6}$ 則過大，超出原 A_1 範圍)。

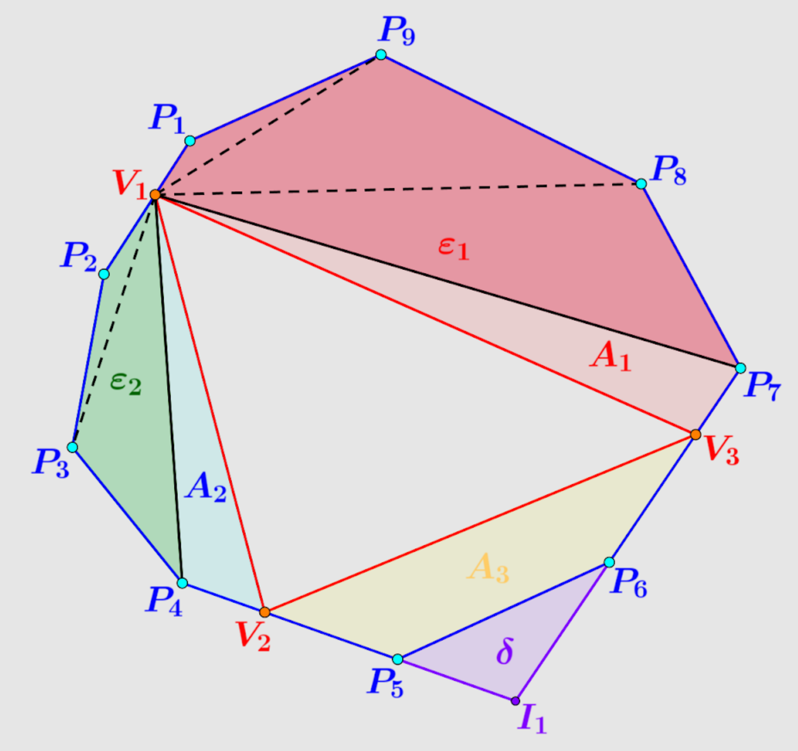

圖16裁切示意圖

2. 定義裁切面積：

(1) 裁切面積是指裁切後凸五邊形以外的多餘的面積，也是同 A_k 內所涵的裁切三角形的總和，並將其稱之為 ε_k 。

(2) 符號註解：θ_k 、$\theta_{k+1}\cdots$ 為 n 邊形內角，其中 θ_k 為 P_k 的內角。ϕ_k 對應頂點 P_k 使用三角形面積公式之夾角。s_k 為 n 邊形的邊長。λ_k 為裁切線。Δ_k 代表第 k 個裁切三角形。

(二) 給出任凸 n 邊形內接三角形的解題方針：

1. 面積運算會依照四個步驟循環：

(1) 透過三角形面積公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 算出第 k 個裁切三角形面積

(2) 用餘弦定理算出第 k 個裁切三角形的第三邊長

(3) 以知面積，透過三角形面積公式及正弦函數找出第 k 個裁切三角形內一角

(4) 用已知角算出下個裁切三角形的一角

2. 整理上述步驟，可以得出一個公式表示裁切三角形面積和：

$\sum\Delta=\frac{1}{2}s_1s_2\sin(\theta_{k+1})+\sum_{a=0}^{x-1}\frac{1}{2}\lambda_a s_{(a+2)}\sin(\phi_{k+a+1})$ ，且定義 $\lambda_0=0$ ，使 $x=1$ 時後半部分公式為 0 。

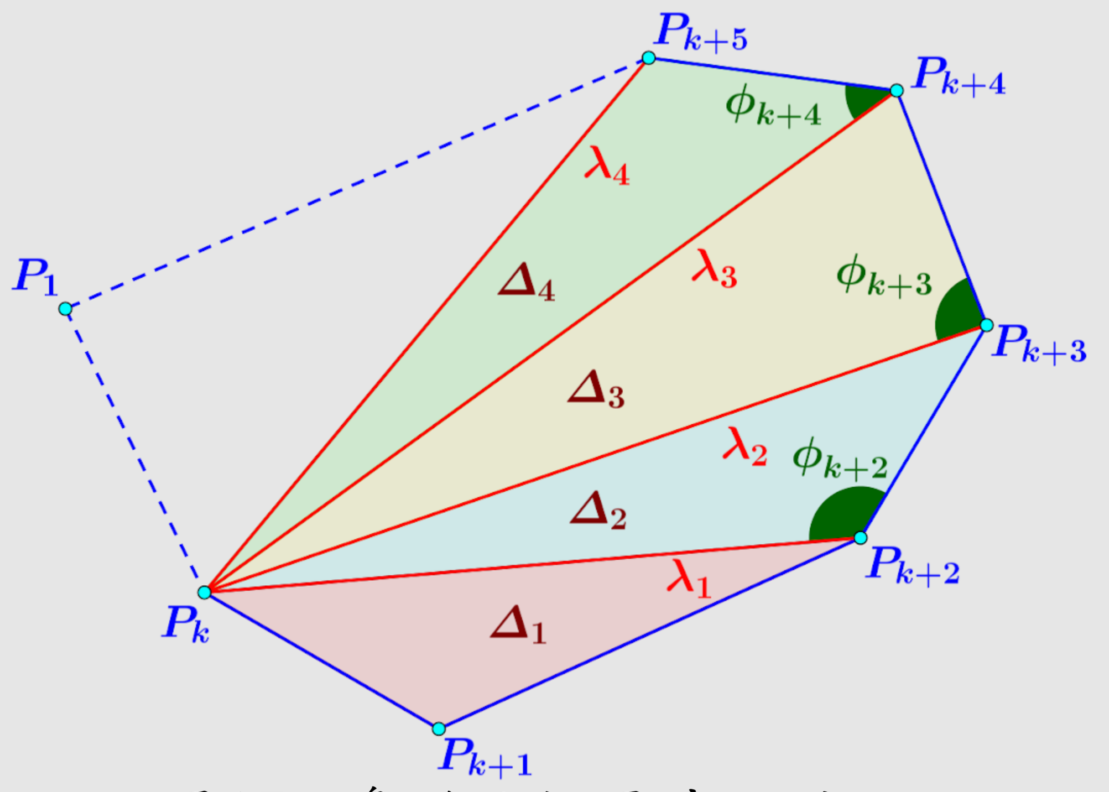

圖17 n邊形局部區域面積

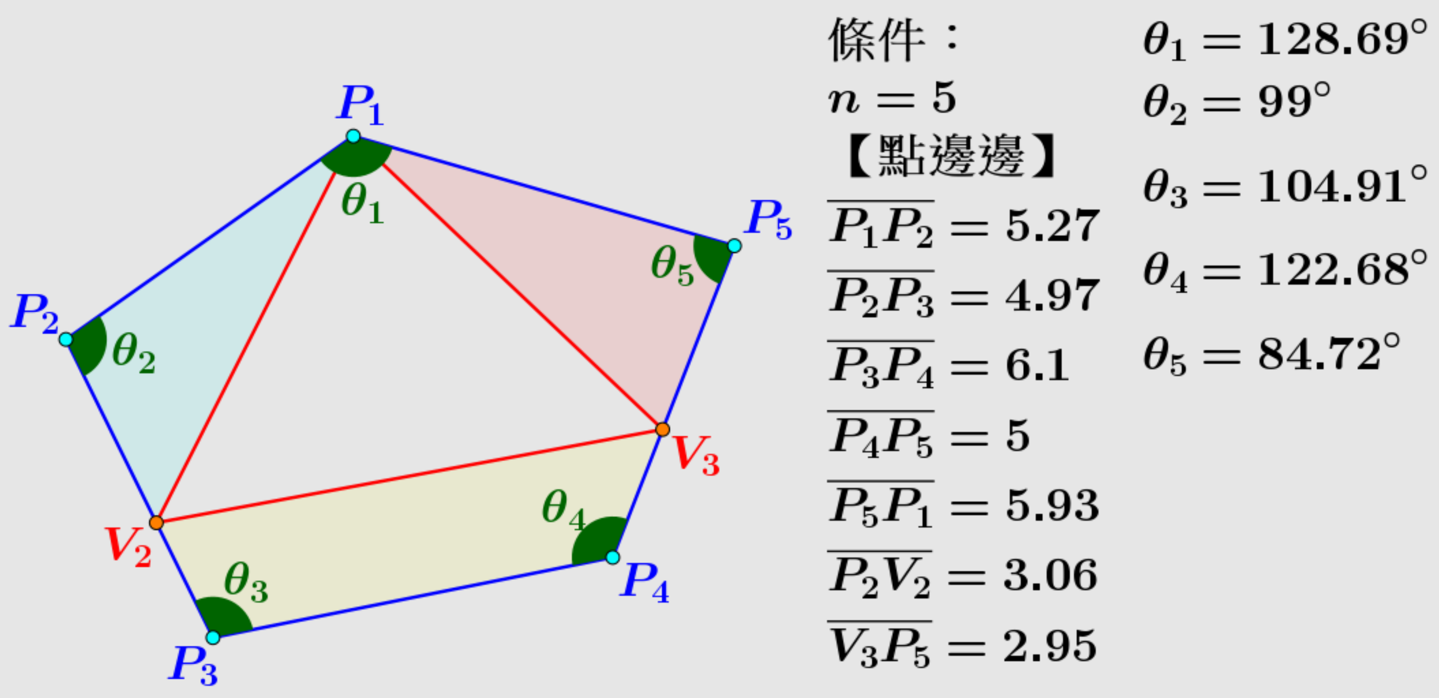

圖18 五邊形範例

(三) 係數結論：

α ：將【點邊邊】凸四邊形還原至梯形。

β ：解【點邊邊】所用的係數其一，γ ：解【點邊邊】所用的係數其二。

δ ：還原凸五邊形至四邊形所補三角形之面積。

ε_1 ：A_1 的所有裁切三角形面積總和，ε_2 ：A_2 的所有裁切三角形面積總和，ε_3 ：A_3 的所有裁切三角形面積總和。

係數參與面積的運算符號：α 、β 、γ ：乘號，因為它是比例運算。ẟ：加號，因為是補面積。ε_1 、ε_2 、ε_3 ：減號，因為裁切為扣除面積。

(四) 公式結論：

根據研究，所有的公式均可以表示為 $[V_1V_2V_3]=\sqrt{(S_1A_1+S_2A_2+S_3A_3)^2-4S_4A_1A_2}$

其中 S_1 、S_2 、S_3 、S_4 為四個係數集合，而這些係數可能以加、減、或乘，參與 A_k 的運算。

(五) 套用公式的限制：

1. 不可含有 0 、∞ 等不合理的邊長或不合理的角度。
2. 依據目前的研究，此公式只適用於凸多邊形

伍、討論

在長方形與平行四邊形中，面積公式呈現簡單穩定的結構。我們進一步延伸至梯形與凸四邊形後發現，雖然公式形式變得更複雜，但仍可利用三角函數與比例線段加以描述與代換。至五邊形、六邊形乃至九邊形的推導中，面積公式漸趨繁瑣，須分段處理面積，但整體公式仍保有統一模式。

值得注意的是，當邊數增加時，需處理的角度與比例條件亦隨之提升，對圖形構造與三角函數關係的掌握要求更高。但透過 GeoGebra 工具與正弦、餘弦定理的使用，本研究得以準確描繪各步驟，驗證推導結果的正確性。

陸、結論

一、將長方形內接三角形面積公式延伸至凸四邊形。

二、利用連接線段與補三角形的方式，將公式擴展至凸五邊形到凸九邊形。並針對每一圖形給出內接三角形面積的關係式。

三、給出凸多邊形圖形拆解的演算法，與其內接三角形的面積公式。

$$[V_1V_2V_3]=\sqrt{(S_1A_1+S_2A_2+S_3A_3)^2-4S_4A_1A_2}$$

柒、參考文獻資料

[1]臺南第一高級中學科學班（2020）。*109 學年度甄選試題*。

[2]龍騰文教事業教科書編輯委員會（2023）。*三角比的性質*（《高級中等學校數學課本》第二冊）。國家教育研究院。