中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030412

「心」之所「像」— 萬眾出「群心」

學校名稱： 臺中市私立弘文高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 施正奕	鄭育雯

關鍵詞： 群心三角形、三角形三心、特殊四邊形

摘 要

本研究以拿破崙定理為出發點，探討特殊三角形與其所構成的外接特殊圖形之間的幾何對應關係。我們關注三角形的外心、內心與重心所構成的「群心三角形」並進行其分析。

過程中，我們使用 GGB 進行圖形建構，建立不同類型的特殊三角形與四邊形所構成群心三角形。透過觀察與計算，分析兩個三角形之間是否具有關係並比較其面積比值。進一步地，探討旋轉角度對結果的影響，當外接的圖形發生變化時，群心三角形的結構性質亦會產生對應變化，並成功歸納出具規律性的關係式。

本研究加深了對三角形幾何的理解，也建立群心三角形在幾何理論探討中的新視角。此成果可作為幾何圖形研究的新起點，有潛力應用於生活上為未來幾何學的研究與教學提供了豐富的延伸空間。

壹、 研究背景與文獻

一、研究背景

本研究以拿破崙定理（Napoleon’ s Theorem）為核心出發點，探討其在特殊三角形與特殊四邊形結構中的推廣應用。根據拿破崙定理：若在任一三角形的三邊向外（或向內）構造等邊三角形，則這三個等邊三角形的重心所構成的群心三角形亦為等邊三角形。本研究嘗試將該性質延伸至不同類型的三角形與外接圖形，進一步觀察其對幾何性質的影響。

在實作上，我們運用 GeoGebra 進行動態幾何圖形模擬，以觀察在不同條件下，重心、內心、外心於變形過程中的相對位置關係。為使實驗具可塑性，將初始三角形固定為：

(一)正三角形

(二)等腰三角形

(三)等腰直角三角形

(四)30°、60°、90°直角三角形

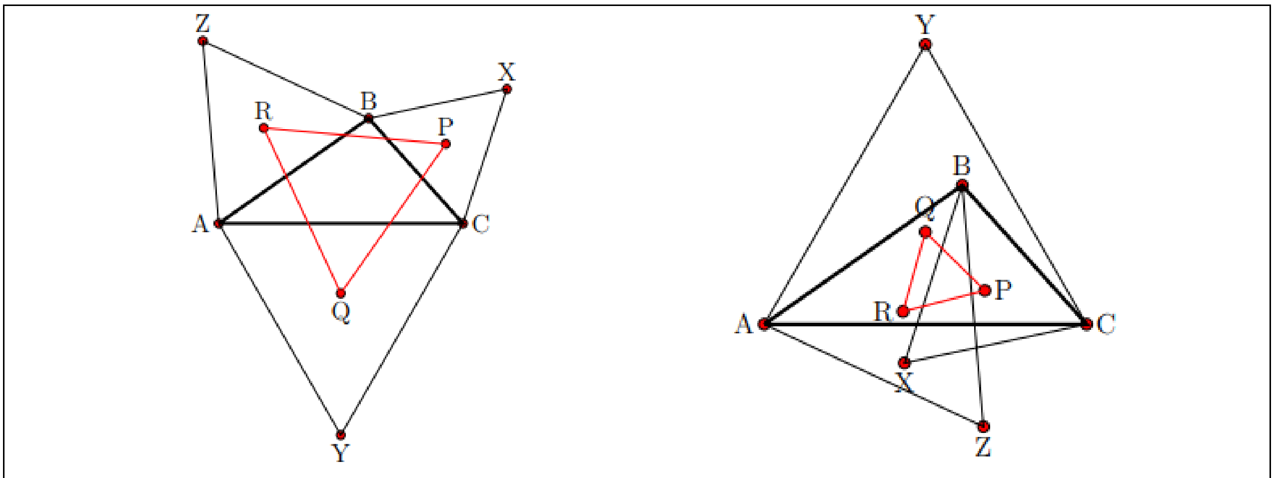
對這些三角形進行等邊外接構造後，取其三心位置，並建立「群心三角形」（由三心構成的群心三角形），藉此探討其與初始三角形之間的幾何關聯性。我們使用代數方法輔助計算其面積比值，觀察是否存在固定的數學規律。

研究結果顯示，不同初始三角形會對群心三角形的形狀與面積產生系統性影響並且我們成功歸納出數組具代表性的規律與比值，顯示出此類幾何構造具高度的數學內涵與推廣力。

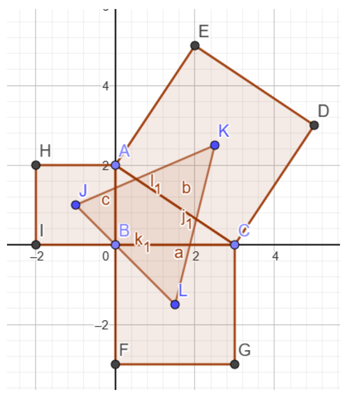
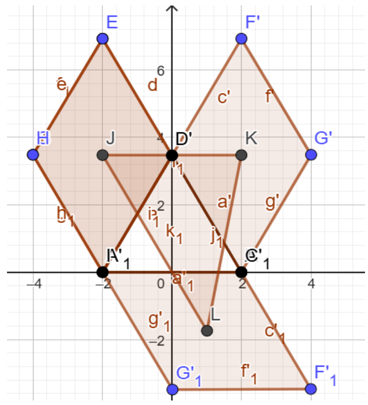
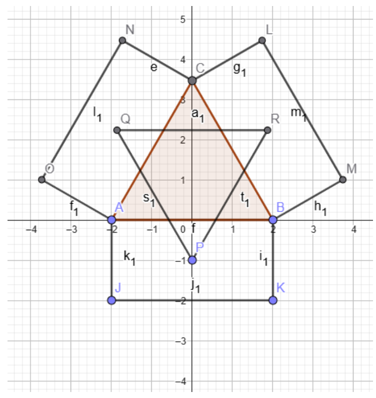
本研究提供了幾何定理在不同圖形條件下的數值驗證，除了深化我們對三心結構的理解，也為未來在教育應用、圖形設計、甚至演算法幾何領域開啟了新視角與研究方向。

二、文獻資料

拿破崙定理(Napoleon's Theorem)是以三角形各邊為邊分別向外(內)側作等邊三角形，則他們的形心構成一個等邊三角形。我們利用它推廣至特殊三邊形和特殊四邊形的探討。我們先以 GGB 去探討圖形跑動之三心位置。再利用數學工具運算去找出有何規律性以及面積比值之歸納關係，我們對於此研究十分感興趣以及對於過程中的規律性感到興奮。我們利用控制變因將初始三角形固定為正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形以及 30°、60°、90°三角形，外接這些特殊三角形再取其外心、內心以及重心並相連。



(圖 1)拿破崙定理之拿破崙ΔPQR

		
(圖 2)直角三角形外接正方形 取其重心並相連	(圖 3)正三角形外接菱形 取其內心並相連	(圖 4) 正三角形外接長方 形其外心並相連

貳、研究目的

本研究探討以 GeoGebra 構作特殊三角形（正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、30°60°90°三角形）為基礎，將其三邊外接相同或對應的特殊三角形，再取每個外接三角形的三心（重心、內心、外心），並將三心連結形成新的三角形，稱為「群心三角形」。研究目的為比較此群心三角形與初始三角形之幾何形狀關係與面積關係，並歸納其是否存在定值或一致的幾何性質。

在幾何性質方面，探討重心、內心、外心所構成之群心三角形是否與初始三角形相似、全等或有特殊形狀，並判斷是否與初始三角形為相同類型之三角形或為任意三角形。

在面積部分，分別計算初始三角形面積S_1與群心三角形面積S_2，並進一步求出面積比值 $R = S_2/S_1$，探討其值關係。面積計算方法包括：

一、正弦面積公式

二、海龍公式

三、行列式計算多邊形面積

四、餘弦定理與正弦定理輔助邊角轉換

若發現 R 非定值，則進一步分析其變化趨勢與對應的三角形形狀有何關係，嘗試找出是否存在一般性公式、上限下限或限制條件。

參、預備知識

一 、外心、內心和重心幾何是三角形中重要的三心。

(一) 外心:三角形三邊中垂線交點稱為三角形的外心，即三角形外接圓的圓心。三角形的外心到三個頂點等距離，且該距離為外接圓的半徑

(二) 內心:三角形內切圓圓心，稱為該三角形的內心。 三角形三內角的角平分線會交於一點

(三) 重心:三角形三邊中點連線，稱為該三角形的重心且重心會平分面積

肆、研究設備及器材

一、紙、筆、筆記本

二、動態幾何數學繪圖軟體(GeoGebra，GGB)

三、3D 設計軟體(Tinkercad)

伍、研究過程或方法

一、 研究過程

(一)、利用正三角形外接正方形三心構作

1. 正∆ABC 外接正方形之重心(圖 5)。

2. 正∆ABC 外接正方形之內心(圖 6)。

3. 正∆ABC 外接正方形之外心(圖 7)。

(1)第 1 類的初始三角形為正三角形

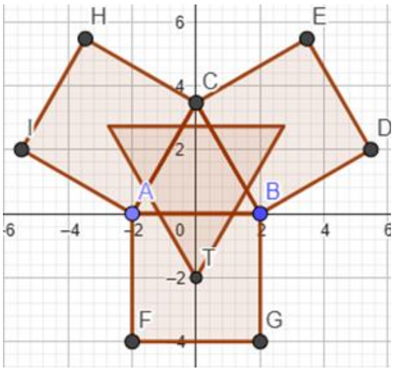
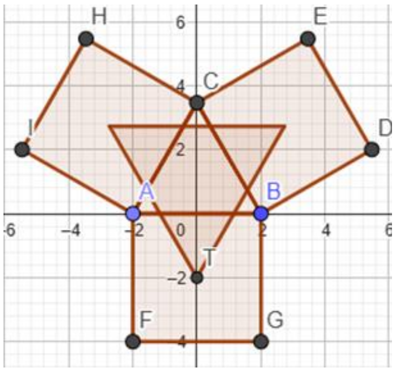
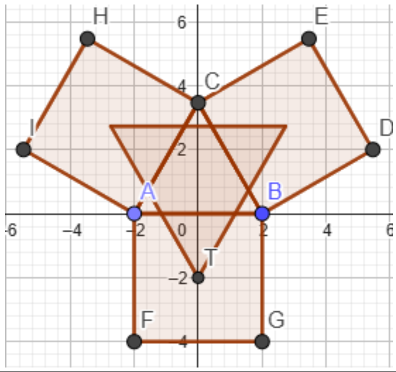
		

圖 5-取其重心	圖 6-取其內心	圖 7-取其外心

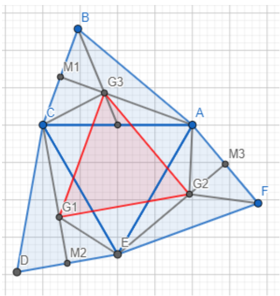
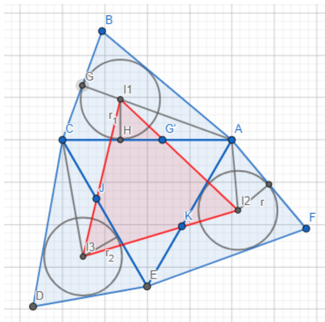
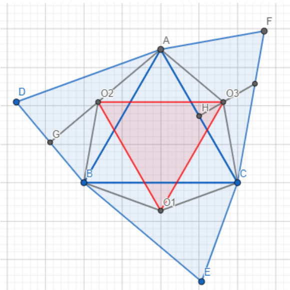

		

圖 8-取其重心	圖 9-取其內心	圖 10-取其外心

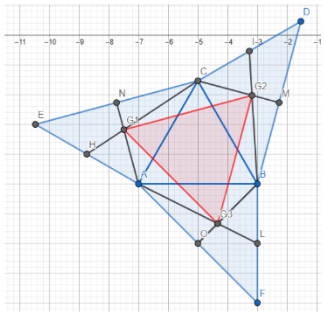
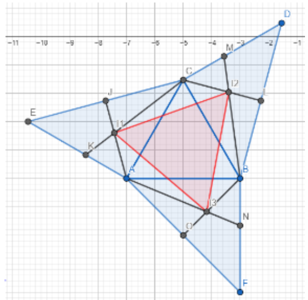
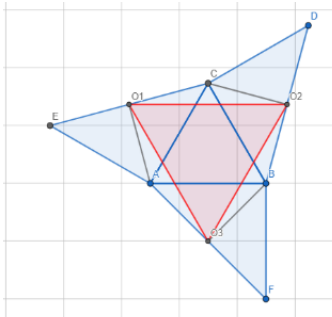

		

圖 11-取其重心	圖 12-取其內心	圖 13-取其外心

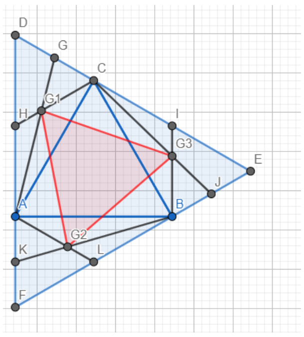
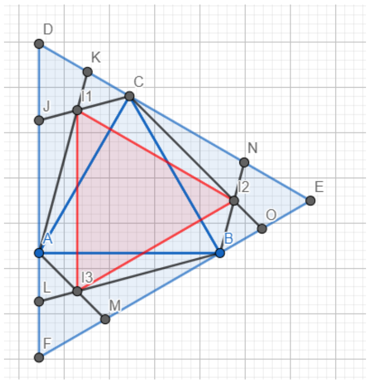
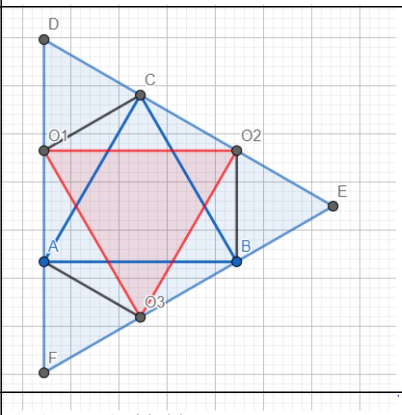

		

圖 14-取其重心	圖 15-取其內心	圖 16-取其外心

(2)第二類的初始三角形為等腰三角形

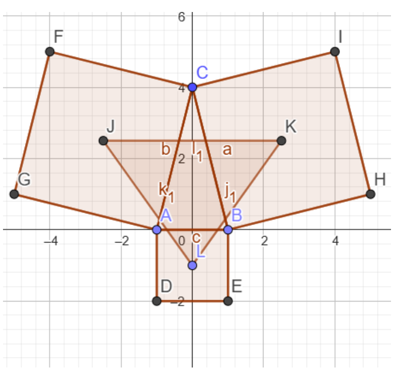
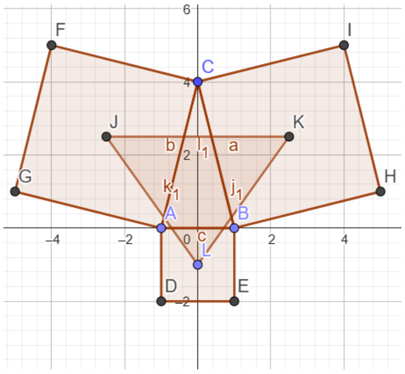
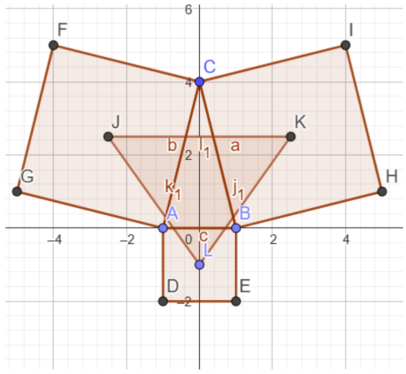
		

圖 17-取其重心	圖 18-取其內心	圖 19-取其外心

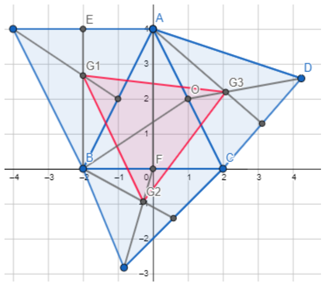
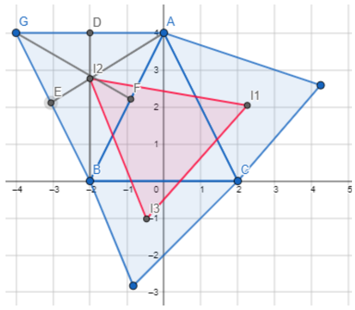
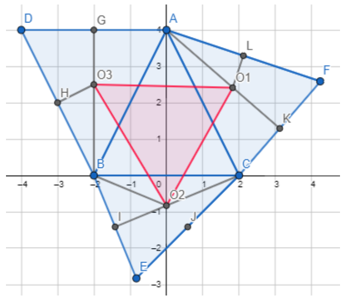

		

圖 20-取其重心	圖 21-取其內心	圖 22-取其外心

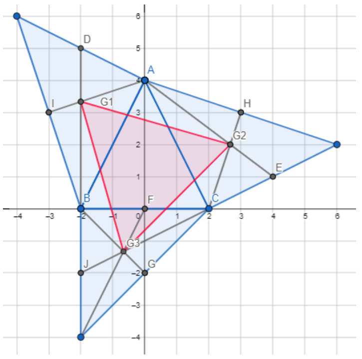
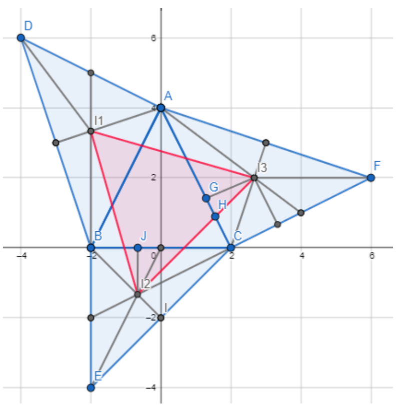
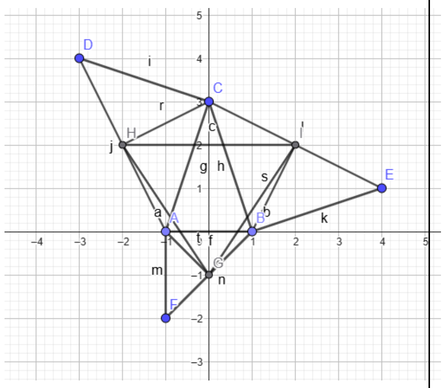

		

圖 23-取其重心	圖 24-取其內心	圖 25-取其外心

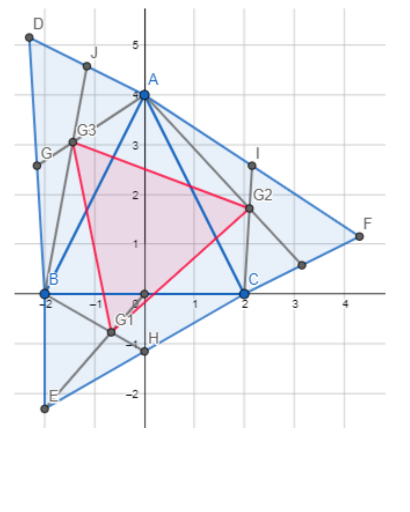


圖 26-取其重心

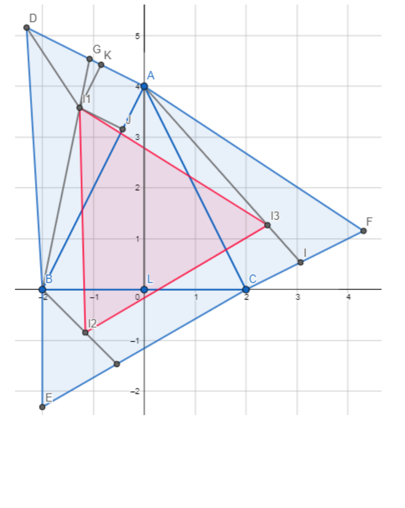


圖 27-取其內心

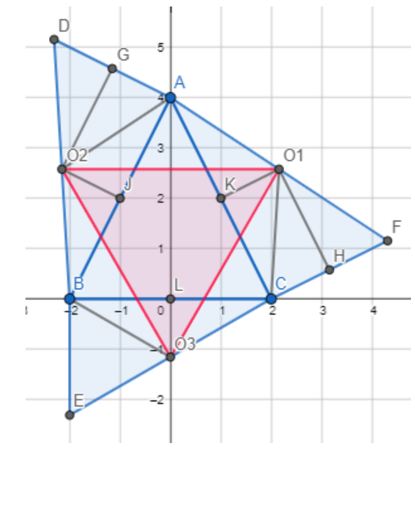


圖 28-取其外心

(3)第三類的初始三角形為等腰直角三角形

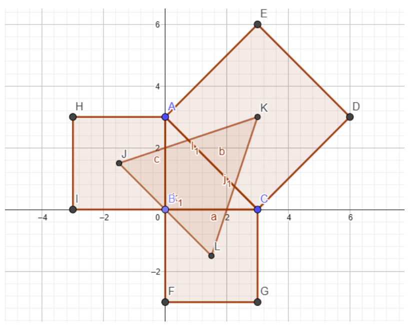


圖 29-取其重心

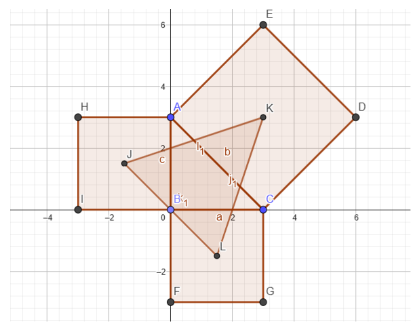


圖 30-取其內心

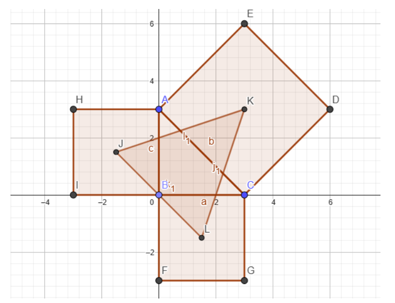


圖 31-取其外心

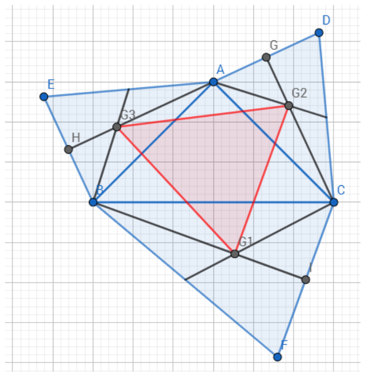


圖 32-取其重心

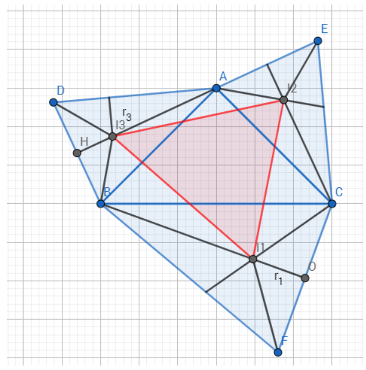


圖 33-取其內心

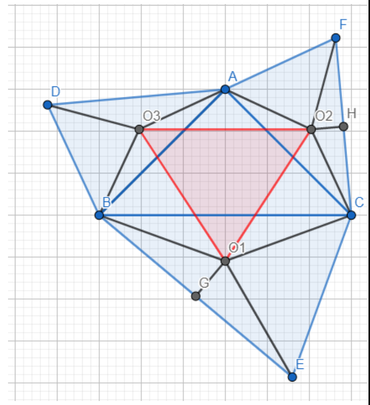


圖 34-取其外心

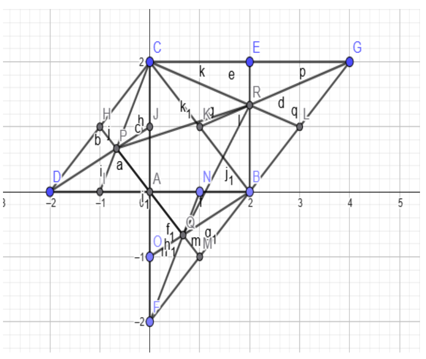


圖 35-取其重心

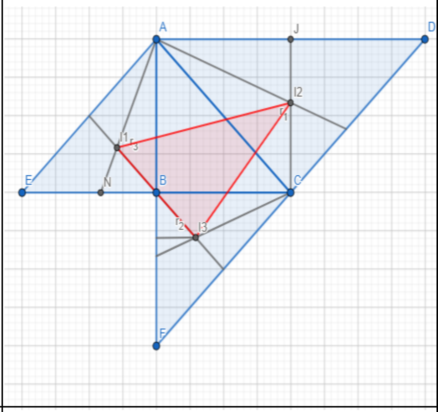


圖 36-取其內心

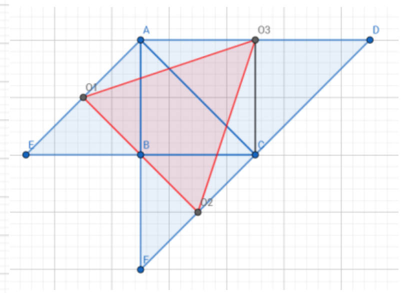


圖 37-取其外心

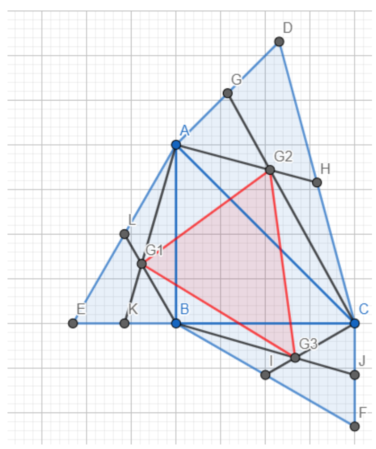


圖 38-取其重心

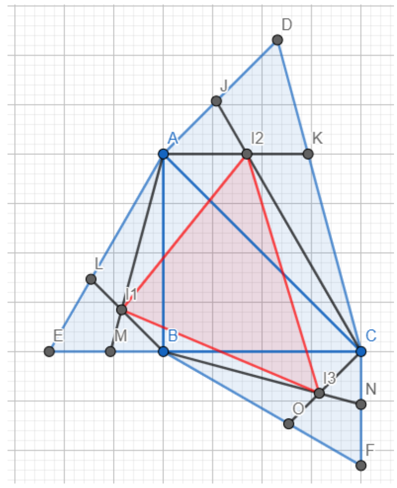


圖 39-取其內心

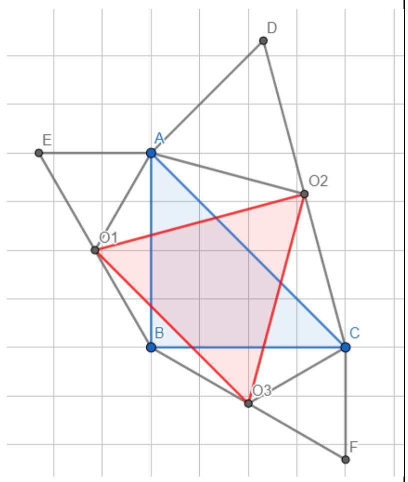


圖 40-取其外心

(4)第四類的初始三角形為30°、60°、90°三角形

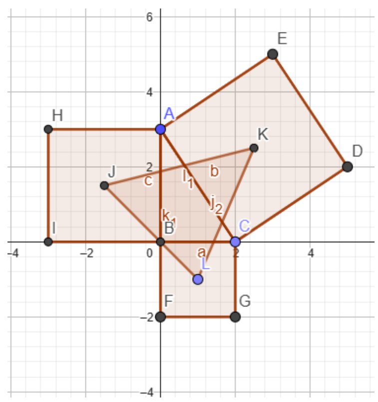


圖 41-取其重心

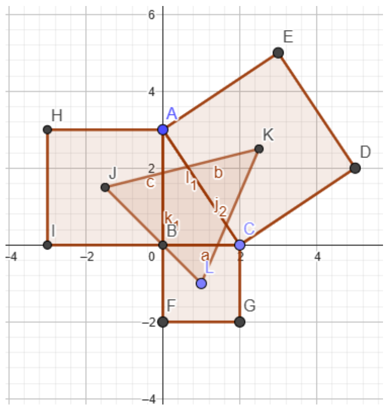


圖 42-取其內心

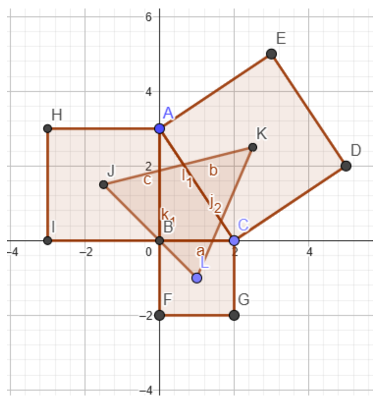


圖 43-取其外心

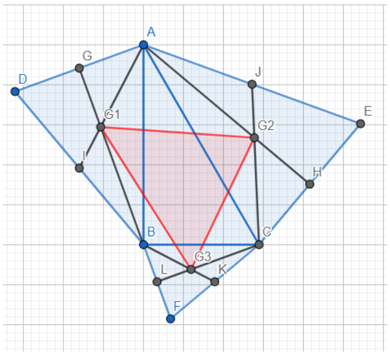


圖 44-取其重心

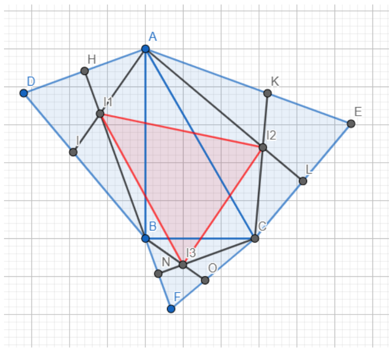


圖 45-取其內心

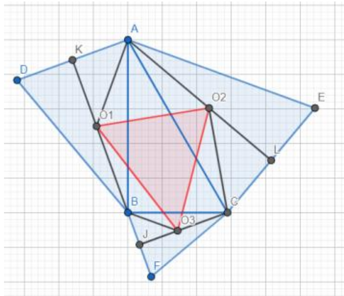


圖 46-取其外心

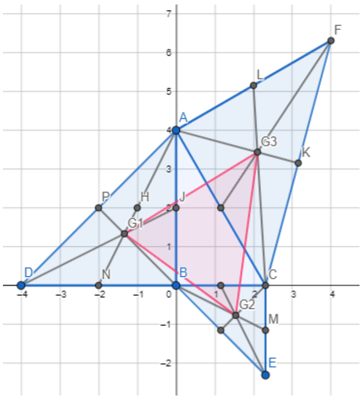


圖 47-取其重心

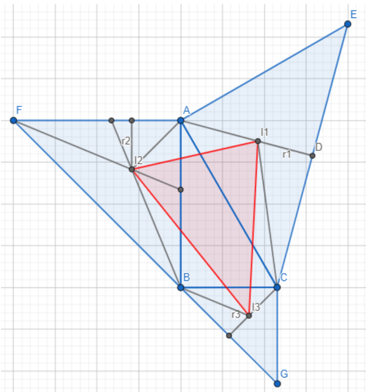


圖 48-取其內心

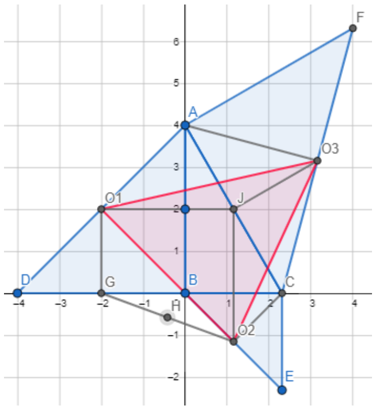


圖 49-取其外心

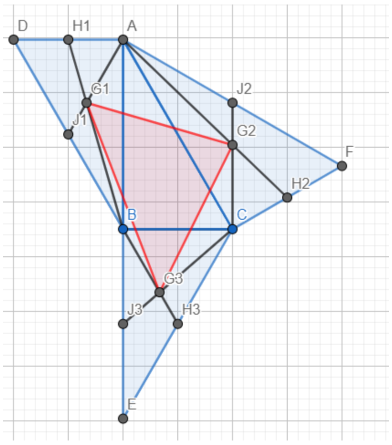


圖 50-取其重心

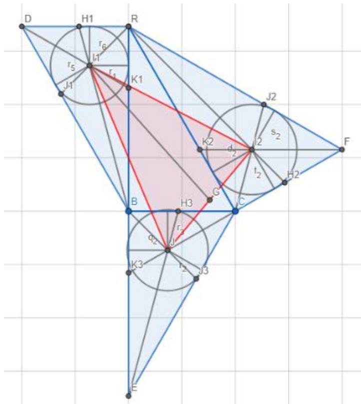


圖 51-取其內心

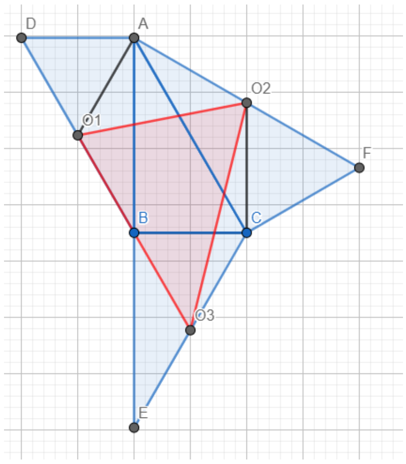


圖 52-取其外心

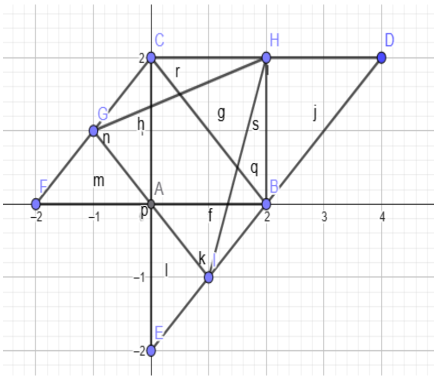
(二) 延伸至特殊三角形外接特殊三角形

1. 正三角形外接正三角形，並連結其重心、內心與外心

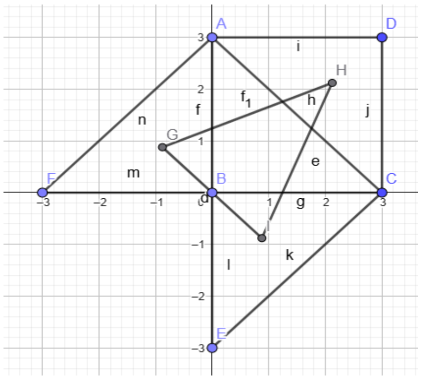
以一個正三角形 $\triangle ABC$ 為基礎，分別在其三邊外部各外接一個正三角形（可設定為向外延伸且與原邊共邊），並設為P_1、P_2、P_3。對每一個外接正三角形，我們找出其幾何中心（重心、內心與外心），並設為X_1、X_2、X_3。連接三個中心點後，形成一個新的三角形

$\triangle X_1X_2X_3$，稱為群心三角形。

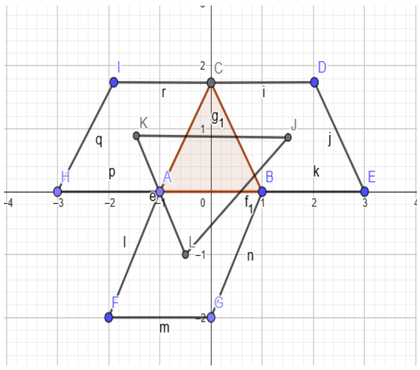
(三) 名詞定義與解釋



(圖 53-群心ΔGHI)



(圖 54-群心ΔGHI)



(圖 55-群心ΔIJK)

1.群心三角形是指：一個特殊三角形（如正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、30°60°90°三角形），於其每一邊外接一個指定特殊圖形（正三角形、正方形、長方形、菱形、平行四邊形），並分別作出這些外接圖形的三心（外心、內心以及重心），並將三個心連線所形成的群心三角形，即為該初始三角形對應的群心三角形。

2.控制變因：

為了簡化比較與計算，我們將初始三角形與外接圖形邊長統一

(1)初始為正三角形：邊長設為 x, x, x

(2)初始為等腰三角形：與外接等腰三角形腰長相同

(3)初始為等腰直角三角形：邊長為 $x, x, \sqrt{2}x$

(4)初始為 30°60°90°直角三角形：邊長為 $x, \sqrt{3}x, 2x$

二、研究方法

(一) 繪製初始三角形：首先畫出一個特定三角形 $\triangle ABC$，固定其邊長或角度

(二) 外接圖形設置：在每一邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的外部外接一個特定圖形，記為P_1、P_2、P_3

(三) 中心點取法：於每個外接圖形中，各找出一個幾何中心（構作外心、內心或重心）

(四) 群心三角形構成：將三個幾何中心記為X_1、X_2、X_3，連線形成三角形

$\triangle X_1X_2X_3$，即為「群心三角形」

(五) 性質探討與分析：$\triangle X_1X_2X_3$是否與初始三角形$\triangle ABC$相似或全等

(六) 群心三角形與初始三角形的面積比值關係

(七) 是否存在不變性質或數學規律

三、研究核心問題如下：

(一)群心三角形與初始三角形之間是否存在穩定的關係（例如：相似、等距、等角等）

(二)群心三角形面積與初始三角形是否該比值是否為固定值

(三)不同類型的初始三角形（正三角形、等腰三角形、任意三角形、等腰直角三角形與直角三角形）是否會產生特定的幾何關係

(四)外接圖形的類型改變，是否會產生群心三角形不同形狀與性質

陸、研究結果

一、透過三角形全等性質與三角型相似性質，探討群心三角形與初始三角形是否全等或相似

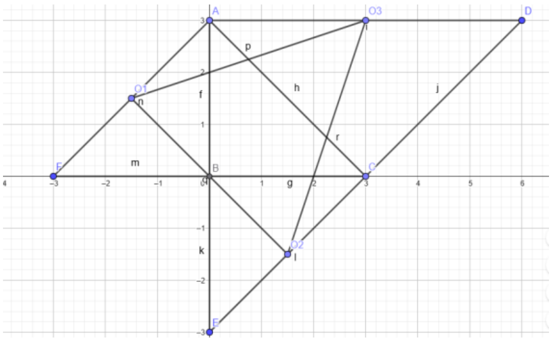
(一)利用餘弦定理、正弦定理算出三心所形成之三角形的邊長，在計算期間我們可以發現群心三角形可以歸納出正三角形、等腰三角形、任意三角形、等腰直角三角形與直角三角形五種。

(二)我們利用海龍公式、$\frac{1}{2}a \times b\sin\theta$以及行列式值等面積工具試著求出群心三角形面積，得出來的面積甚至會有相同之數值。

二、結果

(一) 第一類的群心三角形為等腰三角形

1.等腰直角三角形外接等腰直角三角形取外心



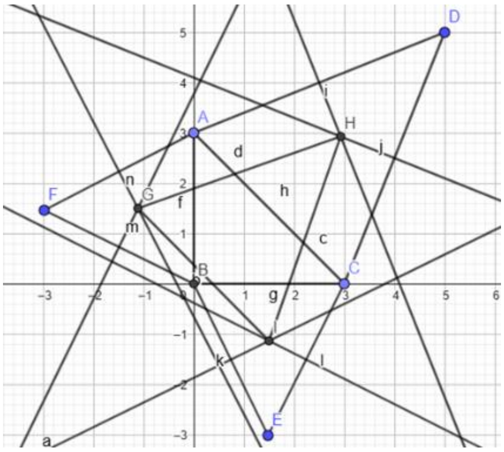
(圖 56)

$$\overline{O_1O_3}^2 = \overline{AO_1}^2 + \overline{AO_3}^2 - 2\times\overline{AO_1}\times\overline{AO_3}\times\cos\angle O_1AO_3 = \overline{O_2O_3}^2$$

$\Delta O_1O_2O_3$為等腰三角形且

$$\Delta O_1O_2O_3=\sqrt{2}x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}=x^2$$

2.等腰直角三角形外接等腰三角形取重心



(圖 57)

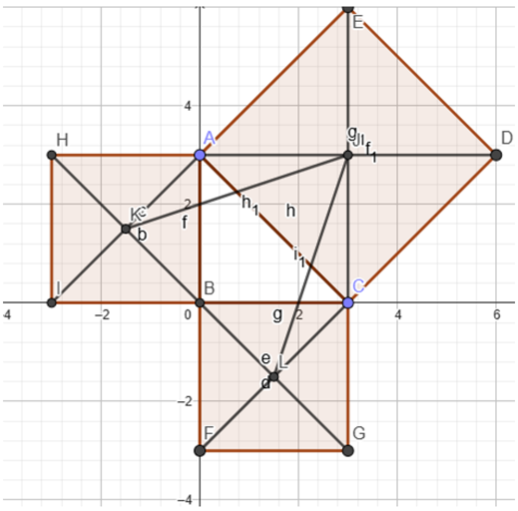
利用座標化 $G(-1.2x,1.5x)$ $H(3x,3x)$$I(1.5x,-1.2x)$

$$\Delta GHI=$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1.2x & 3x & 1.5x & -1.2x\\ 1.5x & 3x & -1.2x & 1.5x\end{vmatrix}\right|=\frac{251}{10}x^2$$

$$\Delta GHI=\frac{251}{10}x^2$$

3.等腰直角三角形外接正方形取外、內、重心



(圖 58)

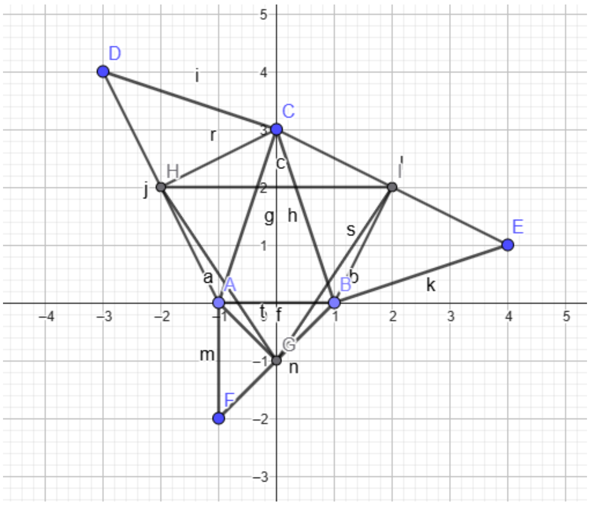
利用座標化 $A(0,x)$ $B(0,0)$ $C(x,0)$

$J(x,x)$ $K(-0.5x,0.5x)$ $L(0.5x,-0.5x)$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x & -0.5x & 0.5\,x & x\\ x & 0.5x & -0.5\,x & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{3}{4}x^2$$

$$\Delta JKL=\frac{3}{4}x^2$$

4.等腰三角形外接等腰直角三角形取外心



(圖 59)

$$\overline{GH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AG}^2 - 2 \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AG} \cdot \cos(90+67.5)°$$

$$= \left(\frac{7-2\sqrt{2}}{2}\right)x^2 = \overline{IG}^2$$

$$\overline{IH}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CI}^2 - 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{CH} \cdot \cos 135°$$

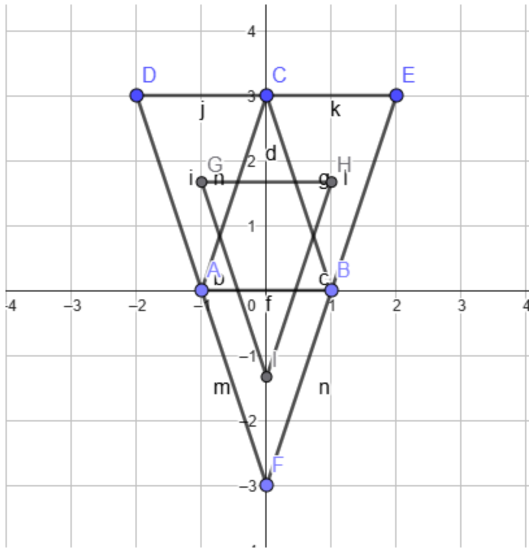
$$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)x^2$$

ΔGHI為等腰三角形且

$$\Delta GHI = \frac{1}{2} \cdot \overline{GI} \cdot \overline{GH} \cdot \sin(90-2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\overline{GI}^2 \cos 2\theta = \frac{(7-2\sqrt{2})}{4}x^2$$

5.等腰三角形外接等腰三角形取外心



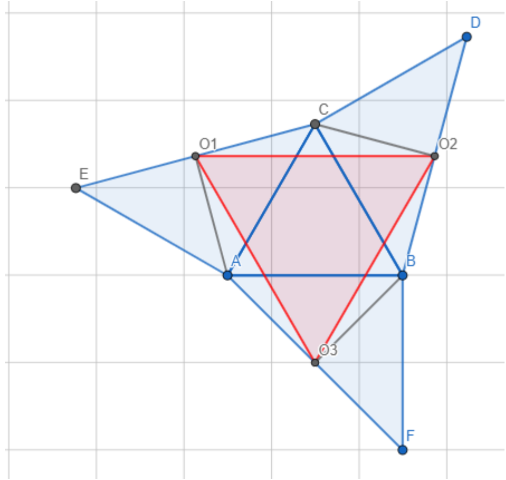
(圖 60)

利用座標化 $G(-x, 1.7x)$ $H(x, 1.7x)$ $I(0, -1.3x)$

$$\Delta GHI = 2x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

(二)第二類的群心三角形為正三角形

1.正三角形外接等腰直角三角形取外心



(圖 61)

$$\overline{O_2O_3}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos 150^\circ$$

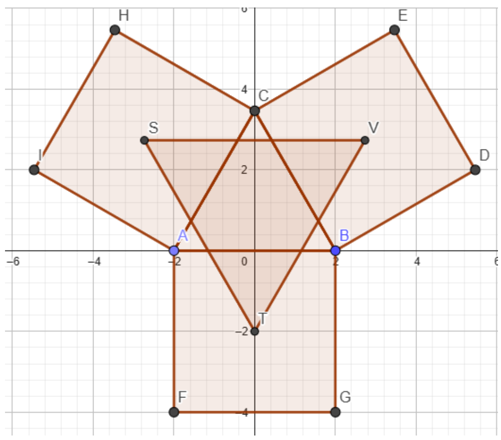
$$=x^2-x^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)x^2\Rightarrow\overline{O_1O_3}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}x$$

同理可證$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_3}=\overline{O_1O_2}$

$$\Delta O_1O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})}{2}x^2=\frac{(2\sqrt{3}+3)}{8}x^2$$

2.正三角形外接正方形內、外、重心



(圖 62)

利用座標化與餘弦定理

$A(-x,0)$、$B(x,0)$、$C(0,\sqrt{3}x)$且$\angle SCV=150^\circ$

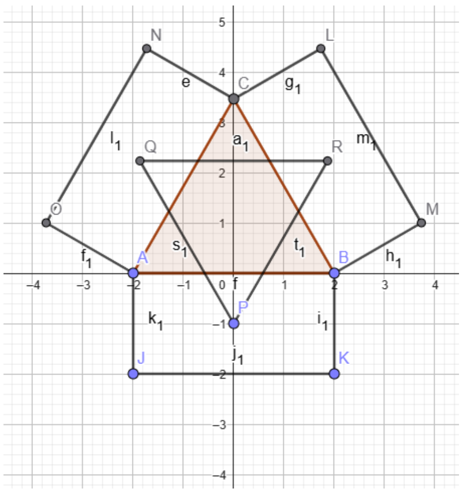
$$\overline{SV}^2=\overline{SC}^2+\overline{CV}^2-2\cdot\overline{SC}\cdot\overline{SV}\cdot\cos150^\circ$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)x^2=\overline{ST}^2=\overline{TV}^2$$

$$\Delta STV\sim\Delta ABC(SSS)$$

$$\Delta STV=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{SV}^2=(\frac{2\sqrt{3}+3}{2})x^2$$

3.正三角形外接長方形取外、重心



(圖 63)

利用座標化 $\overline{AB} = 4x$ $\overline{CQ}$=$\sqrt{5}x$ $\overline{CR}$=$\sqrt{5}x$

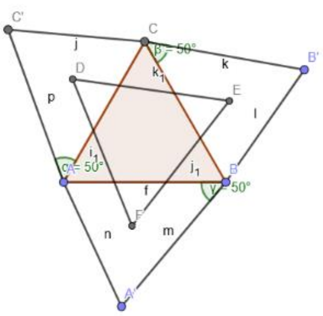
利用餘弦定理

$\overline{QR}^2 = (\sqrt{5}x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 - 2 \cdot \sqrt{5}x \cdot \sqrt{5}x \cdot$

cos 120°= $(\sqrt{10+5\sqrt{3}})x$

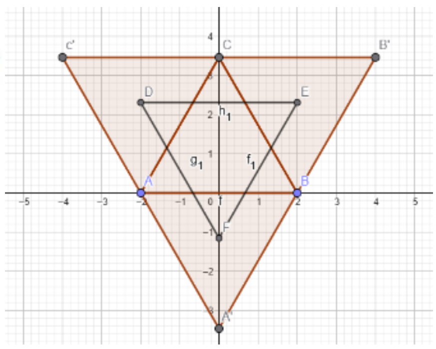
ΔORP面積=$(\sqrt{10+5\sqrt{3}}x)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (\frac{10\sqrt{3}+15}{4})x^2$

4.正三角形外接特殊等腰三角形頂角為50°、60°、70°取其內心



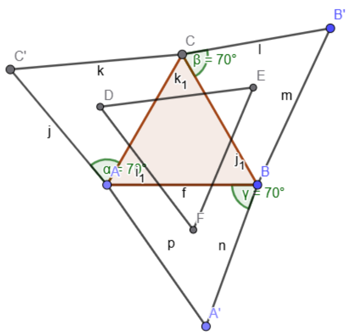
當頂角小於60°時 R 小於 1

(圖 64)



當頂角等於60°時 R 等於 1

(圖 65)



當頂角大於60°時 R 大於 1

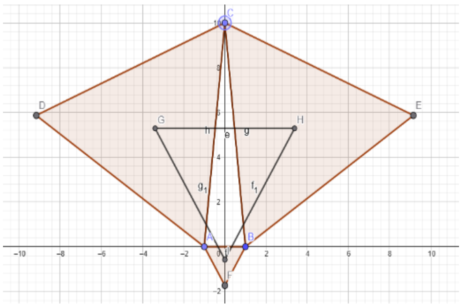
(圖 66)

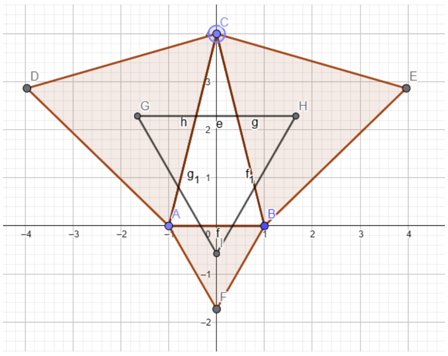
(1)當頂角小於60°時 R 小於 1　ΔDEF~ΔABC(AA 相似)

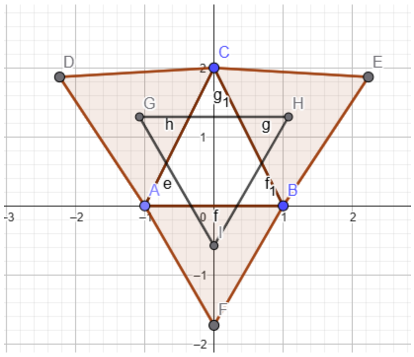
(2)當頂角等於60°時 R 等於 1　ΔDEF ≅ ΔABC(SSS 全等)

(3)當頂角大於60°時 R 大於 1　ΔDEF~ΔABC(AA 相似)

5.等腰三角形外接正三角形取外、內、重心(C 點為動點)







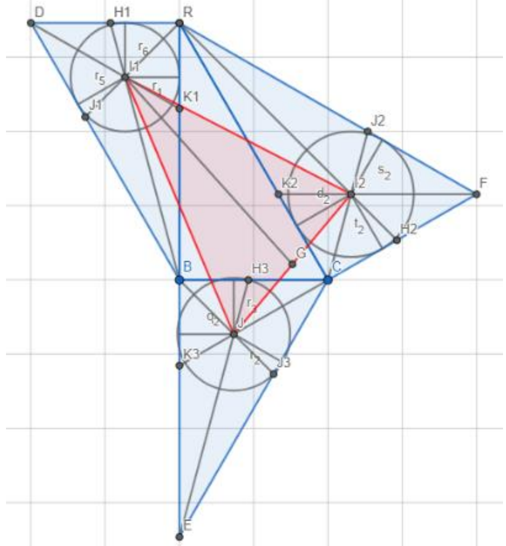
(圖 67) (圖 68) (圖 69)

利用座標化 G$(-x,\ x)$ H(x,x) I$(0,x-\sqrt{3}x)$其中 C 點為動點，

無論初始ΔABC 大小如何改變則$\Delta\mathrm{GHI}=(2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}x^2$

(三)第三類的群心三角形為任意三角形

1.30°、60°、90°三角形外接30°、60°、90°三角形取內心



(圖 70)

$\overline{\mathrm{I_1J}}^2=\overline{\mathrm{BI_1}}^2+\overline{\mathrm{BJ}}^2-2\times\overline{\mathrm{BI_1}}\times\overline{\mathrm{BJ}}\times\cos150^\circ=$

$(\frac{8-2\sqrt{3}}{3})\mathrm{x}^2=\overline{\mathrm{I_1I_2}}^2$

$$\overline{\mathrm{I_2J}}^2=\overline{\mathrm{CI_2}}^2+\overline{\mathrm{CJ}}^2-2\times\overline{\mathrm{CI_2}}\times\overline{\mathrm{CJ}}\times\cos135^\circ$$

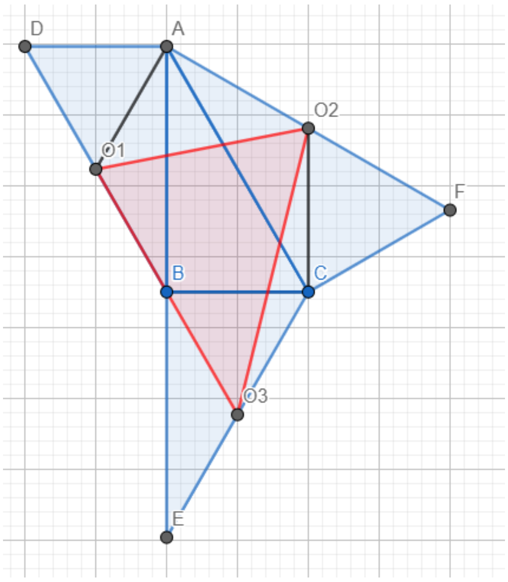
$$=(\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}+16}{6})x^2$$

$\Delta\mathrm{I_1I_2J}$為等腰三角形且

由海龍公式得到

$$\Delta\mathrm{I_1I_2J}=(\frac{2\sqrt{23}+6\sqrt{6}-6\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{46\sqrt{3}}}{12})x^2$$

2. 30°、60°、90°三角形外接30°、60°、90°三角形取其外心



(圖 71)

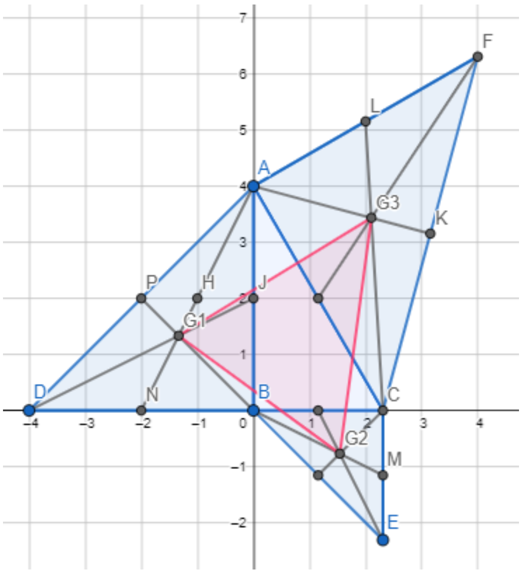
利用座標化A$(0x,\sqrt{3}x)$ B$(0,0)$ C$(x,0)$

$$O_1\left(-0.5x,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\ O_2(x,x)\ O_3\left(0.5x,\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\Delta O_1O_2O_3=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-0.5x & x & 0.5x & -0.5x\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x & x-\frac{\sqrt{3}}{2}x & \frac{\sqrt{3}}{2}x\end{vmatrix}\right|=$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)x^2$$

3. 30°、60°、90°三角形外接等腰直角三角形取其重心



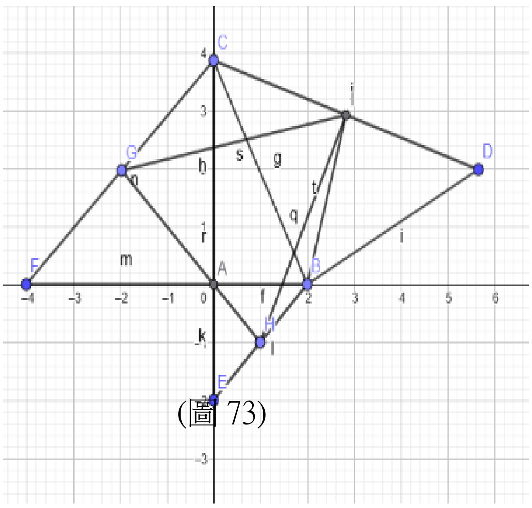
(圖 72)

$$G_1(-1.2x,1.3x)\ \ G_3(2x,3.1x)\ G_2(1.3x,-0.7x)$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1.2x & 2x & 1.3x & -1.2x\\ 1.3x & 3.1x & -0.7x & 1.3x\end{vmatrix}\right|=\frac{247}{40}x^2$$

$$\triangle G_1G_2G_3=\frac{247}{40}x^2$$

4. 30°、60°、90°三角形外接等腰直角三角形取其內心

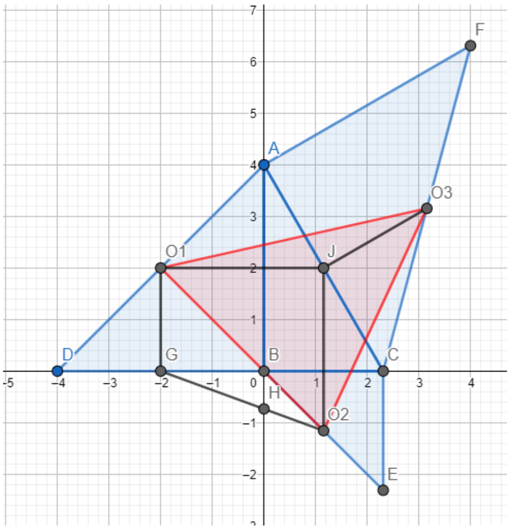


(圖 73)

設I$\left(\frac{14}{5}x,\frac{29}{10}x\right)$ H$(x,-x)$ G$(-2x,2x)$

$$\triangle HIG=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{14}{5}x & x & -2x & \frac{14}{5}x\\ \frac{29}{10}x & -x & 2x & \frac{29}{10}x\end{vmatrix}\right|=\frac{57}{20}x^2$$

5. 30°、60°、90°三角形外接等腰直角三角形取外心



(圖 74)

$\overline{GO_2}^2=(\frac{5+2\sqrt{3}}{4})x^2$ $\overline{GH_2}^2=\left(\frac{12-3\sqrt{3}}{8}\right)x^2$

$\overline{BH}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)x$

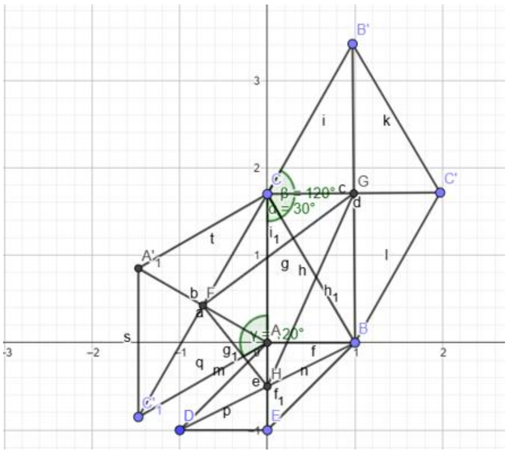
$\Delta O_1JO_3=\frac{1}{2}x\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)x\sin 150^{\circ}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{8}\right)x^2$

$\Delta O_3JO_2=\frac{1}{2}x(\frac{\sqrt{3}+1}{2})x\sin 120^{\circ}=(\frac{3+\sqrt{3}}{8})x^2$

$\Delta O_1JO_2=\frac{1}{2}\left[(\frac{\sqrt{3}+1}{2})x\cdot(\frac{\sqrt{3}+1}{2})x\right]=(\frac{2+\sqrt{3}}{4})x^2$

$\Delta O_1O_2O_3=\Delta O_1JO_3+\Delta O_3JO_2+\Delta O_1JO_2=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})x^2$

6. 30°、60°、90°直角三角形外接平行四邊形取外、重心



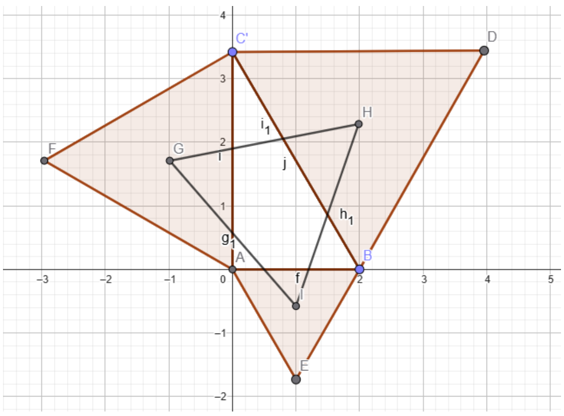
(圖 75)

利用座標化 A(0,0) B(x, 0) C(0, $\sqrt{3}x$)

F($\frac{3}{5}x$, $\frac{3}{5}x$) G(x, $\sqrt{3}x$) H(0-, $\frac{1}{2}x$)

$\triangle FHG=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & x & \frac{3}{5}x & x \\ 0 & \sqrt{3}x & \frac{3}{5}x & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{5}x^2$

7. 30°、60°、90°直角三角形接正三角形取內、重、外心



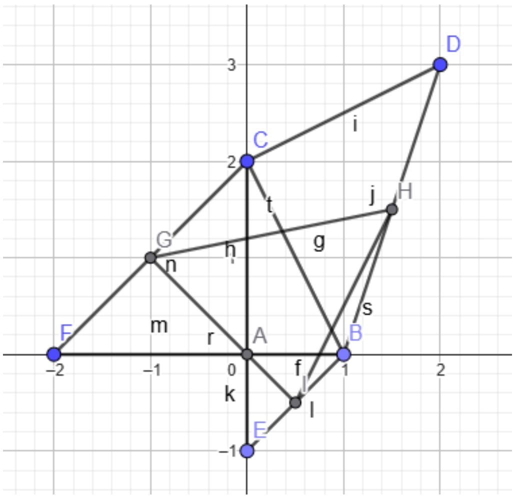
(圖 76)

利用座標化 A(0,0) B(0, x) C(x, 0)

H($\frac{7}{6}x$, $\frac{7}{6}x$) G ($-x$, $\frac{5}{3}x$) I(x, $\frac{1}{2}x$)

$\triangle GHI=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{7}{6}x & -x & x & \frac{7}{6}x \\ \frac{7}{6}x & \frac{5}{3}x & -\frac{1}{2}x & \frac{7}{6}x \end{vmatrix}\right|=\frac{133}{72}x^2$

8. 30°、60°、90°直角三角形外接等腰直角三角形取外心



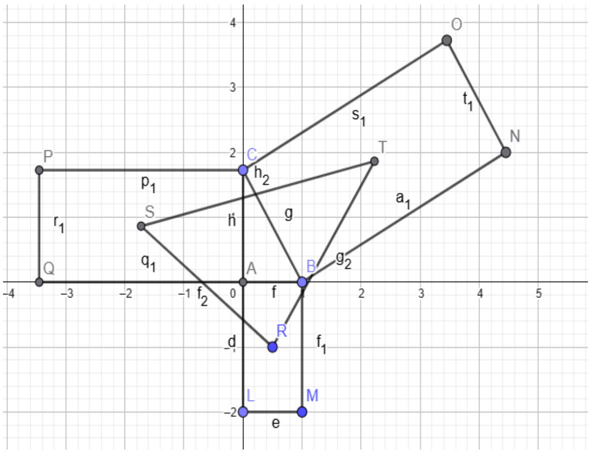
(圖 77)

利用座標化 A(0,0)B(0, x)C(x, 0)

G($-x, x$) I($\frac{1}{2}x, \frac{-1}{2}x$) H($\frac{7}{5}x, \frac{7}{5}x$)

$\triangle$ GHI $= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2}x & \frac{7}{5}x & -x \\ x & \frac{-1}{2}x & \frac{7}{5}x & x \end{vmatrix}\right| = \frac{21}{5}x^2$

9. 30°、60°、90°直角三角形外接30°、60°、90°長方形取外心、重心



(圖 78)

利用座標化 A(0,0) B(x, 0) C(0, $\frac{\sqrt{3}}{2}x$)

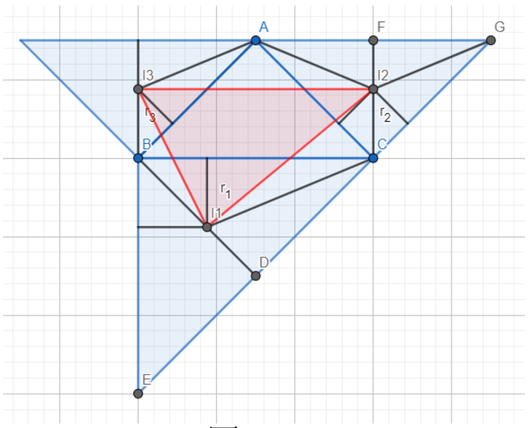
A'_1 ($\frac{1}{2}x, \frac{-\sqrt{3}}{2}x$)、$C'_1$ ($\frac{-3}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}x$)

H ($\frac{11}{5}x, \frac{9}{5}x$)

$\triangle A_1C_1H =$

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x & \frac{-3}{2}x & \frac{11}{5}x & \frac{1}{2}x \\ \frac{-\sqrt{3}}{2}x & \frac{\sqrt{3}}{2}x & \frac{9}{5}x & \frac{-\sqrt{3}}{2}x \end{vmatrix}\right| = (\frac{5\sqrt{3}+36}{10})x^2$

10. 等腰直角三角形外接等腰直角三角形取其內心



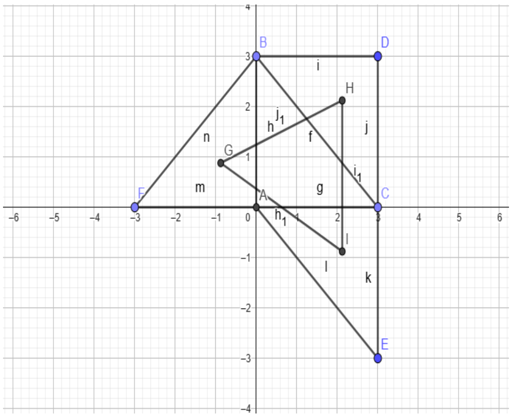
(圖 79)

利用座標化 設 A($0.5x, x$) $B(0,0)$ $C(2x, 0)$

$I_3(0.25x, 0.5x)$ $I_2(2x, 0.5x)$ $I_1(0.25x, -0.25x)$

$\triangle I_1I_2I_3 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{1}{4}x & 2x & \frac{1}{4}x & \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x & \frac{-1}{4}x & \frac{1}{2}x \end{vmatrix}\right| = \frac{21}{32}x^2$

11. 等腰直角三角形接等腰直角三角形取內心



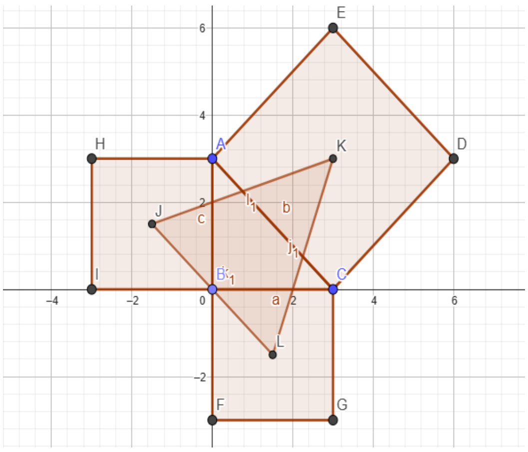
利用座標化 A(0,0) B$(0,x)$ C$(x,0)$ D(x,x)

E$(x,-x)$ F$(-x,0)$ G$(\frac{-1}{3}x,\frac{1}{3}x)$ H$(\frac{2}{3}x,\frac{2}{3}x)$ I$(\frac{2}{3}x,\frac{-1}{3}x)$

$$\Delta GHI=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}x & \frac{2}{3}x & \frac{2}{3}x & -\frac{1}{3}x \\ \frac{1}{3}x & \frac{2}{3}x & \frac{-1}{3}x & \frac{1}{3}x \end{vmatrix}\right|=\frac{11}{18}x^2$$

(圖 80)

12. 等腰直角三角形外接正方形取外心、內心及重心



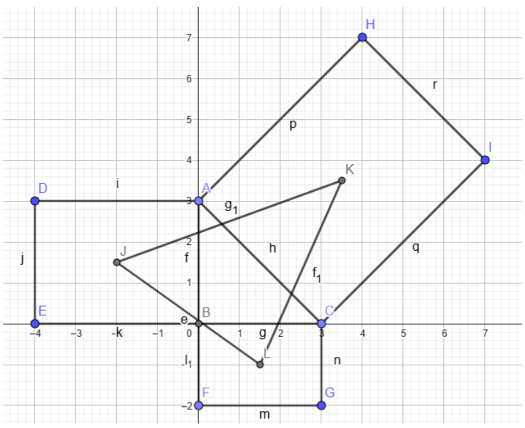
利用座標化 J$(-0.5x,0.5x)$K(x,x)L$(0.5x,-0.5x)$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{2}x\,\frac{(-\sqrt{2}+\sqrt{10})}{2}x\,\frac{\sqrt{10}}{2}x\,\frac{\sqrt{10}}{2}x}=(\sqrt{5}x)^2$$

$\triangle JKL=\sqrt{5}x^2$

(圖 81)

13. 等腰直角三角形接長方形外、重心



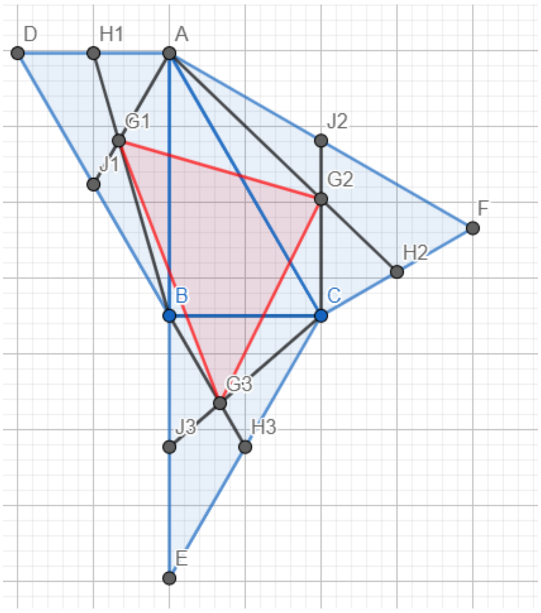
利用座標化J$(-1.5x,1.5x)$K$(3.5x,3.5x)$L$(1.5x,-x)$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1.5x & 3.5x & 1.5x & -1.5x \\ 1.5x & 3.5x & -x & 1.5x \end{vmatrix}\right|=10x^2$$

$\Delta AKL = 10x^2$

(圖 82)

14. 正三角形外接30°、60°、90°三角形取其重心



(圖 83)

$$\overline{G_1G_2}^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}x$$

$$\cdot\cos(135+\angle G_2BC)^\circ$$

$$=\left(\frac{11+6\sqrt{3}}{9}\right)x^2$$

$$\overline{G_1G_3}^2=\left(\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}x$$

$$\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}x\cdot\cos(75+\angle G_1AB)^\circ$$

$$=\left(\frac{17+6\sqrt{3}}{9}\right)x^2$$

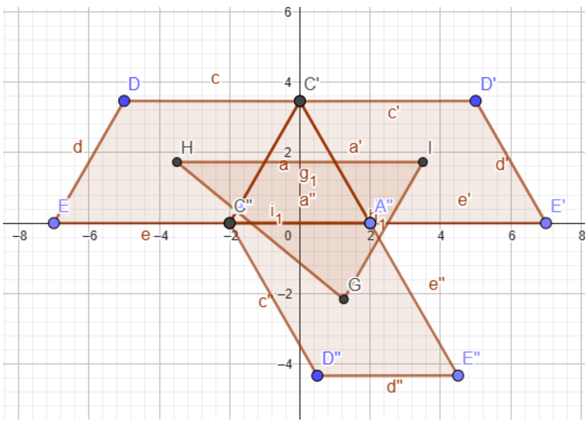
$$\overline{G_2G_3}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}x$$

$$\cdot\cos(105+\angle ACG_3)^\circ$$

$$=\frac{4(1+10\sqrt{6})}{9}x^2$$

$$\Delta G_1G_2G_3=\frac{61}{50}x^2$$

15.正三角形外接平行四邊形取其重心



(圖 84)

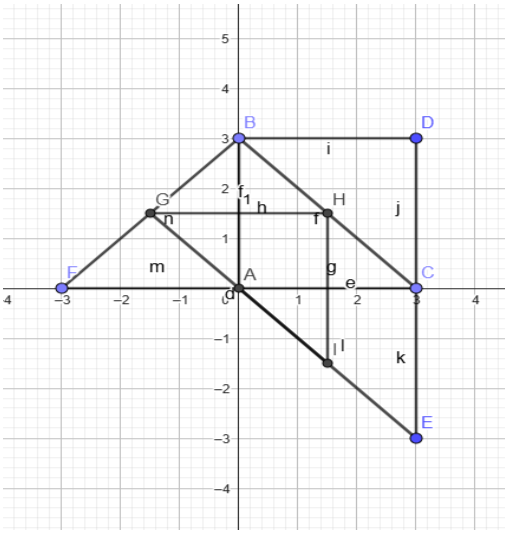
利用座標化C”$(-2x,0)$　C”$(2x,0)$　C’$(0,2\sqrt{3}x)$

H$(-3.5x,\sqrt{3}x)$ I$(3.5x,\sqrt{3}x)$G$(-0.5x,\sqrt{3}x-4x)$

$$\triangle\ \mathrm{GHI}=\frac{7x\cdot 4x}{2}=14x^2$$

(四)第 4 類的群心三角形為等腰直角三角形

1.等腰直角三角形接等腰直角三角形外心



(圖 85)

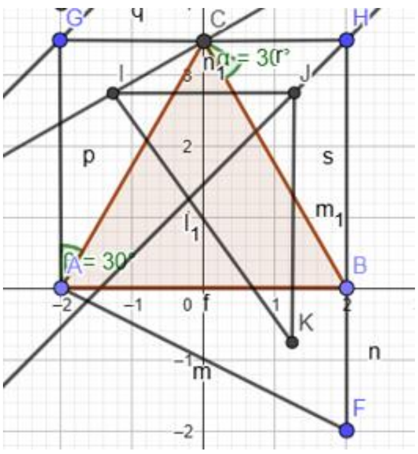
利用座標化 A$(0,0)$ B$(0,x)$ C$(x,0)$

G$(-\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}x)$ H$(\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}x)$ I$(-x,0)$

$\overline{\mathrm{GH}}=\overline{\mathrm{HI}}=x \quad \Delta\mathrm{GHI}=\frac{x\times x}{2}=\frac{x^2}{2}$

(五)第 5 類的群心三角形為直角三角形

1.正三角形外接 30°、60°、90°三角形取內心



(圖 86)

利用座標化

I$(-1.2x, 2.8x)$J$(1.2x, 2.8x)$K$(1.2x, -0.8x)$

$$\Delta\mathrm{JKL}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1.2x & 1.2\,x & 1.2x & -1.2x \\ 2.8x & 2.8\,x & -0.8x & 2.8x \end{vmatrix}\right|$$

$$\Delta\mathrm{JKL}=\frac{108}{25}x^2$$

柒、討論

我們針對目前的研究內容中，幾項具有規律性質的結果進行討論:

(一) 利用目前的發現，利用幾何驗證探討初始三角形與**群心三角形**全等或是相似

(二) 利用目前的發現，利用觀察計算探討初始三角形與**群心三角形**之面積之關

捌、結論

針對目前的研究內容中，**群心三角形**可分為四類的結果進行具規律性質之討論。

一、我們的研究結果整理如下

（一）第一類：初始三角形為正三角形

	外接圖形	**所取三心**	**群心三角形形狀**	**面積**
1.	正方形	外心、內心、重心	正三角形	$(\frac{2\sqrt{3}+3}{2})x^2$
2.	等腰三角形	重心	正三角形	$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
3.	等腰直角三角形	重心	正三角形	$\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12}\right)x^2$
4.	等腰直角三角形	外心	正三角形	$\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{8}\right)x^2$
5.	30°、60°、90°三角形	外心	正三角形	$\frac{2}{3}x^2$
6.	30°、60°、90°三角形	內心	30°60°90°三角形	$\frac{108}{25}x^2$

（二）第二類：初始三角形為等腰三角形

	外接圖形	所取三心	群心三角形形狀	面積
1.	等腰三角形	重心	正三角形	$3x^2$
2.	等腰直角三角形	外心	等腰三角形	$\left(\frac{7-2\sqrt{2}}{4}\right)x^2$
3.	30°、60°、90°三角形	外心	正三角形	$\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12}\right)x^2$
4.	正三角形	外、內、重心	正三角形	$\frac{36\sqrt{3}}{25}x^2$
5.	等腰三角形	外心	等腰三角形	$\frac{18}{5}x^2$
6.	正三角形	外、內、重心	正三角形	$\sqrt{3}x^2$

（三）第三類：初始三角形為等腰直角三角形

	外接圖形	所取三心	群心三角形形狀	面積
1.	正三角形	外、重、內心	正三角形	$\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12}\right)x^2$
2.	等腰三角形	重心	等腰三角形	$\frac{7}{4}x^2$
3.	等腰直角三角形	重心	任意三角形	$\frac{18}{11}x^2$
4.	等腰直角三角形	外心	等腰三角形	$\frac{1}{2}x^2$
5.	30°、60°、90°三角形	外心	正三角形	$\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12}\right)x^2$
6.	平行四邊形	外心、重心	任意三角形	$\frac{\sqrt{3}}{5}\boldsymbol{x}^2$
7.	長方形	外心、重心	等腰三角形	$10x^2$
8.	等腰三角形	重心	等腰三角形	$\frac{17}{2}x^2$

（四）第四類：初始三角形為 30°、60°、90°直角三角形

外接圖形	所取三心	群心三角形形狀	面積
1. 正三角形	重心	正三角形	$\frac{133}{72}x^2$
2. 等腰直角三角形	外心	任意三角形	$\frac{21}{5}x^2$
3. 長方形（30°60°90°）	重心	任意三角形	$(\frac{5\sqrt{3}+36}{10})x^2$
4. 等腰三角形	重心	任意三角形	$\frac{6}{5}x^2$
5. 正方形	外、內、重心	任意三角形	$\frac{27}{32}x^2$
6.等腰直角三角形	外心	任意三角形	$\frac{57}{20}x^2$

2.群心三角形面積與初始三角形面積之比值

(1)表格一：R>1

等腰直角三角形外接等腰直角三角形取其外心	30°60°90°三角形外接30°60°90°三角形取內心	等腰三角形外接等腰直角三角形取外心
正三角形外接等腰直角三角形取其外心	正三角形外接正方形取其內心、外心、重心	正三角形外接平行四邊形取其重心
正三角形外接菱形取內心、重心	等腰直角三角形外接等腰直角三角形取其重心	直角三角形外接長方形取其外心和重心
等腰直角三角形接長方形取其外,重心	等腰直角三角形接等腰直角三角形內心	等腰直角三角形外接正方形取其外、內、重心
30°60°90°三角形外接外接等腰三角形重心	直角三角形外接正方形取內心、外心、重心	30°60°90°三角形外接等腰三角形取重心
正三角形外接等腰三角形頂角為70°取其內心	直角三角形接平行四邊形取其內心	30°60°90°直角三角形外接等腰直角三角形取外心

(2)表格二：R=1

正三角形外接長方形、外心、重心	等腰直角三角形接等腰直角三角形取其外心	正三角形外接等腰三角形取其內心
正三角形外 30°60°90°三角形取其內心	等腰三角形外接等腰三角形取外心	正三角形外接等腰三角形頂角為60°取其內心

(3)表格三：R<1

等腰直角三角形外接正三角形取內心、外心、重心	直角三角形外接正方形取其外心	等腰三角形外接正三角形並取內心、外心、重心
30°60°90°三角形外接正方形並取內心、外心、重心	30°60°90°三角形外接正方形並取內心、外心、重心	正三角形外接等腰三角形頂角為50°取其內心

玖、未來研究與實際應用

（一）未來研究方向

本次研究基礎上，未來可以進一步延伸探討其他幾何中心的位置與性質，例如垂心與傍心：

1.垂心是三角形三條高（從頂點垂直於對邊的線段）的交點。

2.傍心則是將三角形的邊延長後，所形成的三個外接圓的圓心，各對應一個傍心。

3.除了認識這些「心」的基本定義，我們還可以思考它們彼此之間是否存在某些關聯。例如：內心與外心分別對應內切圓與外接圓，而重心與垂心在某些特別的三角形中，會出現固定比例或對稱的關係。

4.未來我們也可以嘗試把三角形或四邊形放入像是正方形這類對稱圖形中觀察，當圖形越對稱，這些「心」會不會出現在更整齊的位置，甚至是否有可能重合在同一點。這樣的觀察可以幫助我們更深入了解幾何圖形中的規律。

5.未來我們的研究方向還可以從平面圖形延伸到立體圖形，像是稜柱或錐體等。透過畫出切面圖或展開圖，我們可以觀察立體圖形中這些「心」的位置是否改變。此外，當圖形進行移動、縮放或旋轉時，也可以觀察這些幾何中心如何跟著變化，進一步發現其中的數學規律。

(二)表格四：實際應用

應用場景	數學模型	目的
籃球三角戰術	外心等距性質 + 三角形傳導結構	提高命中率與球權流動
足球射門	射門角度分析(30°~60°)	尋找射門最佳角度
吊扇葉片設計	傾角 + 長度 +形狀與葉片數量	優化風效與能效
建築地基(吳六合建築師)	柱中柱比值	增加其耐震穩固性

拾、參考資料及其他

[1] 拿破崙定理(Napoleon’ sTheorem)http://www.mathsgreat.com/geomth/geomth102.pdf

[2] 利用行列式計算多邊形面積
https://ccjou.wordpress.com/2012/05/09/%E5%88%A9%E7%94%A8%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F%E8%A8%88%E7%AE%97%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E9%9D%A2%E7%A9%8D/

[3] 沈志強、鄒耀偉、徐捷、黃胤維、林奕均、黃昱軒(2009)

面面俱到—n 邊形之面積最大、極小值。中華民國第 49 屆中小學科展國中數學科作品

[4] 圖 1 至圖 86、表格一至表格四作者自行繪製

【評語】030412

本作品以拿破崙定理為基礎進行推廣，展現了卓越的研究企圖心與執行力 。作者們創新地定義了「群心三角形」這一概念，即由初始三角形外接特殊圖形的三心（外心、內心、重心）所構成的新三角形 。研究過程系統性地探討了正三角形、等腰三角形、直角三角形等多種初始模型，並結合正方形、菱形等不同外接圖形進行分析 。作者們熟練地運用 GeoGebra 進行動態模擬與可視化，並透過座標化、三角函數、行列式等多樣的數學工具，完成了大量複雜的面積計算，其過程嚴謹，成果豐碩。

此研究已累積了豐富的計算數據，為更高層次的理論歸納奠定了堅實基礎。後續研究可從個案計算結果，進一步提煉出通用法則或猜。對於特殊情況，可深入挖掘其背後是否隱含著全等等幾何意義，此方向在報告中已有初步發現 。此外，研究中一個極具價值的發現是，在特定動態變化下（如移動等腰三角形頂點），群心三角形的面積能維持不變 。若能將此類「不變量」的探討作為研究重點並加以闡釋，將能大幅提升作品的學術深度與原創性。

作品海報

「心」之所「像」—
萬眾出「群心」

壹、摘要

本研究以拿破崙定理為出發點，探討特殊三角形與其所構成的外接特殊圖形之間的幾何對應關係。我們關注三角形的外心、內心與重心所構成的「群心三角形」並進行其分析。

過程中，我們使用GGB進行圖形建構，建立不同類型的特殊三角形與四邊形所構成群心三角形透過觀察與計算，分析兩個三角形之間是否具有關係並比較其面積比值。進一步地，探討旋轉角度對結果的影響，當外接的圖形發生變化時，群心三角形的結構性質亦會產生對應變化，並成功歸納出具規律性的關係式。

本研究加深了我對三角形幾何的理解，也建立群心三角形在幾何理論探討中的新視角。此成果可作為幾何圖形研究的新起點，有潛力應用於生活上為未來幾何學的研究與教學，提供了豐富的延伸空間。

貳、研究背景

本研究以拿破崙定理（Napoleon’s Theorem）為核心，探討在特殊三角形與特殊四邊形的幾何結構和推廣應用。根據拿破崙定理，若在任一三角形的三邊向外（或向內）構造等邊三角形，則這三個等邊三角形的重心所構成的群心三角形亦為等邊三角形。本研究嘗試將該性質延伸至不同類型的三角形與外接圖形，進一步觀察其對幾何性質的影響。

在實作上，我們運用GeoGebra進行動態幾何圖形模擬，以觀察在不同條件下，重心、內心、外心於變形過程中的相對位置關係。為使實驗具可塑性，將初始三角形固定為：

一、正三角形

二、等腰三角形

三、等腰直角三角形

四、30°、60°、90°直角三角形

參、研究目的

探討利用以GeoGebra構作特殊三角形（正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、30°、60°、90° 三角形）為基礎，將其三邊外接相同或對應的特殊三角形，再取每個外接三角形的三心（重心、內心、外心），並將三心連結形成新的三角形，稱為「群心三角形」。研究目的為比較此群心三角形與初始三角形之幾何形狀關係與面積關係，並歸納其是否存在定值或一致的幾何性質。

在幾何性質方面，探討重心、內心、外心所構成之群心三角形是否與初始三角形相似、全等或有特殊形狀，並判斷是否與初始三角形為相同類型之三角形或為任意三角形。在面積部分，分別計算初始三角形面積S_1與群心三角形面積S_2，並進一步求出面積比值$R = S_2/S_1$，探討其值關係。面積計算方法包括：

一、正弦面積公式

二、海龍公式

三、行列式計算多邊形面積

四、餘弦定理

肆、研究過程與方法

研究方法：

一、利用正三角形外接正方形三心構作

(一) 正三角形ABC外接正方形之重心(圖5)

(二) 等腰直角三角形ABC外接正方形之內心(圖6)

(三) 30°、60°、90°三角形ABC外接正方形之外心(圖7)

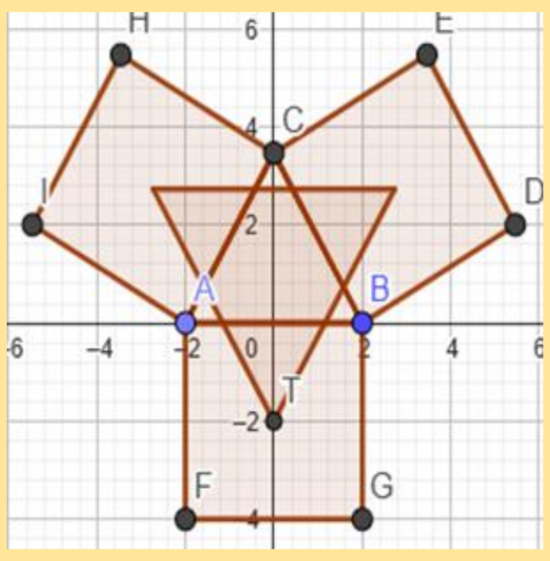


圖5-取其重心

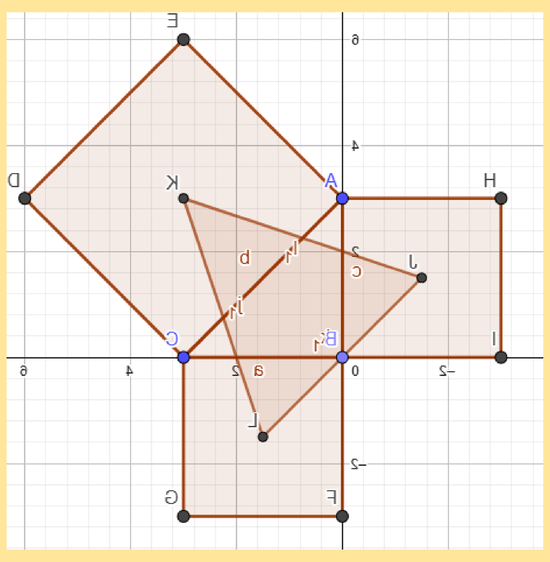


圖6-取其內心

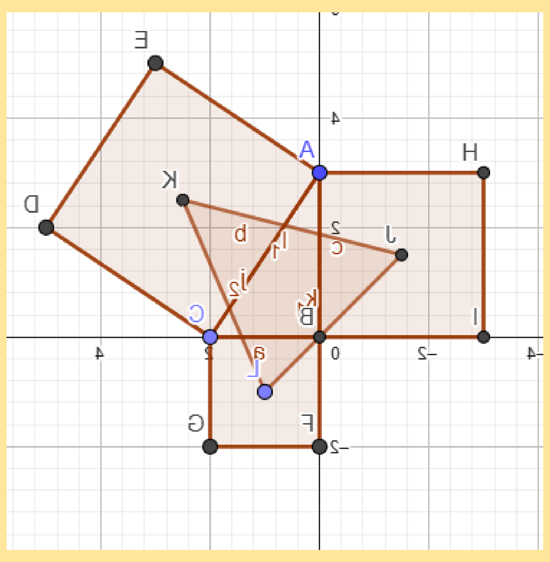


圖7-取其外心

二、名詞定義

(一) 群心三角形：一個特殊三角形（正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、30°、60°、90°三角形），再於其每一邊外接一個指定特殊圖形（正三角形、正方形、長方形、菱形、平行四邊形），並分別作出這些外接圖形的三心（外心、內心以及重心），最後將三個心連線所形成的群心三角形，即為該初始三角形對應的「群心三角形」。

(二) 控制變因：為了簡化比較與計算，我們將初始三角形與外接圖形邊長統一

1.初始為正三角形：邊長設為 x, x, x

2.初始為等腰三角形：與外接等腰三角形腰長相同

3.初始為等腰直角三角形：邊長為 $x, x, \sqrt{2}x$

4.初始為30°、60°、90°直角三角形：邊長為 $x, \sqrt{3}x, 2x$

伍、研究結果

一、透過三角形全等性質與三角型相似性質，探討群心三角形與初始三角形是否全等或相似

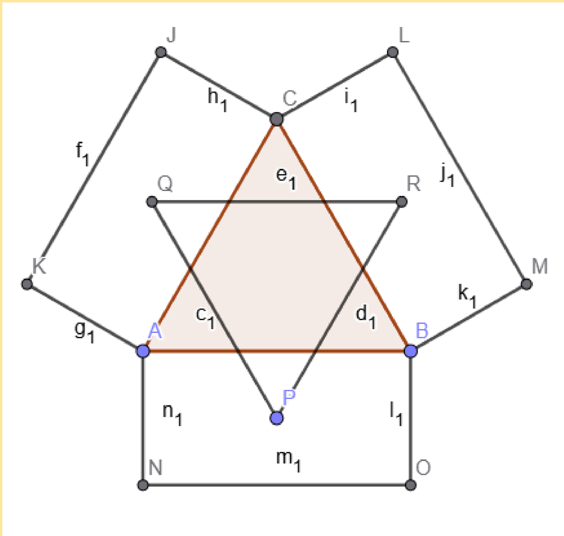
(一)利用餘弦定理算出三心所形成之三角形的邊長，在計算期間我們可以發現群心三角形可以歸納出正三角形、等腰三角形、任意三角形、等腰直角三角形與直角三角形五種。

(二)我們利用海龍公式、$\frac{1}{2}a\times b\sin\theta$以及行列式值等面積工具試著求出群心三角形面積，得出來的面積甚至會有相同之數值。

二、以下是關於群心三角形的計算與證明：

(一)外心

1.正三角形外接長方形取外、重心



(圖63)

利用座標化$\overline{AB}=4x$，$\overline{CQ}=\sqrt{5}x$， $\overline{CR}=\sqrt{5}x$

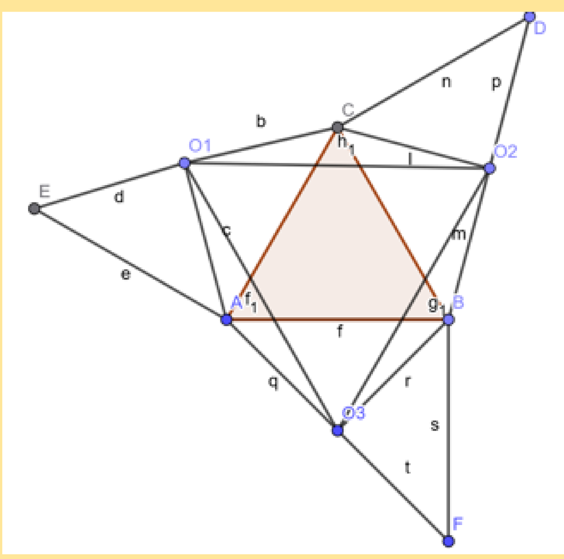
利用餘弦定理

$$\overline{QR}^2=(\sqrt{5}x)^2+(\sqrt{5}x)^2-2\cdot\sqrt{5}x\cdot\sqrt{5}x\cdot\cos 120°=\ (\sqrt{10+5\sqrt{3}})x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{10+5\sqrt{3}}x)^2=(\frac{10\sqrt{3}+15}{4})x^2$$

$$\Delta\mathrm{ORP}=(\frac{10\sqrt{3}+15}{4})x^2$$

2.正三角形外接等腰直角三角形取外心



(圖61)

$$\overline{O_2O_3}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos 150°$$

$$=x^2-x^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)x^2\Rightarrow\overline{O_1O_3}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}x$$

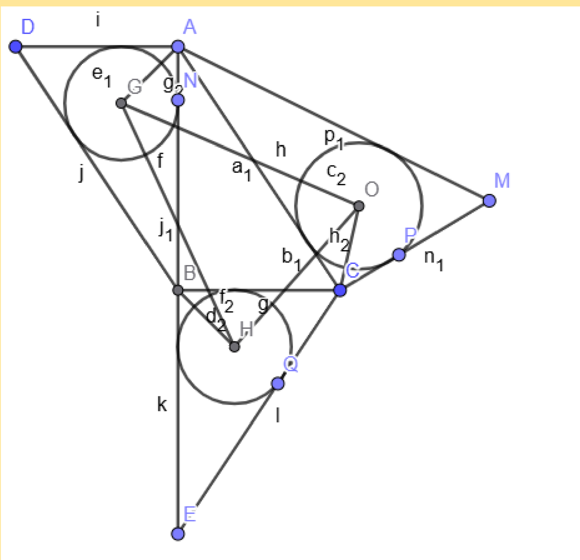
同理可證$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_3}=\overline{O_1O_2}$

$$\Delta O_1O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})}{2}x^2=\frac{(2\sqrt{3}+3)}{8}x^2$$

$$\Delta O_1O_2O_3=\frac{(2\sqrt{3}+3)}{8}x^2$$

(二)內心

1.直角三角形外接直角三角形取內心



(圖70)

$$\overline{GH}^2=\overline{BG}^2+\overline{BH}^2-2\times\overline{BG}\times\overline{BH}\times\cos 150^{\circ}=(\frac{8-2\sqrt{3}}{3})x^2=\overline{GO}^2$$

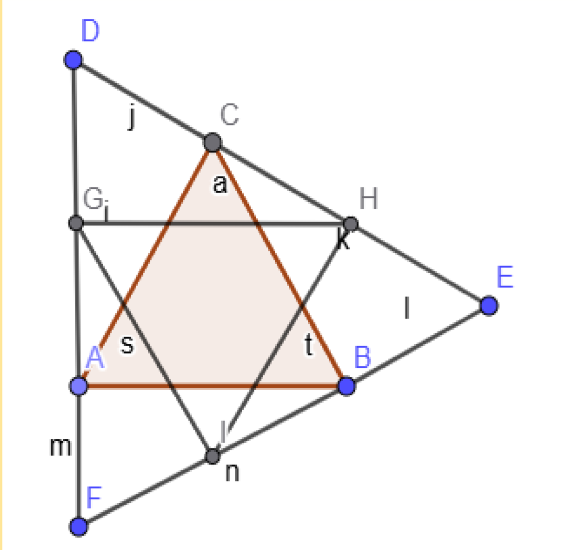
$$\overline{OJ}^2=\overline{CO}^2+\overline{CH}^2-2\times\overline{CO}\times\overline{CH}\times\cos 135^{\circ}=\left(\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}+16}{6}\right)x^2$$

⇒ ΔGOH為等腰三角形

利用海龍公式

$$\Delta\mathrm{GOH}=(\frac{2\sqrt{23}+6\sqrt{6}-6\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{46\sqrt{3}}}{12})x^2$$

2.正三角形外接直角三角形取內心



(圖87)

$$\overline{DB}=\frac{\sqrt{3}}{3}x，\overline{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x，\frac{\sqrt{3}}{3}xr\cdot\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}xr\cdot\frac{1}{2}+\frac{xr}{2}，\mathrm{r}=\frac{(3-\sqrt{3})}{6}x$$

$$\overline{IB}=\sqrt{2}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})}{6}x=\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{6}x=\overline{CI_3}=\overline{AI_2}，\overline{AG}=x-\frac{(3-\sqrt{3})}{6}x=\frac{(3+\sqrt{3})}{6}x$$

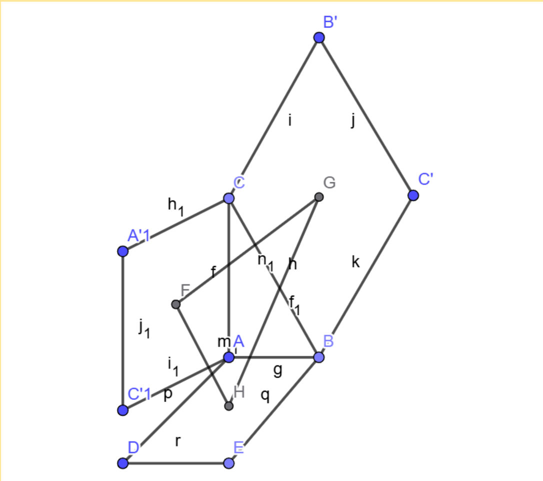
$$\overline{AI}^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}x\right)^2=\frac{2}{3}x^2\Rightarrow\overline{AI}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\overline{BI_3}=\overline{CI_2}$$

$$\overline{IK}^2=\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{6}x\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\cos 150°=x^2=\overline{JK}^2=\overline{IJ}^2$$

$$\Delta\mathrm{IJK}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

(三)重心

1.直角三角形外接平行四邊形取重心



(圖84)

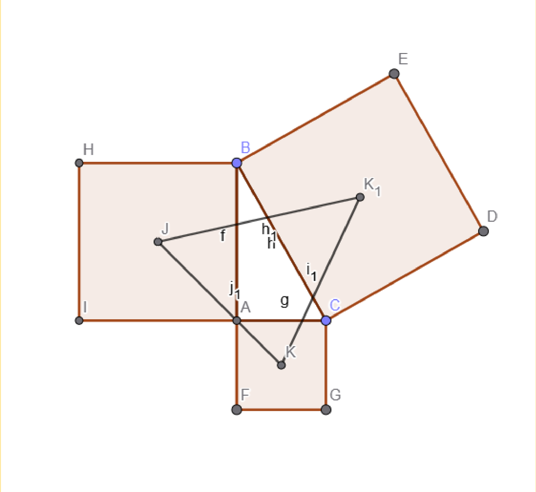
利用座標化 A(0,0) ，B(x,0) ， C(0,$\sqrt{3}x$)

F($\frac{3}{5}x$,$\frac{3}{5}x$) ， G($x,\sqrt{3}x$) ， H(0, $\frac{1}{2}x$)

$$\Delta\mathrm{FHG}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & x & \frac{3}{5}x & 0\\ \frac{1}{2}x & \sqrt{3}x & \frac{3}{5}x & \frac{1}{2}x\end{vmatrix}\right|=\frac{(2+2\sqrt{3})}{5}x^2$$

$$\Delta\mathrm{FHG}=\frac{(2+2\sqrt{3})}{5}x^2$$

2.直角三角形外接正方形取內、外、重心



(圖88)

$$\overline{JK}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{2}x=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}x$$

$$\overline{KK_1}^2=\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}x\right)^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2+(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos 150°=2\sqrt{3}x^2$$

$$\overline{KK_1}=\sqrt{2\sqrt{3}}x$$

$$\overline{JK_1}^2=(\frac{\sqrt{6}}{2}x)^2+(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}x\cdot\cos 120°=\frac{(7+2\sqrt{3})}{2}x^2$$

$\overline{JK_1}=\frac{(\sqrt{14+4\sqrt{3}})}{2}x$ ，利用海龍公式

$$\Delta\mathrm{JK}K_1=(\frac{5+\sqrt{3}}{4})x^2$$

陸、結論與未來展望

一、群心三角形面積與初始三角形面積之比值為R

(一)表格一：R>1

等腰直角三角形外接 等腰直角三角形取其外心	30°、60°、90°三角形外接 30°、60°、90°三角形取內心	等腰三角形外接 等腰直角三角形取外心
正三角形外接 等腰直角三角形取其外心	正三角形外接 正方形取其內心、外心、重心	正三角形外接 平行四邊形取其重心
正三角形外接 菱形取內心、重心	等腰直角三角形外接 等腰直角三角形取其重心	直角三角形外接 長方形取其外心、重心
等腰直角三角形外接 長方形取其外心、重心	等腰直角三角形外接 等腰直角三角形內心	等腰直角三角形外接 正方形取其外心、內心、重心
30°、60°、90°三角形外接 等腰三角形重心	直角三角形外接 正方形取內心、外心、重心	30°、60°、90°三角形外接 等腰三角形取重心
正三角形外接 等腰三角形頂角為70°取內心	直角三角形外接 平行四邊形取其內心	30°、60°、90°直角三角形外接 等腰直角三角形取外心

(二)表格二：R=1

正三角形外接 長方形取外心、重心	等腰直角三角形外接 等腰直角三角形取其外心	正三角形外接 等腰三角形取其內心
正三角形外接 30°、60°、90°三角形取其內心	等腰三角形外接 等腰三角形取外心	正三角形外接 等腰三角形頂角為60°取其內心

(三)表格三：R<1

等腰直角三角形外接 正三角形取內心、外心、重心	直角三角形外接 正方形取其外心	等腰三角形外接正三角形 並取內心、外心、重心
30°、60°、90°三角形外接 正方形並取內心、外心、重心	30°、60°、90°三角形外接正方 形並取內心、外心、重心	正三角形外接 等腰三角形頂角為50°取其內心

(四)表格四：生活與未來應用

應用	數學模型	目的
籃球三角戰術	外心等距性質加 三角形傳導結構	提高命中率與球的流動
足球射門	射門角度分析(30°~60°)	增加進球成功率
吊扇葉片設計	長度加形狀與葉片數量	優化效能、減少成本
耐震補強(戴雲發、吳六合)	柱中柱「比值」	增加其穩固性

二、未來研究：

本次研究基礎上，未來可以進一步延伸探討其他幾何中心的位置與性質，例如：

(一)垂心與傍心。

(二)除了認識這些「心」的基本定義，我們還可以思考它們彼此之間是否存在某些關聯。例如：內心與外心分別對應內切圓與外接圓，而重心與垂心在某些特別的三角形中，會出現固定比例或對稱的關係。

(三)未來我們也可以嘗試把三角形或四邊形放入像是正方形這類對稱圖形中觀察，當圖形越對稱，這些「心」會不會出現在更整齊的位置，甚至是否有可能重合在同一點。這樣的觀察可以幫助我們更深入了解幾何圖形中的規律。

(四)未來我們的研究方向還可以從平面圖形延伸到立體圖形，像是稜柱或錐體等。透過畫出切面圖或展開圖，我們可以觀察立體圖形中這些「心」的位置是否改變。此外，當圖形進行移動、縮放或旋轉時，也可以觀察這些幾何中心如何跟著變化，進一步發現其中的數學規律。

柒、參考文獻及其他

一、 拿破崙定理(Napoleon’sTheorem)
http://www.mathsgreat.com/geomth/geomth102.pdf

二、 利用行列式計算多邊形面積
https://ccjou.wordpress.com/2012/05/09/%E5%88%A9%E7%94%A8%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F%E8%A8%88%E7%AE%97%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E9%9D%A2%E7%A9%8D/

三、 沈志強、鄒耀偉、徐捷、黃胤維、林奕均、黃昱軒(2009)
面面俱到—n邊形之面積最大、極小值。中華民國第49屆中小學科展國中數學科作品

四、圖1至圖88、表格一至表格四作者自行繪製