中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030411

四方連塊拼圖問題之研究

學校名稱：宜蘭縣立復興國民中學

作者：	指導老師：
國二 徐翊恩 國二 廖致樂	呂若慈

關鍵詞：四方連塊、拼圖

摘要

此研究探討「在$n \times n$的正方形中 L 型、T 型和 O 型任兩種四方連塊」及「在$m \times n$的長方形中 LO、TO 兩種四方連塊」的拼圖可行性規律。我們發現拼片組合的可能性與正方形邊長有明顯關聯，透過黑白格排列法找出可行的解與排法，並分析不同邊長下的規律與極值，做出分類。此外，研究問題延伸至不同邊長分類下的$m \times n$長方形，我們找到「最小圖形」，如由 2 個 O 或 2 個 L 組成的$LO_{2\times4}$。接著，定義「中圖形」以分析 LO 與 TO 拼片組合的數量規律，如由 4 個 L 和一個$LO_{2\times4}$組成的$LO_{3\times8}$。透過將長方形切割成以上圖形、分析性質、找出一般化的公式，進而推導出矩形中 LO 與 TO 數量的極值規律。

壹、前言

一、 研究動機

在過去的學習經驗中，數學通常以列出公式、進行運算的方式解題。當我們在網路上接觸到〈森棚教官數學題——一塊拼，兩塊拼〉時，發現這類題目以其特殊的形式和解題思維所吸引。與一般數學題不同，它強調幾何拼圖與邏輯推理的結合，而非單純的數值計算，讓我們感受到數學的另一種趣味性和挑戰性。

我們經過了嘗試與討論後解開〈森棚教官數學題——一塊拼，兩塊拼〉

1. 16 個 T 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
2. 15 個 L 拼片加 1 個 O 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
3. 15 個 T 拼片加 1 個 O 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
4. a個 T 拼片加b個 O 拼片拼成 8x8 的大正方形a和b可以是多少？

解開以上幾題之後，我們對此深感興趣，認為我們能從「圖形的尺寸」及「不同形狀拼片數量的組合」做為研究的方向並進行深入的研究。

二、 文獻回顧

相關的歷屆全國科展作品如下表格：

屆數	作品名稱	研究方法	研究結果
61 屆 國小組	從巧拼問題探究 L 型與 I 型、田型的覆蓋填滿之解析	1.數學歸納法 2.化為二元一次方程式 3.程式語言輔助	發現 L，I，田(在本作品中稱為 O)型拼塊在不同範圍的拼圖內都有特定的一般式以求出各拼塊的數量。
57 屆 國中組	虧格與方陣的最後一塊拼圖	1.數學歸納法 2.反證法	除了(3s+1)×5,s>=4 的情形都可以說明長方形是否能被虧格填滿。
50 屆 國中組	智慧方塊挑戰之旅	1.頭尾接邊 2.方格坐標化	以一套系統式的步驟來求得拼圖的多種解(共 390 種解)，並且在此方法中盡量避免找到重複解的情形。

歷屆科展作品中，已經討論過「單一種 I、L 與 O 型的拼片」，以及其他各個不同形狀的拼塊在固定面積中的覆蓋情形，而 T 型拼塊與正方形中的覆蓋情形是目前較少人研究過的問題。閱讀了相關文獻，與歷屆科展作品後，我們決定針對「L、T、O拼片的『組合』是否可以完整覆蓋正方形或長方形」此方向作為主要研究問題。

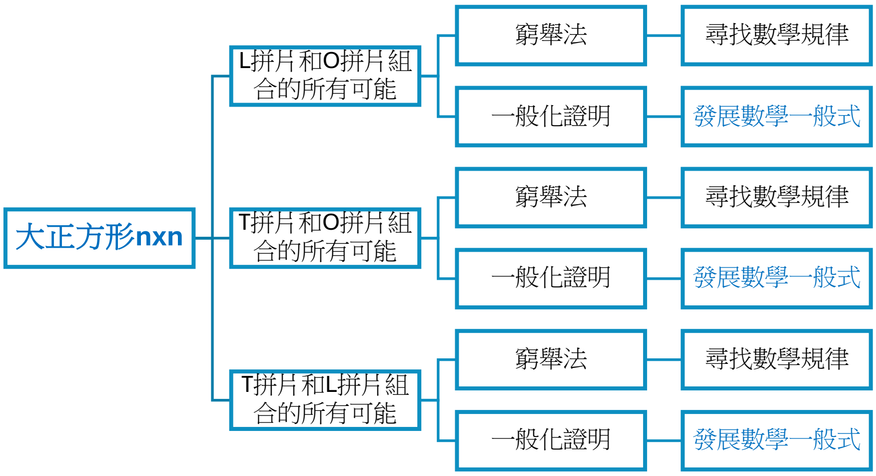
三、　研究問題

1. 若使用 a 個 L 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
2. 若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
3. 若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 L 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
4. 若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $m \times n$ 的大長方形，則(a,b)可以是多少？
5. 若使用 a 個 L 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $m \times n$ 的大長方形，則(a,b)可以是多少？

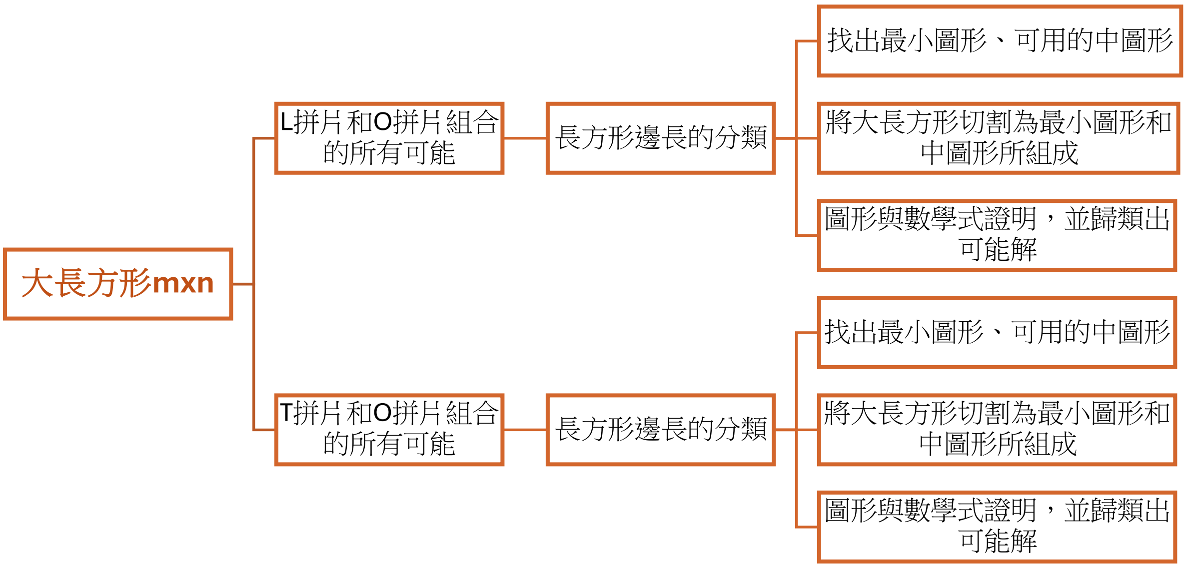
貳、研究方法或過程

研究架構圖：

研究一



研究二



一、 正方形

在討論拼片組合前，我們先針對大正方形邊長 n 進行分析：

1. 大正方形邊長 n 的條件：
   一個$n\times n$的大正方形總共有n^2個方塊。每個 L 拼片（或 T 拼片）和 O 拼片都是由四方連塊（4 個方塊）組成，因此如果要剛好填滿這個 $n\times n$的大正方形，則 n^2 必須是 4 的倍數。即必須滿足條件：$n^2\equiv 0\ (mod 4)$。接著，分析 n 的奇偶性，可分為兩類討論：
   I. 若 n 為偶數，假設 $n=2k$，則 $n^2=(2k)^2=4k^2$， n^2 是 4 的倍數，符合條件。
   II. 若 n 為奇數，假設 $n=2k+1$，則
   $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$，$n^2\equiv 1\ (mod 4)$，不符合條件。
   因此，n 必須為偶數。
   所以，我們先依序討論4×4、6×6、8×8、10×10、12×12 這五種大正方形的(a,b) 組合、畫出可能的排列方法，最後觀察其規律並進行分類。
2. $n\times n$ 的正方形由 a 個 L 拼片（或 T 拼片）和 b 個 O 拼片所組成，每個拼片皆由四個方塊所組成，因此總面積為 $4(a+b)$ 。
   因此，拼片總數與邊長的關係式為 $a+b=\frac{n^2}{4}$ 。

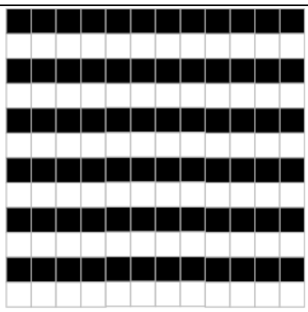
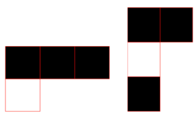
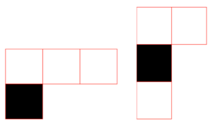
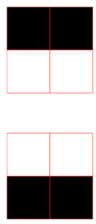
（一）$n\times n$的正方形中，討論 L、O 兩種拼片的組合

1. 一般化證明與討論：

證明與討論 1

1. 黑白格塗色法：

(1) 將 nxn 的大正方形以每列黑白相間塗色，可以得到 $\frac{n}{2}$ 排黑色格子和 $\frac{n}{2}$ 排白色格子，各有 $\frac{n^2}{2}$ 格黑色格子（B,Black）和 $\frac{n^2}{2}$ 格白色格子（W,White）。 （本表格由作者自行繪製、製作）

$n\times n$的大正方形	L 拼片佔用的黑白格數量	O 拼片佔用的黑白格數量
	3B1W，排法：  1B3W，排法： 	2B2W，排法： 

(2) 令 x =L 拼片(3B1W)排列方式的總數、令 y =L 拼片(1B3W)排列方式的總數、令 z =O 拼片的排列方式的總數

$\frac{n^2}{2}(B+W)=x(3B1W)+y(1B3W)+z(2B2W)$ ，x、y、z 為正整數

B 的數量關係式：$3x+y+2z=\frac{n^2}{2}-①$　　W 的數量關係式：$x+3y+2z=\frac{n^2}{2}-②$

$①-②$：$2x-2y=0$

$\therefore x=y$

得，L 拼片數量 $a=x+y=2x$

因為 x 為正整數，所以 a 必為偶數或 0；若 a 為奇數時，不符合黑白塗色法，無法拼出可能的 (a,b) 組合。

2. 由黑白格塗色法可得出，在$n\times n$中，a值（L 拼片數量）恆為偶數或 0。
當$n=2k$ 時，b值（O 型拼片數量）為偶數；當 $n=2k+1$ 時，b值為奇數。（k 為正整數）

2. 討論正方形 4×4、6×6、8×8、10×10、12×12 的可能組合

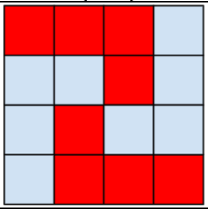
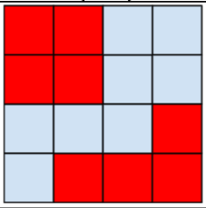
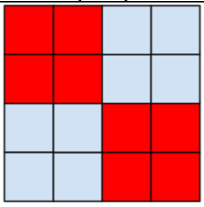
以下為該討論結果可能的拼法，每一組(a,b)以「其中一種」拼圖方式呈現。「計算、找出有幾種排列方法」不在本研究討論範圍。

(1) 4×4

符合4×4正方形可能的 L、O 組合：$(a,b)=(4,0)$、$(3,1)$、$(2,2)$、$(1,3)$、$(0,4)$。

由$\boxed{\text{證明與討論 1}}$可知，$(3,1)$、$(1,3)$ 兩組無解。

故$(a,b)=(4,0)$、$(2,2)$、$(0,4)$。　　（本表格由作者自行繪製、製作）

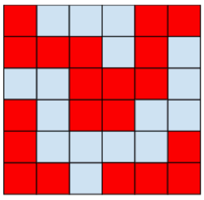
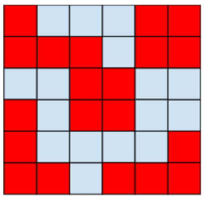
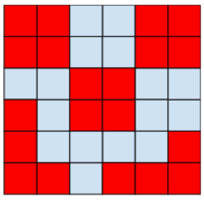
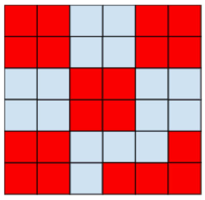
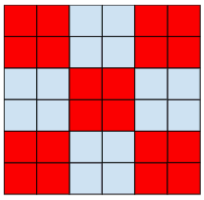
使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成4×4的大正方形，則(a,b)可能是多少？			
$(4,0)$	$(2,2)$	$(0,4)$	
			

(2) 6×6

符合6×6正方形可能的 L、O 組合：$(a,b)=(9,0)$、$(8,1)$、...... 、$(1,8)$、$(0,9)$

由$\boxed{\text{證明與討論 1}}$可知，$(9,0)$、$(7,2)$、$(5,4)$、$(3,6)$、$(1,8)$ 五組無解。

故$(a,b)=(8,1)$、$(6,3)$、$(4,5)$、$(2,7)$、$(0,9)$。　　（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成6×6的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
$(8,1)$	$(6,3)$	$(4,5)$	$(2,7)$	$(0,9)$
				

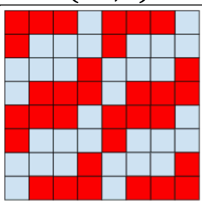
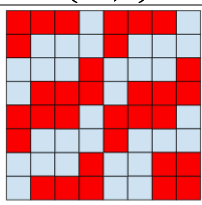
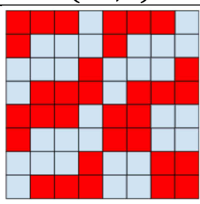
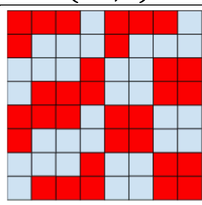
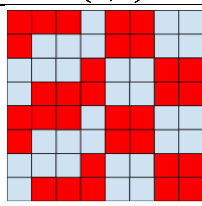
(3) 8×8

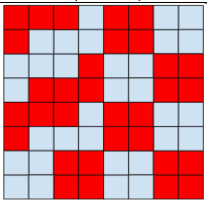
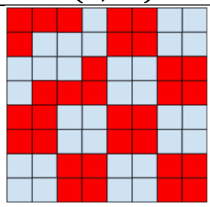
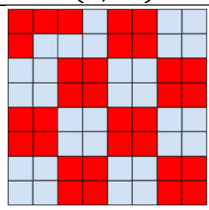
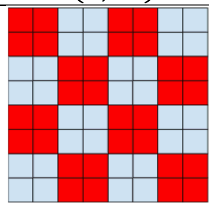
符合8×8正方形可能的 L、O 組合：$(a,b)=(16,0)$、$(15,1)$、...... 、$(1,15)$、$(0,16)$。

由$\boxed{\text{證明與討論 1}}$可知，$(15,1)$、$(13,3)$、$(11,5)$、$(9,7)$、$(7,9)$、$(5,11)$、$(3,13)$、$(1,15)$ 八組無解。

故$(a,b)=(16,0)$、$(14,2)$、$(12,4)$、$(10,6)$、$(8,8)$、$(6,10)$、$(4,12)$、$(2,14)$、$(0,16)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成8×8的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
$(16,0)$	$(14,2)$	$(12,4)$	$(10,6)$	$(8,8)$
				

(6,10)	(4,12)	(2,14)	(0,16)	
				

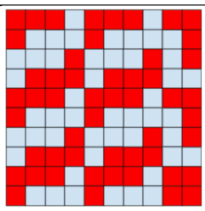
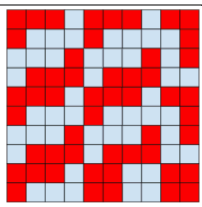
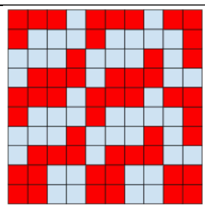
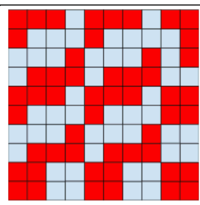
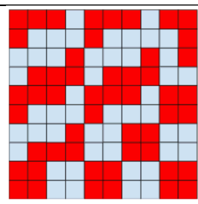
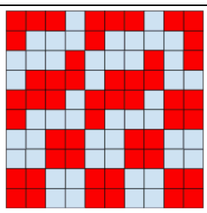
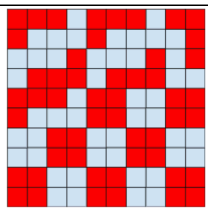
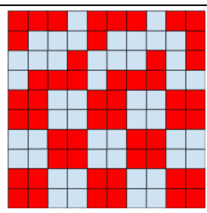
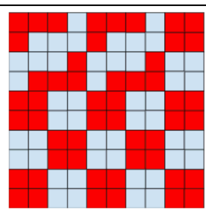
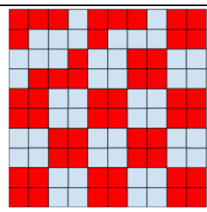
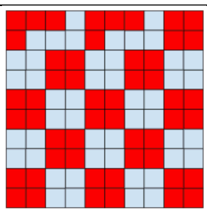
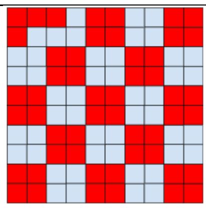
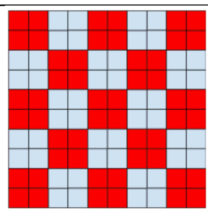
(4) 10×10

符合10×10正方形可能的 L、O 組合：$(a, b) = (25,0)$、$(24,1)$、……、$(1,24)$、$(0,25)$

由$\boxed{\text{證明與討論 1}}$可知，(25,0)、(23,2)、(21,4)、(19,6)、(17,8)、(15,10)、(13,12)、(11,14)、(9,16)、(7,18)、(5,20)、(3,22)、(1,24)十三組無解。

故$(a, b) =$ (24,1)、(22,3)、(20,5)、(18,7)、(16,9)、(14,11)、(12,13)、(10,15)、(8,17)、(6,19)、(4,21)、(2,23)、(0,25)。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成10×10的大正方形，則(a, b)可能是多少？				
(24,1)	(22,3)	(20,5)	(18,7)	(16,9)
				
(14,11)	(12,13)	(10,15)	(8,17)	(6,19)
				
(4,21)	(2,23)	(0,25)		
				

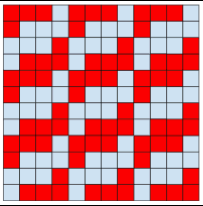
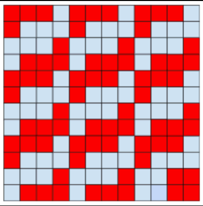
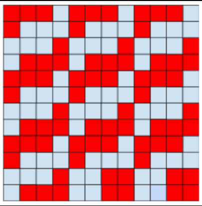
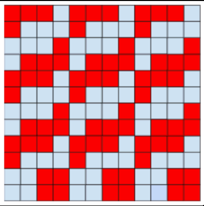
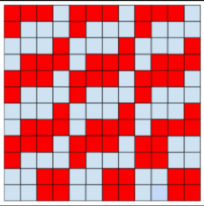
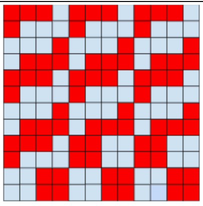
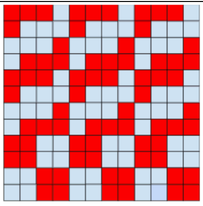
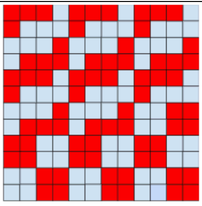
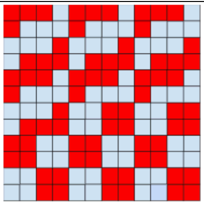
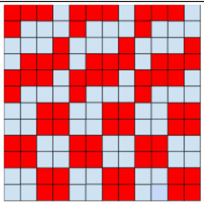
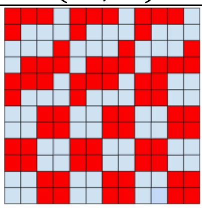
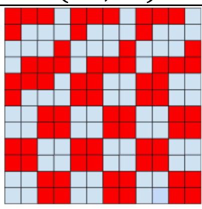
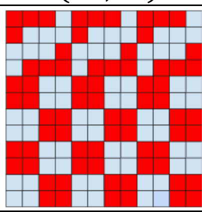
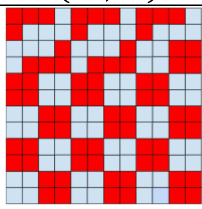
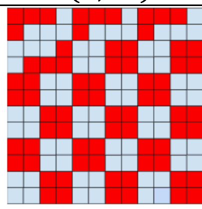
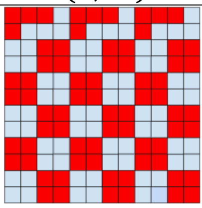
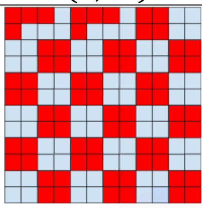
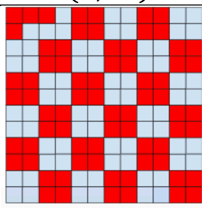
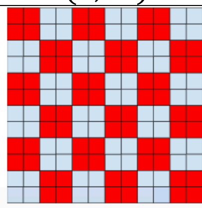
(5) 12×12

符合12×12正方形可能的 L、O 組合：$(a, b) = (36,0)$、$(35,1)$、……、$(1,35)$、$(0,36)$

由$\boxed{\text{證明與討論 1}}$可知，(35,1)、(33,3)、(31,5)、……、(5,31)、(3,33)、(1,35)十八組無解

故$(a, b) =$ (36,0)、(34,2)、(32,4)、(30,6)、(28,8)、(26,10)、(24,12)、(22,14)、(20,16)、(18,18)、(16,20)、(14,22)、(12,24)、(10,26)、(8,28)、(6,30)、(4,32)、(2,34)、(0,36)。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成12×12的大正方形，則(a, b)可能是多少？				
(36,0)	(34,2)	(32,4)	(30,6)	(28,8)
				
(26,10)	(24,12)	(22,14)	(20,16)	(18,18)
				
(16,20)	(14,22)	(12,24)	(10,26)	(8,28)
				
(6,30)	(4,32)	(2,34)	(0,36)	
				

3.　$n \times n$

(2)　根據 1.(1)~(5)的討論，觀察其拼片組合之可能解的規律，結果分成兩大類：

I.　當 n 是 4 的倍數，即$n \equiv 0(mod4)$：

a的最大值（即最多能使用 L 拼片數）：$a_{max} = \frac{n^2}{4}$。

a必為偶數，所以$a \in \{0,2,4, \ldots, a_{max}\}$，又$a + b = \frac{n^2}{4}$，則$b = \frac{n^2}{4} - a$。

可能的(a, b)組合數：$\frac{a_{max}}{2} + 1 = \frac{n^2}{8} + 1$。

II.　當 n 是 2 的倍數但不是 4 的倍數，即 $n \equiv 2(mod4)$：

a的最大值（即最多能使用 L 拼片數）：$a_{max} = \frac{n^2}{4} - 1$。

a必為偶數，所以$a \in \{0,2,4, \ldots, a_{max}\}$，又$a + b = \frac{n^2}{4}$，則$b = \frac{n^2}{4} - a$。

可能的(a, b)組合數：$\frac{a_{max}}{2} + 1 = \frac{n^2+4}{8}$。

(3)　結論：

a是從 0 到a_{max}之間的偶數，因此可令$a = 2k,\ k \in \left\{0,1,2, \ldots, \frac{a_{max}}{4}\right\}$，則$b = \frac{n^2}{4} - 2k$。

因此，使用a個 L 拼片加上b個 O 拼片拼成$n \times n$的大正方形，則(a, b)可能的組合為

$$(a,b)=\{(2k,\frac{n^2}{4}-2k)\mid k=0,1,2,\dots,\frac{a_{max}}{4}\}$$

$$\text{其中 } a_{max}=\begin{cases}\frac{n^2}{4} & , \quad n\equiv 0(mod4)\\ \frac{n^2}{4}-1 & , \quad n\equiv 2(mod4)\end{cases}$$

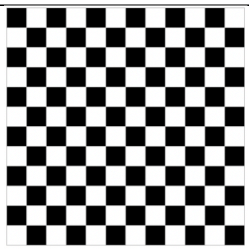
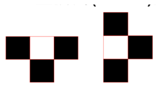
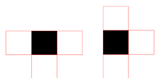
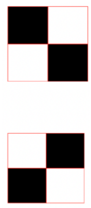
（二）$n\times n$的正方形中，討論 T、O 兩種拼片的組合

1. 一般化證明與討論：

證明與討論 2.1

1. 黑白格塗色法：

(1) 將$n\times n$的大正方形以每「格」黑白相間塗色，可以得到 $\frac{n^2}{2}$ 格黑色格子（B,Black）和 $\frac{n^2}{2}$ 格白色格子（W,White）。（本表格由作者自行繪製、製作）

$n\times n$的大正方形	T 拼片佔用的黑白格數量	O 拼片佔用的黑白格數量
	3B1W，排法： 1B3W，排法：	2B2W，排法：

(2) 令 x =T 拼片(3B1W)排列方式的總數、令 y =T 拼片(1B3W)排列方式的總數、令 z =O 拼片的排列方式的總數

$\frac{n^2}{2}(B+W)=x(3B1W)+y(1B3W)+z(2B2W)$ ，x、y、z 為正整數

B 的數量關係式：$3x+y+2z=\frac{n^2}{2}$ $-①$　　W 的數量關係式：$x+3y+2z=\frac{n^2}{2}$ $-②$

①－②：$2x-2y=0$

$\therefore x=y$

得，T 拼片數量 $a=x+y=2x$

因為 x 為正整數，所以 a 必為偶數或 0；若 a 為奇數時，不符合黑白塗色法，無法拼出可能的(a,b)組合。

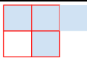
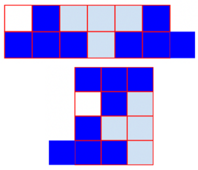
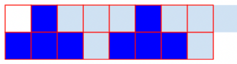
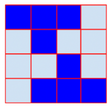
2. 由黑白格塗色法可得出，在$n\times n$中，a值（T 拼片數量）恆為偶數或 0。
當$n=2k$ 時，b 值（O 拼片數量）為偶數；當 $n=2k+1$ 時，b 值為奇數。（k 為正整數）

證明與討論 2.2

探討 T 拼片的排列可能：

1. 已知b個2×2的 O 拼片填入$n\times n$正方形中，可以知道剩下的空格欲填入的 T 型拼片必須是邊長為 2 以上的 T 拼片或 T 拼片組合圖形，以下以 T 拼片能形成的組合圖形討論其可能性：
   (1) 若在2×2空格，1 個 T 形拼片無法填入。
   (2) 若在2×4空格中，2 個 T 形拼片無法填入。
   (3) 若在2×6或3×4空格中，3 個 T 形拼片無法填入。
   (4) 若在2×8或4×4空格中，2×8空格中 4 個 T 形拼片無法填，但「4×4空格中 4 個 T 形拼片可以完全填入」。

下列表格為討論 T 的填入方法：（本表格由作者自行繪製、製作）

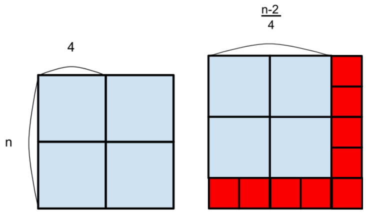
<table>
<tr><th>1 個 T</th><th>3 個 T</th><th>4 個 T</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">

4×4填入成功</td></tr>
<tr><td>2 個 T</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

2. 由(1)、(2)、(3)、(4)討論可得知，4×4的正方形是最小能填入 T 型拼片的圖形，能夠填入 4 個 T 型拼片，其餘狀況會沒辦法與其他 b 個 O 型拼片完整覆蓋$n\times n$正方形。因此，在a個 T 拼片及b個 O 拼片的組合中，a必為 4 的倍數或 0。

因此，$n\times n$的正方形所能填入的4×4的正方形數量，會是影響是 T 型拼片的數量之關鍵。以下分成邊長n為「$4k$」和「$4k+2$」兩類大正方形討論（k 是正整數）：

當$n=4k$，所能填入的4×4正方形數量為 $\frac{n^2}{16}$，則 $a_{max}=\frac{n^2}{16}\times4$

當$n=4k+2$，所能填入的4×4正方形數量為 $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2$，則 $a_{max}=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2\times4$



（本圖片由作者自行繪製、製作）

綜合$\boxed{\text{證明與討論 2.1}}$與$\boxed{\text{證明與討論 2.2}}$，2.1 的結果包含於 2.2 的結果中，因此以$\boxed{\text{證明與討論 2.2}}$作為接下來所引用的討論依據。

2. 討論正方形4×4、6×6、8×8、10×10、12×12的可能組合

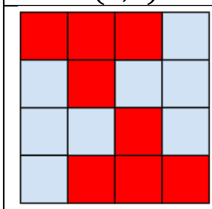
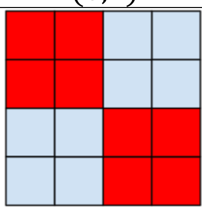
(1) 4×4

符合4×4正方形可能的 T、O 組合：$(a,b)=(4,0)$、$(3,1)$、$(2,2)$、$(1,3)$、$(0,4)$

4×4的大正方形中，所能填入的4×4正方形最大數量為 $\frac{n^2}{16}=1$，a 的最大值為 4。

由$\boxed{\text{證明與討論 2.2}}$可知，$(3,1)$、$(2,2)$、$(1,3)$三組無解。

故$(a,b)=(4,0)$、$(0,4)$。（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成4×4的大正方形，則(a,b)可能是多少？		
$(4,0)$	$(0,4)$	
		

(2) 6×6

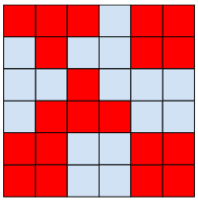
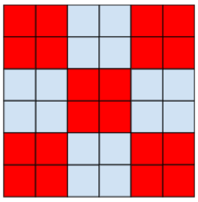
符合 6x6 正方形可能的 T、O 組合：$(a,b)=(9,0)$、$(8,1)$、……、$(1,8)$、$(0,9)$。

6x6 的大正方形中，所能填入的4×4正方形最大數量為 $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2=1$，$a$ 的最大值為 4。

由$\boxed{\text{證明與討論 2.2}}$可知，$(9,0)$、$(8,1)$、$(7,2)$、……、、$(3,6)$、$(2,7)$、$(1,8)$八組無解。

故$(a,b)=(4,5)$、$(0,9)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成 6x6 的大正方形，則(a,b)可能是多少？		
(4,5)	(0,9)	
		

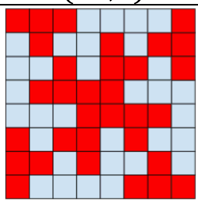
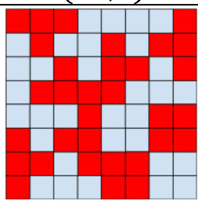
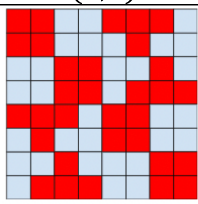
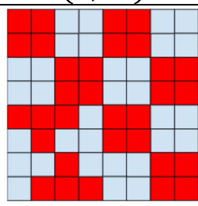
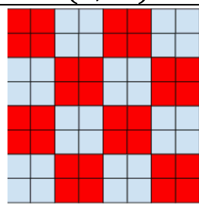
(3) 8×8

符合8×8正方形可能的 T、O 組合：$(a,b) = (16,0)$、$(15,1)$、...... 、$(1,15)$、$(0,16)$。

8×8的大正方形中，所能填入的4×4正方形最大數量為 $\frac{n^2}{16} = 4$，a 的最大值為 16。

由證明與討論 2.2 可知，$(15,1)$、$(14,2)$、$(13,3)$、...... 、$(2,14)$、$(1,15)$十二組無解。

故$(a,b) = (16,0)$、$(12,4)$、$(8,8)$、$(4,12)$、$(0,16)$。　（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成 8x8 的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(16,0)	(12,4)	(8,8)	(4,12)	(0,16)
				

(4) 10×10

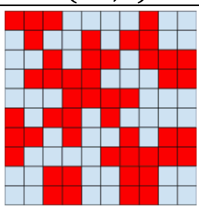
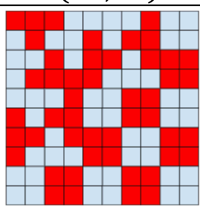
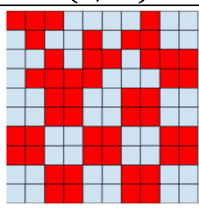
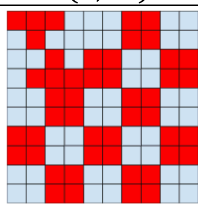
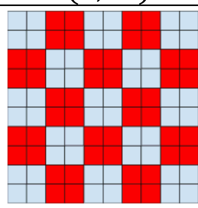
符合10×10正方形可能的 T、O 組合：$(a,b) = (25,0)$、$(24,1)$、...... 、$(0,25)$。

10×10的大正方形中，所能填入的4×4正方形最大數量為$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2 = 4$，$a$的最大值為 16

由證明與討論 2.2 可知，$(25,0)$、$(24,1)$、$(23,2)$、$(22,3)$、...... 、$(5,20)$、$(3,22)$、$(2,23)$、$(1,24)$二十一組無解。

故$(a,b) = (16,9)$、$(12,13)$、$(8,17)$、$(4,21)$、$(0,25)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成 10x10 的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(16,9)	(12,13)	(8,17)	(4,21)	(0,25)
				

(5) 12×12

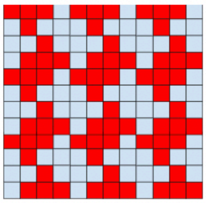
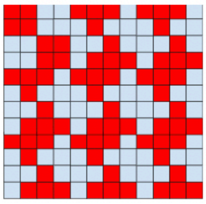
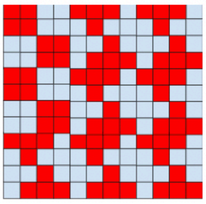
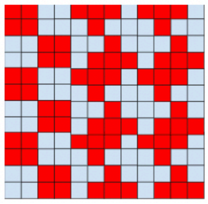
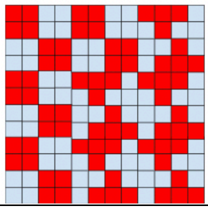
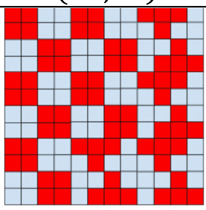
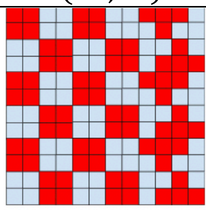
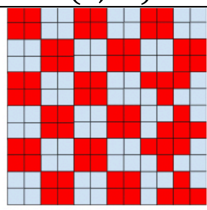
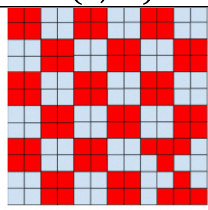
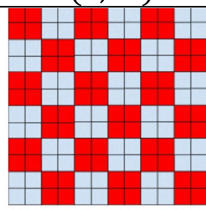
符合12×12正方形可能的 T、O 組合：$(a,b) = (36,0)$、$(35,1)$、...... 、$(0,36)$。

12×12的大正方形中，所能填入的4×4正方形最大數量為 $\frac{n^2}{16} = 9$，a 的最大值為 36。

由證明與討論 2.2 可知，$(35,1)$、$(34,2)$、$(33,3)$、$(31,5)$、...... 、$(5,31)$、$(3,33)$、$(2,34)$、$(1,35)$二十七組無解。

故$(a,b)=(36,0)$、$(32,4)$、$(28,8)$、$(24,12)$、$(20,16)$、$(16,20)$、$(12,24)$、$(8,28)$、$(4,32)$、$(0,36)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成 12x12 的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(36,0)	(32,4)	(28,8)	(24,12)	(20,16)
				
(16,20)	(12,24)	(8,28)	(4,32)	(0,36)
				

3.　$n\times n$

(1)　根據 2.(1)~(5)的討論，將結果分成兩大類，分別是

I.　當 n 是 4 的倍數，即 $n\equiv 0(mod4)$ ：

a的最大值（即最多能使用 T 拼片數）：$a_{max}=\frac{n^2}{4}$

a必為 4 的倍數，所以 $a\in\{0,4,8,\ldots,a_{max}\}$，又 $a+b=\frac{n^2}{4}$，則 $b=\frac{n^2}{4}-a$。

可能的(a,b)組合數：$\frac{a_{max}}{4}+1=\frac{n^2}{16}+1$

II.　當 n 是 2 的倍數但不是 4 的倍數，即 $n\equiv 2(mod4)$ ：

a的最大值（即最多能使用 T 拼片數）：$a_{max}=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2\times 4$

a必為 4 的倍數，所以 $a\in\{0,4,8,\ldots,a_{max}\}$，又 $a+b=\frac{n^2}{4}$，則 $b=\frac{n^2}{4}-a$。

可能的(a,b)組合數：$\frac{a_{max}}{4}+1$

(2)　結論：

因為 a 是從 0 到a_{max}之間的四的倍數，因此可令 $a=4k,\ k\in\left\{0,1,2,\ldots,\frac{a_{max}}{4}\right\}$，則$b=\frac{n^2}{4}-4k$。

因此，使用a個 T 拼片加上b個 O 拼片拼成$n\times n$的大正方形，則(a,b)可能的組合為

$$(a,b)=\left\{\left(4k,\frac{n^2}{4}-4k\right)\mid k=0,1,2,\ldots,\frac{a_{max}}{4}\right\}$$

$$\text{其中}a_{max}=\begin{cases}\frac{n^2}{4} & ,\quad n\equiv 0(mod4)\\ \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2\times 4 & ,\quad n\equiv 2(mod4)\end{cases}$$

（三）$n \times n$的正方形中，討論 T、L 兩種拼片的組合

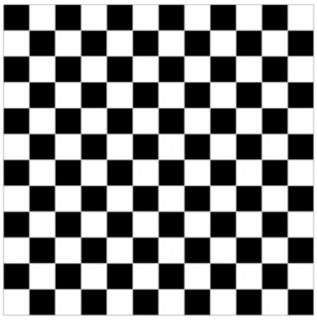
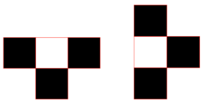
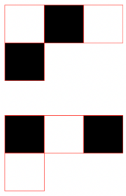
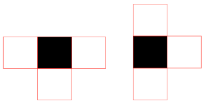
1. 一般化證明與討論：

證明與討論 3.1

1. 黑白格塗色法：

將$n \times n$的大正方形以每「格」黑白相間塗色，可以得到 $\frac{n^2}{2}$ 格黑色格子（B,Black）和 $\frac{n^2}{2}$ 格白色格子（W,White）。

（本表格由作者自行繪製、製作）

$n \times n$的大正方形	T 拼片佔用的黑白格數量	L 拼片佔用的黑白格數量
	3B1W，排法：	2B2W，排法：
	1B3W，排法：	

(1) 令 x =T 拼片(3B1W)排列方式的總數、令 y =T 拼片(1B3W)排列方式的總數、令 z =L 拼片的排列方式的總數

$\frac{n^2}{2}(B+W) = x(3B1W) + y(1B3W) + z(2B2W)$ ，x、y、z 為正整數

B 的數量關係式：$3x + y + 2z = \frac{n^2}{2}$ －①　　W 的數量關係式：$x + 3y + 2z = \frac{n^2}{2}$ －②

①－②：$2x - 2y = 0$

$\therefore x = y$

得，T 拼片數量 $a = x + y = 2x$

因為 x 為正整數，所以 a 必為偶數或 0；若 a 為奇數時，不符合黑白塗色法，無法拼出可能的(a, b)組合。

2. 由黑白格塗色法可得出，在$n \times n$中，a值（T 拼片數量）恆為偶數或 0。

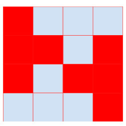
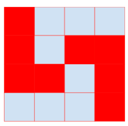
當$n = 2k$ 時，b值（T 拼片數量）為偶數；當 $n = 2k + 1$ 時，b值為奇數。（k 為正整數）

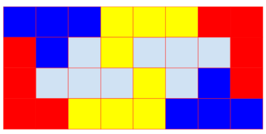
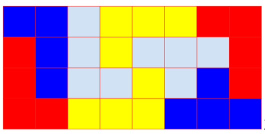
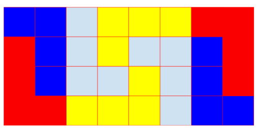
證明與討論 3.2

我們發現 T 拼片、L 拼片組合的可能性，比起（一）LO、（二）TO 的規律更加複雜，並且以上的方法都沒有辦法採用。整理已找出的排列方式後，我們發現「在「邊長為四的倍數」此類的正方形中，可以遵循某種排法找出 T 拼片的最大值」，以下為討論：

1. 填入nxn正方形中，可用的圖形素材，主要分為兩大類矩形4×4、矩形4×8：

（本表格由作者自行繪製、製作）

$T_{4\times4}$	$L_{4\times4}$
	

$4T4L$	$2T6L$	$8L$
		

2. 矩形4×8有三種拼片組合，而不論是以下哪一種組合，最少都會使用到 4 個 L 拼片，且 L 數可能為 2 的倍數，因此(a,b)中 b 的值為$0,4,6,\cdots,b_{max}(b\neq 2)$。

3. 在$nxn(n\equiv 0\ mod4)$的正方形中，可能組合有$\frac{n^2}{8}$個。

(1) $a\equiv 0\ mod4$ 的組合有$\frac{n^2}{16}+1$個，拼法的可能為$x(T_{4\times4})+y(L_{4\times4})$，$x+y=\frac{n^2}{16}$。

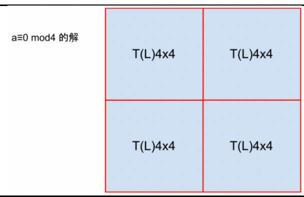
(2) $a\equiv 2\ mod4$ 的組合有$\frac{n^2}{16}-1$個，拼法的可能為

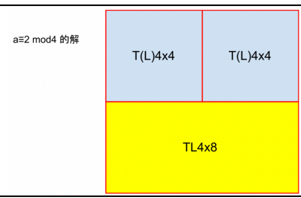
當$a=2$時，$x(L_{4\times4})+1(2T6L)$，$x=\frac{n^2}{16}-1$。

當$a>2$時，$x(T_{4\times4})+y(L_{4\times4})+1(2T6L)$，$x+y=\frac{n^2}{16}-2$。

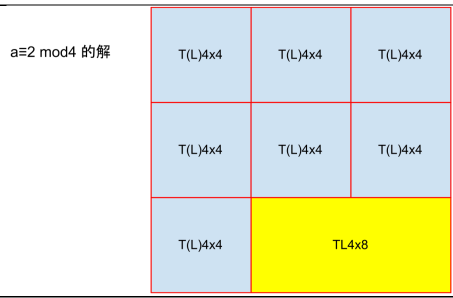
（本表格由作者自行繪製、製作）

8×8





12×12



2. 討論正方形4×4、6×6、8×8、10×10、12×12的可能組合

(1) 4×4

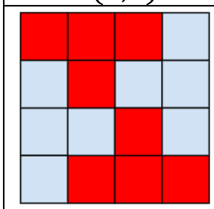
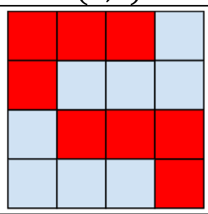
符合4×4正方形可能的 T、L 組合：$(a,b)=(4,0)$、$(3,1)$、……、$(1,3)$、$(0,4)$

由證明與討論 3.1 可知，$(3,1)$、$(1,3)$二組無解。

由證明與討論 3.2 可知，$(2,2)$ 一組無解。

故 $(a,b)=(4,0)$、$(0,4)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成4×4的大正方形，則(a,b)可能是多少？		
(4,0)	(0,4)	
		

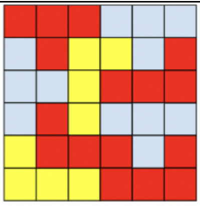
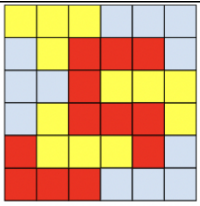
(2) 6×6

符合6×6正方形可能的 T、L 組合：$(a,b)=(9,0)$、$(8,1)$、……、$(1,8)$、$(0,9)$。

由證明與討論 3.1 可知，$(9,0)$、$(7,2)$、$(5,4)$、$(3,6)$、$(1,8)$ 五組無解。

僅由 9 個 L 拼片無解，原因與 L、O 組合的$(9,0)$同理，因此$(0,9)$無解。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成6×6的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(8,1)	(6,3)	(4,5)	(2,7)	
嘗試後，此組合無法得出任何一組解（拼法）詳見討論三	嘗試後，此組合無法得出任何一組解（拼法）詳見討論三			

由以上證明與實驗，我們得到以下可能 $(a,b)=(4,5)$、$(2,7)$。

(3) 8×8

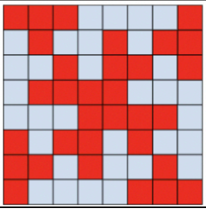
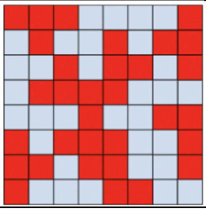
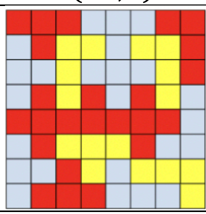
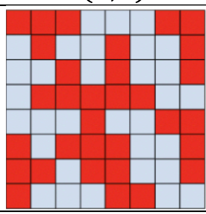
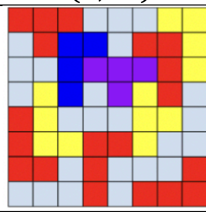
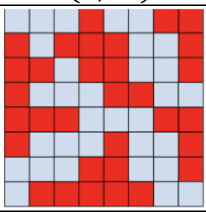
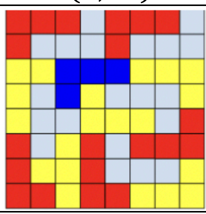
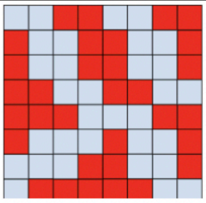
符合8×8正方形可能的 T、L 組合：$(a,b)=(16,0)$、$(15,1)$、......、$(1,15)$、$(0,16)$。

由證明與討論 3.1 可知，(15,1)、(13,3)、(11,5)、......、(3,13)、(1,15)八組無解。

由證明與討論 3.2 可知，(14,2) 一組無解。

故$(a,b)=(16,0)$、$(12,4)$、$(10,6)$、$(8,8)$、$(6,10)$、$(4,12)$、$(2,14)$、$(0,16)$。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成4×4的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(16,0)	(12,4)	(10,6)	(8,8)	(6,10)
				
(4,12)	(2,14)	(0,16)		
				

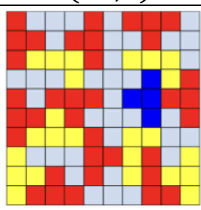
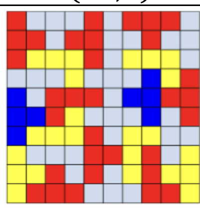
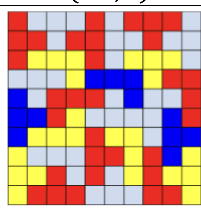
(4) 10×10

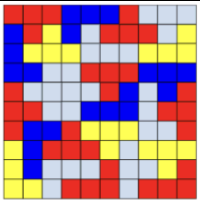
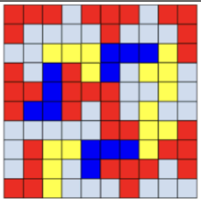
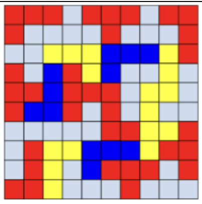
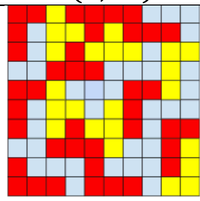
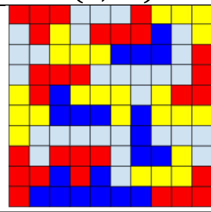
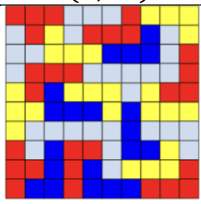
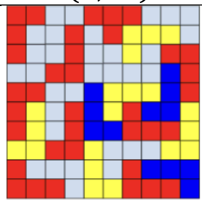
符合10×10正方形可能的 T、L 組合：$(a,b)=(25,0)$、$(24,1)$、......、$(0,25)$。

由證明與討論 3.1 可知，(25,0)、(23,2)、(21,4)、......、(3,22)、(1,24)十三組無解。

僅由 25 個 L 拼片無解，原因與 L、O 組合的(25,0)同理，因此(0,25)無解。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成10×10的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(24,1)	(22,3)	(20,5)	(18,7)	(16,9)
嘗試後，此組合無法得出任何一組解（拼法）詳見討論三	嘗試後，此組合無法得出任何一組解（拼法）詳見討論三			

(14,11)	(12,13)	(10,15)	(8,17)	(6,19)
				
(4,21)	(2,23)			
				

由以上證明與實驗，我們得到以下可能

$(a,b)=$ (20,5)、(18,7)、(16,9)、(14,11)、(12,13)、(10,15)、(8,17)、(6,19)、(4,21)、(2,23)。

(5) 12×12

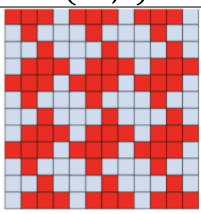
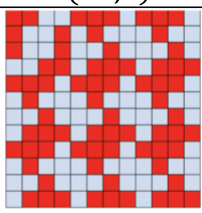
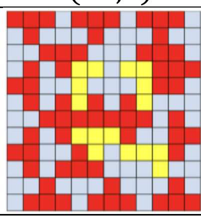
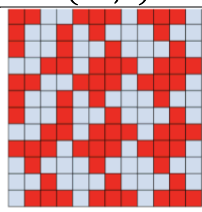
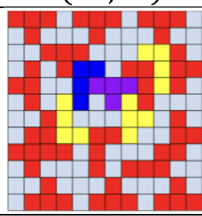
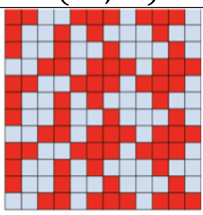
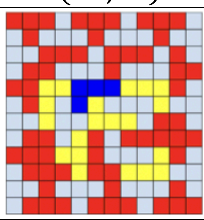
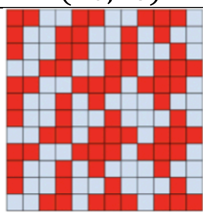
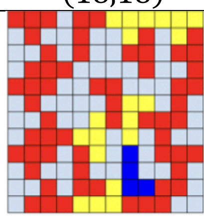
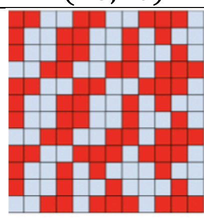
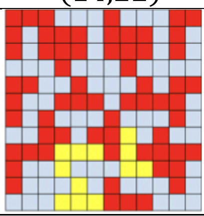
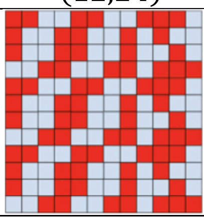
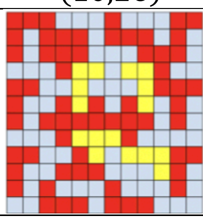
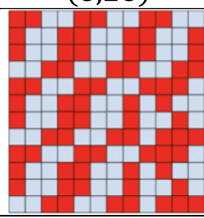
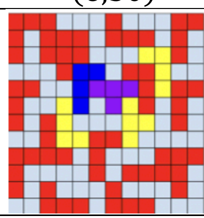
符合10×10正方形可能的 T、L 組合：$(a,b)=(36,0)$、(35,1)、……、(0,36)。

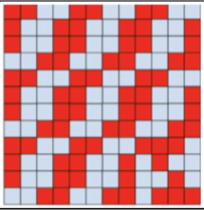
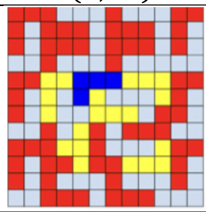
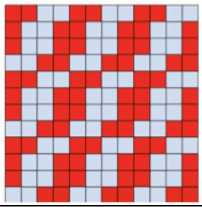
由證明與討論 3.1 可知，(35,1)、(34,2)、(33,3)、……、(3,33)、(1,35)十九組無解。

由證明與討論 3.2 可知，(34,2) 一組無解。

故$(a,b)=$ (36,0)、(32,4)、(30,6)、(28,8)、(26,10)、(24,12)、(22,14)、(20,16)、(18,18)、(16,20)、(14,22)、(12,24)、(10,26)、(8,28)、(6,30)、(4,32)、(2,34)、(0,36)。

（本表格由作者自行繪製、製作）

使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成12×12的大正方形，則(a,b)可能是多少？				
(36,0)	(32,4)	(30,6)	(28,8)	(26,10)
				
(24,12)	(22,14)	(20,16)	(18,18)	(16,20)
				
(14,22)	(12,24)	(10,26)	(8,28)	(6,30)
				

(4,32)	(2,34)	(0,36)	
			

2. $\boldsymbol{n \times n}$

(1) 根據 2.(1)~(5)的討論，將結果分成兩大類：

I. 當 n 是 4 的倍數，即 $n \equiv 0(mod4)$ ：

a的最大值（即最多能使用 T 拼片數）：$a_{max} = \frac{n^2}{4}$ ；b的最小值：$b_{min} = 0$

a必為 2 的倍數（$a_{max} - 2$ 除外），所以 $a \in \{0,2,4, \dots, a_{max}\}$，又 $a + b = \frac{n^2}{4}$，

則 $b = \frac{n^2}{4} - a \ (b \neq 2)$。

可能的(a,b)組合數：$\frac{a_{max}}{2}$

II. 當 n 是 2 的倍數但不是 4 的倍數，即 $n \equiv 2(mod4)$ ：

a的最大值（即最多能使用 T 拼片數）：$a_{max} = \frac{n^2}{4} - 5$ ；b的最小值：$b_{min} = 5$

a必為 2 的倍數（$a \neq 0$），所以 $a \in \{2,4,6, \dots, a_{max}\}$，又 $a + b = \frac{n^2}{4}$，

則 $b = \frac{n^2}{4} - a \ (b \neq \frac{n^2}{4})$。

可能的(a,b)組合數：$\frac{a_{max}}{2}$

(2) 結論：

因為a是從 0 到a_{max}之間的四的倍數，因此可令 $a = 2k,\ k \in \left\{k_{min}, k_{min} + 1, k_{min} + 2, \dots, \frac{a_{max}}{2}\right\}$，則$b = \frac{n^2}{4} - 2k$

因此，使用a個 T 拼片加上b個 L 拼片拼成$n \times n$的大正方形，則(a, b)可能的組合為

$$(a, b) = \{(2k, \frac{n^2}{4} - 2k) \mid k = k_{min}, k_{min} + 1, \dots, \frac{a_{max}}{2}\}$$

其中 $a_{max} = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & , \quad n \equiv 0(mod4) \\ \frac{n^2}{4} - 5 & , \quad n \equiv 2(mod4) \end{cases}$ ， $k_{min} = \begin{cases} 0 , & n \equiv 0(mod4) \\ 1 , & n \equiv 2(mod4) \end{cases}$

二、 長方形

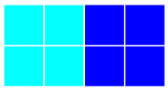
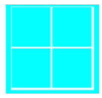
我們想透過找出「擁有多組解的最小圖形」，以及一些「僅有單組解的最小圖形」，來拼成有助於我們拼出目標大長方形的「中圖形」。找出可運用的中圖形後，我們可以針對其特性（例如：任一邊長為奇數）拼出目標大長方形，一一討論各邊長分類下的長方形，是否都能由 L＋O 或 T＋O 這兩種拼片組合而成？若可以，能找出哪些解？這是我們期望延伸至長方形能首要達成的目標。

（一） $m \times n$的長方形中，討論 L、O 兩種拼片的組合

1. 定義 L、O 的最小圖形與中圖形

(1) **最小圖形**：能同時完全由n個 L 拼片所組成，也能同時由n個 O 拼片所組成。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><td colspan="3">$LO_{2\times4}$ ：可以完全由 L 或完全由 O 所組成，且由最少數量 L 與 O 組成的圖形，其面積為 2x4，所以命名為$LO_{2\times4}$。（在等拼片的拼法中，該解使用最大數量的 L 拼片或最小數量的 L 拼片（或其他可行數量）與 O 組成目標大長方形，每組最小圖形皆有以上兩種可能，此判斷方式可以得出由數個最小圖形或中圖形所拼成的長方形，a 和 b 每個解的規律。）</td></tr>
<tr><td>情況一：全部由 L 拼片組成的解（L 最大值的拼法）。
$2L_{2\times4} = 2L$
</td><td>情況二：全部由 O 拼片組成的解（O最大值的拼法）。
$2O_{2\times4} = 2O$
</td><td>衍生圖形：由$O_{2\times4}$切割的衍生圖形(此圖形的數量影響 O 的最小值及 L 的最大值）
$O_{2\times2} = 1O$
</td></tr>
<tr><td colspan="3">最小圖形$LO_{2\times4}$中 L 和 O 的數量關係：
$n(LO_{2\times4}) = x(O_{2\times4}) + y(L_{2\times4})$ ，其中 $x + y = 2n$
因此，$n(LO_{2\times4}) \in \{2(n-k)O + (2k)L \mid k = 0,1,2 \ldots . n\}$
</td></tr>
</table>

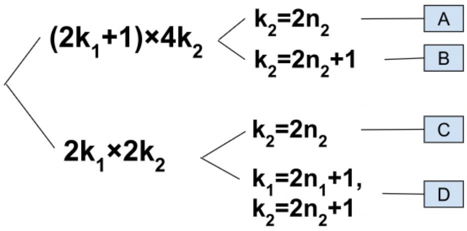
(2) **中圖形**：由 L 拼片和 O 拼片組成，為滿足拼成目標大長方形的需求，所拼出的矩形。例： $LO_{3\times8}$ 能滿足拚成「奇數邊長的大長方形」的需求，且為最小寬度（短邊為 3），能拼出其他邊長為奇數的矩形，下表為 $LO_{3\times8}$ 的圖形討論與延伸。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><td colspan="3">$LO_{3\times8}$：由 4 個 L 和 1 組 $L_{2\times4}$ 所組成。滿足「奇數邊長」組成的 3x8 矩形，$LO_{3\times8}$ 所需使用到的 1 組 $L_{2\times4}$會有兩種拼片組合，$L_{2\times4}$ 和 $O_{2\times4}$。</td></tr>
<tr><td>情況一：含有 $L_{2\times4}$ 的解。
$6L_{3\times8} = 6L$
</td><td>情況二：含有 $O_{2\times4}$ 的解。
$4L2O_{3\times8} = 4L2O$
</td><td>衍生圖形$LO_{3\times4}$：由 $4L2O_{3\times8}$ 切割的衍生圖形。
$2L1O_{3\times4} = 2L1O$
</td></tr>
</table>

2. 長方形邊長性質進行分類：

已知所有拼片的面積都是 4，所以大長方形面積必符合 4 的倍數。透過邊長得奇偶特性可以分為兩大類：(奇數) × (4 的倍數)、(2 的倍數) × (2 的倍數)。此外，還可以針對其中一個變數的奇偶性進行分類。總共分為四類討論，如下圖架構表：



3. 長方形$m \times n$切割結果討論

(1) $(2k_1+1)\times 4k_2$，$k_2=2n_2$　分類 A

$(2k_1+1)\times 4k_2$

$=[(2k_1-2)+3]\times 4(2n_2)$

$=(2k_1-2)(8n_2)\times 3(8n_2)$

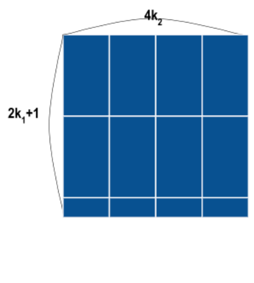
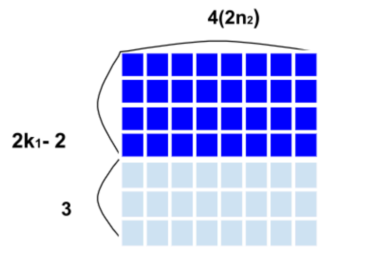
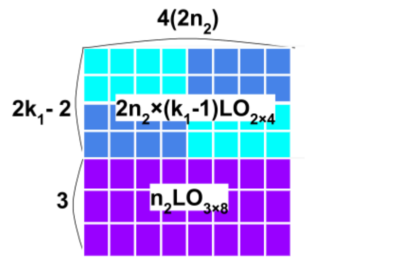
$=8n_2(2k_1-2)+(8n_2\times 3)$

$=(4\times 2)(2n_2\times k_1-2n_2)+(8\times 3)n_2$

$=(LO_{2\times 4})[2n_2\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2$

此類長方形，可以切割為$(LO_{2\times 4})[2n_2\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2$，

即 「$2n_2\times(k_1-1)$個$LO_{2\times 4}$」 和「 n_2 個 $LO_{3\times 8}$」.（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times 4k_2$	$(2k_1+1)\times 4k_2$ $=[(2k_1-2)+3]\times 4(2n_2)$ $=8n_2(2k_1-2)+(8n_2\times 3)$	$8n_2(2k_1-2)+(8n_2\times 3)$ $=(4\times 2)[2n_2\times(k_1-1)]+(8n_2\times 3)$ $=(LO_{2\times 4})[2n_2\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 L、O拼片組成可能：

$(LO_{2\times 4})[2n_2\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2$

$=(LO_{2\times 4})[n_2\times(2k_1-2)]+[(LO_{2\times 4})+4L]n_2$

$=(LO_{2\times 4})[n_2\times(2k_1-1)]+(4n_2)L$

因此$(2k_1+1)\times 4k_2\in\{2[(n_2\times(2k_1-1))-k]O+(2k)L\mid k=0,1,2\ldots,[n_2\times(2k_1-1)]\}\ +\ L(4n_2)$

整理後可得

$(2k_1+1)\times 4k_2\in\ \{2[(n_2\times(2k_1-1))-k]O+(2k+4n_2)L\mid k=0,1,2\ldots,[n_2\times(2k_1-1)]\}$

(2) $(2k_1+1)\times 4k_2$，$k_2=2n_2+1$　　分類 B

$(2k_1+1)\times 4k_2$

$=[(2k_1-2)+3]\times 4k_2$

$=4(2n_2+1)(2k_1-2)+[4(2n_2+1)\times 3]$

$=(4\times 2)[(2n_2+1)\times(k_1-1)]+[(8n_2+4)\times 3]$

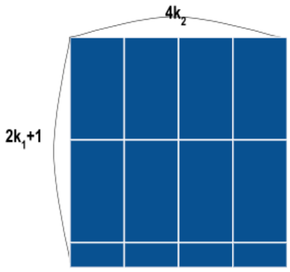
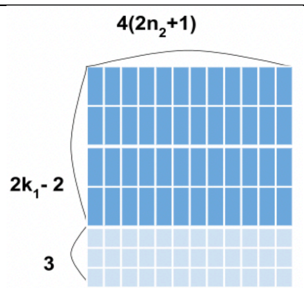
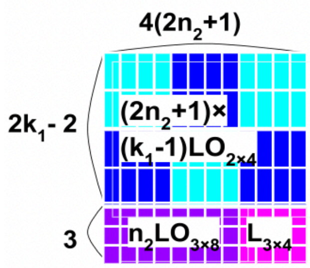
$=(4\times 2)[(2n_2+1)\times(k_1-1)]+(8n_2\times 3)+(4\times 3)$

$=(LO_{2\times 4})[(2n_2+1)\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2+(LO_{3\times 4})$

此類長方形，可以切割為$(LO_{2\times 4})[(2n_2+1)\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2+(LO_{3\times 4})$，

即 「$(2n_2+1)\times(k_1-1)$ 個$LO_{2\times 4}$」、「 n_2 個 $LO_{3\times 8}$」和「 1 個 $LO_{3\times 4}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times 4k_2$	$(2k_1+1)\times 4k_2$ $=[(2k_1-2)+3]\times 4k_2$ $=4(2n_2+1)(2k_1-2)$ $+[4(2n_2+1)\times 3)]$	$4(2n_2+1)(2k_1-2)+[4(2n_2+1)\times 3)]$ $=(4\times 2)[(2n_2+1)\times(k_1-1)]$ $+[(8n_2+4)\times 3]$ $=(4\times 2)[(2n_2+1)\times(k_1-1)]$ $+(8n_2\times 3)+(4\times 3)$ $=(LO_{2\times 4})[(2n_2+1)\times(k_1-1)]$ $+(LO_{3\times 8})n_2+(LO_{3\times 4})$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 L、O拼片組成可能：

$(LO_{2\times 4})[(2n_2+1)\times(k_1-1)]+(LO_{3\times 8})n_2+(LO_{3\times 4})$

$=(LO_{2\times 4})[n_2\times(2k_1-2)]+[(LO_{2\times 4})+4L]n_2+2L+O$

$=(LO_{2\times 4})[n_2\times(2k_1-1)]+(4n_2+2)L+O$

因此$(2k_1+1)\times 4k_2\in\{2[(n_2(2k_1-1))-k]O+(2k)L\mid k=0,1,2\ldots,[n_2(2k_1-1)]\}+$

$O+L(4n_2+2)$

整理後可得

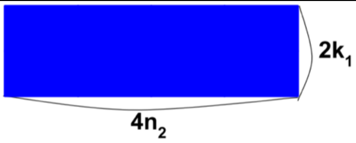
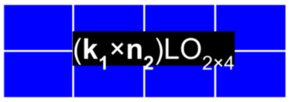
$(2k_1+1)\times 4k_2\in\{[(2n_2(2k_1-1))-2k+1]O+[2k+(4n_2+2)]L\mid k=0,1,\ldots,[n_2(2k_1-1)]\}$

(3) $2k_1\times 2k_2$，$k_2=2n_2$　　分類 C

$2k_1\times 2k_2=(2\times 4)\times(k_1\times n_2)=(LO_{2\times 4})\times(k_1\times n_2)$

此類長方形，可以切割為$(LO_{2\times 4})\times(k_1\times n_2)$，即 「$(k_1\times n_2)$個$LO_{2\times 4}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步
	
$2k_1 \times 2k_2 = 2k_1 \times 4n_2$	$2k_1 \times 4n_2 = (2 \times 4) \times (k_1 \times n_2) = (LO_{2\times4}) \times (k_1 \times n_2)$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 L、O拼片組成可能：

整理後可得 $2k_1 \times 2k_2 \in \{2[(k_1 \times n_2) - k]O + (2k)L \mid k = 0,1,2 \ldots, (k_1 \times n_2)\}$

(4) $2k_1 \times 2k_2$，$k_1 = 2n_1 + 1$、$k_2 = 2n_2 + 1$ 分類 D

$2k_1 \times 2k_2$

$= 2(2n_1 + 1) \times 2(2n_2 + 1)$

$= (4n_1 + 2) \times (4n_2 + 2)$

$= (2 \times 4)(2n_1 \times n_2) + (4 \times 2)n_1 + (2 \times 4)n_2 + (2 \times 2)$

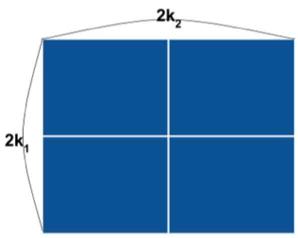
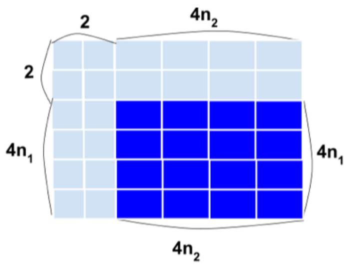
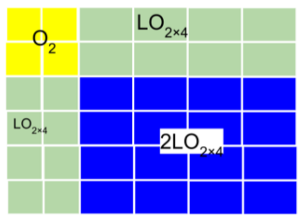
$= (2 \times 4) \times (2n_1 \times n_2 + n_1 + n_2) + (2 \times 2)$

$= (LO_{2\times4})(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) + 1(O_{2\times2})$

此類長方形，可以切割為$(LO_{2\times4})(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) + 1(O_{2\times2})$，

即 「$(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2)$個$LO_{2\times4}$」和「 1個$(O_{2\times2})$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$2k_1 \times 2k_2$	$2k_1 \times 2k_2$ $= 2(2n_1 + 1) \times 2(2n_2 + 1)$ $= (4n_1 + 2) \times (4n_2 + 2)$	$(4n_1 + 2) \times (4n_2 + 2)$ $= (2 \times 4)(2n_1 \times n_2) + (4 \times 2)n_1$ $+(2 \times 4)n_2 + (2 \times 2)$ $= (LO_{2\times4})(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2)$ $+1(O_{2\times2})$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 L、O拼片組成可能：

$(LO_{2\times4})(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) + 1(O_{2\times2}) = (LO_{2\times4})(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) + 1O$

因此$2k_1 \times 2k_2 \in \{[2(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) - 2k]O + (2k)L \mid k = 0,1, \ldots, (n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2)\} + O$

整理後可得

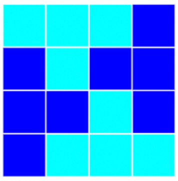
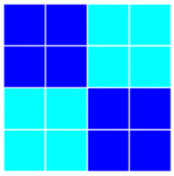
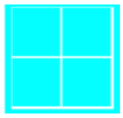
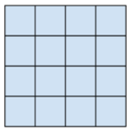
$2k_1 \times 2k_2 \in \{[2(n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2) - 2k + 1]O + (2k)L \mid k = 0,1,2 \ldots, (n_1 \times 2n_2 + n_1 + n_2)\}$

（二） $m \times n$的長方形中，討論 T、O 兩種拼片的組合

1. 定義 T、O 的最小圖形與中圖形

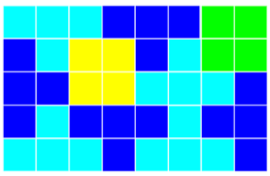
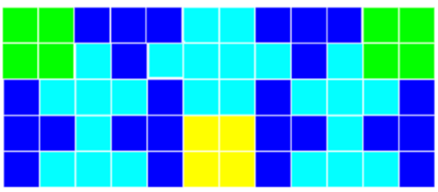
(1) **最小圖形**：能同時完全由 n 個 T 拼片所組成，也能同時由 n 個O拼片所組成。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><td colspan="3">$TO_{4\times4}$：可以完全由T或完全由 O 所組成，且由最少數量T與 O 組成的圖形，其面積為 4x4，所以命名為$LO_{2\times4}$。</td></tr>
<tr><td>情況一：全部由 T 拼片組成的解（T 最大值的拼法）。
$4T_{4\times4} = 4T$
</td><td>情況二：全部由 O 拼片組成的解（O最大值的拼法）。
$4O_{4\times4} = 4O$
</td><td>衍生圖形：由$O_{4\times4}$切割的衍生圖形（此圖形的數量影響 O 的最小值及 T 的最大值）
$O_{2\times2} = 1O$
</td></tr>
<tr><td colspan="3">最小圖形$TO_{2\times4}$中 T 和O的數量關係：
$n(TO_{4\times4}) = x(T_{4\times4}) + y(O_{4\times4})$ ，其中 $x + y = 2n$
因此，$n(TO_{4\times4}) \in \{4(n-k)O + (4k)T \mid k = 0,1,2 \ldots.n\}$
</td></tr>
</table>

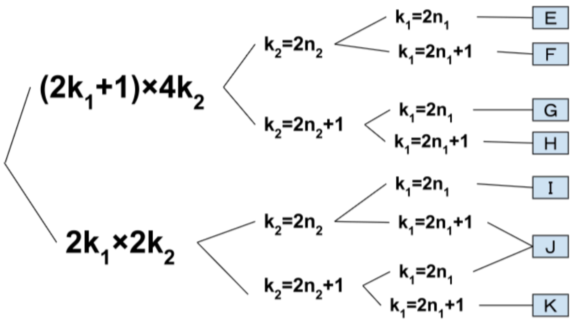
(2) **中圖形**：由 T 拼片和 O 拼片組成，為滿足拼成目標大長方形的需求，所拼出的矩形，例： $TO_{5\times8}$ 能滿足拚成「奇數邊長的大長方形」（如右圖）的需求，且為最小面積（沒有面積更小且由 T 和 O 組成的奇數邊長矩形），邊長為 5，能拼出其他邊長為奇數的矩形，進而完成目標大長方形，下表為 $TO_{5\times8}$ 的圖形討論與延伸。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><td>$TO_{5\times8}$：由 8 個 T 和 2 個 L 所組成。滿足「奇數邊長」且「以最少數量 T 與 O」組成的 5x8 矩形。
$8T2O_{5\times8} = 8T2O$
</td></tr>
<tr><td>衍生圖形 $TO_{5\times12}$：由 $8T2O_{5\times8}$ 擴增的衍生圖形。此圖形可以填補$8T2O_{5\times8}$所組成的圖形寬度都為 8 的倍數的問題，此圖形邊長為 12，可以使圖形變成 4 的倍數，而我們透過邊長 m 可能性的判斷，可以排除 $m \equiv 2(mod4)$ 與 $m \equiv 1(mod2)$ 這些個組合，因此我們沒有遺漏任何可行的組合。
$12T3O_{5\times12} = 12T3O$
</td></tr>
</table>

2.　長方形邊長性質進行分類：

已知所有拼片的面積都是 4，所以大長方形面積必符合 4 的倍數。透過邊長的奇偶特性分類，架構表如下：



3.　長方形$m \times n$切割結果討論

(1)　$(2k_1+1)\times(4k_2)$,　$k_1=2n_1$,　$k_2=2n_2$　　分類 E

$(2k_1+1)\times(4k_2)$

$=\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2)]$

$=(4n_1-4)\times(8n_2)+5\times(8n_2)$

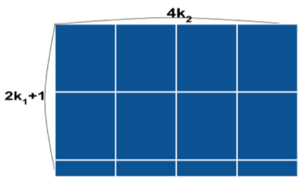
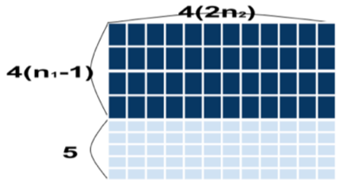
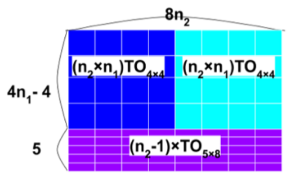
$=\ 4(n_1-1)(8n_2)+(5\times 8)(n_2)$

$=(4\times 4)(n_1-1)(2n_2)+(5\times 8)(n_2)$

$=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2)+(TO_{5\times8})(n_2)$

此類長方形，可以切割為$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2)+(TO_{5\times8})(n_2)$，

即「$[(n_1-1)(2n_2)]$個$TO_{4\times4}$」和「n_2個$TO_{5\times8}$」。（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $=\{[2(2n_1)-4+5\}$ $\times[4(2n_2)]$	$\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2)]$ $=(4n_1-4)\times(8n_2)+5\times(8n_2)$ $=\ 4(n_1-1)(8n_2)+(5\times8)(n_2)$ $=(4\times4)(n_1-1)(2n_2)\ +(5\times8)(n_2)$ $=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2)+(TO_{5\times8})(n_2)$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O拼片組成可能：

$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2)+(TO_{5\times8})(n_2)=(TO_{4\times4})[2n_2(n_1-1)]+(4T+1O)(n_2)$

因此$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{4([2n_2(n_1-1)]-k)O+(4k)T\ |k=0,1,2\ldots,[2n_2(n_1-1)]\}$

$+T(4n_2)\ +\ O(n_2)$

整理後可得

$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[8n_2(n_1-1)-4k+n_2]O+(4k+8n_2)T\ |k=0,1,2\ldots,[2n_2(n_1-1)]\}$

(2) $(2k_1+1)\times(4k_2)$，$k_1=2n_1+1$，$k_2=2n_2$　分類 F

$(2k_1+1)\times(4k_2)$

$=[2(2n_1+1)+1]\times 4(2n_2)$

$=\{[2(2n_1+1)-4]+5\}\times[4(2n_2)]$

$=[(4n_1-4)+2]\times(8n_2)+5\times(8n_2)$

$=\ [4(n_1-1)](8n_2)+2(8n_2)+(5\times 8)(n_2)$

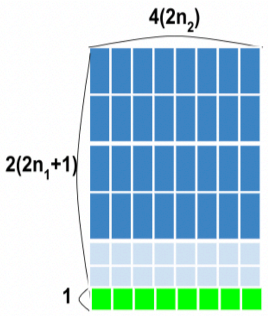
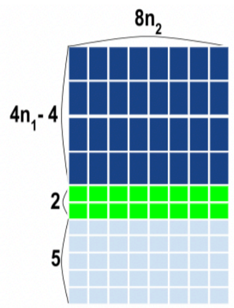
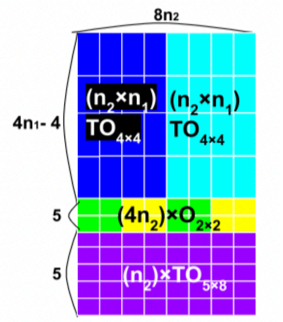
$=(4\times 4)(n_1-1)(2n_2)+(2\times 2)(4n_2)+(5\times 8)(n_2)$

$=(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)+\ (O_{2\times 2})(4n_2)+(\ TO_{5\times 8})(n_2)$

此類長方形，可以切割為$(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)+\ (O_{2\times 2})(4n_2)+(\ TO_{5\times 8})(n_2)$，

即 「$[(n_1-1)(2n_2)]$ 個 $TO_{4\times 4}$」、「$(4n_2)$個$O_{2\times 2}$」和「 (n_2) 個 $TO_{5\times 8}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $=[2(2n_1+1)+1]$ $\times 4(2n_2)$	$[2(2n_1+1)+1]\times 4(2n_2)$ $=\{[2(2n_1+1)-4]+5\}$ $\times[4(2n_2)]$ $=[(4n_1-4)+2]\times(8n_2)$ $+5\times(8n_2)$ $=\ [4(n_1-1)](8n_2)$ $+2(8n_2)+(5\times 8)(n_2)$	$[4(n_1-1)](8n_2)+2(8n_2)+(5\times 8)(n_2)$ $=(4\times 4)(n_1-1)(2n_2)+(2\times 2)(4n_2)$ $+(5\times 8)(n_2)$ $=(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)$ $+(O_{2\times 2})(4n_2)+(\ TO_{5\times 8})(n_2)$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O拼片組成可能：

$(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)+(O_{2\times 2})(4n_2)+(\ TO_{5\times 8})(n_2)$

$=(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)+\ (O_{2\times 2})(4n_2)+(8T+2O)(n_2)$

$=(TO_{4\times 4})(n_1-1)(2n_2)+\ O(6n_2)+T(8n_2)$

因此 $(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{4[(n_1-1)(2n_2)-k]O+(4k)T\ |k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2)\}$

$+O(6n_2)+T(8n_2)$

整理後可得

$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[4(n_1-1)(2n_2)-4k+6n_2]O+(4k+8n_2)T\ |k=0,1,2\ldots(n_1-1)(2n_2)\}$

(3) $(2k_1+1)\times(4k_2)$, $k_1=2n_1$, $k_2=2n_2+1$　分類 G

$(2k_1+1)\times(4k_2)$

$=\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2+1)]$

$=[(4n_1)-4]\times[4(2n_2+1)]+5\times(8n_2+4)$

$=\ [4(n_1-1)][4(2n_2+1)]+(5\times8)(n_2-1)+5(8+4)$

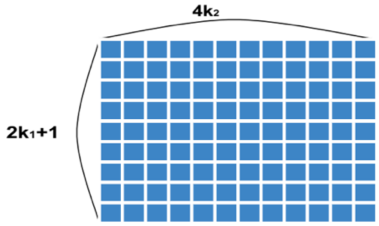
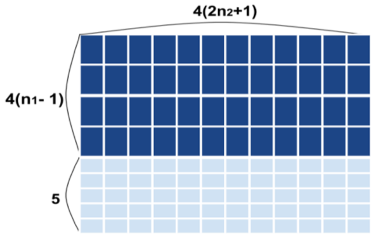
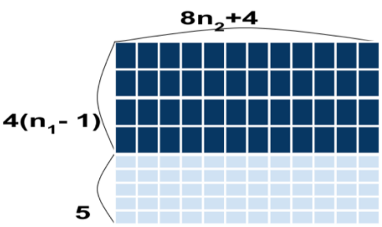
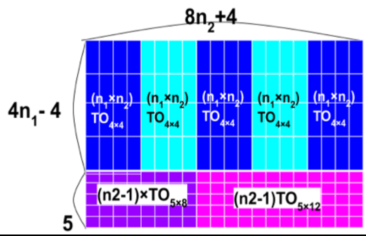
$=(4\times4)(n_1-1)(2n_2+1)+(5\times8)(n_2-1)+(5\times12)$

$=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$

此類長方形，可以切割為$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+1(TO_{5\times12})$

即 「$[(n_1-1)(2n_2+1)]$ 個 $TO_{4\times4}$」、「(n_2-1)個 $TO_{5\times8}$」和「1 個 $TO_{5\times12}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步
	
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $=\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2+1)]$
第三步	第四步
	
$\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2+1)]$ $=[(4n_1)-4]\times[4(2n_2+1)]$ $+5\times(8n_2+4)$	$[(4n_1)-4]\times[4(2n_2+1)]+5\times(8n_2+4)$ $=\ [4(n_1-1)][4(2n_2+1)]+(5\times8)(n_2-1)+5(8+4)$ $=(4\times4)(n_1-1)(2n_2+1)+(5\times8)(n_2-1)+(5\times12)$ $=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O拼片組成可能：

$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+1(TO_{5\times12})$

$=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(8T+2O)(n_2-1)+(12T+3O)$

因此$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{4[(n_1-1)(2n_2+1)-k]O+(4k)T\ |k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$

$+O[2(n_2-1)+3]\ +\ T[(n_2-1)+12]$

整理後可得

$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[4(n_1-1)(2n_2+1)-4k+2(n_2-1)+3]O+[4k+(n_2-1)+12]T$

$|k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$

(4) $\boldsymbol{(2k_1+1)\times(4k_2)}$**，** $\boldsymbol{k_1=2n_1+1}$**，** $\boldsymbol{k_2=2n_2+1}$ **分類H**

$(2k_1+1)\times(4k_2)$

$=[2(2n_1+1)+1]\times[4(2n_2+1)]$

$=\{[2(2n_1+1)-4]+5\}\times[4(2n_2+1)]$

$=[(4n_1-4)+2]\times(8n_2+4)+5\times(8n_2+4)$

$=\ [4(n_1-1)](8n_2+4)+2(8n_2+4)+(8\times5)(n_2-1)+5(8+4)$

$=(4\times4)(n_1-1)(2n_2+1)+(2\times2)(4n_2+2)+(8\times5)(n_2-1)+(5\times12)$

$=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+\ (O_{2\times2})(4n_2+2)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$

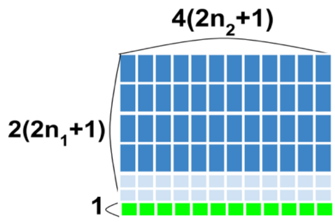
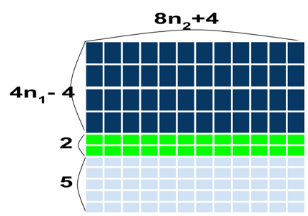
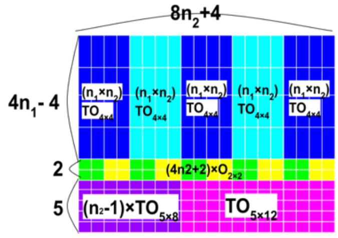
此類長方形，可以切割為

$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+\ (O_{2\times2})(4n_2+2)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$，

即 「$[(n_1-1)(2n_2+1)]$ 個 $TO_{4\times4}$」、「$(4n_2+2)$個$O_{2\times2}$」、「(n_2-1)個$(TO_{5\times8})$」

和「 (1個$(TO_{5\times12})$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $=[2(2n_1+1)+1]$ $\times[4(2n_2+1)]$	$[2(2n_1+1)+1]\times[4(2n_2+1)]$ $=\{[2(2n_1+1)-4]+5\}$ $\times[4(2n_2+1)]$ $=[(4n_1-4)+2]\times(8n_2+4)$ $+5\times(8n_2+4)$	$[(4n_1-4)+2]\times(8n_2+4)$ $+5\times(8n_2+4)$ $=(4\times4)(n_1-1)(2n_2+1)$ $+(2\times2)(4n_2+2)$ $+(8\times5)(n_2-1)+(5\times12)$ $=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)$ $+(O_{2\times2})(4n_2+2)$ $+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的T、O拼片組成可能：

$(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+(O_{2\times2})(4n_2+2)+(TO_{5\times8})(n_2-1)+(TO_{5\times12})$

$=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+\ O(4n_2+2)+(8T+2O)(n_2-1)+12T+3O$

$=(\ TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2+1)+\ O(6n_2+3)+T(8n_2+4)$

因此$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{4[(n_1-1)(2n_2+1)-k]O+(4k)T\ |k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$

$+\ \ O(6n_2+3)\ \ +\ \ T(8n_2+4)$

整理後可得 $(2k_1+1)\times(4k_2)$

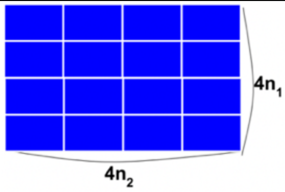
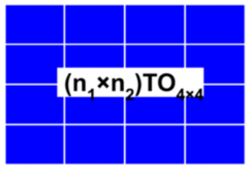
$\in\{[4(n_1-1)(2n_2+1)-4k+(6n_2+3)]O+[4k+(8n_2+4)]T\ |k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$

(5) $2k_1 \times 2k_2$， $k_1 = 2n_1$， $k_2 = 2n_2$ 分類 I

$2k_1 \times 2k_2 = 2(2n_1) \times 2(2n_2) = 4n_1 \times 4n_2 = (4 \times 4)(n_1 \times n_2) = TO_{4\times4}(n_1 \times n_2)$

此類長方形，可以切割為 $TO_{4\times4}(n_1 \times n_2)$，即 「$(n_1 \times n_2)$個 $TO_{4\times4}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><th>第一步</th><th>第二步</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$2k_1 \times 2k_2 = 2(2n_1) \times 2(2n_2) = 4n_1 \times 4n_2$</td><td>$4n_1 \times 4n_2 = (4 \times 4)(n_1 \times n_2) = TO_{4\times4}(n_1 \times n_2)$</td></tr>
</table>

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O 拼片組成可能：

可得 $2k_1 \times 2k_2 \in \{4(n_1 \times n_2 - k)O + (4k)T \mid k = 0,1,2 \dots, (n_1 \times n_2)\}$

(6) $2k_1 \times 2k_2$， $k_1 = 2n_1 + 1$， $k_2 = 2n_2$（$k_1 = 2n_1$， $k_2 = 2n_2 + 1$ 同理） 分類 J

$2k_1 \times 2k_2$

$= 2(2n_1 + 1) \times 2(2n_2)$

$= (4n_1 + 2) \times 4n_2$

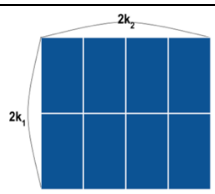
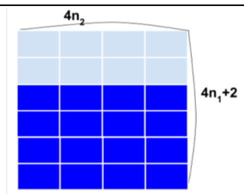
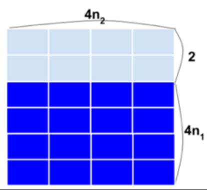
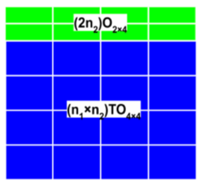
$= (4 \times 4)(n_1 \times n_2) + (2 \times 4)n_2$

$= (4 \times 4) \times (n_1 \times n_2) + (2 \times 2) \times (2n_2)$

$= TO_{4\times4}(n_1 \times n_2) + O_{2\times2}(2n_2)$

此類長方形，可以切割為 $TO_{4\times4}(n_1 \times n_2) + O_{2\times2}(2n_2)$，即 「$(n_1 \times n_2)$個 $TO_{4\times4}$」和「$(2n_2)$個$O_{2\times2}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><th>第一步</th><th>第二步</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$2k_1 \times 2k_2$</td><td>$2k_1 \times 2k_2 = 2(2n_1 + 1) \times 2(2n_2) = (4n_1 + 2) \times 4n_2$</td></tr>
<tr><th>第三步</th><th>第四步</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$(4n_1 + 2) \times 4n_2$
$= (4 \times 4)(n_1 \times n_2) + (2 \times 4)n_2$</td><td>$(4 \times 4)(n_1 \times n_2) + (2 \times 4)n_2$
$= (4 \times 4) \times (n_1 \times n_2) + (2 \times 2) \times (2n_2)$
$= TO_{4\times4}(n_1 \times n_2) + O_{2\times2}(2n_2)$</td></tr>
</table>

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O拼片組成可能：

$TO_{4\times4}(n_1\times n_2)+O_{2\times2}(2n_2)=TO_{4\times4}(n_1\times n_2\,)+O(2n_2)$

因此$2k_1\times 2k_2\ \in\{4(n_1\times n_2-k)O+(4k)T\ |k=0,1,2\,\ldots,(n_1\times n_2)\}+O(2n_2)$

整理後可得 $2k_1\times 2k_2\ \in\{[4(n_1\times n_2\ -k)+2n_2]O+(4k)T\ |k=0,1,2\,\ldots,(n_1\times n_2)\}$

(7) $\boldsymbol{2k_1\times 2k_2,\ \ k_1=2n_1+1\,,\ \ k_2=2n_2+1}$ 分類 K

$2k_1\times 2k_2$

$=2(2n_1+1)\times 2(2n_1+1)$

$=(4n_1+2)\times(4n_2+2)$

$=(4\times4)(n_1\times n_2)+(4\times2)n_1+(2\times4)n_2+(2\times2)$

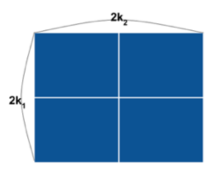
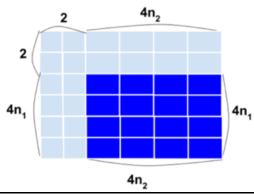
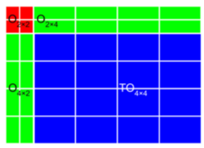
$=(4\times4)(n_1\times n_2)+(2\times2)(2n_1+2n_2+1)$

$=(\,TO_{4\times4}\,)(n_1\times n_2)+(O_{2\times2})(2n_1+2n_2+1)$

此類長方形，可以切割為$TO_{4\times4}(n_1\times n_2)+O_{2\times2}(2n_1+2n_2+1)$，

即 「$(n_1\times n_2)$個$TO_{4\times4}$」和「$(2n_1+2n_2+1)$個$O_{2\times2}$」。

（本表格由作者自行繪製、製作）

第一步	第二步	第三步
		
$2k_1\times 2k_2$	$2k_1\times 2k_2$ $=2(2n_1+1)\times 2(2n_1+1)$ $=(4n_1+2)\times(4n_2+2)$ $=(4\times4)(n_1\times n_2)$ $+(4\times2)n_1+(2\times4)n_2+(2\times2)$	$(4\times4)(n_1\times n_2)+(2\times2)(2n_1+2n_2+1)$ $=(\,TO_{4\times4}\,)(n_1\times n_2)$ $+(O_{2\times2})(2n_1+2n_2+1)$ $=\ TO_{4\times4}(n_1\times n_2)$ $+O_{2\times2}(2n_1+2n_2+1)$

接著，我們根據以上最小圖形、中圖形，討論該類長方形可能的 T、O拼片組成可能：

$TO_{4\times4}(n_1\times n_2)+O_{2\times2}(2n_1+2n_2+1)=(\,TO_{4\times4}\,)(n_1\times n_2)+O(2n_1+2n_2+1)$

因此 $2k_1\times 2k_2\in\{4[(n_1\times n_2)-k]O+(4k)T\ |k=0,1,2\,\ldots,(n_1\times n_2)\}+O(2n_1+2n_2+1)$

整理後可得

$2k_1\times 2k_2\in\{[4(n_1\times n_2-k)+2n_1+2n_2+1]O+(4k)T\ |k=0,1,2\,\ldots,(n_1\times n_2)\}$

參、討論

一、 有限格點到無限格點 n

最初遇見游森棚教官的數學題並確定科展研究主題時，我們將題目延伸至不同面積的正方形$(4 \times 4, 6 \times 6, \ldots, 12 \times 12)$，一度僅依靠繪圖求解，卻發現部分圖形理論上有解但無法表示，導致研究陷入瓶頸。後來，我們修正錯誤的圖片與理論，最終成功繪製正確圖形，並推導出一般解。

二、 正方形 $n \times n$ 到長方形 $m \times n$

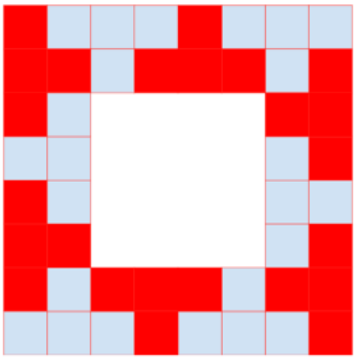
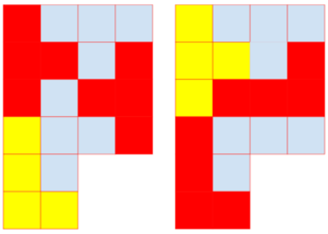
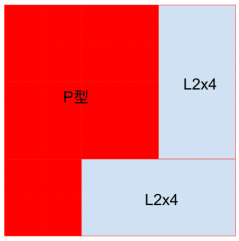
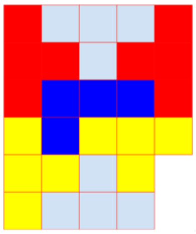
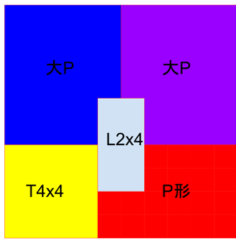
從正方形的黑白格方法到以最小圖形拼合長方形的方法，我們嘗試分析中圖形的特性來推導長方形的特性。起初，我們嘗試先以2×2正方形填滿區域，然後將其變形成其他圖形，並分析變形規律以推導長方形的規律。然而，由於單數邊長的長方形無法完全由2×2正方形填滿，加上計算難度過大，列式極為複雜，因此最終未採用此方法。我們也嘗試透過繪製圖形座標後進行旋轉與位移分析，雖然在有限格點與少量拼片的情況下可行，但由於數據量龐大且效果有限，最終也未使用這個方法。

三、 再戰正方形 T 拼片與 L 拼片組合

在正方形 LO 與 TO 組合的研究完成後，我們想要嘗試森棚教官題沒有提到的「TL 組合」的可行性。我們嘗試了多種方法，包括黑白格、環狀結構與以多種 TL 組合的拼片填充正方形。其中，黑白格的方式雖能找到可能的組合，卻無法說明特定組合無解的情況；環形結構則由於過於複雜而放棄。在完成長方形的研究後，熟悉了最小圖形和中圖形的做法後，我們嘗試「以多種 TL 組合的拼片填充正方形」的方法來研究 TL 拼片組合。

首先將正方形以邊長進行分類，第一類： $n \equiv 0\, mod4$ 、第二類：$n \equiv 2\, mod4$ 。第一類的正方形由 $T_{4\times4}$、 $L_{4\times4}$ 與 $TL_{4\times8}$ 組成（證明與討論 3.2）。但是，第二類則較難看出規律、難以找出一般化方法。例如：6×6 由一個 P 形與兩個 $L_{4\times4}$ 拼成，而 10x10 則由兩個大 P、一個 P 形、一個 $T_{4\times4}$ 與 $L_{2\times4}$ 組成，沒有準確的規律，我們也因此花費許多時間探究。因此，我們想在未來更徹底研究這部分。

（本表格由作者自行繪製、製作）

<table>
<tr><td>環狀結構（以8 × 8 為例）</td><td>P 型(4T1L，2T3L)</td><td>6 × 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>大 P 型(6T1L)</td><td>10 × 10</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

四、 未來展望

首先，我們希望進一步發展正方形中 T、L 拼片組合的解法。目前的做法仍不夠嚴謹與完整，我們認為可找到更有效率且有系統的證明方法。

其次，我們想研究 S、I 等四連方塊的拼塊組數，並嘗試任意兩種組合找出規律，或將問題延伸至五連方塊，探討其在5 × 5 、10 × 10等圖形中的拼塊組合數。

最後，我們在研究過程中，花費大量時間嘗試圖形排列，不斷繪製、擦除與重試，直到找到可行解。我們曾考慮撰寫程式來輔助計算，但因程式能力不足而作罷。未來，希望能結合資訊技術，透過演算法讓電腦自動化計算，以提高效率與準確性。

肆、結論

本研究討論了在 $n \times n$ 的正方形中，使用 L 型拼片、T 型拼片與 O 型拼片任兩種組合，完整覆蓋正方形的所有可能組合，並分析這些組合所遵循的規律。

✓ 若使用 a 個 L（T）拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？

　我們已找出在$n \times n$ 的大正方形中，(a,b)的解、最大值與可能組數的規律。

✓ 若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 L 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？

　目前我們以現有的規律來推導出兩類邊長的正方形中，(a,b)的解、最大值與可能組數的規律，但我們希望之後能計算、歸納出更為精準、正確的規律。

接著，我們將討論的範圍延伸至長方形，首先利用長方形邊長的奇偶性進行分類，在不同條件限制下，推導出 LO 及 TO 兩種拼片組合的圖形與代數式證明。

✓ 若使用 a 個 L（T）拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $m \times n$ 的大長方形，則(a,b)可以是多少？

　我們先找到最小圖形與中圖形，進行任意邊長長方形的切割，再透過分析中圖型的特性，有效率地推導出拼片數量可能的解。

本研究成功探討了以上 5 個研究問題，並在研究過程中嘗試了不同的解法，遇到了很多困難也學習到了很多知識。此外，我們也希望未來能根據此作品進行更深、更廣的探究。

伍、參考文獻資料與圖片來源

一、　參考文獻

[1]游森棚(2023)特約專欄〈森棚教官數學題──一塊拼，兩塊拼〉科學研習雙月刊，62-5。

[2]魏伯沅、葉晨熹(2021)，從巧拼問題探究 L 型與 I 型、田型的覆蓋填滿之解析。第六十一屆國小組數學科。

[3]吳沛昀、柯睿穎(2017)，虧格與方陣的最後一塊拼圖。第五十七屆國中組數學科。

[4]蔡建洲、李育安、王薏瑄、張乃欣(2010)，國中組智慧方塊挑戰之旅。第五十屆國中組數學科。

二、　圖片來源

本作品說明書中所有圖形及表格，皆由作者親自繪製、製作。

【評語】030411

這份科展作品取材自游森棚教授於《科學研習雙月刊》的專欄文章，展現了同學們對數學領域的熱情與探索精神。雖然過去已有相關科展作品，但本研究選擇探討「混合種類」的四方連塊拼法，這是一個更具挑戰性且新穎的研究方向，值得高度肯定。

四方連塊（Tetromino）的相關問題在組合數學中一直以來都是相當具有難度的經典議題。本作品能夠勇敢挑戰此一領域，並且運用了有效的數學技巧，例如透過棋盤格著色法與奇偶性分析，清晰地證明了某些拼片組合的不可能性。這些證明過程不僅展現了嚴謹的邏輯推理能力，也為複雜的組合問題提供了清晰的解決思路。此外，研究中提出的系統性構造解法，顯示出團隊不僅能排除不可能，更能主動建構出可行的拼法，這是非常寶貴的研究能力。

對於未來的研究，這裡提供的建議是：組合問題的探索過程往往涉及大量的嘗試與可能性驗證，這正是電腦程式設計能夠發揮巨大作用的地方。若能學習並輔助電腦程式來進行窮舉搜尋或驗證猜想，不僅可以大幅提升研究效率，避免耗時的手動嘗試，更有可能發現隱藏在龐大數據背後的規律與模式。

總體而言，這是一件出色的科展作品，展現了扎實的數學思維與解決問題的潛力。期待作者們未來能持續深化這個有趣的研究，或將這份研究熱情投入到更廣闊的科學領域中。

作品海報

四方連塊 拼圖問題之研究

摘要

此研究探討「L 型、T 型和 O 型任兩種拼片組合在n × n的正方形」及「LO、TO 兩種拼片組合在$m \times n$的長方形」中的排列可行性規律。正方形的部分，我們透過黑白格排列法找出可行的解與排法，並分析不同邊長正方形下的規律與極值，做出分類。接下來，我們將長方形進行切割成小圖形與中圖形、分析性質、找出一般化的公式，推導出矩形中 LO 與 TO 數量的最大與最小值規律。

壹、前言

研究動機

我們在嘗試與討論後解開〈森棚教官數學題——一塊拼，兩塊拼〉中的題目：

1. 16 個 T 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
2. 15 個 L 拼片加 1 個 O 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
3. 15 個 T 拼片加 1 個 O 拼片可以拼成 8x8 的大正方形嗎？
4. a 個 T 拼片加b 個 O 拼片拼成 8x8 的大正方形 a 和 b 可以是多少？

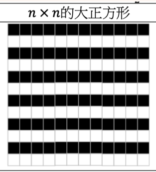
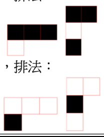
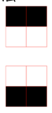
解開以上幾題之後，我們對此深感興趣，認為我們能探討兩大方向「圖形的尺寸」及「不同形狀拼片數量的組合」做為研究的方向並進行深入的研究。

研究問題

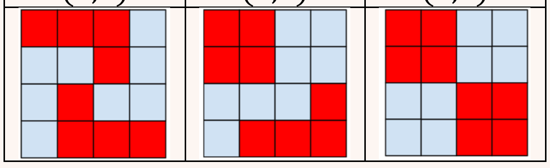
問題一：若使用 a 個 L 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
問題二：若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
問題三：若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 L 拼片拼成 $n \times n$ 的大正方形，則(a,b)可以是多少？
問題四：若使用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $m \times n$ 的大長方形，則(a,b)可以是多少？
問題五：若使用 a 個 L 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 $m \times n$ 的大長方形，則(a,b)可以是多少？

貳、研究方法與過程

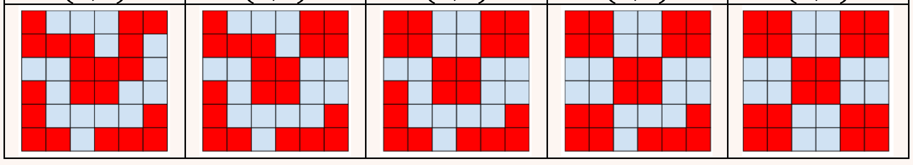
正方形

$n \times n$的大正方形	L 拼片佔用的黑白格數量	O 拼片佔用的黑白格數量
	3B1W，排法： 1B3W，排法：	2B2W，排法：

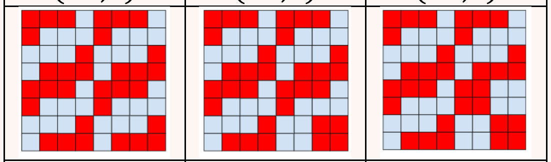
4×4的正方形中，L、O 拼片的(a,b)可能為何？

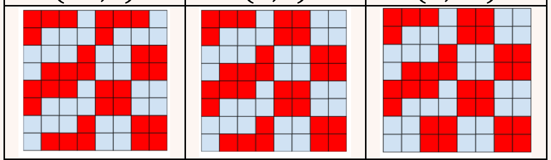
(4,0)	(2,2)	(0,4)
		

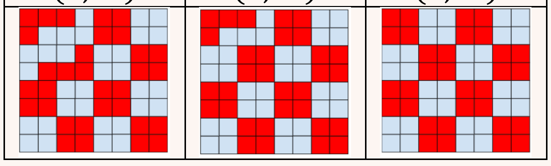
6×6的正方形中，L、O 拼片的(a,b)可能為何？

(8,1)	(6,3)	(4,5)	(2,7)	(0,9)
				

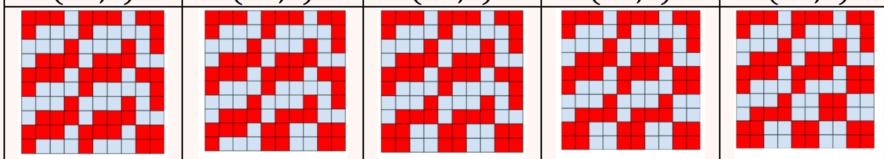
8×8的正方形中，L、O 拼片的(a,b)可能為何？

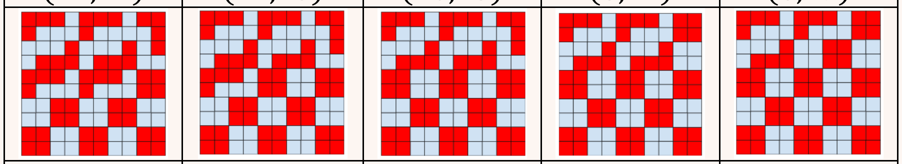
(16,0)	(14,2)	(12,4)
		

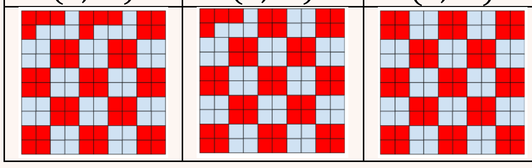
(10,6)	(8,8)	(6,10)
		

(4,12)	(2,14)	(0,16)
		

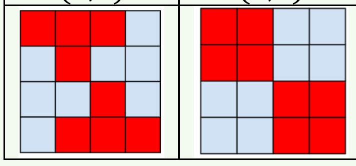
10×10的正方形中，L、O 拼片的(a,b)可能為何？

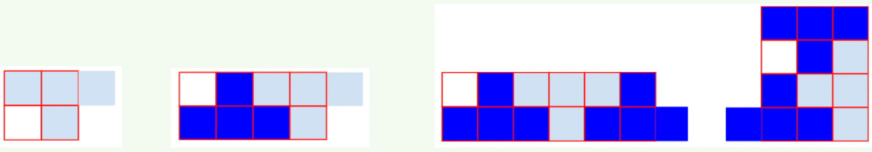
(24,1)	(22,3)	(20,5)	(18,7)	(16,9)
				

(14,11)	(12,13)	(10,15)	(8,17)	(6,19)
				

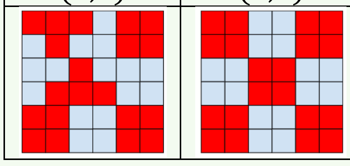
(4,21)	(2,23)	(0,25)		
				

4×4的正方形中，T、O 拼片的(a,b)可能為何？

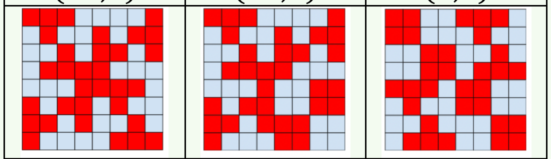
(4,0)	(0,4)	
		

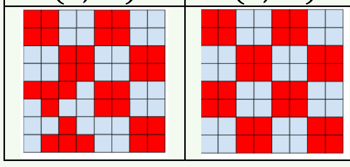


6×6的正方形中，T、O 拼片的(a,b)可能為何？

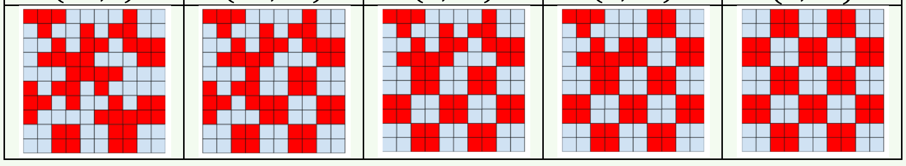
(4,5)	(0,9)			
				

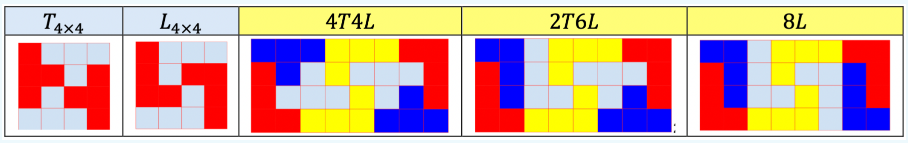
8×8的正方形中，T、O 拼片的(a,b)可能為何？

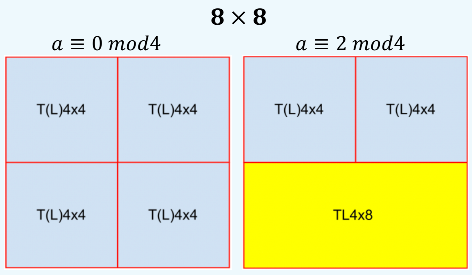
(16,0)	(12,4)	(8,8)
		

(4,12)	(0,16)	
		

10×10的正方形中，T、O 拼片的(a,b)可能為何？

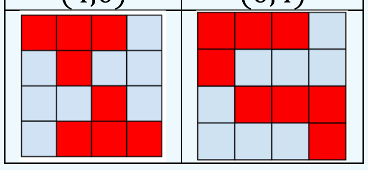
(16,9)	(12,13)	(8,17)	(4,21)	(0,25)
				





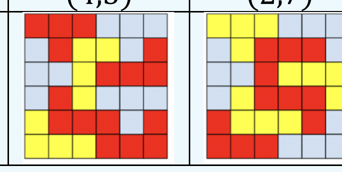
4 × 4的正方形中，T、L 拼片的(a,b)可能為何？

(4,0)	(0,4)



6 × 6的正方形中，T、L 拼片的(a,b)可能為何？

(8,1)	(6,3)	(4,5)	(2,7)
此組合無法得出任何一組解 詳見作品說明書	此組合無法得出任何一組解 詳見作品說明書		

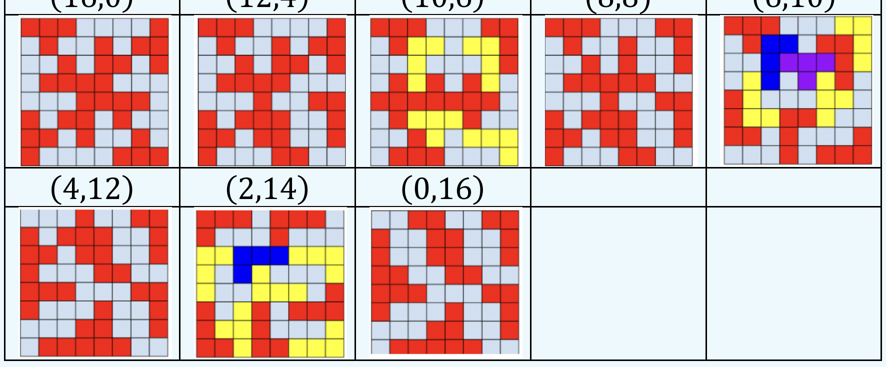


10 × 10的正方形中，T、L 拼片的(a,b)可能為何？

(24,1)	(22,3)	(20,5)	(18,7)	(16,9)
此組合無法得出任何一組解 詳見作品說明書	此組合無法得出任何一組解 詳見作品說明書			
(14,11)	(12,13)	(10,15)	(8,17)	(6,19)
(4,21)	(2,23)			

8 × 8的正方形中，T、L 拼片的(a,b)可能為何？

(16,0)	(12,4)	(10,6)	(8,8)	(6,10)
(4,12)	(2,14)	(0,16)		



根據上述的數據組合統整過後，我們得到了下列的一般化結果：

拼片組合的種類	a的最大值	可能的(a,b)組合、組合數
L、O	$n\equiv 0(mod4)$時，$a_{max}=\frac{n^2}{4}$ $n\equiv 2(mod4)$時，$a_{max}=\frac{n^2}{4}-1$	$(a,b)=\{(2k,\frac{n^2}{4}-2k)\mid k=0,1,2,\ldots,\frac{a_{max}}{4}\}$ $n\equiv 0(mod4)$時，有$\frac{n^2}{8}+1$組解；n ≡ 2(mod4)時，有$\frac{n^2+4}{8}$組解。
T、O	$n\equiv 0(mod4)$時，$a_{max}=\frac{n^2}{4}$ $n\equiv 2(mod4)$時，$a_{max}=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2\times 4$	$(a,b)=\{(4k,\frac{n^2}{4}-4k)\mid k=0,1,2,\ldots,\frac{a_{max}}{4}\}$ $n\equiv 0(mod4)$時，有$\frac{n^2}{16}+1$組解；n ≡ 2(mod4)時，有$\frac{a_{max}}{4}+1$組解。
T、L	$n\equiv 0(mod4)$時，$a_{max}=\frac{n^2}{4}$ $n\equiv 2(mod4)$時，$a_{max}=\frac{n^2}{4}-5$	$(a,b)=\{(2k,\frac{n^2}{4}-2k)\mid k=k_{min},k_{min}+1,\ldots,\frac{a_{max}}{2}\}$ $n\equiv 0(mod4)$時，有$\frac{a_{max}}{2}$組解；n ≡ 2(mod4)時，有$\frac{a_{max}}{2}$組解。

長方形

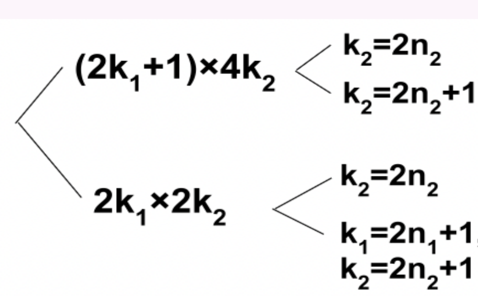
我們透過找出「擁有多組解的「最小圖形」與「中圖形」來探討長方形區域的拼圖問題。找出可運用的中圖形後，我們可以針對其特性（例如：寬為奇數）拼出目標大長方形，並討論各邊長分類下的長方形，是否都能由「L＋O」或「T＋O」這兩種拼片組合而成。

1. **長方形邊長性質進行分類：**

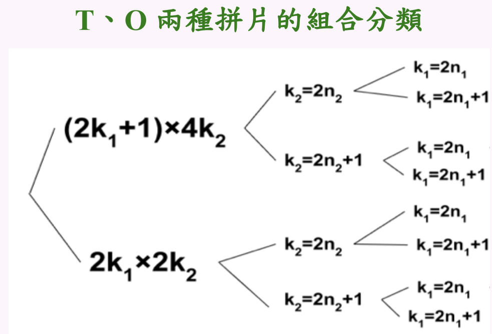
大長方形面積必符合 4 的倍數。

先依邊長的奇偶性分為兩大類
(奇數)(4 的倍數)、(偶數)(偶數)；
再對變數的奇偶性做分類。

L、O 兩種拼片的組合分類



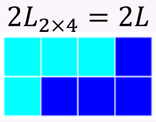
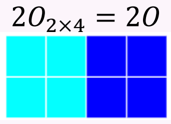
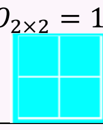
T、O 兩種拼片的組合分類



2. **定義的最小圖形與中圖形：**

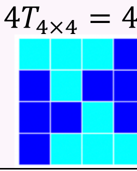
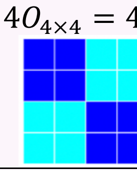
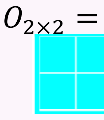
(1) **最小圖形**：能同時完全由n個 L(T) 拼片所組成，也能同時由n個 O 拼片所組成。

$LO_{2\times4}$：是 LO 最小圖形每組最小圖形皆有兩種可能　，其面積為 2×4 所以命名為$LO_{2\times4}$。

情況一：	情況二：	衍生圖形：$2O_{2\times4}$的衍生圖形
$2L_{2\times4}=2L$ 	$2O_{2\times4}=2O$ 	$O_{2\times2}=1O$ 

最小圖形$LO_{2\times4}$中 L 和 O 的數量關係：
$n(LO_{2\times4})=x(O_{2\times4})+y(L_{2\times4})$，其中 $x+y=2n$
因此，$n(LO_{2\times4})\in\{2(n-k)O+(2k)L\mid k=0,1,2\ldots.n\}$

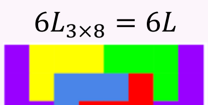
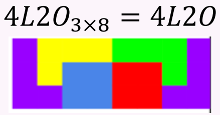
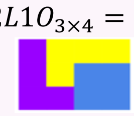
$TO_{4\times4}$：是 TO 最小圖形每組最小圖形皆有兩種可能，其面積為 4x4 所以命名為$TO_{4\times4}$。

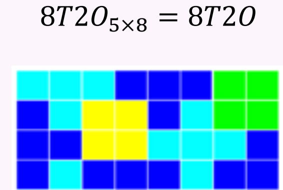
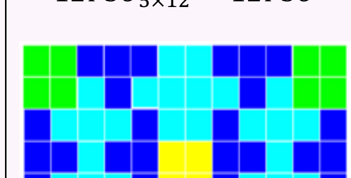
情況一：	情況二：	衍生圖形：$O_{4\times4}$的衍生圖形
$4T_{4\times4}=4T$ 	$4O_{4\times4}=4O$ 	$O_{2\times2}=1O$ 

最小圖形$TO_{4\times4}$中 T 和 O 的數量關係：
$n(TO_{4\times4})=x(T_{4\times4})+y(O_{4\times4})$，其中 $x+y=2n$
因此，$n(TO_{4\times4})\in\{4(n-k)O+(4k)T\mid k=0,1,2\ldots.n\}$

(2) **中圖形**：由 L(T)拼片和 O 拼片組成，為滿足拼成目標大長方形的需求，所拼出的矩形，填補最小圖形只能拼出偶數邊邊長的空缺。例：$LO_{3\times8}$（短邊為 3），能拼出其他的邊長為奇數的矩形，進而完成目標大長方形，下表為中圖形討論與延伸。

$LO_{3\times8}$：由 4 個 L 和 1 組$L_{2\times4}$所組成。滿足「奇數邊長」組成的 3x8 矩形，$LO_{3\times8}$所需使用到的 1 組$L_{2\times4}$會有兩種拼片組合，$L_{2\times4}$和$O_{2\times4}$。

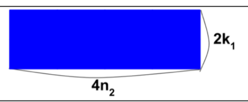
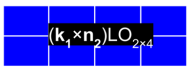
情況一：	情況二：	衍生圖形$LO_{3\times4}$：
$6L_{3\times8}=6L$ 	$4L2O_{3\times8}=4L2O$ 	$2L1O_{3\times4}=2L1O$ 

$TO_{5\times8}$：滿足「奇數邊長」且「以最少數量 T 與 O」的矩形。	衍生圖形 $TO_{5\times12}$：由$8T2O_{5\times8}$擴增的圖形。
$8T2O_{5\times8}=8T2O$ 	$12T3O_{5\times12}=12T3O$ 

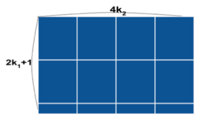
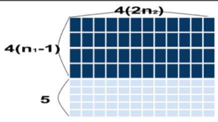
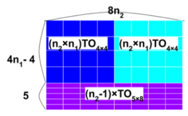
3. **填充排列方法：**

先用最小圖形填充再用中圖形與衍生圖形將剩下區域填滿，根據填入的圖形可計算各拼片組合可能。

範例 1：僅用最小圖形$LO_{2\times4}$即可填滿。

第一步	第二步
	
$2k_1\times2k_2=2k_1\times4n_2$	$2k_1\times4n_2=(2\times4)\times(k_1\times n_2)=(LO_{2\times4})\times(k_1\times n_2)$

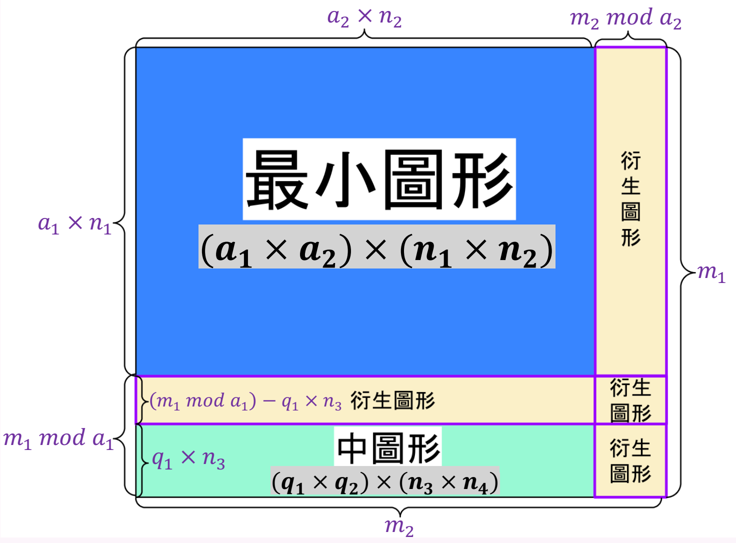
範例 2：先用最小圖形填充後，再用中圖形填滿。

第一步	第二步	第三步
		
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $=\{[2(2n_1)-4+5\}$ $\times[4(2n_2)]$	$\{[2(2n_1)-4]+5\}\times[4(2n_2)]$ $=(4n_1-4)\times(8n_2)+5\times(8n_2)$ $=4(n_1-1)(8n_2)+(5\times8)(n_2)$ $=(4\times4)(n_1-1)(2n_2)+(5\times8)(n_2)$ $=(TO_{4\times4})(n_1-1)(2n_2)+(TO_{5\times8})(n_2)$

以下為 $m_1\times m_2$ 的長方形，

最小圖形長寬為 $a_1\times a_2$；最小圖形縱向有n_1個，橫向有n_2個。

中圖形長寬為 $q_1\times q_2$；中圖形縱向有n_3個，橫向有n_4個。



L 拼片＋O 拼片的兩種拼片數量的組合		
長方形的長寬	**k 值的限制**	**L 與 O 拚片的數量的組合之解**
$(2k_1+1)\times4k_2$	$(k_2=2n_2)$	$(2k_1+1)\times4k_2\in\{2[(n_2\times(2k_1-1))-k]O+(2k+4n_2)L\mid k=0,1,2\ldots,[n_2\times(2k_1-1)]\}$
$(2k_1+1)\times4k_2$	$(k_2=2n_2+1)$	$(2k_1+1)\times4k_2$ $\in\{[(2n_2(2k_1-1))-2k+1]O+[2k+(4n_2+2)]L\mid k=0,1,\ldots,[n_2(2k_1-1)]\}$
$2k_1\times2k_2$	$(k_2=2n_2)$	$2k_1\times2k_2\in\{2[(k_1\times n_2)-k]O+(2k)L\mid k=0,1,2\ldots,(k_1\times n_2)\}$
$2k_1\times2k_2$	$(k_1=2n_1+1)$ $(k_2=2n_2+1)$	$2k_1\times2k_2$ $\in\{[2(n_1\times2n_2+n_1+n_2)-2k+1]O+(2k)L\mid k=0,1,2\ldots,(n_1\times2n_2+n_1+n_2)\}$

T 拼片＋O 拼片的兩種拼片數量的組合		
長方形的長寬	**k 值的限制**	**T 與 O 拚片的數量的組合之解**
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(k_1=2n_1)$ $(k_2=2n_2)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)$ $\in\{[8n_2(n_1-1)-4k+n_2]O+(4k+8n_2)T\mid k=0,1,2\ldots,[2n_2(n_1-1)]\}$
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(k_1=2n_1+1)$ $(k_2=2n_2)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[4(n_1-1)(2n_2)-4k+6n_2]O$ $+(4k+8n_2)T\mid k=0,1,2\ldots(n_1-1)(2n_2)\}$
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(k_1=2n_1)$ $(k_2=2n_2+1)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[4(n_1-1)(2n_2+1)-4k+2(n_2-1)+3]O$ $+[4k+(n_2-1)+12]T\mid k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$
$(2k_1+1)\times(4k_2)$	$(k_1=2n_1+1)$ $(k_2=2n_2+1)$	$(2k_1+1)\times(4k_2)\in\{[4(n_1-1)(2n_2+1)-4k+(6n_2+3)]O$ $+[4k+(8n_2+4)]T\mid k=0,1,2\ldots,(n_1-1)(2n_2+1)\}$
$2k_1\times2k_2$	$(k_1=2n_1)$ $(k_2=2n_2)$	$2k_1\times2k_2\ \in\{4(n_1\times n_2-k)O+(4k)T\mid k=0,1,2\ldots,(n_1\times n_2)\}$
$2k_1\times2k_2$	$(k_1=2n_1+1)$ $(k_2=2n_2)$ or $(k_1=2n_2)$ $(k_2=2n_1+1)$	$2k_1\times2k_2\ \in\{[4(n_1\times n_2-k)+2n_2]O+(4k)T\mid k=0,1,2\ldots,(n_1\times n_2)\}$
$2k_1\times2k_2$	$(k_1=2n_1+1)$ $(k_2=2n_2+1)$	$2k_1\times2k_2$ $\in\{[4(n_1\times n_2-k)+2n_1+2n_2+1]O+(4k)T\mid k=0,1,2\ldots,(n_1\times n_2)\}$

參、未來展望

1. 我們希望進一步發展正方形中 T、L 拼片組合的解法。我們目前研究方法雖然有解決部份問題，但仍不夠嚴謹與完整，我們認為可找到更有效率且有系統的證明方法。
2. 我們想研究 S、I 等四連方塊的拼塊組數，並嘗試任意兩種組合找出規律，或將問題延伸至五連方塊，探討其在 5×5、10×10 等圖形中的拼塊組合數。
3. 在研究過程中，我們花費大量時間嘗試圖形排列，不斷繪製、擦除與重試，直到找到可行解。我們曾考慮撰寫程式來輔助計算，但因程式能力不足而作罷。未來，希望能結合資訊技術，透過演算法讓電腦自動化計算，以提高效率。

肆、結論

本研究討論了在 $n\times n$的正方形中，使用 L 型拼片、T 型拼片與 O 型拼片任兩種組合，完整覆蓋正方形的所有可能組合，並分析其規律。

問題一、問題二：已得出在n × n的大正方形中，(a,b)的解、最大值與可能組數的規律。

問題三：目前我們以現有的研究方法來得出 T、L 拼片在正方形中的解，但仍不夠嚴謹，日後會努力完善之。

接著，我們將討論的範圍延伸至長方形，首先利用長方形邊長的奇偶性進行分類，在不同條件限制下，推導出 LO 及 TO 兩種拼片組合的圖形與代數式證明。

問題四、問題五：我們先找到最小圖形與中圖形，進行任意邊長長方形的切割，再透過分析中圖型的特性，有效率地推導出拼片數量可能的解。

本研究成功探討了以上 5 個研究問題，並在研究過程中嘗試了不同的解法，遇到了很多困難也學習到了很多知識。此外，我們也希望未來能根據此作品進行更深、更廣的探究。

伍、參考文獻與圖片來源

本作品之參考文獻，請詳見作品說明書。

本作品（含說明板海報）所有圖形及表格，皆由作者親自繪製、製作。