中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030410

蜿蜒曲折-矩形中心點連線之路徑轉折次數探討

學校名稱：臺東縣立東海國民中學

作者：	指導老師：
國二 方筱晴	鄭聿翔
國二 陳淑娟	林秀娟

關鍵詞：漢米爾頓路徑、路徑轉折次數、遞迴關係式

蜿蜒曲折-矩形中心點連線之路徑轉折次數探討

摘要

本研究主要在探討$M \times M$及$M \times N$的矩形中，將中心點一筆畫連接後的最少及最多的轉折次數。在最少轉折次數的部分，我們使用直橫線數量法探討直線與橫線的數量，並找出與轉折次數之間的關聯，最後利用反證法進行證明；在最多轉折次數的部分，我們根據M與N奇偶數的不同進行分類討論，一開始先利用外圍擴充法找出圖形畫法，最後利用直橫線數量法完成證明。

壹、前言

一、研究動機

在邏輯課的課程中，老師提出了許多有關數學的探究題目，而其中有一個題目名叫「蜿蜒曲折」，我們看到後，聯想到了與小時候玩過的一筆畫原理的遊戲十分相似，而當初的遊戲規則是從4×4的矩形中從某一格出發要沿著所有的格子走，最終會經過所有格子，並走到規定的終點，就算遊戲結束。而現在的「蜿蜒曲折」遊戲規則是由3×4的矩形中，找到最多或最少的轉折的線並把所有格子連起來。因為小時候的回憶，讓我們對這個題目感到極大的興趣，想要透過這個研究來找到圖形當中是否存在著關聯性。

二、研究目的

(一)最少轉折次數的探討

1.利用直橫線數量法進行4×3的矩形最少轉折次數的探討與證明。

2.利用直橫線數量法進行$M \times N$的矩形最少轉折次數的探討與證明。

(二)最多轉折次數的探討

1.利用外圍擴充法找出$M \times M$的矩形最多轉折次數及其畫法。

2.進行$M \times M$的矩形最多轉折次數證明。

3.利用外圍擴充法找出$M \times N$的矩形最多轉折次數及其畫法。

4.進行$M \times N$的矩形最多轉折次數證明。

三、名詞釋義

(一) 3×4的矩形中的轉折次數計算方式：於3×4的矩形中使用一筆畫將所有格子相連，計算此線條的轉折次數，如圖 1 中顯示此圖形轉折次數為 7 次。


圖 1：3×4的矩形示意圖

(二) $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$矩形：我們將此矩形的長以$m$表示、寬以$n$表示。

(三)直橫線數量法：於3×4的矩形中使用一筆畫將所有格子相連，透過計算組成此線條的直線與橫線的數量進行轉折次數的探討，則圖 1 中直線數量為 4 條、橫線數量為 4 條，因此轉折次數為直線數量與橫線數量相加再減 1，故為 7 次。

(四)外圍擴充法：透過圖形拼接的方式分別找出兩圖形的轉折次數，並將兩圖形連線，擴充成更大的圖形並找出轉折次數。

(五) $\boldsymbol{a_{m,n}}$：我們定義$a_{m,n}$為$M\times N$的矩形的最多轉折次數。

(六) $\boldsymbol{b_{m,n}}$：我們定義$b_{m,n}$為組成$M\times N$的矩形所需的外圍最多轉折次數。

四、文獻探討

(一)森棚教官數學題——蜿蜒曲折【1】:

在 12 個單位小正方形組成一個 3×4 的矩形中

1.若要畫一條轉折次數最少的折線通過 12 個小正方形的中心各一次, 轉折次數最少是多少？

2.若要畫一條轉折次數最多的折線通過 12 個小正方形的中心各一次, 轉折次數最多是多少？

(二) 漢米爾頓路徑問題：

《星狀網路點擴展運算漢米爾頓容錯性質研究》(張登富、蔡茗寓)【2】

根據此研究中發現，若此圖中存在一個起點和一個終點，從起點出發，在經過圖中所有點一次後，到達終點，則我們稱此路徑為漢米爾頓路徑，如圖 2 所示。而根據文獻指出目前並無直接判斷圖形是否存在漢米爾頓路徑的方法。

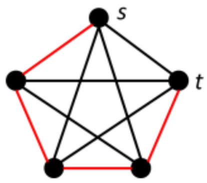


圖 2：漢米爾頓路徑

(三)《蜿蜒曲折》(黃悅和、林群峰、陳楚東)【3】

從研究中可發現邊長為 n 的時候，路徑通過中心，直到圖形邊界才轉折，共通過 m 排平行邊長 n 的中心，且每通過 1 排平行邊長 n 的中心時就須轉折，轉折次數即增加 2。故可知矩形路徑轉折處只能在中心，所以轉折次數為$2m-2$次。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦

參、研究過程或方法

在文獻探討中我們發現，在$M\times N$的矩形中($M\geq N$)最少轉折次數為$2n-2$次，但並沒有實質的證明方式，因此我們試著從下列的方法中進行證明。

一、最少轉折次數的探討

(一)直橫線數量法

在研究過程中我們發現所有圖形直線數量以及橫線數量最多只會差 1 條，而轉折數量可以從直線和橫線的總數量去推測，因此我們想利用這個特性並使用反證法進行$M\times N$矩形的最少轉折數量的證明，其中$M\geq N$，我們以4×3的矩形做舉例。

1．4×3矩形最少轉折次數證明

(1)猜想：我們猜想4×3的圖形中最少轉折數為 4 次，畫法如圖 3 所示。

(2)證明：我們想利用反證法進行證明。在圖形中已知直線數量為 2 條，橫線數量為 3 條，因此轉折數為 4 次。假設存在有更少轉折數量的圖形，根據橫線與直線的數量差必不大於 1 的原則，其線條數量必為 2 條直線及 2 條橫線。從圖 4 中我們發現 2 條直線及 2 條橫線無法填滿所有格子，因此不存在這種組合，與前面所述矛盾，故最少轉折數必為 4 次。

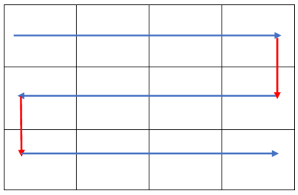


圖 3：4×3的矩形最少轉折數畫法

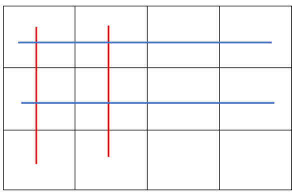
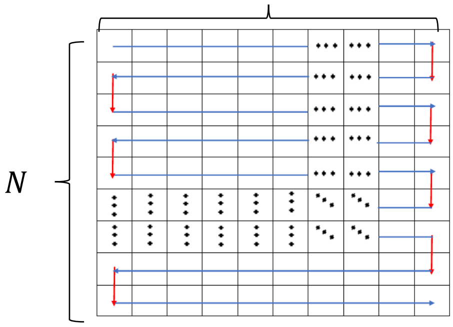


圖 4：無法填滿格子之示意圖

2．$M\times N$矩形最少轉折次數證明($M\geq N$)

(1)猜想：我們猜想$M\times N$的矩形中最少轉折數為$2n-2$次，畫法如圖 5。

(2)證明：我們想利用反證法進行證明。在圖形中已知直線數量為$n-1$條，橫線數量為n條，因此轉折為$2n-2$次。假設存在有更少轉折數量的圖形，根據橫線與直線的數量差必不大於 1 的原則，其線條數量必為$n-1$條直線及$n-1$條橫線。從圖 6 中我們發現$n-1$條直線及$n-1$條橫線無法填滿所有格子，因此不存在這種組合，與前面所述矛盾，故最少轉折數必為$2n-2$次。



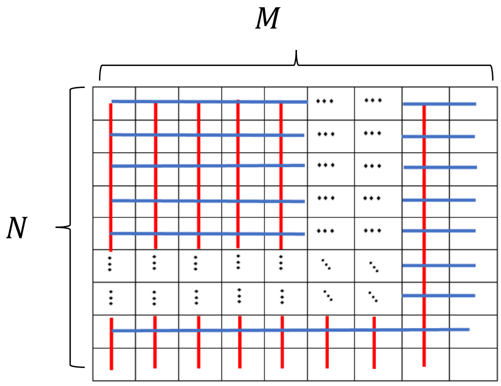


圖 5：$M\times N$的矩形最少轉折數畫法　　圖 6：證明最少轉折數必為$2n-2$次

3．**小結：**利用直橫線數量法可以明確得知$M\times N$的矩形$(M\geq N)$最少的轉折次數為$2n-2$次，其中M與N相差越大，則留下來的空格會越多。

二、最多轉折次數的探討

我們原本想要透過前面的方式進行探討，但是發現無法直接找出最多的轉折次數，因此我們又找出了新的方法，稱為外圍擴充法，為了方便討論，我們將$M\times M$的矩形以及$M\times N$的矩形，分成偶數邊與奇數邊做探討。

(一) $M\times M$矩形外圍擴充法(M為偶數)

我們想以2×2的正方形為底，透過增加外圍的方式找出$M\times M$的矩形中最多的轉折次數。以6×6的矩形為例，首先找出2×2的矩形的最多轉折次數如圖 7，為了擴充至4×4的矩形，我們將2×2的矩形與組成4×4的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，如圖 8，將兩圖形結合後可以得到4×4的矩形，如圖 9；由4×4的矩形再與組成6×6的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，如圖 10，可以得到6×6的矩形，如圖 11。

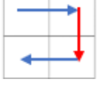


圖 7：2×2矩形

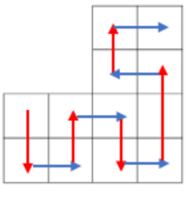


圖 8：4×4外圍

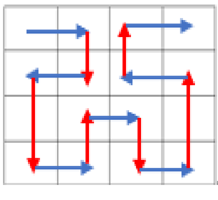


圖 9：4×4矩形

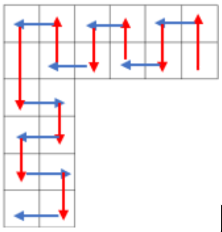


圖 10：6 × 6外圍

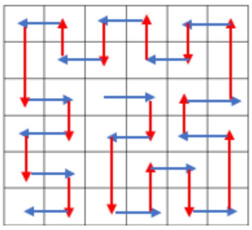


圖 11：6 × 6矩形

1．$\boldsymbol{M \times M}$**矩形最多轉折次數探討(**$\boldsymbol{M}$**為偶數)**

首先找出外圍的最多轉折次數，並確定其圖形畫法，如圖 12。

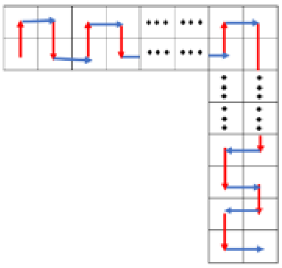


圖 12：外圍最多轉折次數的畫法

從圖中可知直線數為$2m-3$條，橫線數為也$2m-3$條。根據直橫線數量法，轉折次數一定會比線條總數少 1，所以線條總數為$4m-6$條，於是外圍的轉折次數為$4m-7$次。接著我們試著透過遞迴關係式，找出$M \times M$的最多轉折次數。透過圖形結合的方式，可以找出下一個$M \times M$的矩形的最多轉折次數，而兩個圖形的連接會多一個轉折，因此我們可以得出$a_{m,m}=a_{m-2,m-2}+b_{m,m}+1$這樣的關係式，其中$b_{m,m}=4m-7$，接著我們將這個式子化減

$$a_{2,2}=2$$

$$a_{4,4}=a_{2,2}+b_{4,4}+1$$

$$a_{6,6}=a_{4,4}+b_{6,6}+1$$

$$\vdots$$

$$a_{m,m}=a_{m-2,m-2}+b_{m,m}+1$$

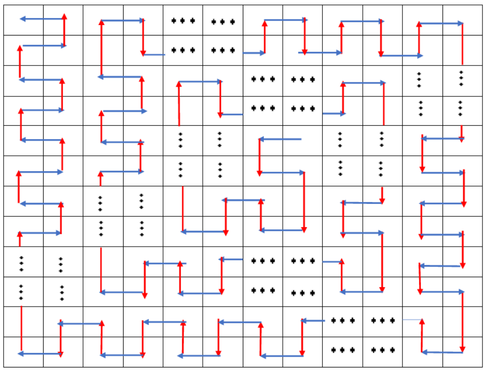
我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡得到

$$\begin{aligned} a_{m,m} &= 2+(b_{4,4}+b_{6,6}+\cdots+b_{m,m})+\frac{m}{2}-1 \\ &= 2+\frac{(9+4m-7)\times\frac{m-2}{2}}{2}+\frac{m}{2}-1 \\ &= m^2-m \end{aligned}$$

透過外圍擴充法算出$M \times M$的矩形的最多轉折數為m^2-m次。

2. $M\times M$矩形最多轉折次數證明(M為偶數)

(1)猜想：我們猜想$M\times M$的矩形中，最多轉折次數為m^2-m次，如圖 13。



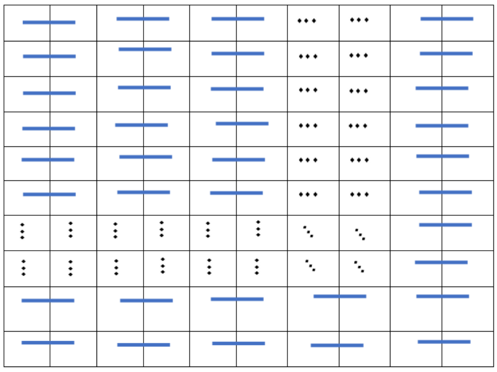


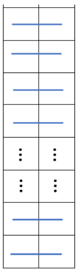
圖 13：$M\times M$的矩形最多轉折數畫法　圖 14：在$M\times M$的矩形中擺放最多的橫線方式

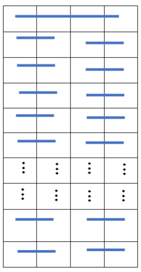
(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比m^2-m次還多，即可完成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。

首先我們先討論橫線的部分，在$M\times M$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 14，但這個方式無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們分為兩種畫法。

<畫法 1>

我們將$M\times M$的正方形分成$\frac{m}{2}$個$2\times M$的矩形，如圖 15，若要將這些$\frac{m}{2}$個$2\times M$的矩形連接，則兩兩必須減少一條橫線，如圖 16，才有機會連成一條線。





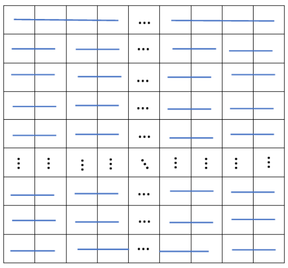


圖 15：$2\times M$的矩形　圖 16：矩形連接圖　圖 17：$M\times M$矩形最多橫線數量圖

因此我們先計算橫線的數量，每組會有m條橫線，總共有$\frac{m}{2}$組，而每組的連接處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{m^2-m}{2}+1$條，如圖 17。接著填入直線，為了不形成迴圈，我們將直線以交叉擺放的方式填入，因此每組最多會有$m-1$條

直線，總共有$\frac{m}{2}$組，因此直線數量為$\frac{m^2-m}{2}$條。由此可知總線條數量為m^2-m+1條，但是要算出轉折次數必須再減 1，因此轉折次數為m^2-m次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M\times M$的矩形以螺旋的方式進行分組，如圖 18(不同顏色代表不同組別)，總共有$m-1$組，第一組為2×2的矩形(紅色)、第二組為2×2的矩形(橙色)、第三組為2×4的矩形(黃色)、第四組為4×2的矩形(綠色)、第五組為2×6的矩形(藍色)⋯以順時針擴張的方式得到第$m-3$組為$2\times(M-2)$的矩形，第$m-2$組$(M-2)\times 2$的矩形，最後一組為$2\times M$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M\times M$矩形。

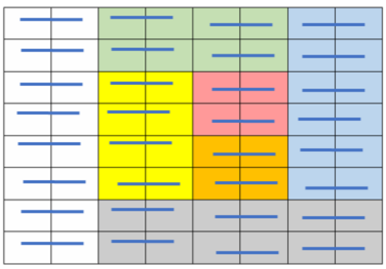
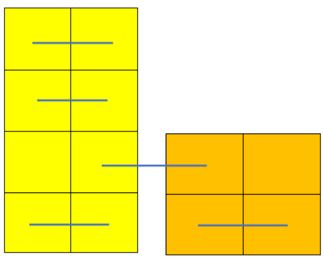
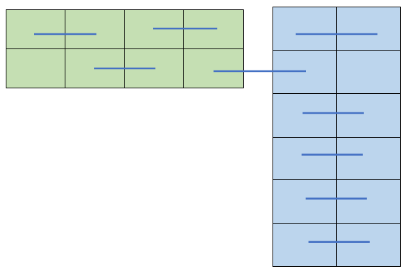




圖 18：$M\times M$矩形螺旋方式分組　圖 19：第二、三組圖形連接　圖 20：第四、五組圖形連接

若要將此方式連成一條線，我們將第二組圖形與第三組的圖形做連接如圖 19，則會少 1 條橫線，第四組的圖形與第五組的圖形做連接如圖 20，又會少 1 條橫線，以此類推，第$m-2$組與第$m-1$組做連接，依然會少 1 條直線，故會少$\frac{m}{2}-1$條橫線。而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可。因此橫線的數量為$\frac{m^2-m}{2}+1$條，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為1條，第二組直線數量為2條，第三組直線數量為3條⋯最後一組為$m-1$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量剛好為等差數列，我們利用等差級數的公式，我們可以得到直線數量為$\frac{m^2-m}{2}$條。由此可知總線條數量為m^2-m+1條，但是要算出轉折次數必須再減 1，因此轉折次數為m^2-m次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

從上述兩種畫法中，我們可以證明出$M\times M$矩形(M為偶數)最多轉折次數為m^2-m次，而

只採取這兩種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這兩種畫法為目前找到最少的分組方式。

(二) $\boldsymbol{M \times M}$矩形外圍擴充法($\boldsymbol{M}$為奇數)

我們想以3×3的矩形為底，透過增加外圍的方式找出$M \times M$矩形中最多的轉折次數。以7×7的矩形當作舉例，首先找出3×3的矩形的最多轉折次數，如圖 21，為了擴充至5×5的矩形，我們將3×3的矩形與組成5×5的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合如圖 22，將兩圖形結合後可以得到5×5的矩形如圖 23；由5×5的矩形再與組成7×7的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合如圖 24，可以得到7×7的矩形如圖 25。

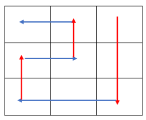


圖 21：3×3矩形

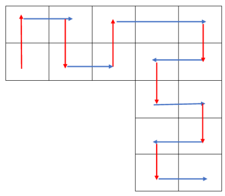


圖 22： 5×5外圍

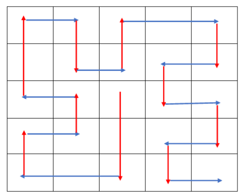


圖 23：5×5矩形

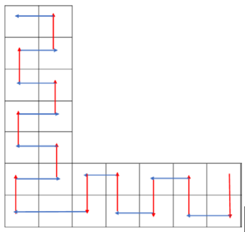


圖 24：7×7外圍

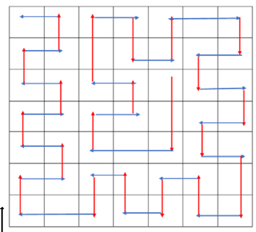


圖 25：7×7矩形

1.$\boldsymbol{M \times M}$矩形最多轉折次數探討($\boldsymbol{M}$為奇數)

首先找出外圍的最多轉折次數，並確定其圖形畫法，如圖 26。

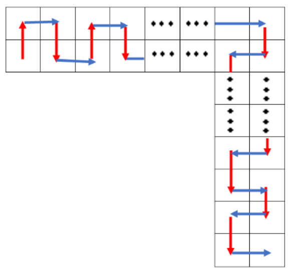


圖 26：外圍最多轉折次數畫法

從圖中可知直線數為$2m-3$條。在橫線的部分，橫線數也為$2m-3$條。根據直橫線數量法的規則，轉折次數一定會比線條總數少 1，所以已知線條總數為$4m-6$條，而要算出轉折次數必須再減 1，於是外圍的轉折次數為$4m-7$次。接著我們試著透過遞迴關係式，找出$M \times M$的最多轉折次數。透過圖形結合的方式，可以找出下一個$M \times M$的矩形的最多轉折次

數，而兩個圖形的連接會多一個轉折，因此我們可以得出$a_{m,m} = a_{m-2,m-2} + b_{m,m} + 1$這樣的關係式，其中$b_{m,m} = 4m - 7$，接著我們將這個式子化減，化減方式如下

$$a_{3,3} = 5$$

$$a_{5,5} = a_{3,3} + b_{5,5} + 1$$

$$a_{7,7} = a_{5,5} + b_{7,7} + 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m,m} = a_{m-2,m-2} + b_{m,m} + 1$$

我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡得到

$$a_{m,m} = 5 + \left(b_{5,5} + b_{7,7} + \cdots + b_{m,m}\right) + \frac{m-3}{2}$$

$$= \frac{(5 + 4m - 7) \times \frac{m-1}{2}}{2} + \frac{m-3}{2}$$

$$= m^2 - m - 1$$

透過外圍擴充法算出$M \times M$的矩形的最多轉折數為$m^2 - m - 1$次。

2．$M \times M$矩形最多轉折次數證明(M為奇數)

(1)猜想：我們猜想$M \times M$的矩形中，最多轉折次數為$m^2 - m - 1$次，如圖 27。

(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比$m^2 - m - 1$次轉折數多，即可完成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。首先我們先討論橫線的部分，在$M \times M$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 28，但圖中圖形將無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們總共分為兩種畫法討論。

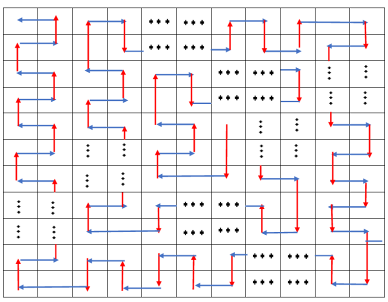


圖 27： $M \times M$矩形最多轉折數畫法

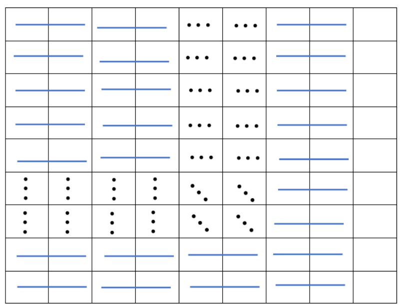
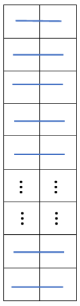
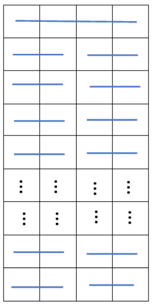


圖 28：在$M \times M$矩形能夠擺放最多的橫線方式

<畫法 1>

我們將$M \times M$的正方形分成$\frac{m-1}{2}$個$2 \times M$的矩形，如圖 29，若要將這些矩形連接，則兩兩必須減少 1 條橫線，如圖 30，才有機會連成一條線。





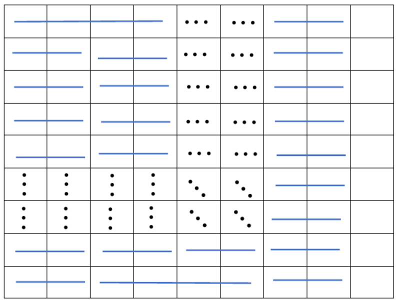
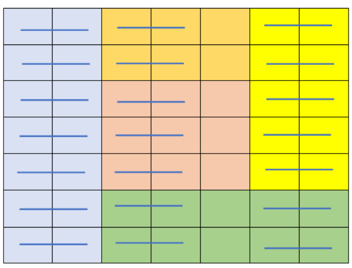


圖 29：$2 \times M$的矩形　圖 30：矩形連接圖　　圖 31：$M \times M$矩形最多橫線數量圖

因此我們先計算橫線的數量，$\frac{m-1}{2}$個$2 \times M$的矩形內會有$\frac{m^2-m}{2}$條橫線，而每組的連接處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m-1}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{m^2-2m+3}{2}$條，如圖 31。接著填入直線，每組最多會有$m-1$條直線，總共有$\frac{m-1}{2}$組，因此直線數量為$\frac{m^2-2m+1}{2}$條，而因為邊長為奇數，會多出一條直線。由此可知總線條數量為m^2-2m+3條，因此轉折次數為m^2-2m+2次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M \times M$的矩形以螺旋的方式進行分組，如圖 32(不同顏色代表不同組別)，總共有$m-2$組，第一組為3×3的矩形(紅色)、第二組為3×2的矩形(橙色)、第三組為2×5的矩形(黃色)、第四組為5×2的矩形(綠色)、第五組為7×2的矩形(藍色)⋯以順時針擴張的方式得到第$m-4$組為$2 \times (M-2)$的矩形，第$m-3$組$(M-2) \times 2$的矩形，最後一組為$2 \times M$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M \times M$矩形。



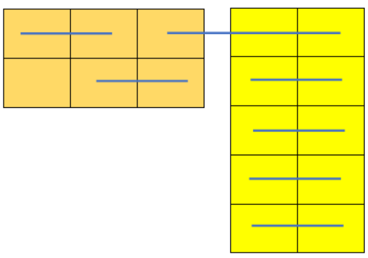


圖 32：$M \times M$的矩形螺旋方式分組　　圖 33：第二、三組圖形連接

若要將此方式連成一條直線，我們只需將橫線交叉排列即可完成，我們以第二組與第三組圖形以及第四組與第五組的圖形做示範，如圖 33 及圖 34。

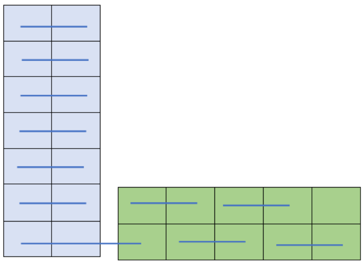


圖 34：第四、五組圖形連接

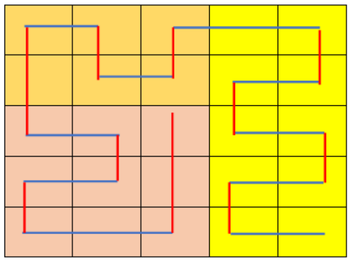


圖 35：直線的排列方式

而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可，我們以第一組的圖形和第二組與第三組連接後的圖形做示範，如圖 35。

因此橫線的數量為$\frac{m^2-m}{2}$條，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為3條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為4條⋯最後一組為$m-1$條，從第二組開始直線數量剛好為等差數列，我們利用等差級數的公式，我們可以得到直線數量為$\frac{m^2-m}{2}-3$條，再加上第一組直線數 3 條，總共直線數為$\frac{m^2-m}{2}$條。由此可知總線條數量為m^2-m條，但是要算出轉折次數必須再減 1，因此轉折次數為m^2-m-1次。所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

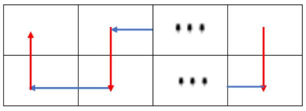
從上述兩種畫法中，我們可以證明出$M\times M$矩形(M為奇數)最多轉折次數為m^2-m-1次，而只採取這兩種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這兩種畫法為目前找到最少的分組方式。

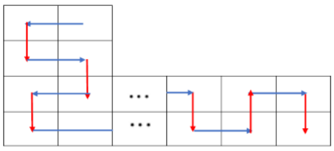
接著我們想以同樣的方法試著找出$M\times N$的矩形的最多轉折次數，但在建構的過程中發現，基底的矩形會根據M與N奇偶數的不同會有不同的結果，因此我們將分開討論。

(三) $M\times N$矩形外圍擴充法(M,N皆為偶數且$M\geq N$)

我們以$(m-n+2)\times 2$矩形為底，透過增加外圍的方式找出$M\times N$的矩形中最多的轉折次數。首先找出$(m-n+2)\times 2$的矩形的最多轉折次數如圖 36，為了擴充至$(m-n+4)\times 4$的矩形，我們將$(m-n+2)\times 2$的矩形與組成$(m-n+4)\times 4$的矩形所需的外圍最多轉折次

數圖形結合如圖 37，結合後可以得到$(m-n+4)\times 4$的矩形，如圖 38；由$(m-n+4)\times 4$的矩形再與組成$(m-n+6)\times 6$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，可以得到$(m-n+6)\times 6$的矩形，以此類推，我們最後可建構出$m\times n$的矩形。





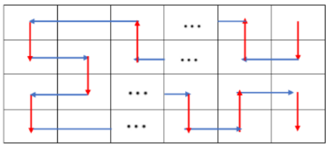


圖 36：$(m-n+2)\times 2$矩形　圖 37：$(m-n+4)\times 4$外圍　圖 38：$(m-n+4)\times 4$矩形

1.$M\times N$矩形最多轉折次數探討($\boldsymbol{M,N}$皆為偶數且$\boldsymbol{M\geq N}$)

首先找出外圍的最多轉折次數，並進行計算，外圍圖形畫法可參考圖 37。

已知線條總數為$(m-n+2)+(m-n+2-1)=2m-2n+3$條，因此外圍的轉折次數為$2m-2n+2$次。接著我們試著透過遞迴關係式，找出$M\times N$的最多轉折次數。透過圖形結合的方式，可以找出下一個$M\times N$的矩形的最多轉折次數，而兩個圖形的連接會多一個轉折，因此我們可以得出$a_{m,n}=a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+1$這樣的關係式，其中$b_{m,n}=2(m+n)-7$，接著我們將這個式子化減，化減方式如下

$$
\begin{gathered}
a_{m-n+2,2}=2m-2n+2\\
a_{m-n+4,4}=a_{m-n+2,2}+b_{m-n+4,4}+1\\
a_{m-n+6,6}=a_{m-n+4,4}+b_{m-n+6,6}+1\\
\vdots\\
a_{m,n}=a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+1
\end{gathered}
$$

我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡得到

$$
\begin{aligned}
a_{m,n}&=2m-2n+2+(b_{m-n+4,4}+b_{m-n+6,6}+\cdots+b_{m,n})+\frac{n-2}{2}\\
&=2m-2n+2+2\left\{\frac{[(m-n+4+4)+m+n)]\times\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2}\right\}-7\times\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n-2}{2}\\
&=mn-n
\end{aligned}
$$

透過外圍擴充法算出$M\times N$的矩形($M\times N$皆為偶數且$M\geq N$)最多轉折數為$mn-n$次。

2.$M\times N$矩形最多轉折次數證明($\boldsymbol{M,N}$皆為偶數且$\boldsymbol{M\geq N}$)

(1)猜想：我們猜想$M\times N$的矩形中，最多轉折次數為$mn-n$次，如圖 39。

(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比$mn-n$次轉折數多，即可完成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。

首先我們先討論橫線的部分，在$M\times N$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 40，但圖中圖形將無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們總共分為三種畫法討論。

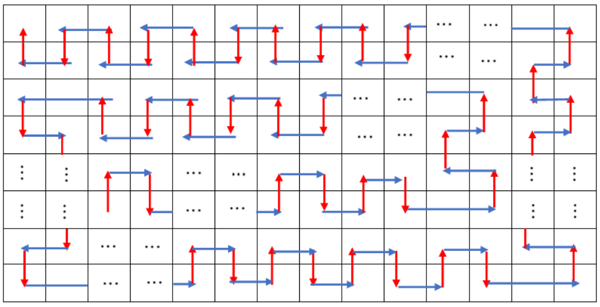
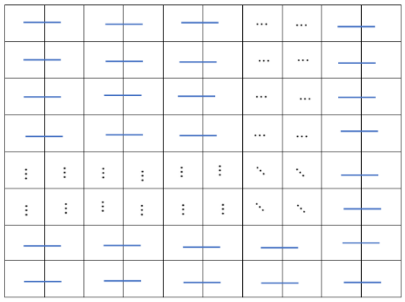



圖 39：$M\times N$的矩形最多轉折數畫法 圖 40：在$M\times N$的矩形中擺放最多的橫線方式

<畫法 1>

我們一樣將$M\times N$的正方形分成$\frac{m}{2}$個$2\times N$的矩形，若要將這些$\frac{m}{2}$個$2\times N$的矩形連接，則兩兩必須減少一條橫線，才有機會連成一條線。

因此我們先計算橫線的數量，每組會有n條橫線，總共有$\frac{m}{2}$組，而每組的連接處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{mn-m}{2}+1$條。接著填入直線，為了不形成迴圈，我們將直線以交叉擺放的方式填入，因此每組最多會有$n-1$條直線，總共有$\frac{m}{2}$組，因此直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條。由此可知總線條數量為$mn-m+1$條，因此轉折次數為$mn-m$次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M\times N$的矩形以順時針的方式進行分組，如圖 41(不同顏色代表不同組別)，總共有n組，第一組為$(m-n)\times 2$的矩形(紅色)、第二組為2×4的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+2)\times 2$的矩形(黃色)、第四組為2×4的矩形(綠色)⋯以順時針擴張的方式得到第$m-3$組為$2\times(n-2)$的矩形，第$n-1$組為$(m-2)\times 2$的矩形，最後一組為$2\times(n-2)$的矩形，這些

矩形合成後能夠得到完整的$M \times N$矩形。

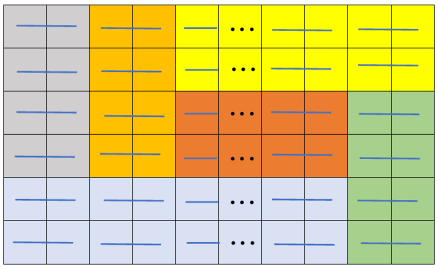


圖 41： $M \times N$的矩形順時針方式分組

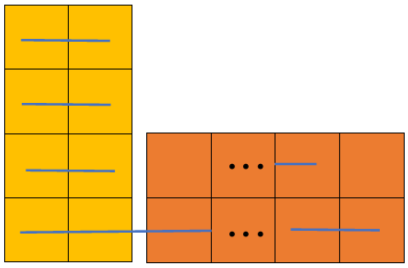


圖 42：第一、二組圖形連接

若要將此方式連成一條線，我們將第一組圖形與第二組的圖形做連接如圖 42，則會少 1 條橫線，第二組的圖形與第三組的圖形做連接，又會少 1 條橫線，第四組的圖形與第五組的圖形做連接，也會少 1 條橫線，以此類推，總共會少$\frac{n}{2}$條橫線。

因此橫線的數量為$\frac{mn-n}{2}$條，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為$m-n$條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為$m-n+2$條⋯最後一組為$n-3$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，所以我們利用等差級數的公式，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-n}{2}$條。由此可知總線條數量為$mn-n$條，因此轉折次數為$mn-n-1$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 3>

我們將$M \times N$的矩形以逆時針的方式進行分組，如圖 43(不同顏色代表不同組別)，總共有$n-1$組，第一組為$(m-n+2) \times 2$的矩形(紅色)、第二組為2×4的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+4) \times 2$的矩形(黃色)⋯以逆時針擴張的方式得到最後一組為$(m-2) \times 2$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M \times N$矩形。

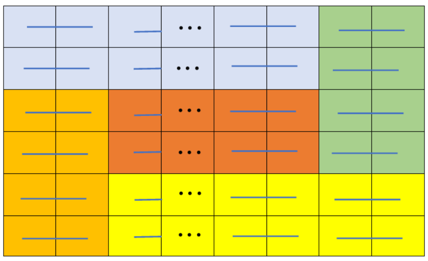


圖 43： $M \times N$的矩形逆時針方式分組

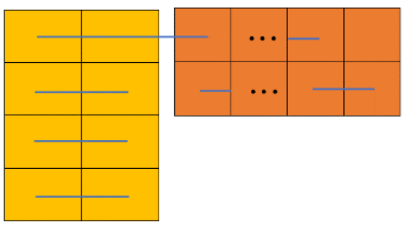


圖 44：第一、二組圖形連接

若要將此方式連成一條線，我們將第一組圖形與第二組的圖形做連接如圖 44，則會少 1 條橫線，第二組的圖形與第三組的圖形做連接，又會少 1 條橫線、第四組的圖形與第五組的圖形做連接，也會少 1 條橫線，以此類推，總共會少$\frac{n}{2}$條橫線。

因此橫線的數量為$\frac{mn-n}{2}$條，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為$m-n+2$條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為$m-n+4$條⋯最後一組為$m-2$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，所以我們利用等差級數的公式，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-n+2}{2}$條。由此可知總線條數量為$mn-n+1$條，但是要算出轉折次數必須再減 1，因此轉折次數為$mn-n$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

從上述三種畫法中，我們可以證明出$M \times N$矩形(M,N皆為偶數且$M \geq N$)最多轉折次數為$mn-n$次，而只採取這三種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這三種畫法為目前找到最少的分組方式。

(四) $M \times N$矩形外圍擴充法(M,N皆為奇數且$M > N$)

我們想以$(m-n+1)\times 3$的矩形為底，透過增加外圍的方式找出$M \times N$的矩形中最多的轉折次數。首先找出$(m-n+1)\times 3$的矩形的最多轉折次數如圖 45，為了擴充至$(m-n+3)\times 5$的矩形，我們將$(m-n+1)\times 3$的矩形與組成$(m-n+3)\times 5$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合如圖 46，可以得到$(m-n+3)\times 5$的矩形，如圖 47；由$(m-n+3)\times 5$的矩形再與組成$(m-n+5)\times 7$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，可以得到$(m-n+5)\times 7$的矩形，以此類推，最後再加上一個$2 \times n$的矩形，就可以建構出$m \times n$的矩形。圖 48、49 為建構$(m-n+5)\times 5$矩形的情形。

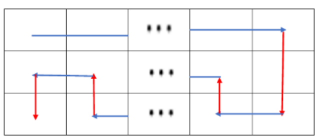
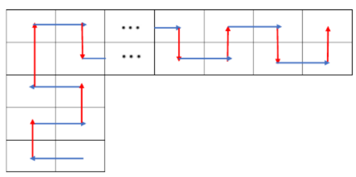


圖 45：$(m-n+1)\times 3$矩形

圖 46：$(m-n+3)\times 5$外圍



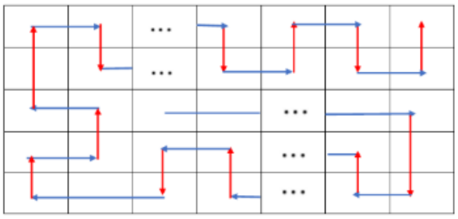


圖 47：$(m-n+3)\times 5$矩形

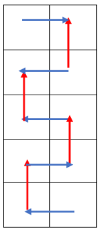


圖 48：2×5外圍

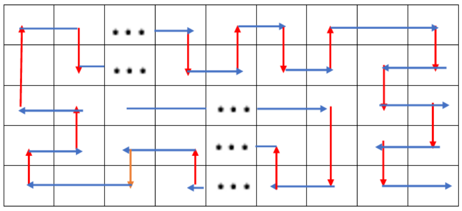


圖 49：$(m-n+5)\times 5$矩形

1.$M\times N$矩形最多轉折次數探討(M、N皆為奇數且$M>N$)

首先找出外圍的最多轉折次數，並進行計算，外圍圖形畫法可參考圖 46。

已知線條總數為$2(m+n)-6$條，因此外圍的轉折數為$2(m+n)-7$次。透過圖形結合的方式，可以找出下一個$M\times N$矩形的最多轉折次數，而兩個圖形的連接會多一個轉折，因此可以得出$a_{m-2,n}=a_{m-4,n-2}+b_{m-2,n}+1$這樣的關係式，而最後再加上$a_{2,n}$，且會多一個轉折，因此$a_{m,n}=a_{m-2,n}+a_{2,n}+1$，其中$b_{m,n}=2(m+n)-7$，我們試著將這個式子化減

$$a_{m-n+1,3}=2m-2n+1$$

$$a_{m-n+3,5}=a_{m-n+1,3}+b_{m-n+3,5}+1$$

$$a_{m-n+5,7}=a_{m-n+3,5}+b_{m-n,5,7}+1$$

$$\vdots$$

$$a_{m-2,n}=a_{m-4,n-2}+b_{m-2,n}+1$$

$$a_{m,n}=a_{m-2,n}+a_{2,n}+1$$

我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡得到

$$a_{m,n}=2m-2n+1+\left(b_{m-n+3,5}+b_{m-n+5,7}+\cdots+b_{m-2,n}\right)+\frac{n-3}{2}+a_{2,n}+1$$

$$=2m-2n+1+2\times\left\{\frac{[(m-n+8)+(m-2+n)]\times\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2}\right\}-7\times\left(\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n-3}{2}$$

$$+2n-2+1$$

$$=mn-m$$

透過外圍擴充法算出$M\times N$的矩形(M,N皆為奇數且$M>N$)最多轉折數為$mn-m$次。

2. $M\times N$矩形最多轉折次數證明(M、N皆為奇數且$M>N$)

(1)猜想：我們猜想$M\times N$的矩形中，最多轉折次數為$mn-m$次，如圖 50。

(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比$mn-m$次轉折數多，即可完

成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。首先我們先討論橫線的部分，在$M \times N$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 51，但圖中圖形將無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們總共分為三種畫法討論。

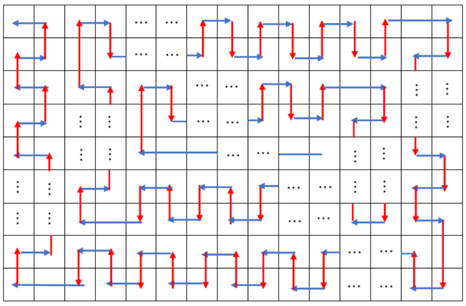


圖 50： $M \times N$的矩形最多轉折數畫法

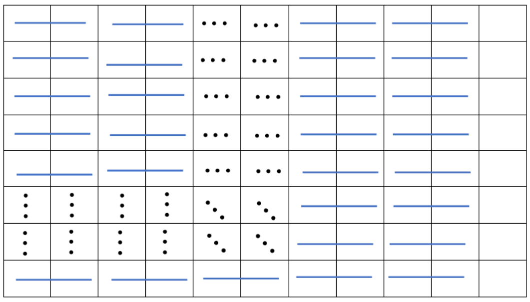


圖 51：在$M \times N$的矩形中擺放最多的橫線方式

<畫法 1>

我們將$M \times N$的矩形分成$\frac{m-1}{2}$個$2 \times N$的矩形，若要將這些矩形連接，則兩兩必須減少一條橫線。因此我們先計算橫線的數量，每組會有n條橫線，總共有$\frac{m-1}{2}$組，而每組的連接處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m-1}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{\mathrm{mn-n-}m+1}{2}+1$條。

接著填入直線，為了不形成迴圈，我們將直線以交叉擺放的方式填入，因此每組最多會有$n-1$條直線，總共有$\frac{m-1}{2}$組，因此直線數量為$\frac{mn-n-m+1}{2}$條。而因為邊長為奇數，會多出一條直線。由此可知直線加上橫線的數量為$\frac{mn-n-m+1}{2}+1+\frac{mn-n-m+1}{2}+1=mn-n-m+3$條，因此轉折次數為$mn-n-m+3-1=mn-n-m+2$次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M \times N$的矩形以順時針的方式進行分組，如圖 52(不同顏色代表不同組別)，總共有$\frac{n-1}{2}$組，第一組為$(m-n+1)\times 3$的矩形(紅色)、第二組為2×5的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+3)\times 2$的矩形(黃色)⋯以順時針擴張的方式得到第$n-2$組為$(m-2)\times 2$的矩形，最後一組為$2\times(n-2)$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M \times N$矩形。

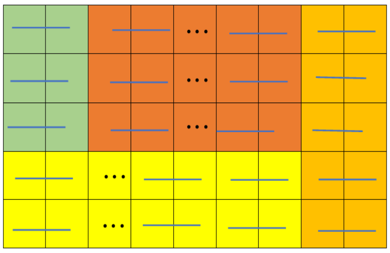


圖 52：順時針分組圖

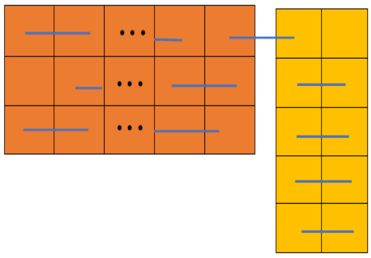


圖 53：第一、二組圖形連接

若要將此方式連成一條直線，我們只需將橫線交叉排列即可完成，我們以第一組與第二組圖形如圖 53。而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可，而其中第一組圖形因為寬為奇數，故最後一排橫線必須相連。

因此橫線的數量為$\frac{m-1}{2}\times n-\left(\frac{m-n}{2}-1\right)=\frac{mn-m}{2}+1$，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為$m-n+1$條，第二組直線數量為4條，第三組直線數量為$m-n+3$條…最後一組為$n-3$條，而直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，所以我們利用等差級數的公式，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條。由此可知直線數量加橫線數量為$\frac{mn-m}{2}+1+\frac{mn-m}{2}=mn-m+1$條，因此轉折次數為$mn-m+1-1=mn-m$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

<畫法 3>

我們將$M\times N$的矩形以逆時針的方式進行分組，如圖 54(不同顏色代表不同組別)，總共有$\frac{n-2}{2}$組，第一組為$(m-n+3)\times 3$的矩形(紅色)、第二組為2×5的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+5)\times 2$的矩形(黃色)…以逆時針擴張的方式得到第$n-4$組為$(m-2)\times 2$的矩形，第$n-3$組$2\times(n-2)$的矩形，最後一組為$(\mathrm{m}-2)\times 2$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M\times N$矩形。

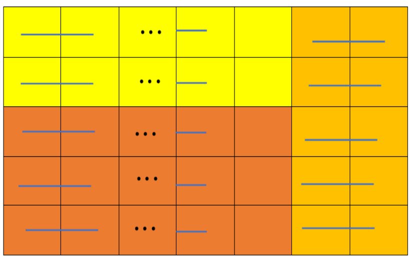


圖 54：逆時針分組圖

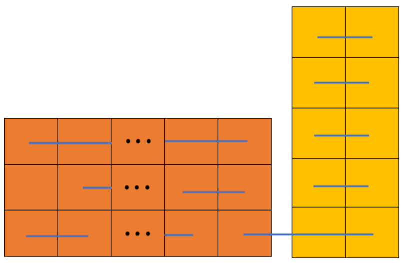


圖 55：第一、二組圖形連接

若要將此方式連成一條直線，我們只需將橫線交叉排列即可完成，我們以第一組與第二組

圖形做示範，如圖 55。而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可，而其中第一組圖形因為寬為奇數，故最後一排橫線必須相連。

因此橫線的數量為$\frac{m-1}{2}\times n-\left(\frac{m-n}{2}\right)=\frac{mn-m}{2}$，接著填入直線，直線交叉擺放後，第一組直線數量為$m-n+3$條，第二組直線數量為$4$條，第三組直線數量為$m-n+5$條…最後一組為$m-2$條，而直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條。而總線條數量為$mn-m$條，因此轉折次數為$mn-m-1$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

從上述三種畫法中，我們可以證明出$M\times N$矩形(M、N皆為奇數且$M>N$)最多轉折次數為$mn-m$次，而只採取這三種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這三種畫法為目前找到最少的分組方式。

(五) $M\times N$矩形外圍擴充法(M為偶數N為奇數，且$M>N$)

我們以$(m-n+1)\times 3$的矩形為底，透過增加外圍的方式找出$M\times N$的矩形中最多的轉折次數。首先找出$(m-n+1)\times 3$的矩形的最多轉折次數如圖 56，為了擴充至$(m-n+3)\times 5$的矩形，我們將$(m-n+1)\times 3$的矩形與組成$(m-n+3)\times 5$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合如圖 57，將兩圖形結合後可以得到$(m-n+3)\times 5$的矩形，如圖 58；由$(m-n+3)\times 5$的矩形再與組成$(m-n+5)\times 7$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，可以得到$(m-n+5)\times 7$的矩形，以此類推，最後再加上一個$2\times n$的矩形，就可以建構出$m\times n$的矩形。圖 59、60 為建構$(m-n+5)\times 5$矩形的情形。

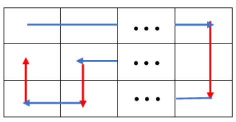


圖 56:$(m-n+1)\times 3$矩形

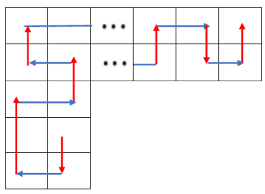


圖 57: $(m-n+3)\times 5$外圍

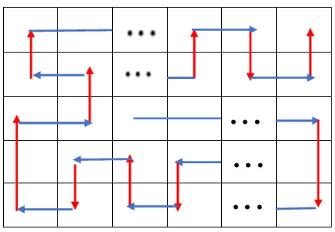


圖 58:$(m-n+3)\times 5$矩形

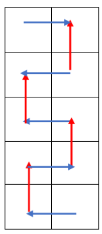


圖 59：2×5矩形

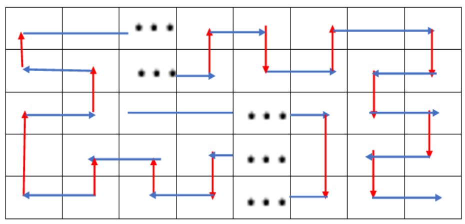


圖 60:$(m-n+5)\times 5$矩形

1. $M\times N$矩形最多轉折次數探討(M為偶數$\boldsymbol{N}$為奇數，且$\boldsymbol{M}>\boldsymbol{N}$)

首先找出外圍的最多轉折次數，並確定其圖形畫法。其中為了在建構過程中能將圖形與圖形相連，我們將外圍圖形的畫法分為兩種情況進行討論:

<情況 1>當 $\boldsymbol{n\equiv 1(mod4)}$時

當所建構外圍的邊長n被4 除餘 1 時，其外圍與矩形必須透過綠色的直線進行連接，故最多轉折次數畫法如圖 61。因此在此前提下我們將計算此外圍最多的轉折次數。從圖可知橫線總數量為$m+n-4$條、直線數量為$m+n-3$條，轉折次數為$2m+2n-8$次。

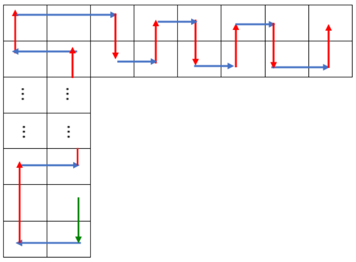


圖 61: $n\equiv 1(mod4)$時的外圍

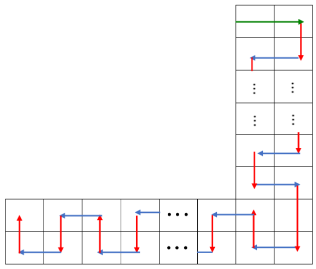


圖 62: $n\equiv 3(mod4)$時的外圍

<情況 2>當$\boldsymbol{n\equiv 3(mod4)}$時

當所建構外圍的邊長n被4 除餘 3 時，其外圍與矩形必須透過綠色的直線進行連接，故最多轉折次數畫法如圖 62。因此在此前提下我們將計算此外圍最多的轉折次數。從圖可知橫線總數量為$m+n-3$條、直線數量為$m+n-3$條，轉折次數為$2m+2n-7$次。

而透過圖形結合的方式，可以找出下一個$M\times N$的矩形的最多轉折次數，而兩個圖形的連接會多出轉折，因此我們可以得出$a_{m-2,n}=\begin{cases}a_{m-4,n-2}+b_{m,n}+2\text{，}n\equiv 1(mod4)\\a_{m-4,n-2}+b_{m,n}+1\text{，}n\equiv 3(mod4)\end{cases}$這樣的關係式，而最後再加上$a_{2,n}$，其中$a_{2,n}=\begin{cases}2n-2\text{，}n\equiv 1(mod4)\\2n-3\text{，}n\equiv 3(mod4)\end{cases}$且會多出轉折，因此$a_{m,n}=\begin{cases}a_{m-2,n}+a_{2,n}+1\text{，}n\equiv 1(mod4)\\a_{m-2,n}+a_{2,n}+2\text{，}n\equiv 3(mod4)\end{cases}$，其中$b_{m,n}=\begin{cases}2m+2n-8\text{，}n\equiv 1(mod4)\\2m+2n-7\text{，}n\equiv 3(mod4)\end{cases}$，接著我們將這個式子化減

$$a_{m-n+1,3}=2m-2n+1$$

$$a_{m-n+3,5}=a_{m-n+1,3}+b_{m-n+3,5}+2$$

$$a_{m-n+5,7}=a_{m-n+3,5}+b_{m-n5,7}+1$$

$$a_{m-n+7,9}=a_{m-n+5,7}+b_{m-n+7,9}+2$$

$$\vdots$$

$$a_{m-2,n}=\begin{cases}a_{m-4,n-2}+b_{m-2,n}+2\text{，}n\equiv 1(mod4)\\a_{m-4,n-2}+b_{m-2,n}+1\text{，}n\equiv 3(mod4)\end{cases}$$

$$a_{m,n}=\begin{cases}a_{m-2,n}+a_{2,n}+1\,,n\equiv 1(mod4)\\ a_{m-2,n}+a_{2,n}+2\,,n\equiv 3(mod4)\end{cases}$$

我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡

(1)當 $n\equiv 1(mod4)$時

$$a_{m-2,n}=2m-2n+1+\left(b_{m-n+3,5}+b_{m-n+5,7}+\cdots+b_{m-2,n}\right)+2\times\left(\frac{n-5}{4}\right)+\frac{n-5}{4}+2$$

$$=2m-2n+1+2\times\left\{\frac{[(m-n+8)+(m+n-2)]\times\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2}\right\}-8\times\left(\frac{n-5}{4}\right)$$

$$-7\times\left(\frac{n-5}{4}\right)+2\times\left(\frac{n-5}{4}\right)+\frac{n-5}{4}+2-8$$

$$=mn-m-2n+1$$

$$a_{m,n}=mn-m-2n+1+a_{2,n}+1$$

$$=mn-m-2n+1+2n-2+1$$

$$=mn-m$$

(2)當 $n\equiv 3(mod4)$時

$$a_{m-2,n}=2m-2n+1+\left(b_{m-n+3,5}+b_{m-n+5,7}+\cdots+b_{m-2,n}\right)+2\times\left(\frac{n-3}{4}\right)+\frac{n-3}{4}$$

$$=2m-2n+1+2\times\left\{\frac{[(m-n+8)+(m+n-2)]\times\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2}\right\}-8\times\left(\frac{n-3}{4}\right)$$

$$-7\times\left(\frac{n-3}{4}\right)+2\times\left(\frac{n-3}{4}\right)+\frac{n-3}{4}$$

$$=mn-m-2n+1$$

$$a_{m,n}=mn-m-2n+1+a_{2,n}+2$$

$$=mn-m-2n+1+2n-3+2$$

$$=mn-m$$

透過外圍擴充法算出$M\times N$的矩形(M為偶數N為奇數且$M>N$)最多轉折數為$mn-m$次。

2. $M\times N$矩形最多轉折次數證明(M為偶數N為奇數，且$M>N$)

(1)猜想：我們猜想$M\times N$的矩形中，最多轉折次數為$mn-m$次，如圖 63

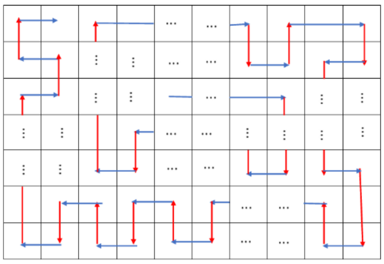


圖 63： $M \times N$的矩形
最多轉折數畫法

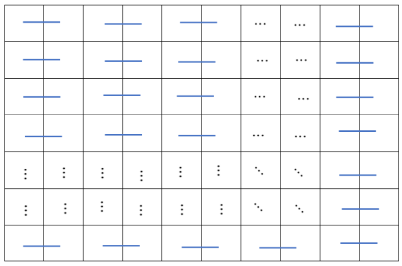


圖 64：在$M \times N$的矩形
中擺放最多的橫線方式

(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比$mn-m$次轉折數多，即可完成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。

首先我們先討論橫線的部分，在$M \times N$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 64，但圖中圖形將無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們總共分為三種畫法討論。

<畫法 1>

同先前證明，我們先計算橫線的數量，每組會有n條橫線，總共有$\frac{m}{2}$組，而每組的連接處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{mn-m}{2}+1$條。接著填入直線，為了不形成迴圈，我們將直線以交叉擺放的方式填入，因此每組最多會有$n-1$條直線，總共有$\frac{m}{2}$組，因此直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條。由此可知總線條數量為$mn-m+1$條，因此轉折次數為$mn-m$次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M \times N$的矩形以順時針的方式進行分組，如圖 65(不同顏色代表不同組別)，總共有$n-1$組，第一組為$(m-n+1) \times 3$的矩形(紅色)、第二組為2×5的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+3) \times 5$的矩形(黃色)、第四組為2×5的矩形(綠色)…以順時針擴張的方式得到第$n-2$組為$(m-2) \times 2$的矩形，最後一組為$2 \times (n-2)$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M \times N$矩形。

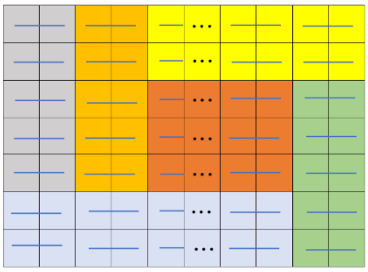


圖 65：順時針分組圖

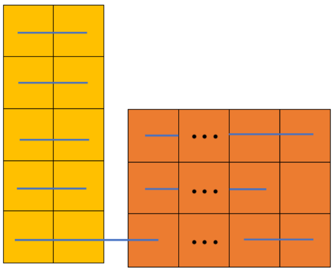


圖 66：第一、二組圖形連接

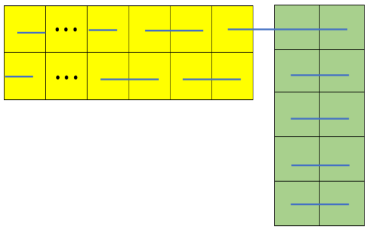


圖 67：第二、三組圖形連接

若要連成一條線，我們將第一組圖形與第二組的圖形做連接，如圖 66，則會少 1 條橫線，第二組的圖形與第三組的圖形做連接如圖 67，又會少 1 條橫線，以此類推，總共會少$\frac{n-1}{2}$條橫線。而其中第一組圖形因為寬為奇數，最後一排橫線必須相連，故再減少$\frac{m-n-1}{2}$條橫線。因此橫線的數量為$\frac{\mathrm{mn}-m}{2}$條，接著填入直線，交叉擺放後，第一組直線數量為$m-n+1$條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為$m-n+3$條⋯最後一組為$n-3$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條。由此可知總線條數量為$mn-m+1$條，因此轉折次數為$mn-m$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

<畫法 3>

我們將$M\times N$的矩形以逆時針的方式進行分組，如圖 68(不同顏色代表不同組別)，總共有$n-1$組，第一組為$(m-n+3)\times 3$的矩形(紅色)、第二組為2×5的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+5)\times 2$的矩形(黃色)⋯以逆時針的方式得到第$n-2$組$2\times(n-2)$的矩形，最後一組為$(m-2)\times 2$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M\times N$矩形。

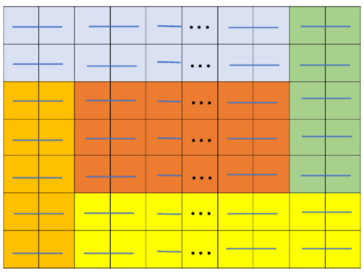


圖 68：逆時針分組圖

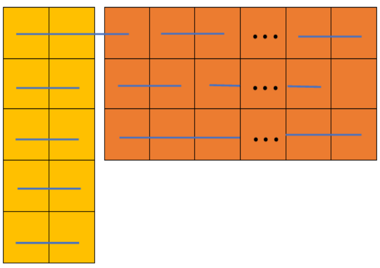


圖 69：第一、二組圖形連接圖

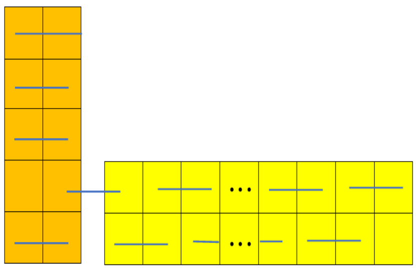


圖 70：第二、三組圖形連接

若要將此方式連成一條線，我們將第一組圖形與第二組的圖形做連接如圖 69，則會少 1

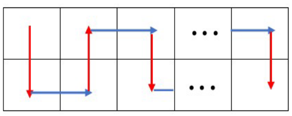
條橫線，第二組的圖形與第三組的圖形做連接如圖 70，又會少 1 條橫線，以此類推，第$n-3$組與第$n-2$組做連接，依然會少 1 條直線，故會少$\frac{n-1}{2}$條橫線。而其中第一組圖形因為寬為奇數，最後一排橫線必須相連，故再減少$\frac{m-n+1}{2}$條橫線。

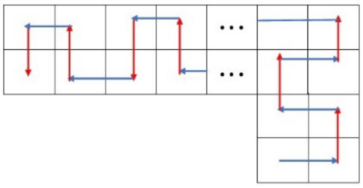
因此橫線的數量為$n \times \frac{m}{2} - \left(\frac{n-1}{2}\right) - \left(\frac{m-n+1}{2}\right) = \frac{mn-m}{2}$，接著填入直線，因直線必須根據橫線的位置交叉擺放，所以第一組直線數量為$m-n+3$條，第二組直線數量為4條，第三組直線數量為$m-n+5$條…最後一組為$m-2$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-m}{2}$條所以我們利用等差級數的公式，直線數量加橫線數量為$\frac{mn-m}{2} + \frac{mn-m}{2} = mn - m$條，因此轉折次數為$mn-m-1$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

從上述三種畫法中，我們可以證明出$M \times N$矩形(M為偶數N為奇數，且$M > N$)最多轉折次數為$mn-m$次，而只採取這三種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這三種畫法為目前找到最少的分組方式。

(六)$M \times N$矩形外圍擴充法(M為奇數N為偶數，且$M \geq N$)

我們以$(m-n+2) \times 2$的矩形為底，透過增加外圍的方式找出$M \times N$的矩形中最多的轉折次數。首先找出$(m-n+2) \times 2$的矩形的最多轉折次數如圖 71，為了擴充至$(m-n+4) \times 4$的矩形，我們將$(m-n+2) \times 2$的矩形與組成$(m-n+4) \times 4$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合如圖 72，將兩圖形結合後可以得到$(m-n+4) \times 4$的矩形，如圖 73；由$(m-n+4) \times 4$的矩形再與組成$(m-n+6) \times 6$的矩形所需的外圍最多轉折次數圖形結合，可以得到$(m-n+6) \times 6$的矩形，以此類推，我們最後可建構出$m \times n$的矩形。





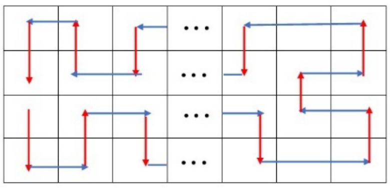


圖 71：$(m-n+2) \times 2$矩形 圖 72：$(m-n+4) \times 4$ 外圍 圖 73：$(m-n+4) \times 4$矩形

1.$M \times N$矩形最多轉折次數探討(**M為奇數N為偶數，且$M \geq N$**)

首先找出外圍的最多轉折次數，並確定其圖形畫法。其中為了在建構過程中能將圖形與圖形相連，我們將外圍圖形的畫法分為兩種情況進行討論:

<情況 1>當 $\boldsymbol{n \equiv 0(mod4)}$時

當所建構外圍的邊長n被4 除餘 0 時，其外圍與矩形必須透過綠色的直線進行連接，故最多轉折次數畫法如圖 74。因此在此前提下我們將計算此外圍最多的轉折次數。從圖可知橫線總數量為$m+n-3$條、直線數量為$m+n-3$條，轉折次數為$2m+2n-7$次。

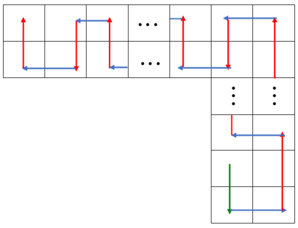
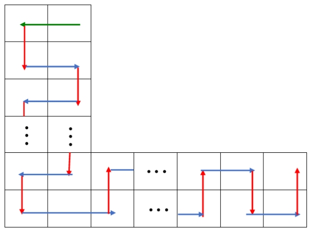


圖 74：$n \equiv 0(mod4)$時的外圍

圖 75：$n \equiv 2(mod4)$時的外圍



<情況 2>當 $\boldsymbol{n \equiv 2(mod4)}$

當所建構外圍的邊長n被4 除餘 2 時，其外圍與矩形必須透過綠色的直線進行連接，故最多轉折次數畫法如圖 75。從圖可知橫線總數量為$m+n-4$條、直線數量為$m+n-3$條，轉折次數為$2m+2n-8$次。

而透過圖形結合的方式，我們可以得出$a_{m,n}=\begin{cases}a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+1, n\equiv 0(mod4)\\ a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+2, n\equiv 2(mod4)\end{cases}$這樣的關係式，其中$b_{m,n}=\begin{cases}2m+2n-7, n\equiv 0(mod4)\\ 2m+2n-8, n\equiv 2(mod4)\end{cases}$，接著我們將式子化減

$$a_{m-n+2,2}=2m-2n+2$$

$$a_{m-n+4,4}=a_{m-n+2,2}+b_{m-n+4,4}+1$$

$$a_{m-n+6,6}=a_{m-n+4,4}+b_{m-n+6,6}+2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,n}=\begin{cases}a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+1\ , n\equiv 0(mod4)\\ a_{m-2,n-2}+b_{m,n}+2\ , n\equiv 2(mod4)\end{cases}$$

我們將上述式子的等號左邊與等號右邊各自相加並化簡

(1)當 $n \equiv 0(mod4)$時

$$a_{m,n}=2m-2n+2+\left(b_{m-n+4,4}+b_{m-n+6,6}+\cdots+b_{m,n}\right)+\frac{n-4}{4}+2\times\left(\frac{n-4}{4}\right)+1$$

$$= 2m - 2n + 2 + 2 \times \left\{ \frac{[(m-n+8)+(m+n)] \times \left(\frac{n-2}{2}\right)}{2} \right\} - 7 \times \left(\frac{n-4}{4}\right)$$

$$- 8 \times \left(\frac{n-4}{4}\right) + \frac{n-4}{4} + 2 \times \left(\frac{n-4}{4}\right) + 1 - 7$$

$$= mn - n$$

(2)當 $n \equiv 2(mod4)$時

$$a_{m,n} = 2m - 2n + 2 + \left(b_{m-n+4,4} + b_{m-n+6,6} + \cdots + b_{m,n}\right) + \frac{n-2}{4} + 2 \times \left(\frac{n-2}{4}\right)$$

$$= 2m - 2n + 2 + 2 \times \left\{ \frac{[(m-n+8)+(m+n)] \times \left(\frac{n-2}{2}\right)}{2} \right\} - 7 \times \left(\frac{n-2}{4}\right)$$

$$- 8 \times \left(\frac{n-2}{4}\right) + \frac{n-2}{4} + 2 \times \left(\frac{n-2}{4}\right)$$

$$= mn - n$$

透過外圍擴充法算出$M \times N$的矩形(M為奇數N為偶數且$M \geq N$)最多轉折數為$mn - n$次。

2. $M \times N$矩形最多轉折次數證明(M為奇數N為偶數，且$M \geq N$)

(1)猜想：我們猜想$M \times N$的矩形中，最多轉折次數為$mn - n$次，如圖 76

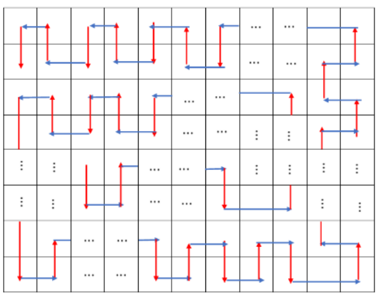


圖 76： $M \times N$的矩形最多轉折數畫法

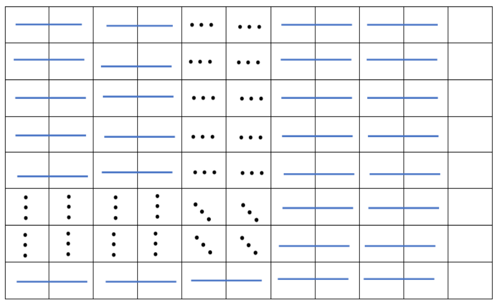


圖 77：在$M \times N$的矩形中擺放最多的橫線方式

(2)證明：我們只需證明不會有其他組畫法的轉折次數比$mn - n$次轉折數多，即可完成。我們想透過直橫線數量法討論線條數量，找出這個圖形可能的最多轉折次數。首先我們先討論橫線的部分，在$M \times N$的矩形中能夠擺放最多的橫線方式如圖 77，但圖中圖形將無法連成一條線，所以我們將橫線數量減少至可以連成一條線的數量，其中在減少的過程中，也要盡量滿足橫線數量最大的原則，所以我們總共分為三種畫法討論。

<畫法 1>

同先前證明，我們先計算橫線的數量，每組會有n條橫線，總共有$\frac{m-1}{2}$組，而每組的連接

處必須減少 1 條橫線，所以要減掉$\frac{m-1}{2}-1$條橫線，最終得出的橫線數量為$\frac{mn-m-n+1}{2}+1$條。接著填入直線，每組最多會有$n-1$條直線，總共有$\frac{m-1}{2}$組，因此直線數量為$\frac{mn-m-n+1}{2}$條，而因為邊長為奇數，會多出一條直線。由此可知線條總數量為$mn-m-n+2$條，因此轉折次數為$mn-m-n+1$次，所以這組畫法若能連成一條直線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 2>

我們將$M \times N$的矩形以順時針的方式進行分組，如圖 78(不同顏色代表不同組別)，總共有n組，第一組為$(m-n) \times 2$的矩形(紅色)、第二組為2×4的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+2) \times 2$的矩形(黃色)、第四組為2×4的矩形(綠色)…以順時針擴張的方式得到第$n-1$組為$(m-2) \times 2$的矩形，最後一組為$2 \times (n-2)$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M \times N$矩形。

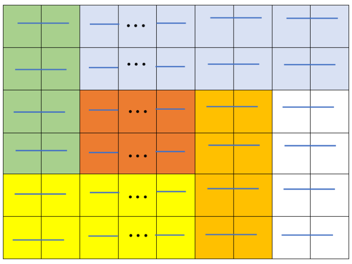


圖 78：順時針分組圖

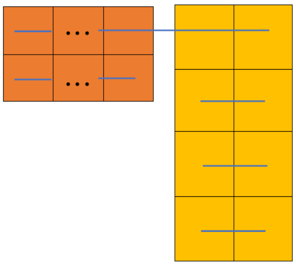


圖 79：第一、二組圖形連接圖

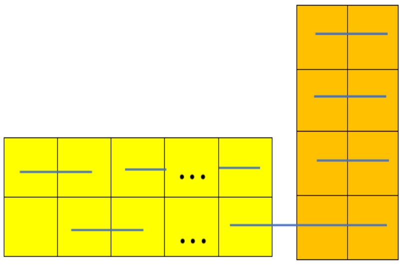


圖 80：第二、三組圖形連接圖

若要將此方式連成一條線，我們只需將橫線交叉排列即可，我們以第一組與第二組圖形以及第二組與第三組的圖形做示範，如圖 79 及圖 80。而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可。因此橫線的數量為$\frac{mn-n}{2}$條，接著填入直線，第一組直線數量為$m-n$條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為$m-n+2$條…最後一組為$n-3$條，而直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，因此可以得到直線數量為$\frac{mn-n}{2}$條。由此可知線條總數量為$mn-n$條，因此轉折次數為$mn-n-1$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，故完成討論。

<畫法 3>

我們將$M \times N$的矩形以逆時針的方式進行分組，如圖 81(不同顏色代表不同組別)，總共有

$n-1$組，第一組為$(m-n+2)\times 2$的矩形(紅色)、第二組為2×4的矩形(橙色)、第三組為$(m-n+4)\times 2$的矩形(黃色)⋯以逆時針的方式得到第$n-2$組$2\times(n-2)$的矩形，最後一組為$(m-2)\times 2$的矩形，這些矩形合成後能夠得到完整的$M\times N$矩形。

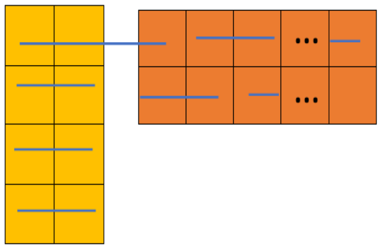
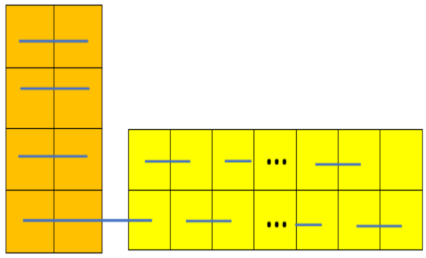




圖 81：順時針分組圖　　圖 82：第一、二組圖形連接圖　圖 83：第一、二組圖形連接圖

若要將此方式連成一條直線，我們只需將橫線交叉排列即可完成，我們以第一組與第二組圖形以及第三組與第四組的圖形做示範，如圖 82 及圖 83。而連接後的圖形要一筆畫完成，只要直線交叉排列即可。因此橫線的數量為$\frac{mn-n}{2}$，接著填入直線，第一組直線數量為$m-n+2$條，第二組直線數量為3條，第三組直線數量為$m-n+4$條⋯最後一組為$m-2$條，而每一組因為皆為交叉排列的方式擺放，直線數量在奇數組和偶數組分別會組成等差數列的規律，我們可以得到直線數量為$\frac{mn-n}{2}+1$條，線條總數量為$mn-n+1$條，因此轉折次數為$mn-n$次。所以這組畫法若能連成一條線，所得出的轉折次數，也不會比我們推測出來的還要多，而這種方式剛好與我們所推測的圖形相符，故完成討論。

從上述三種畫法中，我們可以證明出$M\times N$矩形(M為奇數N為偶數，且$M\geq N$)最多轉折次數為$mn-n$次，而只採取這三種畫法的原因是因為其他組分組的方式只會讓連接處增加，其線條數量就會減少，而這三種畫法為目前找到最少的分組方式。

肆、研究結果

一、直橫線數量法：透過此方法我們可以得知以下結果

(一) 4×3的矩形中最少轉折次數為4次

(二) $M\times N$的矩形中最少轉折次數為$2n-2$次

二、外圍擴充法：透過此方法我們可以得知以下結果

(一) $M\times M$的矩形中(M為偶數)，最多轉折次數為m^2-m次

(二) $M \times M$的矩形中(M為奇數)，最多轉折次數為$m^2 - m - 1$次

(三) $M \times N$的矩形中(N為偶數)，最多轉折次數為$mn - n$次

(四) $M \times N$的矩形中(N為奇數)，最多轉折次數為$mn - m$次

伍、討論

一、$M \times M$和$M \times N$的矩形中最少轉折次數是否還有不同的畫法？有幾種？

我們在研究過程中利用畫圖的方式觀察到在4×3的矩形中還有另一種畫法是用螺旋的方式讓圖形成立，因此我們推測在已知$M \times M$和$M \times N$的矩形最少轉折次數為$2m - 2$及$2n - 2$的前提下，我們可以利用長度推算法或是直橫線數量法，進行此圖形的證明。但是否還有其他種畫法我們目前無法確定。

二、$M \times M$和$M \times N$的矩形中最多轉折次數是否還有不同的畫法？有幾種？

我們發現在n為偶數的情況下可以將圖形反轉，我們以6×6的矩形做舉例，圖 84 為原本6×6矩形的解法，而圖 85 為6×6矩形反轉後的解法。但n為奇數的情況下，無法滿足這個條件，我們猜測最主要與奇偶數的方向性相關。

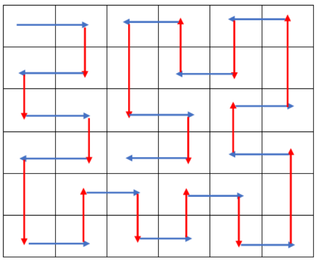


圖 84：6×6矩形原本的解法

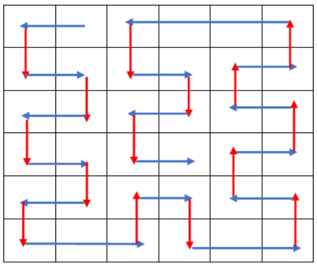


圖 85：6×6矩形反轉後的解法

三、在$M \times M$和$M \times N$的矩形中(N為奇數時)，為何在最多轉折次數的結果不相同？

在$M \times M$的矩形中我們是使用3×3為底進行擴充，而$M \times N$的矩形中是使用$(m - n + 1) \times 3$為底進行擴充，因此當$M = N$時，$M \times N$的基底為1×3的矩形，兩者並不相同，故最多轉折次數也會有所差異。

陸、結論

本研究以「直橫線數量法」與「外圍擴充法」為主要方法，成功分析不同矩形中一筆畫連接中心點時的轉折次數極值問題。針對最少轉折次數，我們歸納出線段組成的基本結構，並

運用反證法證明其下限；而在最多轉折次數的探討中，我們依矩形邊長的奇偶分類設計畫法，透過外圍擴充與遞迴推導建立通式，再以直橫線數量驗證其正確性。

本研究補足既有文獻僅止於觀察與舉例的不足，提供了系統性證明與多樣的分類策略，對未來圖形轉折問題的研究提供良好基礎。更重要的是，我們發現數學不只是計算與公式，它也包含了策略、圖像構思與邏輯架構的整合運用。

雖然我們已完成對大部分矩形類型的探討，但仍有部分特殊尺寸（如長寬比極端不等）與各類形狀並還未做研究，未來若能結合電腦模擬與演算法輔助，希望有機會擴展此研究至更複雜的圖形系統，並應用於如電路設計、遊戲開發、倉庫貨物管理等真實場域中。

【圖片說明】本說明書中除了圖 2 為引用文獻 2 中之圖形外，其餘圖形皆是作者自行繪製。

柒、參考文獻資料

【1】游森棚(2023)。森棚教官的數學題—蜿蜒曲折。科學研習雙月刊，62-3，頁 141。

https://www.ntsec.edu.tw/liveSupply/detail.aspx?a=6829&cat=6842&p=1&lid=20459&print=1

【2】張登富、蔡茗寓(2022)。星狀網路點擴展運算漢米爾頓容錯性質研究。中華民國第六十二屆中小學科學展覽會國中組數學科團隊合作獎。

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-030406.pdf?0.5663016052904544

【3】黃悅和、林群峰、陳楚東(2024)。蜿蜒曲折。中華民國第六十四屆中小學科學展覽會國中組數學科。

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/64/pdf/NPHSF2024-030412.pdf?0.11909683431917684

【評語】030410

探討 MxM 與 MxN 矩形中，一筆畫通過每個四方格的最少與最多轉折次數，作者們以外圍擴充法求最多轉折次數，整體而言，內容具條理性，未來可考慮在給任意起始點與終止點的兩點下，或考慮三度空間的情形下著墨。

作品海報

蜿蜒曲折
矩形中心點連線之路徑轉折次數探討

壹、前言

研究動機

在邏輯課的課程中，我們看到一個名叫蜿蜒曲折的題目，與小時候玩過的遊戲十分相似，於是想對這個題目展開研究。

研究目的

一、最少轉折次數的探討

(一)利用直橫線數量法進行與4×3的矩形最少轉折次數的探討與證明。

(二)利用直橫線數量法進行M×N的矩形最少轉折次數的探討與證明。

二、最多轉折次數的探討

(一)利用外圍擴充法找出M×M的矩形最多轉折次數及其畫法。

(二)進行M×M的矩形最多轉折次數證明。

(三)利用外圍擴充法找出M×N的矩形最多轉折次數及其畫法。

(四)進行M×N的矩形最多轉折次數證明。

名詞釋義

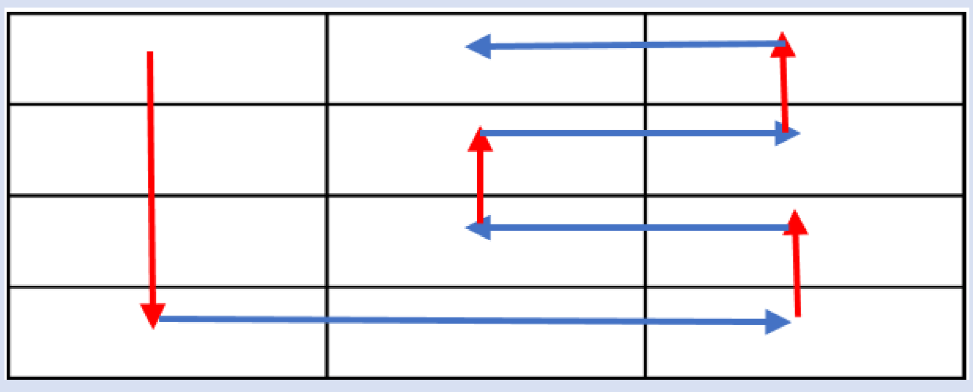
轉折次數計算方式：先一筆畫將所有格子相連，再計算轉折次數。

直橫線數量法：透過計算直線與橫線的數量進行轉折次數的討論。

外圍擴充法：透過圖形拼接的方式，將兩圖形連線擴充成更大的圖形。

$a_{m,n}$:我們定義 $a_{m,n}$ 為 $M \times N$ 的矩形的最多轉折次數。

$b_{m,n}$:我們定義 $b_{m,n}$ 為 $M \times N$ 的矩形的外圍最多轉折次數。



貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦

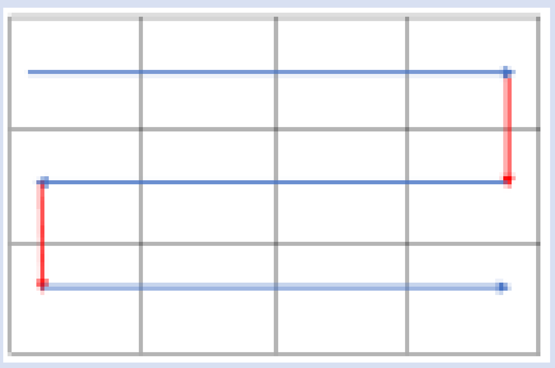
參、研究過程或方法

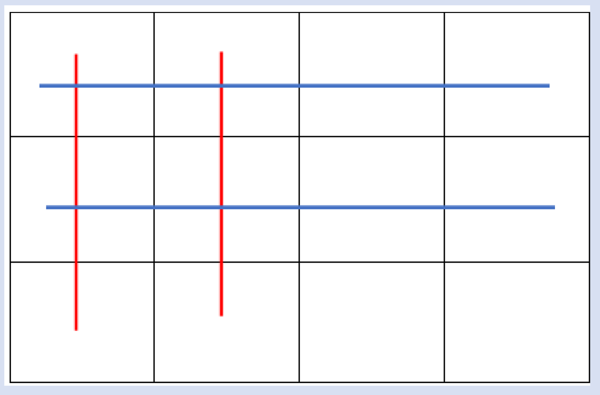
最少轉折次數

直橫線數量法 轉折次數可從直線和橫線的總數去推測，故可透過擺放線條的方式，推測轉折次數。

4×3的矩形 猜測最少轉折次數為4次

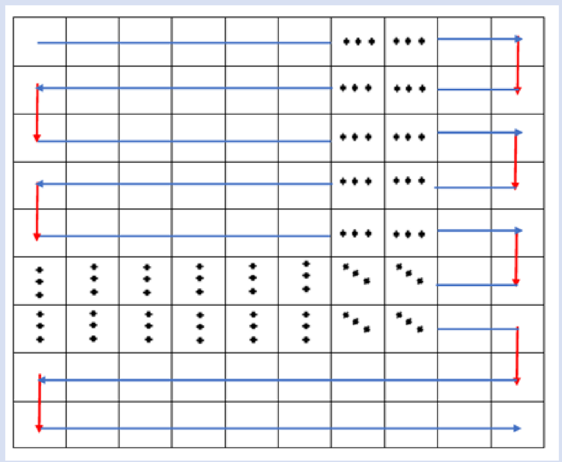
證明方式 線條數量分別為2條直線及2條橫線，透過擺放直線的方式來進行驗證。

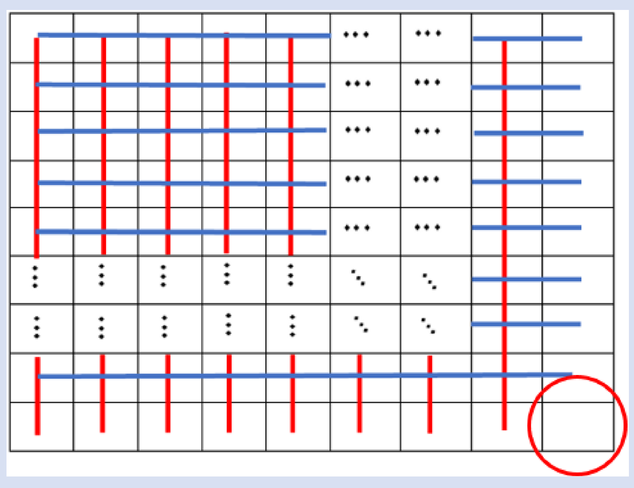




M×N的矩形 猜測最少轉折數為2n-2次

證明方式 假設存在更少轉折數量，則其線條數量分別為n-1條直線及n-1條橫線，但透過擺放線條的方式無法完成。



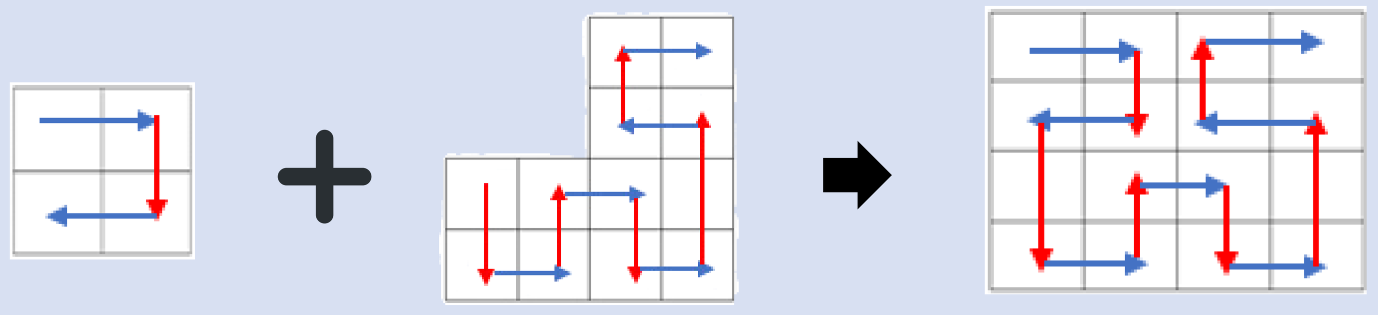


最多轉折次數

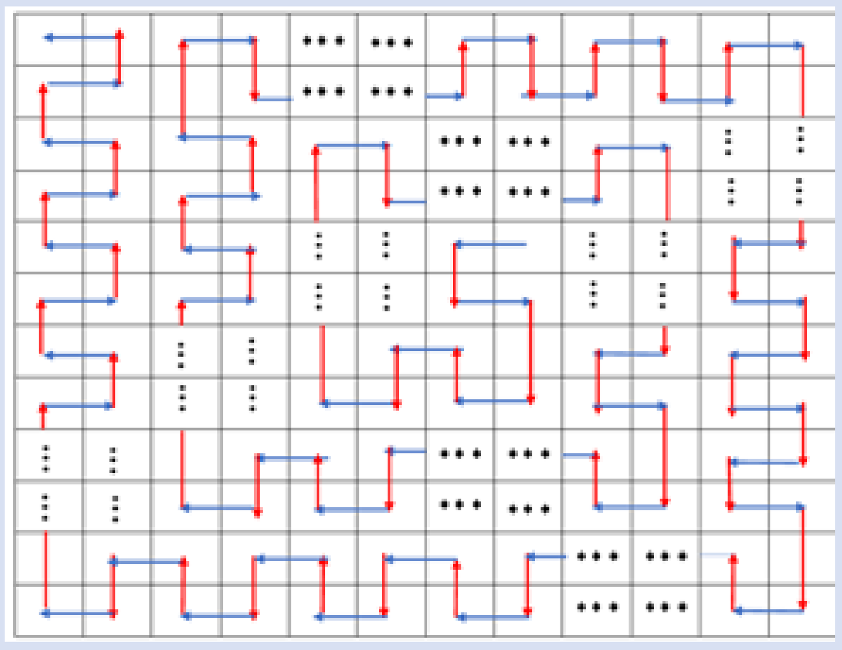
外圍擴充法 以各個圖形的最多轉折次數加上外圍的最多轉折次數進行擴充，透過拼接圖形來找出最多轉折數。

M×M的矩形

邊長為偶數 **建構方式**



轉折次數計算

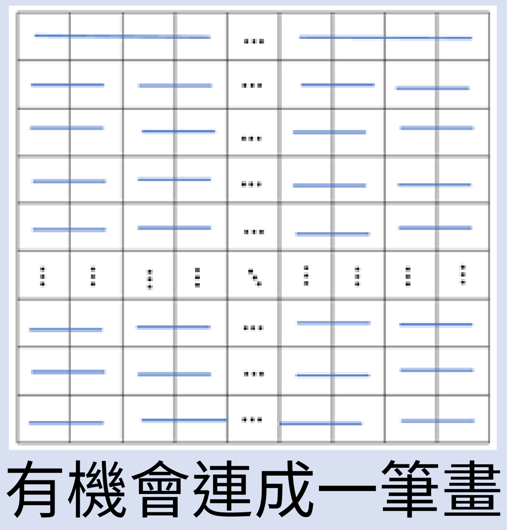


M×M的矩形最多轉折次數畫法

$$b_{m,m} = 4m - 7$$
$$a_{2,2} = 2$$
$$a_{4,4} = a_{2,2} + b_{4,4} + 1$$
$$a_{6,6} = a_{4,4} + b_{6,6} + 1$$
$$\vdots$$
$$a_{m,m} = a_{m-2,m-2} + b_{m,m} + 1$$
$$a_{m,m} = m^2 - m$$

證明方式 猜測最多轉折次數: $m^2 - m$ 次

畫法一



有機會連成一筆畫的擺放方式

計算轉折次數:

$$\frac{m^2 - m}{2} + 1 + \frac{m^2 - m}{2} - 1$$
$$= m^2 - m$$

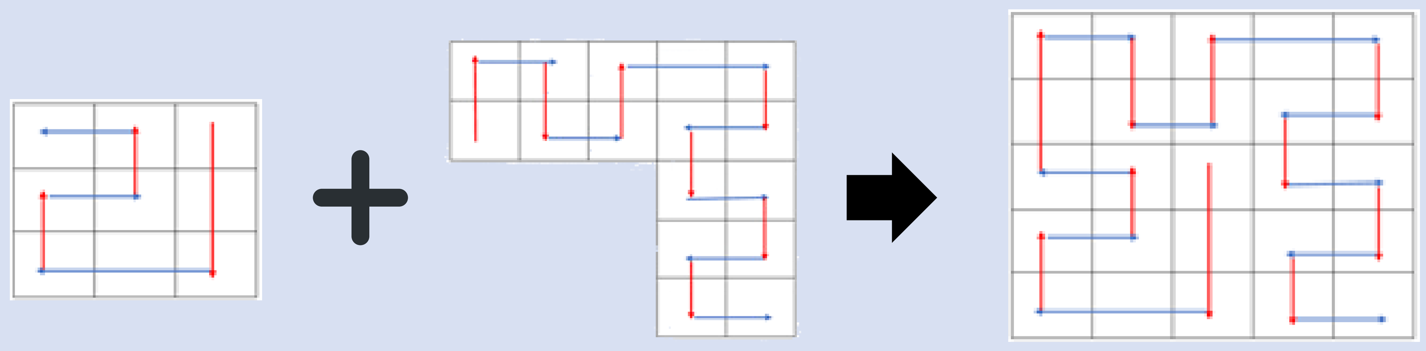
畫法二

能夠擺放最多的橫線

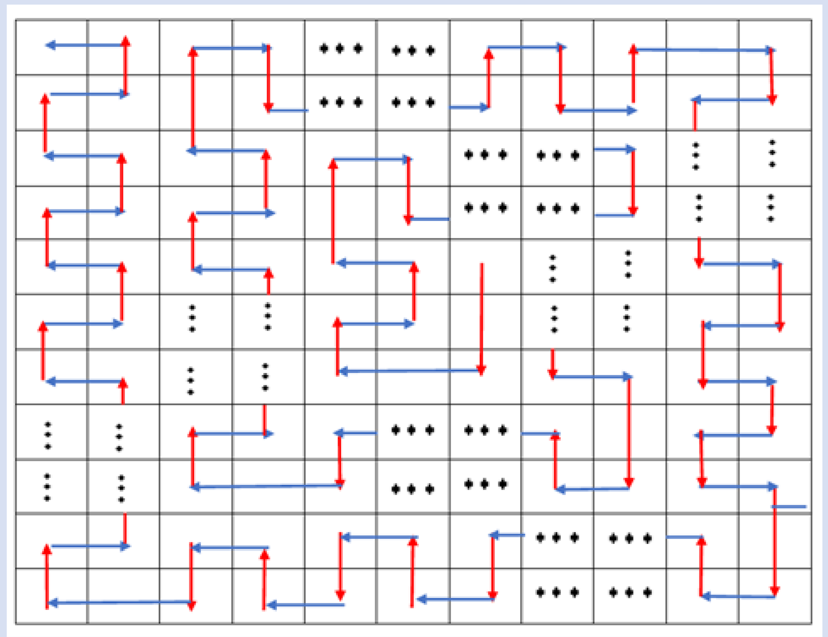
計算轉折數量:

$$\frac{m^2 - m}{2} + 1 + \frac{m^2 - m}{2} - 1$$
$$= m^2 - m$$

邊長為奇數 **建構方式**



轉折次數計算

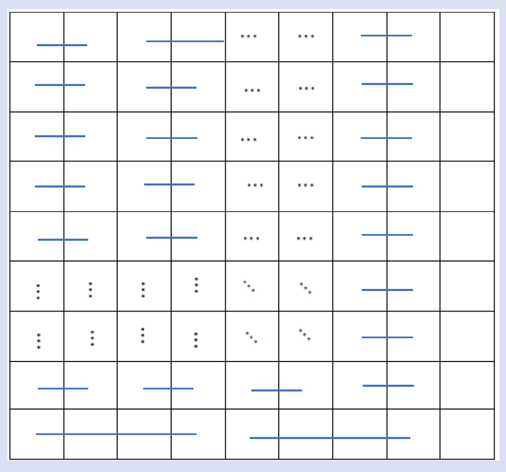


M×M的矩形最多轉折次數畫法

$$b_{m,m} = 4m - 7$$
$$a_{3,3} = 5$$
$$a_{5,5} = a_{3,3} + b_{5,5} + 1$$
$$a_{7,7} = a_{5,5} + b_{7,7} + 1$$
$$\vdots$$
$$a_{m,m} = a_{m-2,m-2} + b_{m,m} + 1$$
$$a_{m,m} = m^2 - m - 1$$

證明方式 猜測最多轉折次數: $m^2 - m - 1$ 次

畫法一

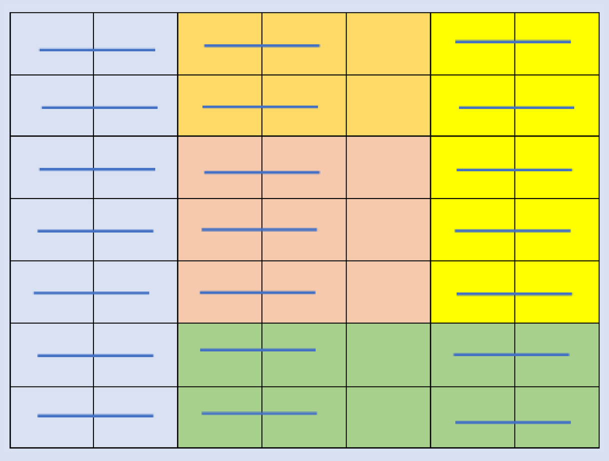


有機會連成一筆畫的擺放方式

計算轉折數量:

$$\frac{m^2 - 2m + 3}{2} + \frac{m^2 - 2m + 1}{2} - 1$$
$$= m^2 - 2m + 1$$

畫法二



能夠擺放最多的橫線

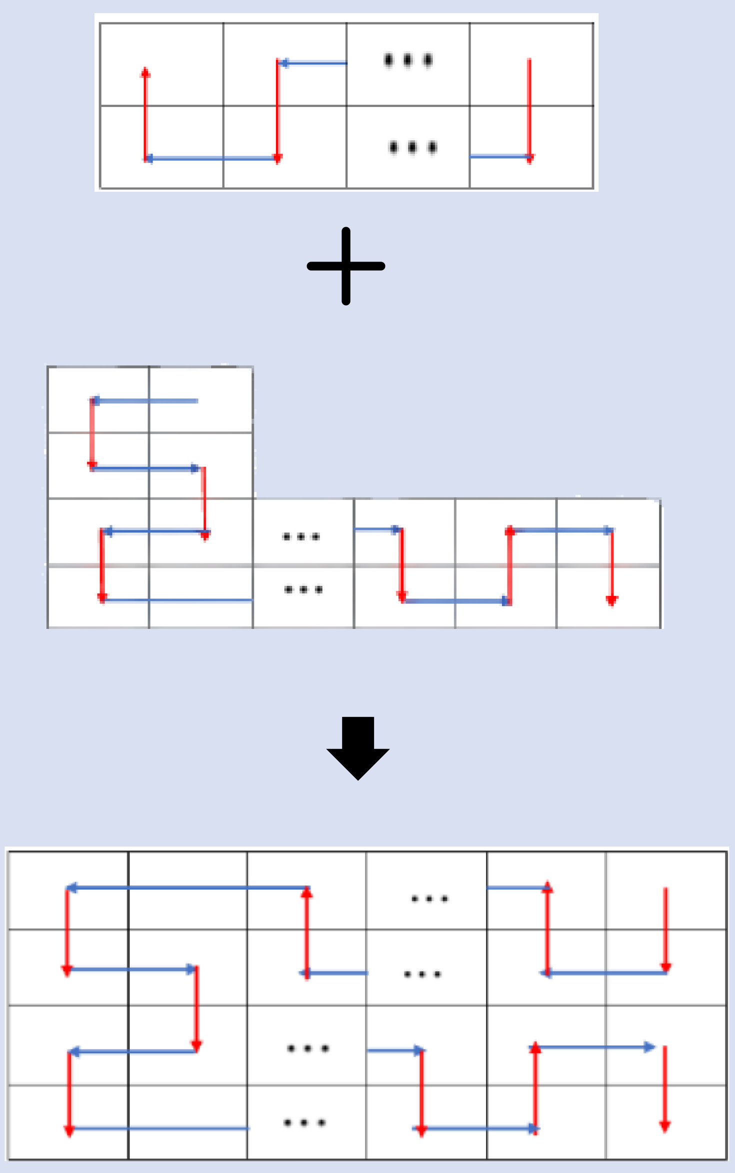
計算轉折數量:

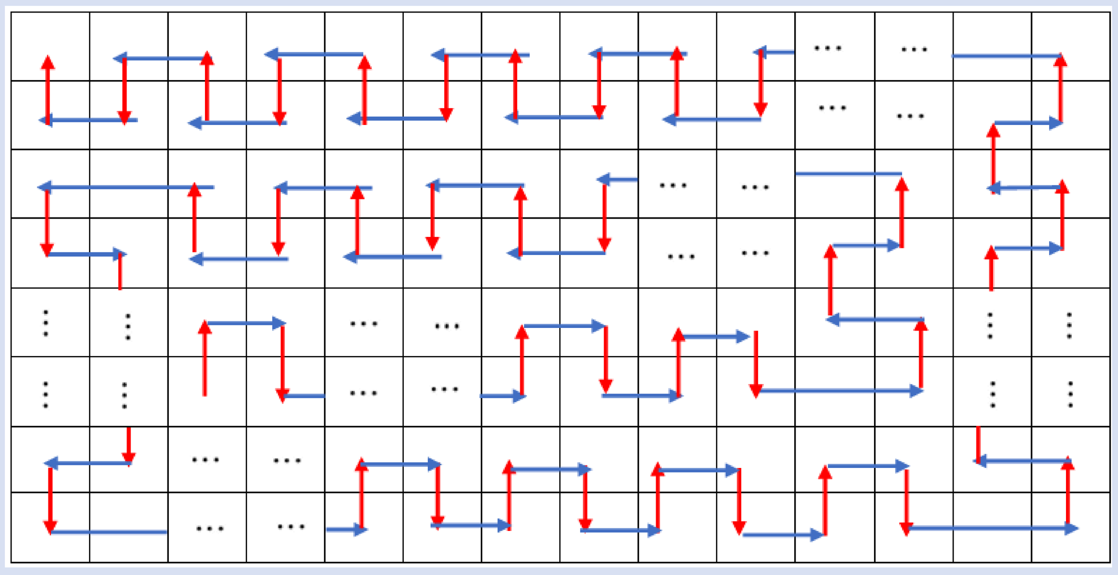
$$\frac{m^2 - m}{2} + \frac{m^2 - m}{2} - 1$$
$$= m^2 - m - 1$$

M×N的矩形

M、N皆為偶數 $m \geqslant n$

建構方式





M×N的矩形最多轉折次數畫法

轉折次數計算

$$b_{m,n} = 2(m+n) - 7$$
$$a_{m-n+2,2} = 2m - 2n + 2$$
$$a_{m-n+4,4} = a_{m-n+2,2} + b_{m-n+4,4} + 1$$
$$a_{m-n+6,6} = a_{m-n+4,4} + b_{m-n+6,6} + 1$$
$$\vdots$$
$$a_{m,n} = a_{m-2,n-2} + b_{m,n} + 1$$
$$a_{m,n} = mn - n$$

證明方式 猜測最多轉折次數: $mn - n$ 次

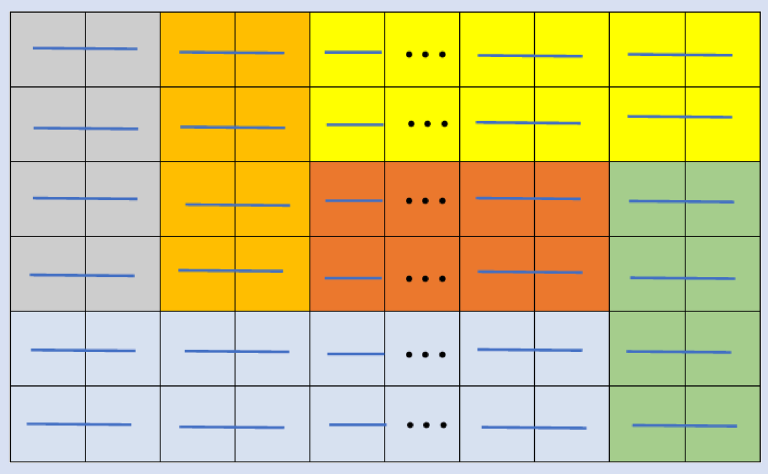
畫法一

組別：$\frac{m}{2}$ 組 $2 \times N$ 的矩形

橫線：$\frac{mn-m}{2} + 1$ 條　直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

轉折次數: $mn - m$ 次

畫法二



能夠擺放最多的橫線

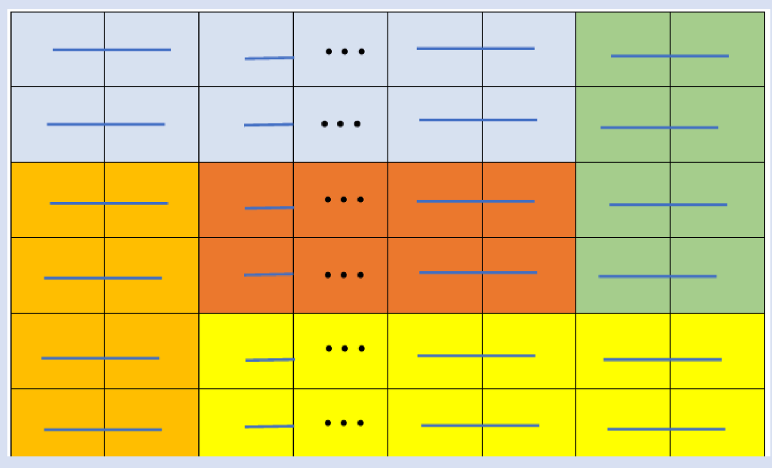
組別：n 組

橫線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

轉折次數: $mn - n - 1$ 次

畫法三



能夠擺放最多的橫線

組別：$n-1$ 組

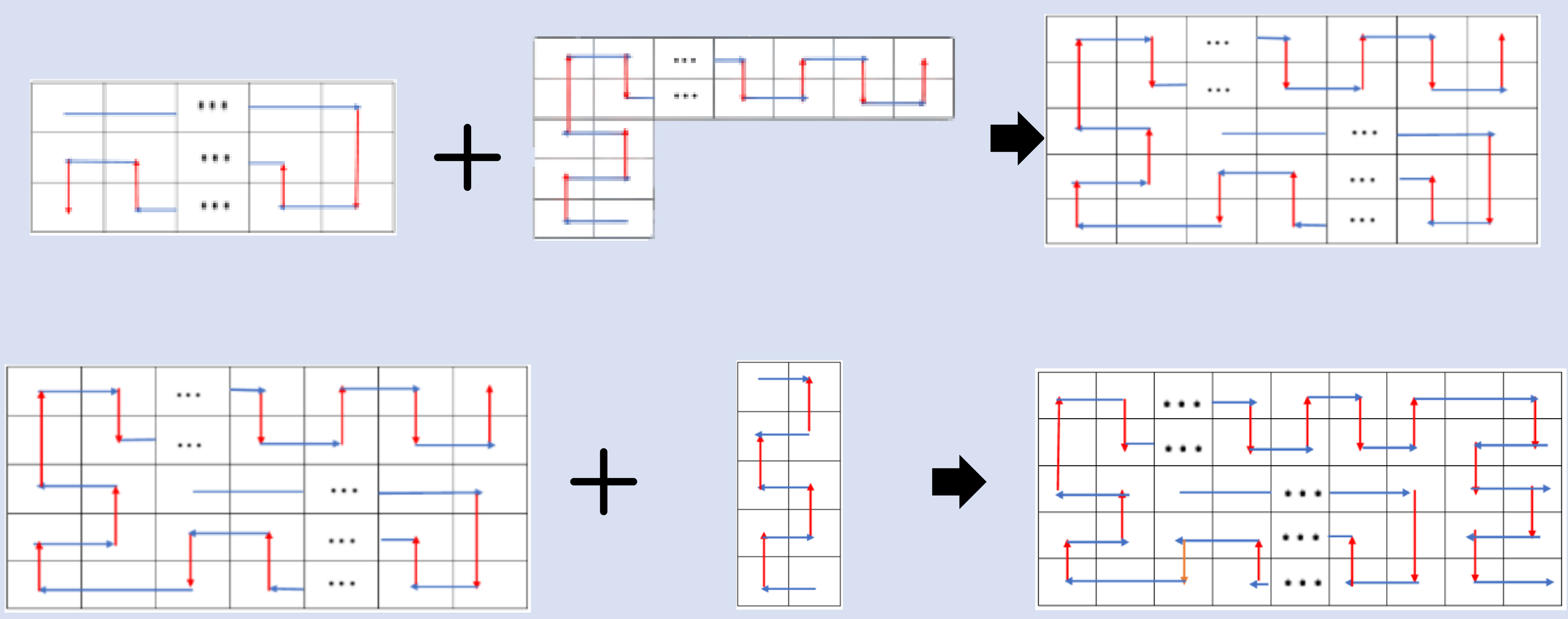
橫線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-n}{2} + 1$ 條

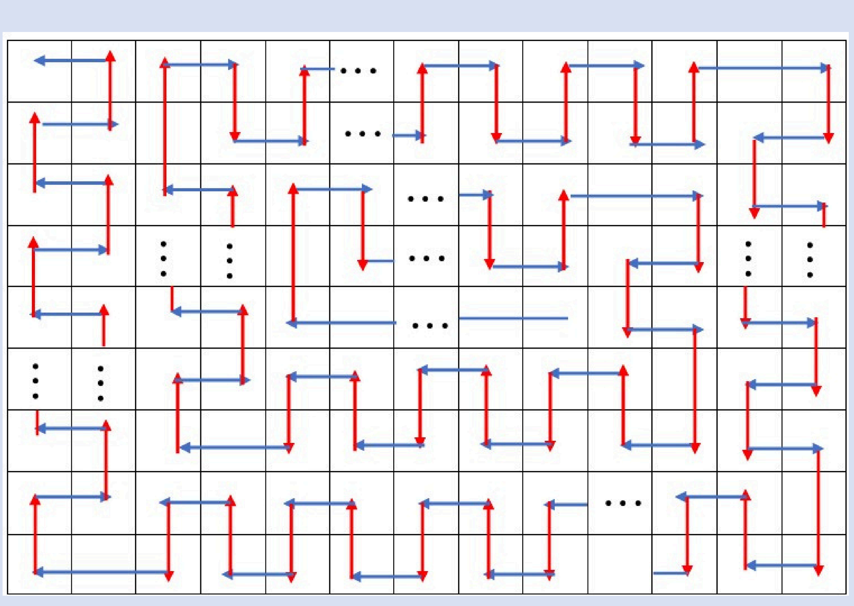
轉折次數: $mn - n$ 次

M、N皆為奇數 $m > n$

建構方式



轉折次數計算



M×N的矩形最多轉折次數畫法

$$b_{m,n} = 2(m+n) - 7$$
$$a_{2,n} = 2n - 2$$
$$a_{m-n+1,3} = 2m - 2n + 1$$
$$a_{m-n+3,5} = a_{m-n+1,3} + b_{m-n+3,5} + 1$$
$$a_{m-n+5,7} = a_{m-n+3,5} + b_{m-n+5,7} + 1$$
$$\vdots$$
$$a_{m-2,n} = a_{m-4,n-2} + b_{m-2,n} + 1$$
$$a_{m,n} = a_{m-2,n} + a_{2,n} + 1$$
$$a_{m,n} = mn - m$$

證明方式 猜測最多轉折次數: $mn - m$ 次

畫法一

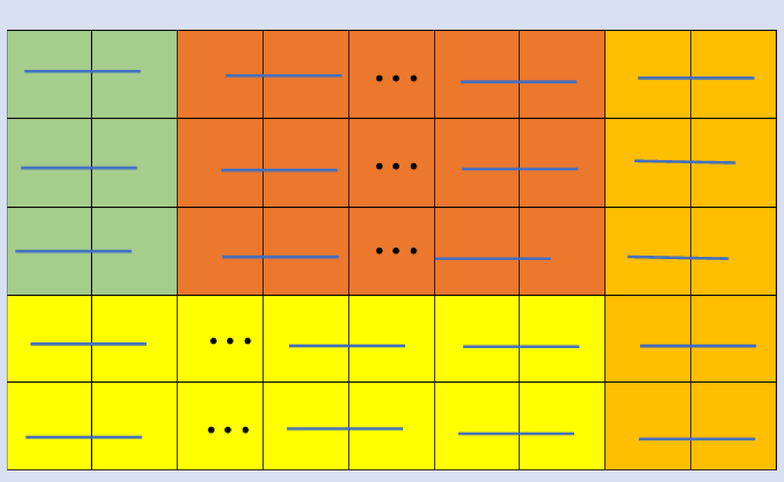
組別：$\frac{m-1}{2}$ 組 $2 \times N$ 的矩形

橫線：$\frac{mn-n-m+1}{2} + 1$ 條

直線：$\frac{mn-n-m+1}{2} + 1$ 條

轉折次數: $mn - n - m + 2$ 次

畫法二



能夠擺放最多的橫線

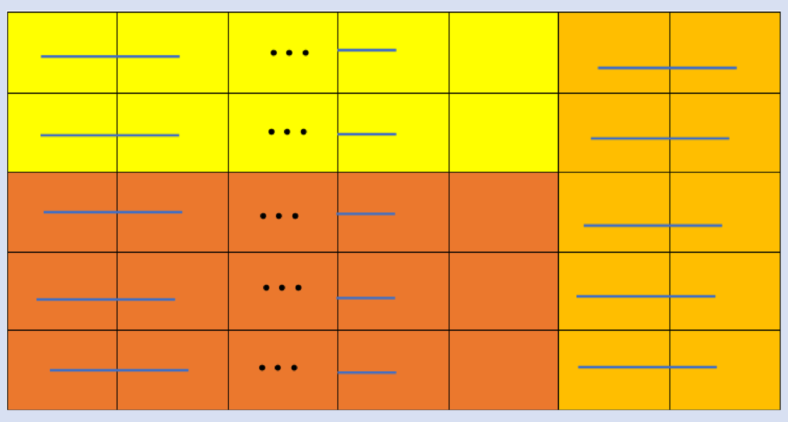
組別：$n-1$ 組

橫線：$\frac{mn-m}{2} + 1$ 條

直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

轉折次數: $mn - m$ 次

畫法三



能夠擺放最多的橫線

組別：$n-2$ 組

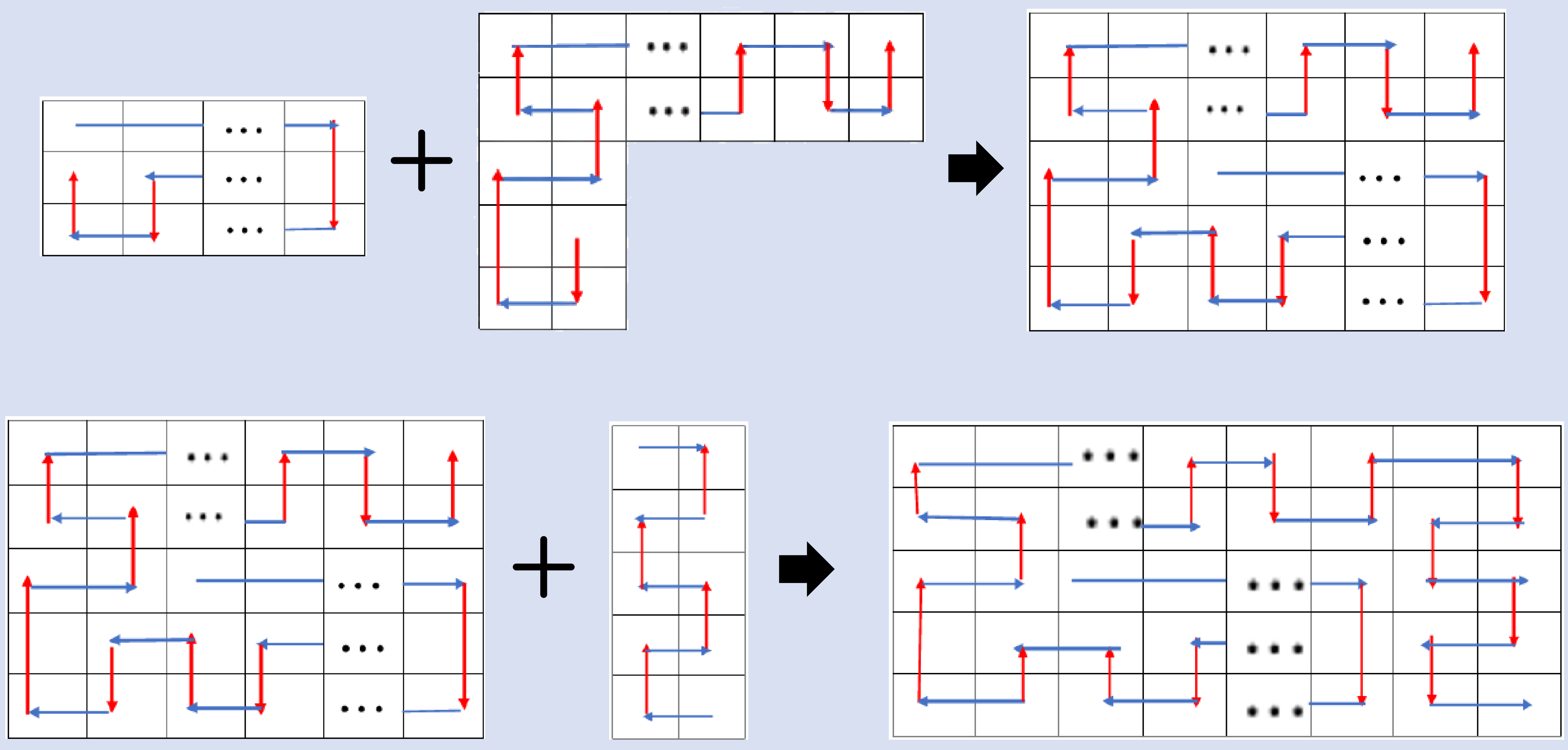
橫線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

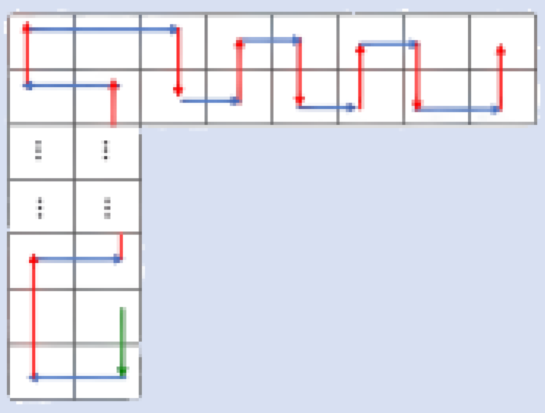
轉折次數: $mn - m - 1$ 次

M為偶數、N為奇數 $m > n$

建構方式

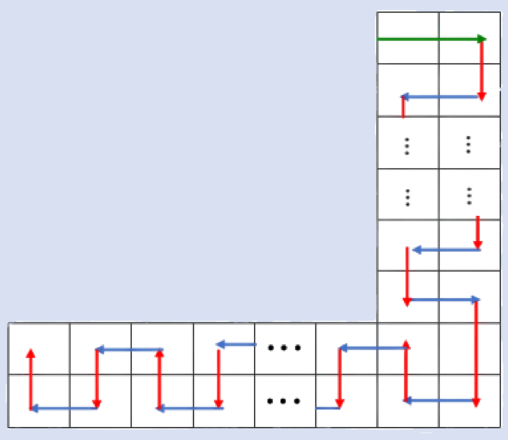


(1)當 $n \equiv 1 (mod 4)$

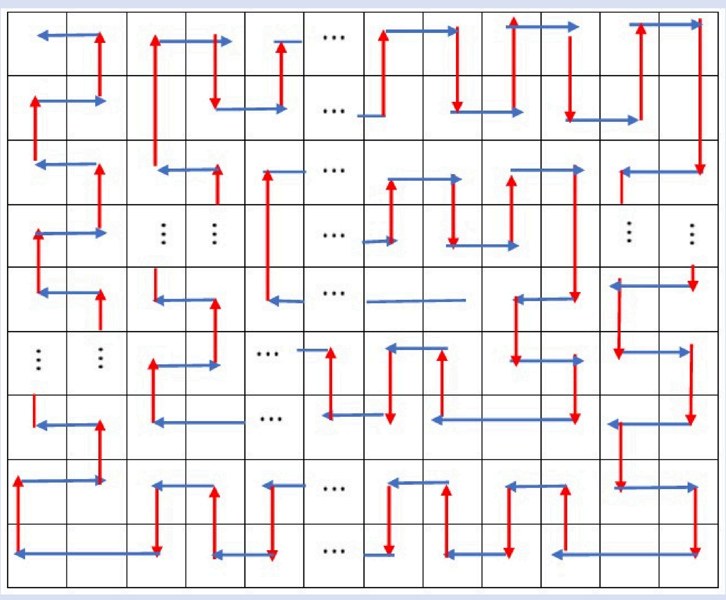


外圍最多轉折次數圖

(2)當 $n \equiv 3 (mod 4)$



外圍最多轉折次數圖



M×N的矩形最多轉折次數畫法

轉折次數計算

$$b_{m,n} = \begin{cases} 2(m+n) - 8, n \equiv 1 (mod 4) \\ 2(m+n) - 7, n \equiv 3 (mod 4) \end{cases}$$
$$a_{2,n} = \begin{cases} 2n - 2, n \equiv 1 (mod 4) \\ 2n - 3, n \equiv 3 (mod 4) \end{cases}$$
$$a_{m-n+1,3} = 2m - 2n + 1$$
$$a_{m-n+3,5} = a_{m-n+1,3} + b_{m-n+3,5} + 2$$
$$a_{m-n+5,7} = a_{m-n+3,5} + b_{m-n+5,7} + 1$$
$$\vdots$$
$$a_{m-2,n} = \begin{cases} a_{m-4,n-2} + b_{m-2,n} + 2, n \equiv 1 (mod 4) \\ a_{m-4,n-2} + b_{m-2,n} + 1, n \equiv 3 (mod 4) \end{cases}$$
$$a_{m,n} = \begin{cases} a_{m-2,n} + a_{2,n} + 1, n \equiv 1 (mod 4) \\ a_{m-2,n} + a_{2,n} + 2, n \equiv 3 (mod 4) \end{cases}$$
$$a_{m,n} = mn - m$$

證明方式

猜測最多轉折次數: $mn - m$ 次

畫法一

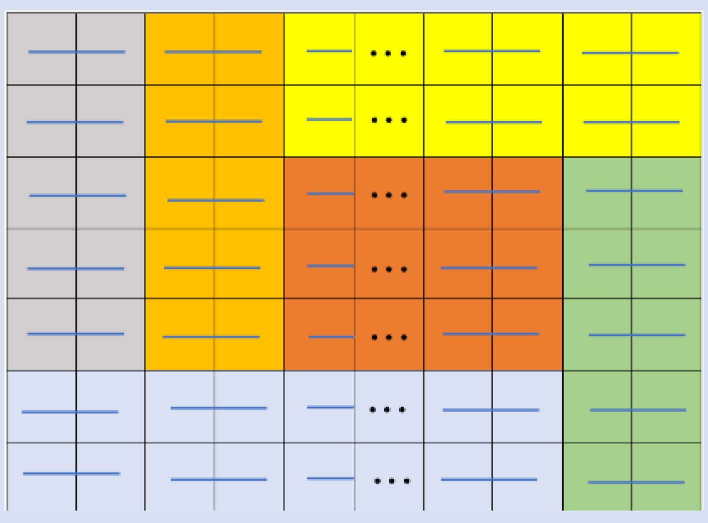
組別：$\frac{m}{2}$ 組

橫線：$\frac{mn-m}{2}+1$ 條

直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

轉折次數: $mn - m$ 次

畫法二



能夠擺放最多的橫線

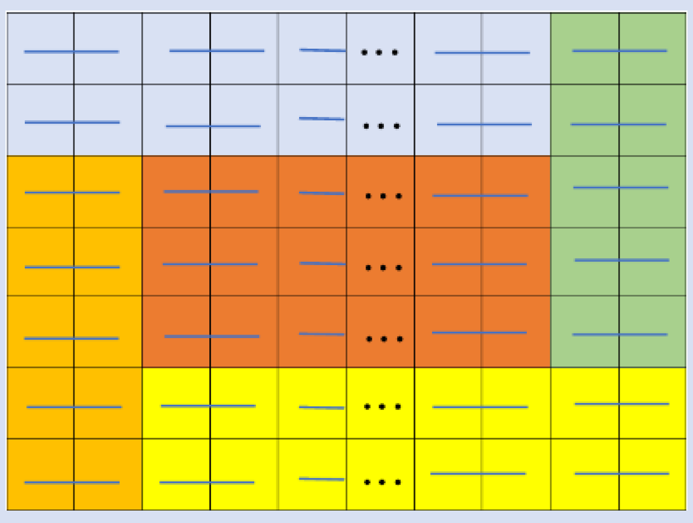
組別：$n-1$ 組

橫線：$\frac{mn-m}{2}+1$ 條

直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

轉折次數: $mn - m$ 次

畫法三



能夠擺放最多的橫線

組別：$n-2$ 組

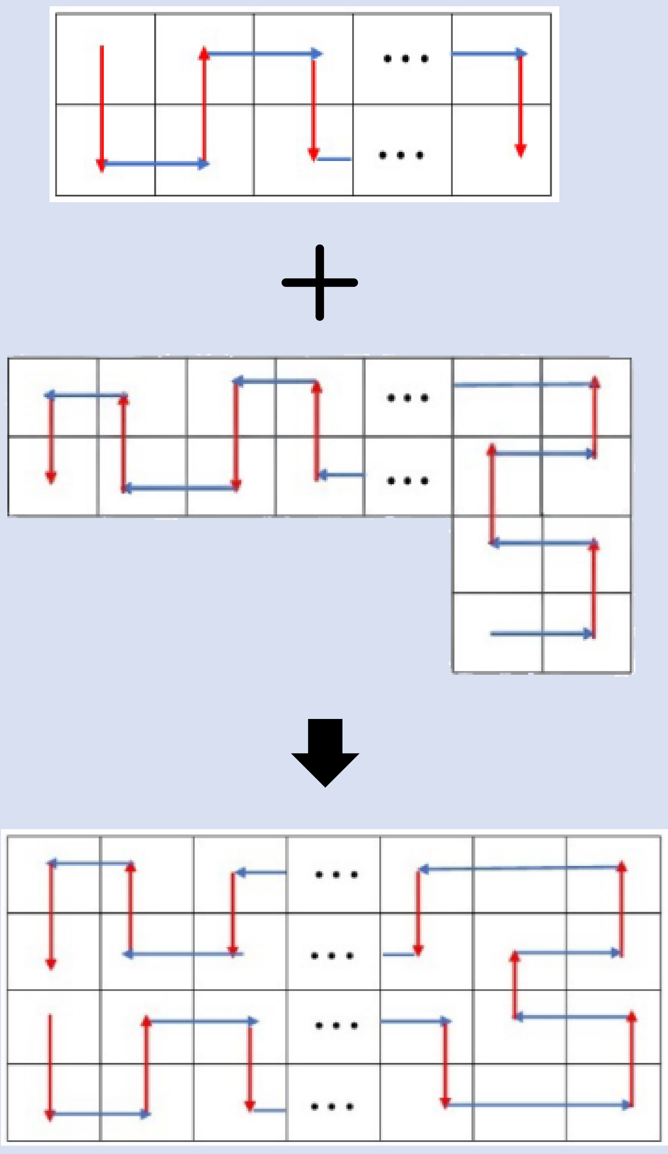
橫線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-m}{2}$ 條

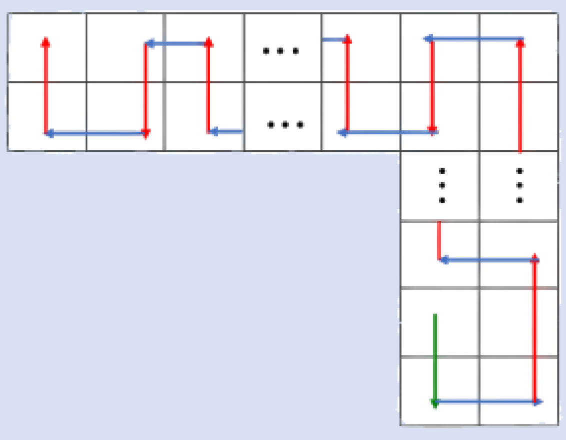
轉折次數: $mn - m - 1$ 次

M為奇數、N為偶數 $m \geqslant n$

建構方式

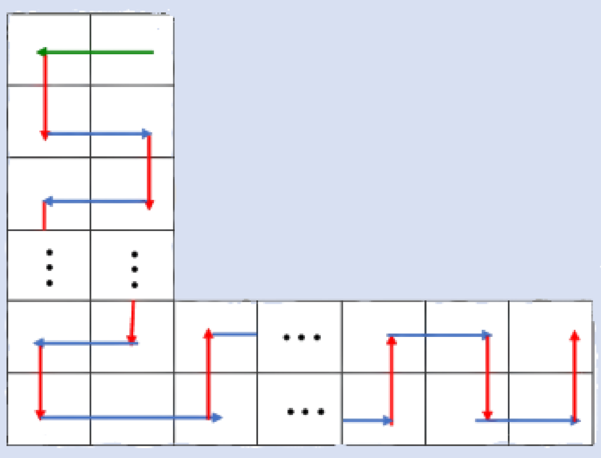


(1)當 $n \equiv 0(mod4)$

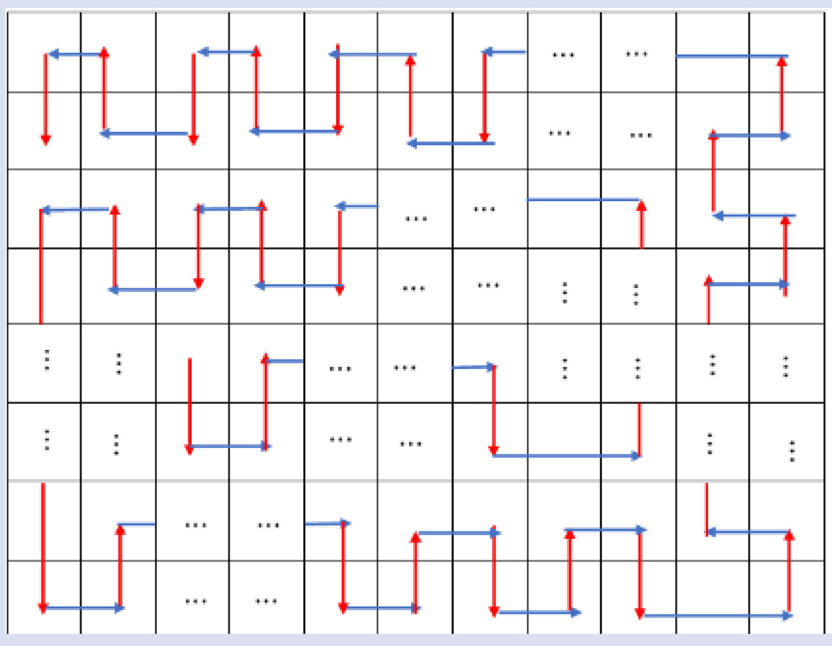


外圍最多轉折次數圖

(2)當 $n \equiv 2(mod4)$



外圍最多轉折次數圖



M×N的矩形最多轉折次數畫法

轉折次數計算

$$b_{m,n} = \begin{cases} 2(m+n)-7, n \equiv 0(mod4) \\ 2(m+n)-8, n \equiv 2(mod4) \end{cases}$$

$$a_{m-n+2,2} = 2m - 2n + 2$$

$$a_{m-n+4,4} = a_{m-n+2,2} + b_{m-n+4,4} + 1$$

$$a_{m-n+6,6} = a_{m-n+4,4} + b_{m-n+6,6} + 2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,n} = \begin{cases} a_{m-2,n-2} + b_{m,n} + 1, n \equiv 0(mod4) \\ a_{m-2,n-2} + b_{m,n} + 2, n \equiv 2(mod4) \end{cases}$$

$$a_{m,n} = mn - n$$

證明方式

猜測最多轉折次數: $mn - n$ 次

畫法一

組別：$\frac{m-1}{2}$ 組

橫線：$\frac{mn-m-n+1}{2}+1$ 條

直線：$\frac{mn-m-n+1}{2}$ 條

轉折次數: $mn - m - n + 1$ 次

畫法二

能夠擺放最多的橫線

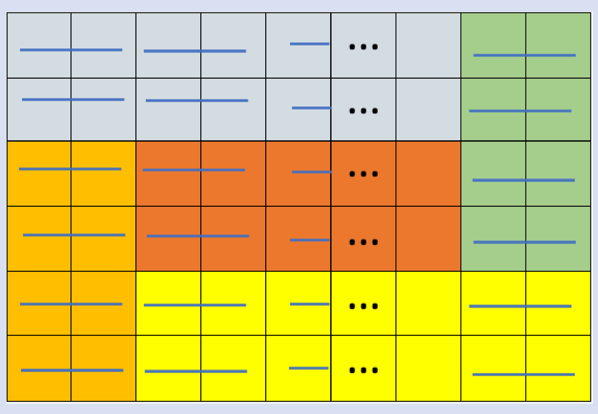
組別：n 組

橫線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

轉折次數: $mn - n - 1$ 次

畫法三



能夠擺放最多的橫線

組別：$n-1$ 組

橫線：$\frac{mn-n}{2}$ 條

直線：$\frac{mn-n}{2}+1$ 條

轉折次數: $mn - n$ 次

肆、研究結果

一、直橫線數量法:

(一)4×3的矩形中最少轉折次數為4次

(二)M×N的矩形中最少轉折次數為 $2n-2$ 次

二、外圍擴充法：

(一)M×M的矩形中(為偶數)，最多轉折次數為 $m^2 - m$ 次

(二)M×M的矩形中(為奇數)，最多轉折次數為 $m^2 - m - 1$ 次

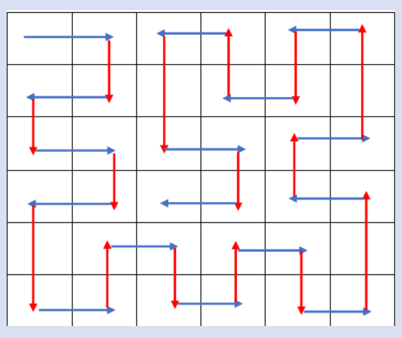
(三)M×N的矩形中(N為偶數)，最多轉折次數為 $mn - n$ 次

(四))M×N的矩形中(N為奇數)，最多轉折次數為 $mn - m$ 次

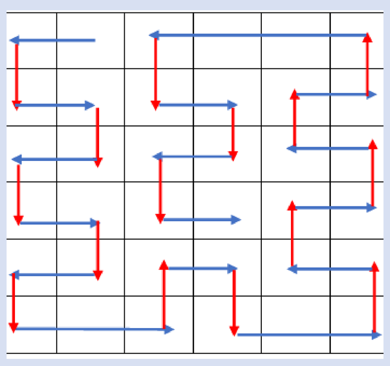
伍、討論

一、M×N的矩形中最少轉折次數是否還有不同的畫法？有幾種？

二、M×N的矩形中最多轉折次數是否還有不同的畫法？有幾種？



←6×6原圖



6×6反轉圖→

三、在M×M和M×N(N為奇數)的矩形中最多轉折次數，為何當M=N時的結果不同?

陸、結論

一、本研究運用「直橫線數量法」與「外圍擴充法」，探討一筆畫連接矩形中心點時轉折次數的極值問題。在最少轉折，我們以反證法進行證明；在最多轉折，分奇、偶邊長，以線條數驗證其正確性。

二、本研究補足文獻僅止於觀察與舉例的不足，提供系統性證明與分類策略，為圖形轉折問題奠定基礎；同時突顯數學涵蓋策略、圖像與邏輯的整合應用。

三、本研究雖已涵蓋多數矩形類型，仍有部分特殊尺寸與形狀待探討。未來若結合電腦模擬與演算法，有望擴展至更複雜圖形，並應用於電路設計、迷宮規劃、遊戲開發及倉儲管理等實務領域。

柒、參考文獻資料

一、游森棚(2023)。森棚教官的數學題—蜿蜒曲折。科學研習雙月刊，62—3，頁141。
https://www.ntsec.edu.tw/liveSupply/detail.aspx?a=6829&cat=6842&p=1&lid=20459&print=1

二、張登富、蔡茗寓(2022)。星狀網路點擴展運算漢米爾頓容錯性質研究。中華民國第六十二屆中小學科學展覽會國中組數學科團隊合作獎。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-030406.pdf?0.5663016052904544

三、黃悅和、林群峰、陳楚東(2024)。蜿蜒曲折。中華民國第六十四屆中小學科學展覽會國中組數學科。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/64/pdf/NPHSF2024-030412.pdf?0.11909683431917684

※註：本組海報之所有圖片皆為作者自行繪製