# 中華民國第65屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

國中組　數學科

030406

**整數與否看源頭**

學校名稱： 康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國三 鄭詠云 | 林冠成 |
| 國三 張崇毅 | 龔凡凱 |

關鍵詞： 整數數列、線性遞迴數列、多階等差數列

# 壹、摘要

滿足如下遞迴關係的數列，我們給出豐富且新穎的結果 ：

$$a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1} = k，$$

它可以轉換成四階線性遞迴式，研究過它的科展作品皆使用特徵方程，我們則從遞迴關係式去推導，手法更**簡潔**，更得到：

1.它是整數數列的**充份條件**。

2.當固定$n$，以$k$為項次，則形成的數列為**多階等差數列**。

新的結果有：

1.研究項次推廣的遞迴數列：

$$a_{N+R} a_{M-R} - a_N\, a_M = k，$$

它可轉換成若干個線性遞迴數列，我們還發現將前述若干迴數列，統整成用單一個數列表示的方法。

2.探討一般化的數列

$$\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-2} a_{n-1} = k，$$

條件設定請看說明書。我們得到一些初步成果。

最後應用本作品的結論，解決某科展作品未解決的問題。

# 貳、研究動機

我們對數學很有興趣，經常嘗試解題和積極學習新知，除了為學校資優數學小組的一員，也參與科展研究團隊。在找尋研究題材時，看到問題 1，得到了初步的解題過程後，便加以著手研究。

# 參、原始問題

本作品題目（[1]）來自《科學研習雙月刊》57-04 期的森棚教官的數學專欄，內容如下：

**問題 1**（本作品主要探討問題）.

小志在書上看到一段敘述：「一個數列如下定義，前三項是$a_1=1, a_2=1, a_3=2$，從第三項以後開始，每一項都由之前的三項按照以下的規則產生：

$$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-2}a_{n-1}+3)，$$

則這個整數數列……」

小定說：「這很奇怪啊，因為有一個$a_{n-3}$在分母，你怎麼知道除得盡呢？」

但不管如何，小志試了一下，得到這個數列是

$$1,1,2,5,13,34,89,233,610,\ldots\ldots$$

還真的都是整數。

小定說：「這很難說吧，如果改成：

$$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-2}a_{n-1}+2)，$$

得到：

$$1,1,2,4,10,21,53,\frac{223}{2},\frac{563}{2},\ldots\ldots$$

雖然前幾項是整數，後面就跑出分數了。所以你怎麼知道不會跑出分數？」

到底誰對？你能找出一般的規則嗎？

# 肆、研究目的

一、給出問題 1 的解題過程。

二、探討問題 1 在任意初始值的解。

三、將問題 1 遞迴式改寫為一般化的形式：$a_{N+R}a_{M-R} \pm a_N\, a_M = k$，進行探討。

四、試探討$\alpha a_{N+R}a_{M-R} - \beta a_N\, a_M = k$，$\alpha$、$\beta$均為非零整數、$k$為任意整數。

# 伍、研究工具

計算紙、筆、Microsoft Excel試算表。

# 陸、文獻探討

## 一、與相關科展作品的比較.

目前找到 2 件作品（[4]、[5]）研究過問題 1，統整其研究內容和本作品的比較如表 1。

表 1. 本作品與另外 2 件研究問題 1 的科展作品之比較（本作品作者親自製表）

| 作品名稱 / 分項 | **是整數嗎? 似「費」數!** | **是整數嗎** | **整數與否看源頭** |
|---|---|---|---|
| **來源** | 嘉義市 37 屆科展 | 新北市 108 學年度科展 | 本作品 |
| **主要結論** | 1. $\langle a_n \rangle$是費氏數列的奇數項。<br>2. $\langle a_n \rangle$在幾何上的表現。<br>3. $a_n = \frac{1}{a_{n-3}}\big(a_{n-2}a_{n-1} + (2k+1)\big)$的一般式。 | 1.由二階線性遞迴關係式轉換成非線性遞迴關係式。<br>2.能轉換成$\langle a_n \rangle$的必要條件。<br>3. $\langle a_n \rangle$可轉換成二階齊次線性遞迴的充要條件。<br>4.雖不符作品的定理，但仍有可能是整數數列。<br>5.二階齊次線性遞迴數列中一段連續項其間各項所具有的非線性關係。<br>6.承 5，奇偶項抽離，與 2 二階齊次線性遞迴數列合併。 | 1. $\langle a_n \rangle$為交錯型齊次線性遞迴數列。<br>2. $\langle a_n \rangle$是整數數列的充份條件。<br>3. 固定$n$，以$k$為項次$\langle a_n \rangle$是多階等差數列。<br>4. 研究一般化的$a_{N+R} = \frac{1}{a_{M-R}}(a_N a_M + k)$<br>5. $a_n$可表示為$k$的多項式。<br>6.$\lvert\alpha\rvert \geq 1$、$\lvert\beta\rvert \geq 1$初步探討。 |
| **本作品與其他兩件的差異** | | | **1.給出問題 1 自第幾項就會出現非整數的規律。**<br>**2. $\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$是整數數列的充份條件。**<br>**3.固定$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{k}$為項次的數列為多階等差數列。**<br>**3.研究更一般化的數列形式。** |

**補充說明 2.** 本作品和其他兩件作品相較，我們的研究結果更一般化、完整和豐富。

# 柒、研究過程與討論

## 一、問題一的解題過程

（一）觀察數據. 利用 Excel 試算數據如表 2：

表 2. 計算 $a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = k$ ， $1 \le n \le 12$ , $0 \le k \le 10$ 的$a_n$值（本作品作者親自製表）

| $k$ \ $a_n$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 8 | 8 | 16 | 16 | 32 | 32 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 7 | 11 | 26 | 41 | 97 | 153 | 362 | 571 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 10 | 21 | 53 | $111\frac{1}{2}$ | $281\frac{1}{2}$ | $592\frac{1}{4}$ | $1495\frac{1}{4}$ | $3145\frac{7}{8}$ |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 5 | 13 | 34 | 89 | 233 | 610 | 1597 | 4181 | 10946 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 6 | 16 | 50 | 134 | 419 | 1123 | $3511\frac{1}{2}$ | $9411\frac{1}{2}$ | $29428\frac{3}{4}$ |
| 5 | 1 | 1 | 2 | 7 | 19 | 69 | 188 | 683 | 1861 | 6761 | 18422 | 66927 |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 8 | 22 | 91 | 251 | $1038\frac{1}{2}$ | $2864\frac{1}{2}$ | $11851\frac{3}{4}$ | $32690\frac{3}{4}$ | $135256\frac{5}{8}$ |
| 7 | 1 | 1 | 2 | 9 | 25 | 116 | 323 | 1499 | 4174 | 19371 | 53939 | 250324 |
| 8 | 1 | 1 | 2 | 10 | 28 | 144 | 404 | 2078 | 5830 | 29987 | 84131 | $432733\frac{1}{2}$ |
| 9 | 1 | 1 | 2 | 11 | 31 | 175 | 494 | 2789 | 7873 | 44449 | 125474 | 708395 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 12 | 34 | 209 | 593 | $3645\frac{1}{2}$ | $10343\frac{1}{2}$ | $63587\frac{1}{4}$ | $180418\frac{1}{4}$ | $1109131\frac{3}{8}$ |

（二）分析

（1）見表 2 灰色網底的部份，當$\boldsymbol{k}$**為 0 和奇數**時，問題 1 的數列是整數數列。

（2） $k = 0$時，$a_n$值是 2 的冪次，推測規律為

$$a_n = 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}，當k = 0。$$

（3）$k$為偶數時，數列中開始出現為非整數的項次不同，統整如下：

表 3. 觀察表 2，$\langle a_n \rangle$開始出現非整數的項次（本作品作者親自製表）

| $k$ | $\langle a_n \rangle$開始出現非整數的項次 |
|---|---|
| $2 = 2^1 \times 1$ | 8 |
| $4 = 2^2 \times 1$ | 10 |
| $6 = 2^1 \times 3$ | 8 |
| $8 = 2^3 \times 1$ | 12 |
| $10 = 2^1 \times 5$ | 8 |

## （三）問題 1 的解答

為了方便敘述，將問題 1 改寫為下列寫法：

**問題 3(改寫問題 1).** 規定遞迴數列如下：

$$a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1} = k，\ a_1 = a_2 = 1、a_3 = 2。 \tag{1}$$

3.1. 當$k$為哪些整數時，$\langle a_n \rangle$的每一項都是整數？

3.2. 當$k$為哪些整數時，$\langle a_n \rangle$裡有些項是非整數？

我們給出問題 3 的解答為命題 4：

**命題 4.** 承問題 3，設$k = 2^u b$，$u \geq 0$ 且為整數，$b$為 0 或奇數，則

4.1. $u = 0$，$(k為奇數)$，$\langle a_n \rangle$的每一項均為整數。

4.2. $b = 0$，$(k=0)$，$a_n = 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$。

4.3. $u \geq 1$，$(k為非零偶數)$，當 $1 \leq n \leq 2u + 5$，$a_n$為整數；當$n \geq 2u + 6$， $a_n$ 不是整數。

**補充說明 5.** 看命題 4 的 4.3，研究過問題 1 的兩件科展作品並沒有探討在什麼條件下，數列會「跑出分數」，本作品則**給出具體的規律**。

以下將使用引理 6─9 來證明命題 4。

**引理 6.** 滿足(1)，$n \geq 5$ 的$\langle a_n \rangle$也滿足下列遞迴式：

$$a_n = \left(\frac{3k+5}{2}\right) a_{n-2} - a_{n-4}\text{，}a_1 = a_2 = 1\text{，}a_3 = 2\text{，}a_4 = k+2\text{，}k\text{為整數，}n \geq 5\text{。} \quad (2)$$

*證明.* 利用數學歸納法，(1)的前 9 項為

$$1\text{、}1\text{、}2\text{、}k+2\text{、}3k+4\text{、}\frac{1}{2}(3k^2+11k+8)\text{、}\frac{1}{2}(9k^2+27k+16)\text{、}$$
$$\frac{1}{4}(9k^3+48k^2+75k+32)\text{、}\frac{1}{4}(27k^3+126k^2+171k+64)\text{。} \quad (3)$$

(i) $a_5 = 3k+4 = \left(\frac{3k+5}{2}\right) \times 2 - 1 = \left(\frac{3k+5}{2}\right) \times a_3 - a_1$，

得知命題在$n=5$ 情況成立。

(ii)假設命題在$n=i$時成立，接著看下式：

$$a_{i+1} = \frac{1}{a_{i-2}}(a_i a_{i-1} + k) = \frac{1}{a_{i-2}}\left(\left(\left(\frac{3k+5}{2}\right)a_{i-2} - a_{i-4}\right)a_{i-1} + k\right)$$
$$= \left(\frac{3k+5}{2}\right)a_{i-1} + \frac{1}{a_{i-2}}(-a_{i-4}a_{i-1} + k) = \left(\frac{3k+5}{2}\right)a_{i-1} - a_{i-3}\text{。}$$

得知命題對$n = i+1$成立，由數學歸納法證得引理 6 成立。 ■

**引理 7.** $k$為偶數，若$a_{i-2}$為整數、$a_i$為奇數，則當$n = i+2s$、$s$為正整數，$a_n$都不會是整數。

*證明.* 根據引理 6 可知

$$a_{i+2} = \left(\frac{3k+5}{2}\right)a_i - a_{i-2} = \frac{(3k+5)a_i - 2a_{i-2}}{2}\text{，}i \geq 3\text{，} \quad (4)$$

已知$k$為偶數、$a_{i-2}$為整數、$a_i$為奇數，則(4)所得之分式的分子為奇數，令

$$a_{i+2} = \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2^1}\text{，}$$

再求$a_{i+4}$則有

$$a_{i+4} = \left(\frac{3k+5}{2}\right)a_{i+2} - a_i = \frac{(3k+5)\frac{b_1}{2} - 2a_i}{2} = \frac{(3k+5)b_1 - 4a_i}{4}\text{，} \quad (5)$$

(5)所得之分式的分子為奇數，令

$$a_{i+4}=\frac{b_2}{4}=\frac{b_2}{2^2}\text{ ，}$$

……如此迭代下去，可得

$$a_{i+2s}=\frac{b_s}{2^s}\text{ ，其中}b_s\text{為奇數，}$$

引理 7 得證。 ■

**引理 8.** $n\geq 4$ 的$a_n$可表示為關於$k$的多項式：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]}f_n(k)\text{，} \tag{6}$$

其中$f_n(k)$為一整係數多項式，且具有下列 3 個性質：

**性質8.1**. 最高次為$\left[\frac{n-2}{2}\right]$，其中[ ]為高斯符號。

**性質8.2**. 其領導係數為奇數。

**性質8.3**. 常數項為$2^{n-3}$。

*證明.*

**1. (6)成立的證明**

利用數學歸納法。

(i) 見(3)，命題對$4\leq n\leq 9$ 成立。

(ii) 假設命題分別對$n=i-1$ 和$i-3$成立，由引理 6 推得

$$\begin{aligned}a_{i+1}&=\left(\frac{3k+5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{i-3}{2}\right]}f_{i-1}(k)-\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{i-5}{2}\right]}f_{i-3}(k)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{i+1-4}{2}\right]}\big((3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)\big)\text{。}\end{aligned} \tag{7}$$

(7)中的$(3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)$也是一整係數多項式，故命題對$n=i+1$ 成立，也就證得(6)成立。

**2. 性質 8.1**

見(3)，性質 8.1 對$4\leq n\leq 9$ 成立，假設本性質對$n=i-1$、$n=i-3$成立，即$f_{i-1}(k)$和$f_{i-3}(k)$的最高次數分別為

$$\left[\frac{i-3}{2}\right]、\left[\frac{i-5}{2}\right]，$$

見(7)，由$(3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)$此式可知$f_{i-1}(k)$、$f_{i-3}(k)$分別乘以$(3k+5)$和 4 後加總，最高次數為

$$1+\left[\frac{i-3}{2}\right]=\left[\frac{i-1}{2}\right]=\left[\frac{(i+1)-2}{2}\right]，$$

根據數學歸納法原理，性質 8.1 得證。

**3. 性質8.2**

見(3)，性質 8.2 對 $4\leq n\leq 9$ 成立，假設本性質對$n=i-1$、$n=i-3$成立，見(7)，
由$(3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)$此式可知，$a_{i+1}$的領導係數為$3kf_{i-1}(k)$的領導係數，仍是奇數，根據數學歸納法原理，性質 8.2 得證。

**4. 性質 8.3**

見(3)，性質 8.3 對 $4\leq n\leq 9$ 成立，假設本性質對$n=i-1$、$n=i-3$成立，即$f_{i-1}(k)$和$f_{i-3}(k)$的常數項分別為$2^{i-4}$和$2^{i-6}$，見(7)，由$(3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)$此式可知，$f_{i-1}(k)$和$f_{i-3}(k)$的常數項分別乘以$(3k+5)$和 4，得到常數項為

$$5\times 2^{i-4}-4\times 2^{i-6}=5\times 2^{i-4}-2^{i-4}=4\times 2^{i-4}=2^{(i+1)-3}，$$

根據數學歸納法原理，性質 8.3 得證。

綜合上面討論，證得引理 8 成立。 ■

**引理 9.** $n\geq 4$ 的$f_n(k)$中$k$之 1 次項係數為奇數。

*證明.* 利用數學歸納法。

1. 見 (3)，引理對 $4\leq n\leq 9$ 成立。
2. 設命題對$n=i-1$、$i-3$成立，分別令$f_{i-1}(k)$和$f_{i-3}(k)$的一次項係數為$c$和$d$，$c$、$d$都是奇數，當$n=i+1$時，觀察 (7)，則得$(3k+5)f_{i-1}(k)-4f_{i-3}(k)$的一次項係數為

$$3\times 2^{i-4}+5c-4d$$

仍為奇數，引理 9 得證。 ■

*命題 4 的證明.*

**4.1.** 根據引理 6，當$k$為奇數，$\dfrac{3k+5}{2}$為整數，初始值為整數，可知數列的每一項皆為整數，得到命題 4 的 4.1 成立。

**4.2.** 由表 2 得知，命題 4 的 4.2 對$1 \leq n \leq 3$成立，接著看(6)及性質 8.3，可知當$k=0$、$n \geq 4$ 時，

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]} \times 2^{n-3} = 2^{\left(n-3-\left[\frac{n-4}{2}\right]\right)} \tag{8}$$

當$n$為偶數，則$n-3-\left[\dfrac{n-4}{2}\right] = \dfrac{2n-6}{2} - \dfrac{n-4}{2} = \dfrac{n-2}{2} = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，

當$n$為奇數，則$n-3-\left[\dfrac{n-4}{2}\right] = \dfrac{2n-6}{2} - \dfrac{n-5}{2} = \dfrac{n-1}{2} = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，

由上述兩式得知，命題 4 的 4.2 得證。

**4.3.** 注意到$f_n(k)$ 乘以$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]}$，$i \geq 1$ 的$k^i$項與係數乘積值為：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]} c_i k^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]} c_i (2^u b)^i = 2^{ui-\left[\frac{n-4}{2}\right]} c_i b^i \text{，其中} c_i \text{為} f_n(k) \text{中} k^i \text{的係數。} \tag{9}$$

然後根據引理 9 及(6)得知，$f_n(k)$中$k$的一次方項係數為奇數，當$f_n(k)$ 乘以$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]}$且

$$\left[\frac{n-4}{2}\right] = u \text{ 時，}$$

$a_n$會是奇數，因為看(9)可知道，此時$f_n(k)$除了$k$的一次方項係數及常數項外，$k$的其他次方項乘以$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]}$後，仍是偶數，另外從(8)可知$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n-4}{2}\right]}$乘以常數項仍得偶數。

由於

$$\left[\frac{n-4}{2}\right] = u \text{ 表示} n = 2u+5 \text{ 或} n = 2u+4\text{，}$$

由引理 7 即可得知命題 4 的 4.3 成立，到這裡完成了命題 4 的證明。 ■

## 二、整數數列的充份條件

（一）我們給出了問題 1 完整的解答，然後研究更一般化的情形，首先推廣引理 6，有

**命題 10.** 對任意整數$k$，給定初始值，如下的遞迴數列

$$a_n a_{n-3}-a_{n-2}a_{n-1}=k\text{，}k\text{及初始值}a_1\text{、}a_2\text{、}a_3\text{為給定整數。} \tag{10}$$

就是下列四階齊次線性遞迴數列：

$$a_n=\left(\frac{a_1+a_5}{a_3}\right)a_{n-2}-a_{n-4}\text{，初始值為}a_1\text{、}a_2\text{、}a_3\text{；}a_4\text{和}a_5\text{由(10)決定。} \tag{11}$$

*證明.* 由(10)的遞迴關係式可知

$$a_n a_{n-3}-a_{n-2}a_{n-1}=a_{n-2}a_{n-5}-a_{n-4}a_{n-3}=k\text{，} \tag{12}$$

得

$$a_n a_{n-3}+a_{n-4}a_{n-3}=a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-2}a_{n-5}\text{，} \tag{13}$$

同除以$a_{n-3}a_{n-2}$，得到

$$\frac{a_n+a_{n-4}}{a_{n-2}}=\frac{a_{n-1}+a_{n-5}}{a_{n-3}}\text{，} \tag{14}$$

從(14)可推得

$$\frac{a_n+a_{n-4}}{a_{n-2}}=\frac{a_{n-1}+a_{n-5}}{a_{n-3}}=\frac{a_{n-2}+a_{n-6}}{a_{n-4}}=\cdots=\frac{a_5+a_1}{a_3}\text{，}$$

命題 10 得證。 ■

**補充說明 11($a_4$和$k$的關係).** 和引理 6 對比，命題 10 揭示了$a_{n-2}$的係數值的來源，且證明手法是利用遞迴關係式去推導，並注意到從(12)到(14)的推導過程是雙向的，也就是從(11)出發，若給定初始值為$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$，也可推得(10)的關係式，並決定$k$值。

**命題 12.** (10)這個數列為整數數列的充份條件為$a_1a_2a_3$整除$(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2+a_1^2a_2$，其中$a_1$、$a_2$、$a_3$為初始值。

*證明.* 由(11)得知若

$$\frac{a_5+a_1}{a_3} \tag{15}$$

為整數，則 (10)為整數數列。

將$a_5$以初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$表示，有

$$
\begin{aligned}
a_5 &= \frac{1}{a_2}\left(a_3 \times \frac{1}{a_1}(a_2 a_3 + k) + k\right) \\
&= \frac{a_3}{a_1}\left(a_3 + \frac{k}{a_2}\right) + \frac{k}{a_2} \\
&= \frac{a_3^2}{a_1} + \frac{a_3 k}{a_1 a_2} + \frac{k}{a_2} \\
&= \frac{a_2\, a_3^2 + a_3 k + a_1 k}{a_1 a_2} \\
&= \frac{(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2}{a_1 a_2}
\end{aligned}
$$

代入 (15)得

$$
\frac{\dfrac{(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2}{a_1 a_2} + a_1}{a_3} = \frac{(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2 + a_1^2 a_2}{a_1 a_2 a_3}\ ,
$$

證得：如果$a_1 a_2 a_3$整除$(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2 + a_1^2 a_2$，則(10)為整數數列。 ■

不過即使$a_1 a_2 a_3$不整除$(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2 + a_1^2 a_2$，(10)仍有可能是整數數列。

**（二）當$\boldsymbol{a_1 a_2 a_3}$不整除$\boldsymbol{(a_1 + a_3)k + a_2\, a_3^2 + a_1^2 a_2}$，(10)是整數數列的充要條件**

**命題 13.** 如果(10)轉換的四階線性遞迴數列形式如下：

$$
a_{n+2} = \frac{Q}{P} a_n - a_{n-2}\text{，}n \geq 3\text{，其中}P\text{、}Q\text{為整數，}P \geq 2\text{，}(P, Q) = 1\text{，} \qquad (16)
$$

則$\langle a_n \rangle$為整數數列的充要條件為

$$
\langle a_n \rangle\text{是以}P\text{為公比的交錯型等比數列，且}Q = P^2 + 1\text{。} \qquad (17)
$$

**定義 13.1.** 交錯型等比數列意指奇數項形成的數列和偶數項形成的數列分別為某一等比數列。

以下引理 14─16 為證明命題 13 必要性成立的準備工具。

**引理 14.** $P|\, a_n$，$n \geq 3$。

*證明.* 對(16)等號兩邊同乘以$P$得

$$Pa_{n+2} = Qa_n - Pa_n，n \geq 3 \tag{18}$$

由於$(P,Q) = 1$，引理 14 得證。 ■

根據引理 14，可設

$$a_n = b_n P^{e_n}，P \nmid b_n，n \geq 3，$$

則有

**引理 15.** $\langle e_{2i} \rangle_{i\geq 1}$、$\langle e_{2i-1} \rangle_{i\geq 1}$皆為嚴格遞增數列。

*證明.* 首先證明

$$e_i > min\{e_{i-2}，e_{n+2}\}，i \geq 3。 \tag{19}$$

使用反證法，假設存在$m$使得$e_m \leq min\{e_{m-2}，e_{m+2}\}$，則對(20)等號兩邊同除以$P^{e_m}$，

$$a_{m+2} = \frac{Q}{P} a_m - a_{m-2}， \tag{20}$$

得

$$b_{m+2} P^{e_{m+2} - e_m + 1} = Qb_m - b_{m-2} P^{e_{m-2} - e_m + 1}，$$

因$e_{m+2} - e_m + 1 \geq 1$、$e_{m-2} - e_m + 1 \geq 1$，得

$$P|Qb_m，$$

然而$(P,Q) = 1$，推得$P|b_m$，與給定條件矛盾！故(19)成立。

同樣使用反證法證明引理 15 成立，接續(19)成立，設存在$l$使得$e_l \leq e_{l-2}$，如果$e_{l+2} \geq e_l$，則$e_l \leq min\{e_{l-2}，e_{l+2}\}$，與(19)矛 盾！故$e_{l+2} < e_l$，得

$$\langle e_{2i} \rangle_{i \geq \left[\frac{l}{2}\right]+1}、\langle e_{2i-1} \rangle_{i \geq \left[\frac{l}{2}\right]+2} 皆為嚴格遞減數列， \tag{21}$$

然而根據引理 14 得知

$$e_{2i} \geq 1\text{，}e_{2i+1} \geq 1\text{，} \tag{22}$$

故存在正整數$M_1$使得

$$e_{2i} = e_{2i+1} = 1\text{，當}i \geq M_1\text{，} \tag{23}$$

與(21)矛盾！故引理 15 得證。 ■

**引理 16.** 承(16)，$\langle a_n \rangle$為整數數列的必要條件為$k = 0$。

*證明.* 使用反證法，假設存在 $k \neq 0$的$\langle a_n \rangle$為整數數列，由引理 15 得知，隨著$n$漸增，$a_n$的因數$P^{e_n}$其次方數就愈大，再看式(10)，得知

$$P^E | k\text{，其中 }E\text{ 的大小沒有限制，}$$

與「$k$非零且有限」矛盾！故引理 16 得證。 ■

*命題 13 的證明.*

<u>必要性</u>

根據引理 16，$\langle a_n \rangle$為整數數列的必要條件為$k = 0$，將$k = 0$代入式(10)得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \text{ 或 } \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}\text{ ，} \tag{24}$$

由(24)得知，可設$\langle a_n \rangle$前 6 項為

$$a\text{， }b\text{，}ar\text{，}br\text{，}ar^2\text{，}br^2\text{，} \tag{25}$$

其中$a$、$b$、$r$為整數，容易驗證(25)的這 6 項符合(10)的$k = 0$的遞迴關係式，根據命題 10 的(11)可知

$$\frac{a + ar^2}{ar} = \frac{b + br^2}{br} = \frac{1 + r^2}{r} = \frac{Q}{P}\text{ ，} \tag{26}$$

因為

$$(r, 1 + r^2) = (P, Q) = 1\text{，}$$

得

$$r = P，$$

證得必要性成立。

<u>充份性</u>

根據(17)，可設$\langle a_n \rangle$的前 6 項如(25)，即

$$a_n = aP^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}，n為奇數，$$

$$a_n = bP^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}，n為偶數，$$

可得到

$$a_{n+2} = aP^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \frac{1+P^2}{P} aP^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} - aP^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} = \frac{1+P^2}{P} a_n - a_{n-2}，n為奇數， \tag{27}$$

$$a_{n+2} = bP^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \frac{1+P^2}{P} bP^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} - bP^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} = \frac{1+P^2}{P} a_n - a_{n-2}，n為偶數， \tag{28}$$

證得充份性成立，命題 13 得證。 ■

**三、一般化的數列**

（一）恆等式

從引用文獻[6]得知，問題 1 的解答之一和費氏數列有關。我們發現(1)的遞迴關係形式和卡西尼恆等式(Cassini's identity)相似：

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (\pm 1)^n \tag{29}$$

該書籍證明(29)成立使用到下列的恆等式（[6]，頁 59）：如果$xy = 1$，則有

$$(x^{n+k} - y^{n+k})(x^{m-k} - y^{m-k}) - (x^n - y^n)(x^m - y^m) = (xy)^n (x^k - y^k)(x^{m-n-k} - y^{m-n-k}) \tag{30}$$

為了應用於本作品，我們證得 (30) 的一般化形式：

**命題 17**(由(30)推廣的恆等式). $xy = 1$，$A$、$B$為實數，則有

$$\begin{aligned}&(Ax^{N+R} - By^{N+R})(Ax^{M-R} - By^{M-R}) - (Ax^N - By^N)(Ax^M - By^M)\\ &= (xy)^U\left((Ax^{N+R-U} - By^{N+R-U})(Ax^{M-R-U} - By^{M-R-U}) - (Ax^{N-U} - By^{N-U})(Ax^{M-U} - By^{M-U})\right)\end{aligned} \tag{31}$$

*證明.*

左式=

$$A^2x^{N+M}-Ax^{N+R}Bx^{M-R}-Ax^{M-R}Bx^{N+R}+B^2y^{N+M}-(A^2x^{N+M}-Ax^{N}Bx^{M}-Ax^{M}Bx^{N}$$

$$+B^2y^{N+M})$$

$$=(xy)^U(-Ax^{N+R-U}By^{M-R-U}-Ax^{M-R-U}By^{N+R-U}+Ax^{N-U}By^{M-U}+Ax^{M-U}By^{N-U})$$

$$=(xy)^U(A^2x^{N+M-2U}-Ax^{N+R-U}By^{M-R-U}-Ax^{M-R-U}By^{N+R-U}+B^2y^{N+M-2U}-A^2x^{N+M-2U}$$
$$+Ax^{N-U}By^{M-U}+Ax^{M-U}By^{N-U}-B^2y^{N+M-2U})$$

$$=(xy)^U\big((Ax^{N+R-U}-By^{N+R-U})(Ax^{M-R-U}-By^{M-R-U})-(Ax^{N-U}-By^{N-U})(Ax^{M-U}-By^{M-U})\big)$$

■

**補充說明 18**(從命題 17 獲得靈感得出要研究的數列形式)**.** 如果我們要探討的數列一般項表示法恰為 $a_N=Ax^N-By^N$，且$xy=1$ ，$R$ ，$U$為整數，應用命題 17 則有

$$a_{N+R}a_{M-R}-a_Na_M=a_{N+R-U}a_{M-R-U}-a_{N-U}a_{M-U} \tag{32}$$

承補充說明 18，我們先略過檢驗接下來要討論數列的一般項表示法，是否如補充說明 18 所講的形式： $a_N=Ax^N-By^N$，且$xy=1$，而是就數列形式去探討。

我們從(32)得到想法，去研究接下來要探討的數列型式，即數列 19。

**數列 19.** 規定一數列的遞迴關係式如下：

$$a_{N+R}a_{M-R}-a_Na_M=k\text{，}R\text{、}N\text{、}M\text{為給定，}k\text{為整數。} \tag{33}$$

## （二）交錯型線性遞迴數列

針對數列 19 討論，依給定遞迴關係式有

$$a_{N+R}a_{M-R}-a_Na_M=k=a_Ma_{2M-N-2R}-a_{M-R}a_{2M-N-R}\text{，}$$

$$a_{N+R}a_{M-R}+a_{M-R}a_{2M-N-R}=a_Ma_{2M-N-2R}+a_Na_M\text{，}$$

同除以$a_Ma_{M-R}$得：

$$\frac{a_{N+R}+a_{2M-N-R}}{a_M}=\frac{a_{2M-N-2R}+a_N}{a_{M-R}}\text{，}$$

$$\frac{a_{M+(N-M+R)}+a_{M-(N-M+R)}}{a_M}=\frac{a_{M-R+(N-M+R)}+a_{M-R-(N-M+R)}}{a_{M-R}}\text{。} \tag{34}$$

根據上述推導過程，我們得到一個命題：

**命題 20.** 承數列 19，如果$n \equiv n_1\ (mod\ R)$，則

$$\frac{a_{n+(N-M+R)} + a_{n-(N-M+R)}}{a_n} = \frac{a_{n_1+(N-M+R)} + a_{n_1-(N-M+R)}}{a_{n_1}} \text{。} \tag{35}$$

同理，我們可再做另一種推導：

$$a_{N+R}a_{M-R} - a_N a_M = k = a_N a_{M-2R} - a_{N-R}a_{M-R} \text{，}$$

$$a_{N+R}a_{M-R} + a_{N-R}a_{M-R} = a_N a_{M-2R} + a_N a_M \text{，}$$

同除以$a_{M-R}a_N$得：

$$\frac{a_{N+R} + a_{N-R}}{a_N} = \frac{a_{M-2R} + a_M}{a_{M-R}} \text{，}$$

$$\frac{a_{N+R} + a_{N-R}}{a_N} = \frac{a_{N+R-(N-M+R)} + a_{N-R-(N-M+R)}}{a_{N-(N-M+R)}} \text{，} \tag{36}$$

同命題 20，可得

**命題 21.** 承數列 19，如果$n \equiv n_2\ (mod\ N-M+R)$，則

$$\frac{a_{n+R} + a_{n-R}}{a_n} = \frac{a_{n_2+R} + a_{n_2-R}}{a_{n_2}} \text{。} \tag{37}$$

以下用具體數據來看自(35)和(37)所得到的遞迴數列。

**例 22**(從具體數據顯示(35)分式的值和(37)分式值未必相等)**.**
給定遞迴數列如下：

$$a_n a_{\mathrm{n}-7} - a_{n-3}a_{n-4} = 1,\text{初始值為}a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, \mathrm{a}_5 = 5, \mathrm{a}_6 = 8, a_7 = 13\text{，} \tag{38}$$

對比(33)，(38)的$N = n-3$，$M = n-4$，$R = 3$，且有$N-M+R = 4$。
然後計算$a_8 \sim a_{12}$的值：

$$a_8 = 16,\ a_9 = 41,\ \mathrm{a}_{10} = 52\frac{1}{2},\ a_{11} = 69\frac{2}{3},\ a_{12} = 131\frac{2}{5} \text{。}$$

接著以遞迴關係式的形式觀察係數：
對比(35)：

$a_9 = \dfrac{42}{5} \times a_5 - a_1$，$a_{10} = \dfrac{157}{16} \times a_6 - a_2$，$a_{11} = \dfrac{215}{39} \times a_7 - a_3$，$a_{12} = \dfrac{42}{5} \times a_8 - a_4$，

對比(37)：

$a_7 = \dfrac{14}{3} \times a_4 - a_1$，$a_8 = \dfrac{17}{5} \times a_5 - a_2$，$a_9 = \dfrac{43}{8} \times a_6 - a_3$，$a_{10} = \dfrac{55}{13} \times a_7 - a_4$，

$a_{11} = \frac{14}{3} \times a_8 - a_5$。

設$a_N$和$a_{N+1}$的遞迴關係式分別如下：

$$a_N = A_1 a_{N-(N-M+R)} - a_{N-2(N-M+R)}\ ,$$

$$a_{N+1} = A_2 a_{N+1-(N-M+R)} - a_{N+1-2(N-M+R)}\ ,$$

由例 22 可知$A_1$未必 等於$A_2$。

**補充說明 23**($A_1$未必等於$A_2$的理由). 承上一行，$A_1$未必等於$A_2$，主要是因為初始值不一定為同一遞迴數列中連續若干項，而$A_1$和$A_2$由初始值決定，故產生$A_1$未必等於$A_2$的情況。

為了敘述本作品研究的成果，見以下定義：

**定義 24**(交錯型齊次$2r$階線性遞迴數列). 若$\langle a_n \rangle$的遞迴數列關係式如下：

$a_{n+r} = A_d a_n - a_{n-r}$，$A_d$ 、$r$為給定常數，當$n \equiv d\ (mod\ D)$，$0 \le d \le D-1$，$D \ge 2$， (39)

則稱$\langle a_n \rangle$為「交錯型齊次$2r$階線性遞迴數列」。

定義 24 意指數列的組成，是依據帶係數$A_d$的項$a_n$，其足碼$n$模$D$的剩餘分類，使用$D$條齊次線性遞迴數列的關係式去表達$a_{n+r}$，由命題 20、命題 21 得到

**命題 25.** 數列 19 為交錯型齊次$2r$階線性遞迴數列。

## （三）用單一條遞迴式統整

那麼是否存在單一個遞迴關係式，可以統整由數列 19 轉換的交錯型齊次$2r$階線性遞迴數列呢？答案是肯定的，先來看下列推導：

設$D = N - M + R$，且$L = [R, N - M + R]$，可得$n + L + D \equiv n + D\ (mod\ R)$，依命題 20 可設$a_{n+L+D} = A a_{n+L} - a_{n+L-D}$、$a_{n+D} = A a_n - a_{n-D}$，則有

$$a_{n+L+D}a_n - a_{n+L}a_{n+D} = (Aa_{n+L} - a_{n+L-D})a_n - a_{n+L}(Aa_n - a_{n-D})$$
$$= a_{n+L}a_{n-D} - a_{n+L-D}a_n \text{。} \tag{40}$$

注意到(40)的推導結果，其減號左邊的$a_{n+L}$和右邊的$a_n$，兩項次仍模$R$同餘，又已知$n+L+R \equiv n+R\ (mod\ D)$，依命題 21可設$a_{n+L+R} = Ba_{n+L} - a_{n+L-R}$、$a_{n+R} = Ba_n - a_{n-R}$，則有

$$a_{n+L+R}a_n - a_{n+L}a_{n+R} = (Ba_{n+L} - a_{n+L-R})a_n - a_{n+L}(Ba_n - a_{n-R})$$
$$= a_{n+L}a_{n-R} - a_{n+L-R}a_n \text{。} \tag{41}$$

同樣注意到(41)的推導結果，其減號左邊的$a_{n+L}$和右邊的$a_n$，兩項次仍模$D$同餘。從(40)和 (41)分別得知，自$a_{n+L+D}a_n - a_{n+L}a_{n+D}$和$a_{n+L+R}a_n - a_{n+L}a_{n+R}$出發，利用代換，可得到等式，等號右邊為各項的項次分別減$D$和$R$，如此迭代下去，自(40)最左式開始，我們可以推得

$$a_{n+L+D}a_n - a_{n+L}a_{n+D} = a_{n+D}a_{n-L} - a_na_{n+D-L} \text{，} \tag{42}$$

經整理得

$$\frac{a_{n+D+L} + a_{n+D-L}}{a_{n+D}} = \frac{a_{n+L} + a_{n-L}}{a_n} \text{，} \tag{43}$$

同理，我們也可得到

$$\frac{a_{n+R+L} + a_{n+R-L}}{a_{n+R}} = \frac{a_{n+L} + a_{n-L}}{a_n} \text{，} \tag{44}$$

由(43)、(44)可知，當$n \equiv d\ (mod\ D)$或$n \equiv r\ (mod\ R)$，對每一個$d$或每一個$r$，各能形成一個齊次$2L$階線性遞迴數列，也就是交錯型齊次$2L$階線性遞迴數列，特別的當$(R, N-M+R) = 1$，則有

**命題 26.** 如果$(R, N-M+R) = 1$，則數列 19 可轉換為一個齊次$2R(N-M+R)$階線性遞迴數列如下：

$$a_{n+R(N-M+R)} = Aa_n - a_{n-R(N-M+R)}\text{，對於}n \geq R(N-M+R)+1\text{。} \tag{45}$$

*證明.* 因$(R, N-M+R) = 1$，可知下定不定方程$(x\,,\ y)$必有整數解：

$$Rx = (N-M+R)y + d\text{，其中}0 \leq d \leq N-M+R-1\text{，}$$

也就是存在$n_d \equiv 0\ \ (mod\ R)$且$n_d \equiv d\ (mod\ D)$，$0 \leq d \leq D-1 = N-M+R-2$，而$n_d \equiv 0\ \ (mod\ R)$產生的$2L$階線性遞迴數列只有一種，換話說，對任意$n$而言，可以只用一種

遞迴式來表示，故命題得證。 ■

不過當$(R, N-M+R)>1$，根據模$R$或模 $N-M+R$剩餘的不同，會得出不一致的遞迴關係式，這時我們需要下列命題去得到單一的遞迴式表示數列 19，

**命題 27.** 數列 19 可用下列線性遞迴關係式表示：

$$a_{n+LD} = B_1 a_{n+(L-1)D} + B_2 a_{n+(L-2)D} + B_3 a_{n+(L-3)D} + B_3 a_{n+(L-4)D} + \cdots + B_{2L-1} a_{n-(L-1)D} - a_{n-LD}\text{，} \tag{46}$$

其中$B_i$為整數，$1 \le i \le 2L-1$，$L=[r, D]$，$n \ge LD-1$。

先看下列引理。

**引理 28 .** 令

$$a_{n+tr} = A_{d,t} a_n - a_{n-tr}\text{，} \tag{47}$$

則有

$$A_{d,t+1} = A_d A_{d,t} - A_{d,t-1}\text{。} \tag{48}$$

證明. 注意到

$$a_{n+(t+1)r} = A_d a_{n+tr} - a_{n+(t-1)r}\text{，} \tag{49}$$

$$a_{n-(t-1)r} = A_d a_{n-tr} - a_{n-(t+1)r}\text{，} \tag{50}$$

(49)和(50)兩式相加得到

$$\begin{aligned} A_{d,t+1} &= \frac{a_{n+(t+1)r} + a_{n-(t+1)r}}{a_n} = \frac{A_d(a_{n+tr} + a_{n-tr}) - \left(a_{n+(t-1)r} + a_{n-(t-1)r}\right)}{a_n} \\ &= A_d A_{d,t} - A_{d,t-1} \end{aligned} \tag{51}$$

■

由於$a_{n+0} = 2a_n - 2a_{n-0}$，可知$A_{d,0} = 2$，根據引理 28，可知$\langle A_{d,t}\rangle_{t\ge 0}$的前 5 項如下：

$$2\text{，}A_d\text{，}A_d^2-2\text{，}A_d^3-3A_d\text{，}A_d^4-4A_d^2+2\text{，} \tag{52}$$

即

$$\langle A_{d,t}\rangle_{t\ge 0}\text{各項可表為}A_d\text{的多項式，且首項係數}=1\text{，} \tag{53}$$

此由(48)即可知對任意$t \ge 0$均成立。

令以$A_0$、$A_1$、$A_2$、…、$A_{D-1}$為根的一元$D$次方程如下：

$$x^D + C_{D-1}x^{D-1} + C_{D-2}x^{D-2} + C_{D-3}x^{D-3} \cdots + C_1 x + C_0 = 0\text{，} \tag{54}$$

利用(54)我們可以整理成

$$\frac{a_{n+DL} + a_{n-DL}}{a_n} = B_1 \frac{a_{n+(D-1)L} + a_{n-(D-1)L}}{a_n} + B_2 \frac{a_{n+(D-2)L} + a_{n-(D-2)L}}{a_n} + \cdots + B_D\text{，}$$

對於$n \geq DL - 1$。 (55)

(55)等號兩邊同乘以$a_n$並依項排列即得(46)。 ■

承命題 27，則有

**命題 29.** 如果$(R, N-M+R) > 1$，則數列 19 可轉換為一個齊次$2(N-M+R)L$階線性遞迴數列如下：

$$a_{n+DL} = B_1 a_{n+(D-1)L} + B_2 a_{n+(D-2)L} + \cdots + B_D a_n + \cdots + B_2 a_{n-(D-2)L} + B_1 a_{n-(D-1)L} + a_{n-DL}\text{，}$$

對於$n \geq R(N-M+R) + 1$。 (56)

## 四、 $a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2} = k$

本節探討(10)等號左式的減號改為加號的情形，如下

**數列 30.**

$$a_n a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-1} = k\text{，}k\text{及初始值}a_1\text{、}a_2\text{、}a_3\text{為給定整數。} \tag{57}$$

我們先觀察數據

表 4. $a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2} = k$ ，$a_1 = a_2 = 1$，$a_3 = 2$， $1 \leq n \leq 12$， $0 \leq k \leq 10$
（本作品作者親自製表）

| $k$ \ $a_n$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | -2 | 4 | 4 | 8 | -8 | 16 | 16 | 32 | -32 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | -1 | 3 | 2 | 5 | -3 | 8 | 5 | 13 | -8 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | $-\frac{1}{2}$ | $-3\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{4}$ | $4\frac{3}{4}$ | $-1\frac{1}{8}$ |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | -1 | $3\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $4\frac{3}{4}$ |
| 5 | 1 | 1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | 7 | -4 | 11 | 7 | 18 |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 4 | -2 | 7 | 5 | $14\frac{1}{2}$ | $-9\frac{1}{2}$ | $28\frac{3}{4}$ | $19\frac{1}{4}$ | $57\frac{5}{8}$ |
| 7 | 1 | 1 | 2 | 5 | -3 | 11 | 8 | 27 | -19 | 65 | 46 | 157 |
| 8 | 1 | 1 | 2 | 6 | -4 | 16 | 12 | 46 | -34 | 131 | 97 | $373\frac{1}{2}$ |
| 9 | 1 | 1 | 2 | 7 | -5 | 22 | 17 | 73 | -56 | 241 | 185 | 796 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 8 | -6 | 29 | 23 | $109\frac{1}{2}$ | $-86\frac{1}{2}$ | $412\frac{1}{4}$ | $325\frac{3}{4}$ | $1552\frac{3}{8}$ |

**分析.** 表 4 和表 2（頁 5）相比，除了$a_n$值部份不同外，還出現一些負值。

對(57)推導：

$$a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2} = a_{n-2} a_{n-5} + a_{n-3} a_{n-4} = k\text{，}$$

$$a_n a_{n-3} - a_{n-3} a_{n-4} = a_{n-2} a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-2}\text{，}$$

同除以$a_{n-2} a_{n-3}$，推得

$$\frac{a_n - a_{n-4}}{a_{n-2}} = -\left(\frac{a_{n-1} - a_{n-5}}{a_{n-3}}\right)\text{。} \tag{58}$$

由(58)即可知：若$a_{n-1} = A a_{n-3} + a_{n-5}$，則$a_n = -A a_{n-2} + a_{n-4}$，於是得到

**命題 31 .** 滿足(57)遞迴關係式的數列也是一種交錯型齊次線性遞迴數列。

## 五、 多階等差數列.

觀察表 2（頁 5）的$a_{12}$那一行的值，我們發現形成一個 5 階等差數列，如下：

圖 1. $a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = k$ ， $0 \le k \le 10$的$a_{12}$，形成一個 5 階等差數列（本作品作者親自製圖）

| $k$ | $a_{12}$ | 1 階階差 | 2 階階差 | 3 階階差 | 4 階階差 | 5 階階差 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 32 | | | | | |
| | | 539 | | | | |
| 1 | 571 | | $2035\frac{7}{8}$ | | | |
| | | $2574\frac{7}{8}$ | | $3189\frac{3}{8}$ | | |
| 2 | $3145\frac{7}{8}$ | | $5225\frac{1}{4}$ | | 2268 | |
| | | $7800\frac{1}{8}$ | | $5457\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 3 | 10946 | | $10682\frac{5}{8}$ | | $2875\frac{1}{2}$ | |
| | | $18482\frac{3}{4}$ | | $8332\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 4 | $29428\frac{3}{4}$ | | $19015\frac{1}{2}$ | | 3483 | |
| | | $37498\frac{1}{4}$ | | $11815\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 5 | 66927 | | $30831\frac{3}{8}$ | | $4090\frac{1}{2}$ | |
| | | $68329\frac{5}{8}$ | | $15906\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 6 | $135256\frac{5}{8}$ | | $46737\frac{3}{4}$ | | 4698 | |
| | | $115067\frac{3}{8}$ | | $20604\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 7 | 250324 | | $67342\frac{1}{8}$ | | $5305\frac{1}{2}$ | |
| | | $182409\frac{1}{2}$ | | $25909\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 8 | $432733\frac{1}{2}$ | | 93252 | | 5913 | |
| | | $275661\frac{1}{2}$ | | $31822\frac{7}{8}$ | | |
| 9 | 708395 | | $125074\frac{7}{8}$ | | | |
| | | $400736\frac{3}{8}$ | | | | |
| 10 | $1109131\frac{3}{8}$ | | | | | |

我們固定$n$，以$k$為項次，檢驗其他$a_n$也都是若干階的等差數列，關於多階等差數列，將使用下列引理：

**引理 32**(張進安，陳弘行[7]，頁 461). 設$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$，$\langle c_n\rangle$，⋯都是多階等差數列，$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$、$c_1$、$c_2$、⋯為給定常數，令

$$A_n=(a_1n+a_2)a_n+(b_1n+b_2)b_n+(c_1n+c_2)c_n+\cdots，$$

則$\langle A_n\rangle$也是多階等差數列，且階數由$(a_1n+a_2)a_n$、$(b_1n+b_2)b_n$、$(c_1n+c_2)c_n$、⋯中最高階者決定。

根據對圖 1 的觀察，我們有下列命題：

**命題 33.** 滿足(10)的遞迴關係式且給定任意初始值的數列，固定$n$，$n\geq 2$，以$k$為項次形成的數列，**本作品記為$\langle \boldsymbol{a_n(k)}\rangle$**，其為$\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$階等差數列。

*證明.* 使用數學歸納法，對$n$作歸納。

(i)已知對整數$k$，$a_1(k)=a_1$、$a_2(k)=a_2$、$a_3(k)=a_3$，$\langle a_1(k)\rangle$、$\langle a_2(k)\rangle$、$\langle a_3(k)\rangle$皆為常數數列，即 0 階等差數列。

(ii) $a_4(k)=\dfrac{1}{a_1(k)}(a_2(k)a_3(k)+k)=\dfrac{1}{a_1}k+\dfrac{a_2a_3}{a_1}$，$a_4(k+1)-a_4(k)=\dfrac{1}{a_1}$為常數，即$\langle a_4(k)\rangle$為 1 階等差數列。

(iii)根據命題 10，對每一個整數$k$，有

$$a_5(k)=\frac{\big(a_1(k)+a_3(k)\big)k+a_2(k)(a_3(k))^2+(a_1(k))^2a_2(k)}{a_1(k)a_2(k)a_3(k)}a_3(k)-a_1(k)，$$

同理，$a_5(k+1)-a_5(k)$為常數，得到$\langle a_5(k)\rangle$為 1 階等差數列

由(i)(ii)(iii)可知，命題對$n=2$、3、4、5 時成立。

(iv)設命題對$n=i$和$i-2$ 成立，$i\geq 4$，即$a_i(k)$和$a_{i-2}(k)$分別為$\left[\dfrac{i-2}{2}\right]$階和$\left[\dfrac{i-4}{2}\right]$階等差數列，

依命題 10 則有

$$a_{i+2}(k)=\frac{\big(a_1(k)+a_3(k)\big)k+a_2(k)(a_3(k))^2+(a_1(k))^2a_2(k)}{a_1(k)a_2(k)a_3(k)}a_i(k)-a_{i-2}(k)，$$

則依引理 32，$a_{i+2}(k)$是$\left[\frac{i-2}{2}\right]+1=\left[\frac{i+2-2}{2}\right]$階等差數列，命題得證。 ■

多階等差數列一般項可表示為多項式如下：

**引理34**（張進安，陳弘行[7]，頁 455）. $\left[\frac{n-2}{2}\right]$階等差數列一般項$a_n(k)$可表示為

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{i-j}^{i} a_{i+1-j}\right)C_i^{k-1}\text{。}$$

根據引理 34，可得到$a_n(k)$關於$k$的$\left[\frac{n-2}{2}\right]$次多項式，相較於引理 8，這個多項式的形式，可以看得出更清楚的整體樣貌。

**例 35**(多階等差數列舉例說明). 以$a_n a_{n-3}+a_{n-1}a_{n-2}=k$，$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，這個遞迴數列為例，固定$n=12$，根據引理 34，則有

$$\begin{aligned}a_{12}(k)=&\left(C_5^5 a_6-C_4^5 a_5+C_3^5 a_4-C_2^5 a_3+C_1^5 a_2+C_0^5 a_1\right)\frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)}{5!}\\&+(C_4^4 a_5-C_3^4 a_4+C_2^4 a_3-C_1^4 a_2+C_0^4 a_1)\frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{4!}\\&+(C_3^3 a_4-C_2^3 a_3+C_1^3 a_2-C_0^3 a_1)\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!}\\&+(C_2^2 a_3-C_1^2 a_2+C_0^2 a_1)\frac{(k-1)(k-2)}{2!}+(C_1^1 a_2-C_0^1 a_1)\frac{(k-1)}{1!}+C_0^0 a_1\end{aligned}$$

**補充說明 36.** 關於多階等差數列，以上的探討雖針對$a_n a_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2}=k$，不過研究過程的方法都可以應用於$a_{N+R}a_{M-R}\pm a_N a_M=k$，差別是後者是要視初始值，項次依模$n$的剩餘，分成若干組齊次常係數線性遞迴數列而已，因篇幅有限，且方法同理，我們就不再詳述後者的結論。

## 六、$|\boldsymbol{\alpha}|$、 $|\boldsymbol{\beta}| > 1$

（一）以下探討更一般化的遞迴數列：

**數列 37.**

$$\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-1} a_{n-2} = k，|\alpha|、 |\beta| > 1，k及初始值a_1、a_2、a_3為整數。 \tag{59}$$

我們利用試算表試算一些數據，發現除常數數列外，沒有其它整數數列，舉例如表 6。

表 6. $2a_n a_{n-3} - 3a_{n-1}a_{n-2} = k$，$0 \le k \le 5$，初始值$a_1 = a_2 = 1$、$a_3 = 2$，$1 \le n \le 15$（本作品作者親自製表）

| $a_n$ \ $k$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **3** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **4** | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 |
| **5** | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| **6** | 20.25 | 29.125 | 39.5 | 51.375 | 64.75 | 79.625 |
| **7** | 91.125 | 137.4464286 | 192.8125 | 257.2083333 | 330.625 | 413.0568182 |
| **8** | 307.546875 | 545.9264407 | 878.8569712 | 1321.507813 | 1889.056066 | 2596.682827 |
| **9** | 2075.941406 | 3864.513625 | 6435.010497 | 9924.199181 | 14468.81456 | 20205.57388 |
| **10** | 10509.45337 | 23024.32144 | 43997.05285 | 76484.15341 | 124003.3418 | 190533.5999 |
| **11** | 106408.2154 | 244477.4541 | 483221.1159 | 861565.8187 | 1424664.988 | 2223899.29 |
| **12** | 808037.3854 | 2184852.236 | 4955773.961 | 9959916.824 | 18314895.67 | 31456236.3 |
| **13** | 12272067.79 | 34798883.01 | 81644148.95 | 168292192.1 | 315627670.7 | 550733584.1 |
| **14** | 139786522.2 | 466487294.1 | 1255977649 | 2918249887 | 6086365469 | 11684885533 |
| **15** | 3184511708 | 11144852161 | 31037501023 | 73964272889 | 1.57333E+11 | 3.06867E+11 |

我們推導：

$$\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-2} a_{n-1} = \alpha a_{n-1} a_{n-4} - \beta a_{n-2} a_{n-3}，$$

$$\alpha a_n a_{n-3} + \beta a_{n-2} a_{n-3} = \alpha a_{n-1} a_{n-4} + \beta a_{n-2} a_{n-1}，$$

同除以$a_{n-1}a_{n-3}$，得

$$\frac{\alpha a_n + \beta a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{\alpha a_{n-4} + \beta a_{n-2}}{a_{n-3}} \text{ ,}$$

令

$$\alpha a_n = y a_{n-1} - \beta a_{n-2} \text{，} \tag{60.1}$$

$$\beta a_{n-2} = y a_{n-3} - \alpha a_{n-4} \text{，} \tag{60.2}$$

依我們試算的數據，不同的$n$所得的$y$值都相異，無法應用遞迴關係式去找出一般項，不過容易得知：

**命題38.** 如果$\dfrac{k}{\alpha-\beta} = d^2$，則 $a_N = d$及 $a_N = -d$這兩個常數數列均符合(59)的關係式。

（二）$\alpha = 1$，$|\beta| > 1$，$k = 0$

**數列 39.**

$$a_n a_{n-3} - \beta a_{n-1} a_{n-2} = 0 \text{，} |\beta| > 1 \text{，初始值} a_1 \text{、} a_2 \text{、} a_3 \text{為整數。} \tag{61}$$

(61) 的前 9 項為

$$a_1 \text{、} a_2 \text{、} a_3 \text{、} \frac{\beta a_2 a_3}{a_1} \text{、} \frac{\beta^2 a_3^2}{a_1} \text{、} \frac{\beta^4 a_2 a_3^2}{a_1^2} \text{、} \frac{\beta^6 a_3^3}{a_1^2} \text{、} \frac{\beta^9 a_2 a_3^3}{a_1^3} \text{、} \frac{\beta^{12} a_3^4}{a_1^3} \text{ ,}$$

一般項為

$$a_n = \frac{\beta^{g_n} a_2^{\sigma(n)} a_3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{a_1^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}} \text{ ，} g_n = g_{n-1} + g_{n-2} - g_{n-3} + 1 \text{，} g_1 = g_2 = g_3 = 0 \text{，}$$

$$\sigma(n) = 0 \text{ 當} n \text{為奇數；} \sigma(n) = 1 \text{ 當} n \text{為偶數，} \tag{62}$$

因篇幅有限就不列出(62)成立的證明，根據(62)，我們有下列命題

**命題 40**（數列 39 為整數數列的充份條件）. 如果$a_1$整除 $\beta a_3$，則數列 38 為整數數列。

（三）$|\alpha| > 1$，$\beta = 1$，$k = 0$

**數列 41.**

$$\alpha a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = 0 \text{，} |\alpha| > 1 \text{，初始值} a_1 \text{、} a_2 \text{、} a_3 \text{為整數。} \tag{63}$$

對(63) 等號兩邊同除以$\alpha$，得

$$a_n a_{n-3} - \frac{1}{\alpha} a_{n-1} a_{n-2} = 0 \text{，}$$

可視為(61)中$\beta=\dfrac{1}{\alpha}$的情況，即

$$a_n=\frac{a_2^{\sigma(n)}a_3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\alpha^{g_n}a_1^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}\text{，}\tag{64}$$

從(64)可知，$g_n$的值隨著$n$愈大，與$\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$的差距會更大(證明請看實驗日誌)，也就是當$n$夠大之後，$\alpha^{g_n}$必無法整除分子，因而數列 40 不會是整數數列。

# 捌、結論

## 一、$a_na_{n-3}\pm a_{n-1}a_{n-2}=k$

（一）給出它為整數數列的充份條件。

（二）給定初始值為整數，若數列不是整數數列，則依據$k$值，我們得到自第幾項起會出現分數的規律。

（三）固定$n$，以$k$為項次，形成多階等差數列。

（四）可表為$k$的$\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$次多項式，其中[ ]為高斯符號。

## 二、推廣數列項次如：$a_{N+R}a_{M-R}-a_Na_M=k$

（一）可轉換為交錯型齊次常係數線性遞迴數列。

（二）承（一)，對於上述交錯型齊次常係數線性遞迴數列，我們研發出用單一條遞迴數列關係式表達的方法。

## 三、$\alpha a_{N+R}a_{M-R}-\beta a_Na_M=k$，$|\alpha|\geq 1$、 $|\beta|\geq 1$，初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$為整數

（一）如果$\dfrac{k}{\alpha-\beta}=d^2$，則 $a_N=d$及 $a_N=-d$這兩個常數數列符合上述遞迴關係。

（二）當$\alpha=1$，$|\beta|>1$，$k=0$，若$a_1$整除 $\beta a_3$，則它為整數數列。

（三）當$|\alpha|>1$，$\beta=1$，$k=0$，它不會是整數數列。

# 玖、討論

### 一、得到$a_na_{n-3}\pm a_{n-1}a_{n-2}=k$完整的結論

我們將$a_na_{n-3}\pm a_{n-1}a_{n-2}=k$，與四階線性遞迴數列建立連結，初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$一致，前者的$k$值決定後者的$a_4$，反之亦然。就更一般數列$\alpha a_na_{n-3}-\beta a_{n-1}a_{n-2}=k$而言，本作品給出了 $|\alpha|=|\beta|=1$的完整結論，很好的刻劃了這個數列的性質。

### 二、探討更一般化的情形：$\alpha a_{N+R}a_{M-R}-\beta a_Na_M=k$

我們不限於僅探討費氏數列、或只研究原數列的遞迴關係式，而是將項次推廣，得到更 一般化的結果，另外手法也不使用特徵方程的一般項表示，而是就遞迴關係式去推演，從而發前人所未發，達前人所未達。

### 三、播下繼續研究的種子

本作品的研究還可持續探討更一般化的數列，如

$$\alpha\prod_{i=1}^{N}a_i-\beta\prod_{j=1}^{M}a_J=k。$$

，可探討滿足上述遞迴關係的數列在什麼情況下為整數數列。

# 拾、引用文獻


[1]游森棚(2018)。是整數嗎？。科學研習雙月刊。森棚教官的數學題，第57卷第4期。

[2]張福春,莊淨慧（2019）。線性遞迴關係之求解（上）。數學傳播，第 33 卷第 4 期。

[3]康軒文教事業教科書編輯委員會(民 112)。乘法公式與多項式。國民中學數學課本第三冊。臺北市。國家教育研究院。

[4]未標明作者（民 108 年）。是整數嗎？似「費」數！。嘉義市第 37 屆科展國中組數學科。

[5]未標明作者（民 108 年）。是整數嗎。新北市 108 學年科展國中組數學科。

[6]吳振奎（2000）。斐氏數列的數論性質。**斐波那契數列**（59 頁）。九章出版社。

[7]張進安，陳弘行（民 73 年）。階差數列的代數結構及級數和。第 24 屆全國中小學科展國小教師組數學科。國立臺灣科學教育館。

# 拾壹、附錄（解決[5]科展作品未解決的問題）

108 學年度新北市科展作品（[5]，頁 13）討論下列數列：

**數列*A*.**

$$a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = -5，a_1 = 1，a_2 = 5，a_3 = 8， \tag{A1}$$

前 10 項為：

1、5、8、35、55、240、377、1645、2584（註 1）、11275，

該作品無法將(A1)轉換成二階齊次線性遞迴數列，對於數列 $A$ 卻是整數數列而感到不解，我們解決該作品留下來的疑惑。

**一、確認是整數數列**

依命題 4，(A1)可轉換為下列四階齊次線性常係數遞迴數列：

$$a_{n+2} = 7a_n - a_{n-2}，n \geq 4 \tag{A2}$$

故當初始值前 4 項為整數時，(A2)是整數數列。

**二、不能轉換為二階線性遞迴數列的理由**

我們還可以從另一個觀點來看，事實上數列 $A$ 可轉換成交錯型二階齊次線性常係數

遞迴數列，如下：

$$a_{n+1} = 5a_n - a_{n-1}，n \geq 2 \text{ 且為奇數，} \tag{A3}$$

$$a_{n+1} = \frac{9}{5}a_n - a_{n-1}，n \geq 2 \text{ 且為偶數，} \tag{A4}$$

由(A3)可知自$a_2 = 5$開始，偶數項都會是 5 的倍數，使得(A4)等號左邊會是整數，也就是奇數項都是整數。

**三、原作品的盲點**

另外該件品聚焦在要將數列轉換成二階線性遞迴數列，是因為專欄題給的初始值，會使得數列奇數項抽出的數列和偶數項出的數列，兩者轉換成的二階線性遞迴數列是相同的，所以可以用單一個二階線性遞迴數列去表示專欄題給的數列，便使得該作品的作者誤以為和專欄題相同的遞迴關係式皆是如此，而忽略了初始值會使得這情況有所改變，不同的初始值亦可能形成交錯型線性遞迴數列。

**註 1.** 該作品內文中誤植為 25844。

## 【評語】030406

本作品題材源自《科學研習雙月刊》第 57 卷第 4 期森棚教授的數學專欄，雖與嘉義市第 37 屆科展及新北市 108 學年度科展中的兩項作品主題相關，然在方法上另闢途徑，未採用特徵方程，而是透過遞迴關係式進行推導，發現了多階等差數列的規律。

建設性問題或改進建議：

1. 證明過程常除以一般項，須留意分母的項不為零。

2. 證明細節的補充：部分引理和命題（例如引理 15、命題 40）的證明過程或輔助證明細節（例如「實驗日誌」中的內容）若能完整呈現，將提升作品的嚴謹性和可讀性。

# 作品海報

# 整數與否看源頭

# 原始問題

**問題3.** 定義遞迴數列如下：

$$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-2}a_{n-1}+k)\text{，}a_1=1,a_2=1,a_3=2$$

我們想探討$k$為何值時，$\langle a_n\rangle$會是整數數列。

# 研究目的

一、給出問題3的解題過程。

二、探討問題3在任意初始值的解。

三、將問題3遞迴式改寫為一般化的形式：$a_{N+R}a_{M-R}\pm a_N\,a_M=k$，$N$、$M$、$R$為給定，進行探討。

四、試探討$\alpha a_{N+R}a_{M-R}-\beta a_N\,a_M=k$，$\alpha$、$\beta$均為非零整數，$k$為任意整數。

# 研究過程與討論

## 解決專欄問題

$$a_na_{n-3}-a_{n-2}a_{n-1}=k\text{，}\ a_1=a_2=1\text{、}a_3=2\text{。}\qquad(1)$$

**命題4.** 承(1)，設$k=2^ub$，$b$為0或整數、$u\geq 0$且為整數，則

4.1. $u=0$，$b\equiv 1\ (mod\ 2)$（$k$為奇數），$\langle a_n\rangle$的每一項均為整數。

4.2. $b=0$，（$k=0$）$\langle a_n\rangle$的每一項均為整數。

4.3. $u\geq 1$，$b\equiv 1\ (mod\ 2)$（$k$為偶數），當$1\leq n\leq 2u+5$，$a_n$為整數；當$n\geq 2u+6$，$a_n$ 不是整數。

## 預備引理

**引理6.** 滿足(1)，$n\geq 5$的$\langle a_n\rangle$也滿足下列遞迴式：

$$a_n=\left(\frac{3k+5}{2}\right)a_{n-2}-a_{n-4}\text{，}a_1=a_2=1\text{，}a_3=2\text{，}a_4=k+2\text{，}k\text{為整數，}n\geq 5\text{。}\qquad(2)$$

**引理7.** $k$為偶數，若$a_{i-2}$為整數、$a_i$為奇數，則當$n=i+2s$、s為正整數，$a_n$都不會是整數。

**引理8.** $n\geq 4$的$a_n$可表示為關於$k$的多項式：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}f_n(k)\text{，}\qquad(6)$$

其中$f_n(k)$為一整係數多項式，且具有下列3個性質：

**性質8.1.** 最高次為$\left\lceil\frac{n-2}{2}\right\rceil$。 **性質8.2.** 其領導係數為奇數。 **性質8.3.** 常數項為$2^{n-3}$。

**引理9.** $n\geq 4$的$f_n(k)$中$k$之1次項係數為奇數。

## 問題3的解答

*命題4的證明.*

**4.1.** 根據引理6，當$k$為奇數，則$\dfrac{3k+5}{2}$為整數，加上初始值為整數，得到命題4的4.1成立。

**4.2.** 看(6)及性質8.3，可知當$k=0$，$n\geq 4$，

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}\times 2^{n-3}=2^{\left(n-3-\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil\right)}\geq 2\qquad(8)$$

為整數，因為當$n\geq 4$，則有$n-3-\left\lceil\dfrac{n-4}{2}\right\rceil\geq 1$，所以命題4的4.2成立。

**4.3.** 注意到$f_n(k)$ 乘以$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}$，$i\geq 1$的$k^i$項與係數乘積值為：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}c_ik^i=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}c_i(2^ub)^i=2^{ui-\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil}c_ib^i\text{，其中}c_i\text{為}f_n(k)\text{中}k^i\text{的係數。}\qquad(9)$$

然後根據引理9及(6)得知，當$f_n(k)$ 乘以$\left\lceil\dfrac{i-4}{2}\right\rceil=u$ 時，

$a_n$會是奇數，由於$\left\lceil\dfrac{i-4}{2}\right\rceil=u$，表示$i=2u+5$或$i=2u+4$，由引理7即可得知命題4的4.3成立。

## 整數數列的充份條件

### 若$a_1a_2a_3$整除$(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2+a_1^2a_2$

**命題10.** 對任意整數$k$，給定初始值，如下的遞迴數列

$$a_na_{n-3}-a_{n-2}a_{n-1}=k\text{，}k\text{及初始值}a_1\text{、}a_2\text{、}a_3\text{為給定整數。}\qquad(10)$$

就是下列遞迴數列：

$$a_n=\left(\frac{a_{n-1}+a_{n-5}}{a_{n-3}}\right)a_{n-2}-a_{n-4}\text{，}a_4\text{和}a_5\text{由(10)決定。}\qquad(11)$$

**命題12.** (10)這個數列為整數數列的充要條件為$a_1a_2a_3$整除$(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2+a_1^2a_2$，其中$a_1$、$a_2$、$a_3$為初始值。

$$\frac{a_5+a_1}{a_3}=\frac{\frac{(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2}{a_1a_2}+a_1}{a_3}=\frac{(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2+a_1^2a_2}{a_1a_2a_3}$$

## 若$a_1a_2a_3$不整除$(a_1+a_3)k+a_2\,a_3^2+a_1^2a_2$

**命題13.** 如果(10)轉換的四階線性遞迴數列形式如下：

$$a_{n+2}=\tfrac{Q}{P}a_n-a_{n-2}\text{，}n\geq 3\text{，其中}P\text{、}Q\text{為整數，}P\geq 2\text{，}(P,Q)=1\text{，}\tag{16}$$

則$\langle a_n\rangle$為整數數列的充要條件為

$\langle a_n\rangle$式如下是以$P$為公比的交錯型等比數列，且$Q=P^2+1$。 (17)

**必要性**：

**引理14.** $P\mid a_n$，$n\geq 3$。

設$a_n=b_nP^{e_n}$，$P\nmid b_n$，$n\geq 3$，

**引理15.** $\langle e_{2i}\rangle_{i\geq 1}$、$\langle e_{2i-1}\rangle_{i\geq 1}$皆為嚴格遞增數列。

**引理16.** 承(16)，$\langle a_n\rangle$是整數數列的必要條件為$k=0$。

*命題13略證.* 設⟨a_n⟩前6項為

$$a\text{，}b\text{，}ar\text{，}br\text{，}ar^2\text{，}br^2\text{，}\tag{25}$$

其中$a$、$b$、$r$為整數，根據命題10的(11)可知

$$\frac{a+ar^2}{ar}=\frac{b+br^2}{br}=\frac{1+r^2}{r}=\frac{Q}{P}\text{，}\tag{26}$$

因為$(r,1+r^2)=(P,Q)=1$，得$r=P$。 ■

**充份性**：因海報篇幅限制，證明過程請看說明書。

# 更一般化的數列

## 數列關係式

**數列19.** 規定一數列的遞迴關係式如下：$a_{N+R}a_{M-R}-a_Na_M=k$，$R$、$N$、$M$為給定，$k$為整數。 (33)

## 交錯型遞迴數列

**命題20.** 承數列19，如果$n\equiv n_1\ (mod\ R)$，則

$$\frac{a_{n+(N-M+R)}+a_{n-(N-M+R)}}{a_n}=\frac{a_{n_1+(N-M+R)}+a_{n_1-(N-M+R)}}{a_{n_1}}\tag{35}$$

**命題21.** 承數列19，如果$n\equiv n_2\ (mod\ N{-}M{+}R)$，則

$$\frac{a_{n+R}+a_{n-R}}{a_n}=\frac{a_{n_2+R}+a_{n_2-R}}{a_{n_2}}\text{。}\tag{37}$$

## 用一條遞迴關係式表示

設$D$=$N-M+R$，且$L$=$[R,N-M+R]$，

$$\frac{a_{n+D+L}+a_{n+D-L}}{a_{n+D}}=\frac{a_{n+L}+a_{n-L}}{a_n}\text{，}\tag{43}$$

$$\frac{a_{n+R+L}+a_{n+R-L}}{a_{n+R}}=\frac{a_{n+L}+a_{n-L}}{a_n}\text{，}\tag{44}$$

**命題26.** 如果$(R,N-M+R)=1$，則數列19可轉換為一個齊次$2R(N-M+R)$階線性遞迴數列如下：

$$a_{n+R(N-M+R)}=Aa_n-a_{n-R(N-M+R)}\text{，對於}n\geq R(N-M+R)+1\text{。}\tag{45}$$

**命題29.** 如果$(R,N-M+R)>1$，則數列19可轉換為一個齊次$2(N-M+R)L$階線性遞迴數列如下：

$$a_{n+DL}=B_1a_{n+(D-1)L}+B_2a_{n+(D-2)L}+\cdots+B_Da_n+\cdots+B_2a_{n-(D-2)L}+B_1a_{n-(D-1)L}+a_{n-DL}\text{，對於}n\geq R(N-M+R)+1$$

**引理28.** 令$a_{n+tr}=A_{d,t}a_n-a_{n-tr}$，則有$A_{d,t+1}=A_dA_{d,t}-A_{d,t-1}$。

$\langle A_{d,t}\rangle_{t\geq 0}$數各項可表為A_d的多項式，且首項係數＝1， (53)

令以$A_0$、$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_{D-1}$為根的一元$D$次方程如下：

$$x^D+C_{D-1}x^{D-1}+C_{D-2}x^{D-2}+C_{D-3}x^{D-3}\cdots+C_1x+C_0=0\text{，}\tag{54}$$

利用(54)我們可以整理成

$$\frac{a_{n+DL}+a_{n-DL}}{a_n}=B_1\frac{a_{n+(D-1)L}+a_{n-(D-1)L}}{a_n}+B_2\frac{a_{n+(D-2)L}+a_{n-(D-2)L}}{a_n}+\cdots+B_D\text{，}\quad\text{對於}n\geq DL-1\text{。}\tag{55}$$

# 多階等差數列

| $k$ | $a_{12}$ | 1 階階差 | 2 階階差 | 3 階階差 | 4 階階差 | 5 階階差 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 32 | | | | | |
| | | 539 | | | | |
| 1 | 571 | | $2035\frac{7}{8}$ | | | |
| | | $2574\frac{7}{8}$ | | $3189\frac{3}{8}$ | | |
| 2 | $3145\frac{7}{8}$ | | $5225\frac{1}{4}$ | | 2268 | |
| | | $7800\frac{1}{8}$ | | $5457\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 3 | 10946 | | $10682\frac{5}{8}$ | | $2875\frac{1}{2}$ | |
| | | $18482\frac{3}{4}$ | | $8332\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 4 | $29428\frac{3}{4}$ | | $19015\frac{1}{2}$ | | 3483 | |
| | | $37498\frac{1}{4}$ | | $11815\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 5 | 66927 | | $30831\frac{3}{8}$ | | $4090\frac{1}{2}$ | |
| | | $68329\frac{5}{8}$ | | $15906\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 6 | $135256\frac{5}{8}$ | | $46737\frac{3}{4}$ | | 4698 | |
| | | $115067\frac{3}{8}$ | | $20604\frac{3}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 7 | 250324 | | $67342\frac{1}{8}$ | | $5305\frac{1}{2}$ | |
| | | $182409\frac{1}{2}$ | | $25909\frac{7}{8}$ | | $607\frac{1}{2}$ |
| 8 | $432733\frac{1}{2}$ | | 93252 | | 5913 | |
| | | $275661\frac{1}{2}$ | | $31822\frac{7}{8}$ | | |
| 9 | 708395 | | $125074\frac{7}{8}$ | | | |
| | | $400736\frac{3}{8}$ | | | | |
| 10 | $1109131\frac{3}{8}$ | | | | | |

圖由作者親自製作

圖1. $a_na_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2}=k$，$0\leq k\leq 10$的$a_{12}$，形成一個5階等差數列

**引理32**(張進安，陳弘行[7]，頁461). 設$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$，$\langle c_n\rangle$，$\cdots$都是多階等差數列，$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$、$c_1$、$c_2$、$\cdots$為給定常數，令$A_n=(a_1n+a_2)a_n+(b_1n+b_2)b_n+(c_1n+c_2)c_n+\cdots$，則$\langle A_n\rangle$也是多階等差數列，且階數由$(a_1n+a_2)a_n$、$(b_1n+b_2)b_n$、$(c_1n+c_2)c_n$、$\cdots$中最高階者決定。

**命題33.** 滿足(10)的遞迴關係且給定任意初始值的數列，固定$n$，以$k$為項次形成的數列，**本作品記為$\langle a_n(k)\rangle$**，其為$\left[\frac{n-2}{2}\right]$階等差數列。

**引理34**(張進安，陳弘行[7]，頁455). $\left[\frac{n-2}{2}\right]$階等差數列

一般項$a_n(k)$可表示為$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}C_i^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{i}C_j^i(-1)^ja_{i-j}\right)$。

## $a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2} = k$

$a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2} = a_{n-2}\, a_{n-5} + a_{n-3} a_{n-4} = k \Leftrightarrow a_{n-3} - a_{n-3} a_{n-4} = a_{n-2} a_{n-5} - a_{n-1}\, a_{n-2}$，同除以$a_{n-2} a_{n-3}$，推得

$$\frac{a_n - a_{n-4}}{a_{n-2}} = -\left(\frac{a_{n-1} - a_{n-5}}{a_{n-3}}\right)。\tag{58}$$

**命題31**．滿足(57)的數列也是一種交錯型遞迴數列。

## $|\alpha|$或 $|\beta| > 1$

**數列37.** $\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-1} a_{n-2} = k$，$|\alpha|$、 $|\beta| > 1$，$k$及初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$為給定整數。 (59)

$$\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-2} a_{n-1} = \alpha a_{n-1} a_{n-4} - \beta a_{n-2} a_{n-3},$$
$$\alpha a_n a_{n-3} + \beta a_{n-2} a_{n-3} = \alpha a_{n-1} a_{n-4} + \beta a_{n-2} a_{n-1},$$

同除以$a_{n-1} a_{n-3}$，得

$$\frac{\alpha a_n + \beta a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{\alpha a_{n-4} + \beta a_{n-2}}{a_{n-3}} = y(n)，y(n)不是定值。$$

**命題38.** 如果$\frac{k}{\alpha - \beta} = d^2$，則 $a_N = d$及 $a_N = -d$這兩個常數數列均符合(59)的關係式。

**數列39.** $a_n a_{n-3} - \beta a_{n-1} a_{n-2} = 0$， $|\beta| > 1$，初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$為給定整數。 (61)

一般項為

$$a_n = \frac{\beta^{g_n} a_2^{\sigma(n)} a_3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{a_1^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}，g_n = g_{n-1} + g_{n-2} - g_{n-3} + 1，g_1 = g_2 = g_3 = 0，$$
$$\sigma(n) = 0當n為奇數；\sigma(n) = 1當n為偶數，\tag{62}$$

**命題40**（數列39為整數數列的充份條件）. 如果$a_1$整除 $\beta a_3$ ，則數列39為整數數列。

**數列41.** $\alpha a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = 0$，$|\alpha| > 1$，初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$為整數。 (63)

數列41可視為(61)中$\beta = \frac{1}{\alpha}$的情況，它不會是整數數列。

# 結論

**一、$a_n a_{n-3} \pm a_{n-1} a_{n-2} = k$**

(一)給出它為整數數列的充份條件。

(二)給定初始值為整數，若數列不是整數數列，則依據 $k$ 值，我們得到自第幾項起會出現分數的規律。

(三)固定$n$ ，以$k$為項次，形成多階等差數列。

**二、推廣數列項次如：$a_{N+R} a_{M-R} - a_N a_M = k$**

(一)可轉換為交錯型齊次常係數線性遞迴數列。

(二)承(一) ，對於上述交錯型齊次常係數線性遞迴數列，我們研發出用單一條遞迴數列關係式表達的方法。

**三、$\alpha a_{N+R} a_{M-R} - \beta a_N a_M = k$，$|\alpha| \geq 1$、 $|\beta| \geq 1$，初始值$a_1$、$a_2$、$a_3$為整數**

(一)如果$\frac{k}{\alpha - \beta} = d^2$ ，則 $a_N = d$及 $a_N = -d$這兩個常數數列符合上述遞迴關係。

(二)當$\alpha = 1$，$|\beta| > 1$，$k = 0$，若$a_1$整除 $\beta a_3$，則它為整數數列。

(三)當$|\alpha| > 1$，$\beta = 1$，$k = 0$，它不會是整數數列。

# 討論

**一、得到$a_n a_{n-3} \pm a_{n-1}\, a_{n-2} = k$完整的結論**

我們將$a_n a_{n-3} \pm a_{n-1}\, a_{n-2} = k$，與四階線性遞迴數列建立連結，就更一般數列$\alpha a_n a_{n-3} - \beta a_{n-1} a_{n-2} = k$而言，本作品給出了 $|\alpha| = |\beta| = 1$的完整結論，很好的刻劃了這個數列的性質。

**二、探討更一般化的情形：$\alpha a_{N+R} a_{M-R} - \beta a_N a_M = k$**

我們不限於僅探討費氏數列、或只研究原數列的遞迴關係式，而是將項次推廣，得到更一般化的結果，另外手法也不使用特徵方程的一般項表示，而是就遞迴關係式去推演，從而發前人所未發，達前人所未達。

**三、留下可繼續探討的方向.** 可探討滿足下列遞迴關係的數列在什麼情況下為整數數列：

$$\alpha \prod_{i=1}^{N} a_i - \beta \prod_{j=1}^{M} a_j = k。$$

# 引用文獻

[1]游森棚(2018)。是整數嗎？。科學研習雙月刊。森棚教官的數學題，第57卷第4期。
[2]張福春,莊淨慧（2019）。線性遞迴關係之求解（上）。數學傳播，第33卷第4期。
[5]吳振奎（2000）。斐氏數列的數論性質。**斐波那契數列**（59頁）。九章出版社。