中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030405

殊途同歸─不可思議的七線共點

學校名稱：金門縣立烈嶼國民中學

作者：	指導老師：
國三 洪宇峰	黃國綸

關鍵詞：奈格爾點、共點、Dussau 作圖

殊途同歸—不可思議的七線共點

摘要

本研究探討三角形中線段共點的幾何性質，特別是與奈格爾點相關的七線共點現象，這七條直線包括三條特定的作圖線、三條周長平分線、以及內心與重心的連線。研究動機源於對奈格爾點定義及其作圖方法的探究。研究過程中，我們透過 *Dussau* 作圖法、三角形性質及解析幾何等方法，從已知條件推導出相關的幾何性質，並進行了驗證。研究發現這三條作圖線分別與三內角平分線平行，可視為內心在位似變換下的映射。本研究亦探討此類作圖法是否可遷移應用至其他三角形特殊點（如內心、重心）。這些發現證明了即使直線的構成方式看似複雜或「殊途」，最終也能「同歸」於同一個點，展現了幾何的奧妙。

壹、前言

一、研究動機與文獻探討

三角形的奈格爾點(*Nagel Point*)是一個與三角形周長等分性質相關的點，由德國數學家 *Christian Heinrich von Nagel* 於西元 1836 年所提出，透過各頂點與三角形對應旁切圓與三角形三邊相切點以線段連接，所形成的共點性來定義的。

關於奈格爾點的作圖，*Larry Hoehn* 在 2007 年提出一種幾何構造方法，如圖 01 所示。該方法先繪出$\triangle P_1P_2P_3$的內切圓圓 I，並作出與三角形三邊平行的三條切線$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，其與內切圓的切點分別為輔助點 T_1'、T_2'、T_3'。接著從三角形的三個頂點分別連接至這些輔助點，構成三條 *Ceva* 線$\overline{P_1P_1'}$、$\overline{P_2P_2'}$、$\overline{P_3P_3'}$，*Larry Hoehn* 證明了這特定的三條 *Ceva* 線是共點的，且交點即為三角形的奈格爾點。此構造方式簡化了傳統奈格爾點的作圖步驟，並提供了一種具備直觀幾何意涵的視覺化方式。

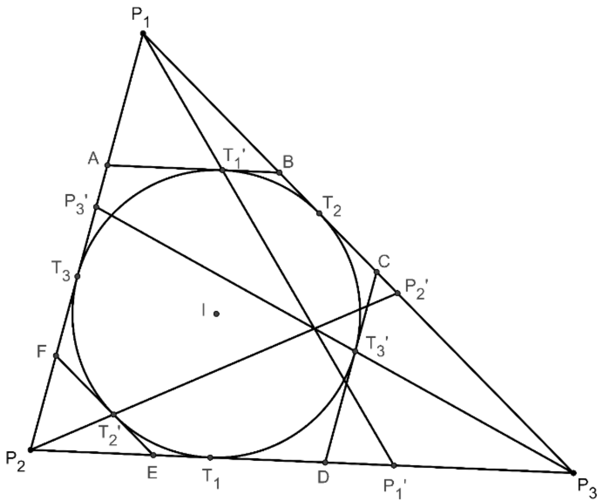


圖 01 內切圓平行切線作圖法構作奈格爾點 (作者自行繪製)

然而，嚴格來看，此方法在本質上並未脫離奈格爾點的經典定義，即將三角形的旁切圓與對邊的切點連接至相對頂點所形成的周長平分線。由於△$P_1P_2P_3$的內切圓與△P_1AB的旁切圓在幾何結構上等價，因此線段$\overline{P_1P_1'}$實際上同時為△$P_1P_2P_3$與△P_1AB 的周長平分線。換言之，*Larry Hoehn* 所提出的方法雖在作圖形式上有所創新，但在理論本質上，仍與傳統奈格爾點的構造方式一致，並無明顯突破。

在研讀文獻的過程中，我另外接觸到 *Xavier Dussau* 於 2020 年提出的一種別出心裁的三角形奈格爾點作圖方法。此方法透過延長三角形的三邊並選取特定的輔助點，再連接這些點，其交點恰為三角形的奈格爾點。

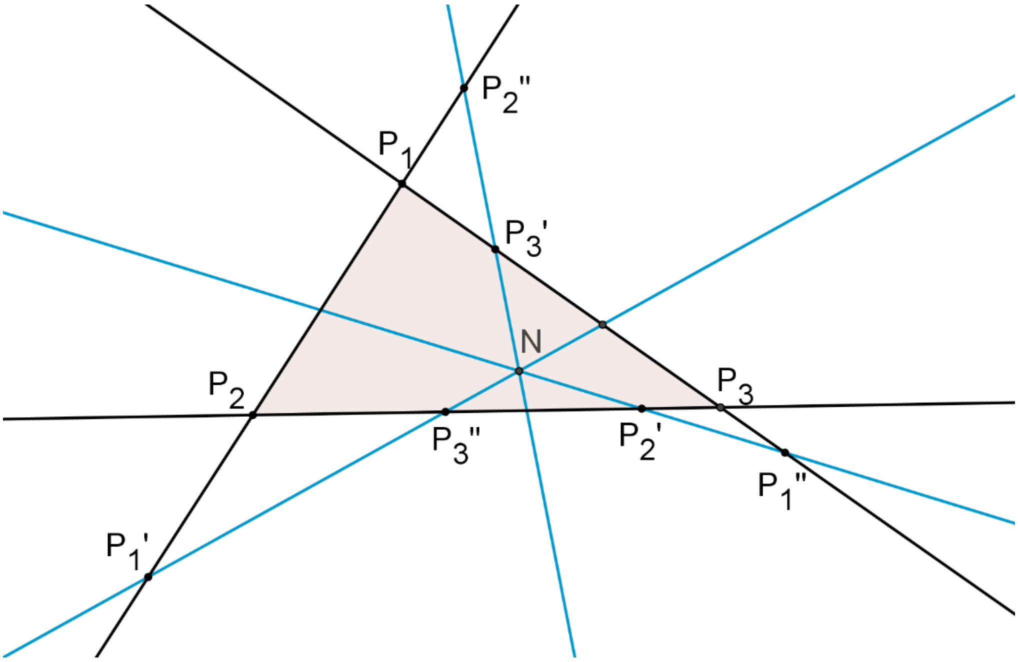


圖 02 *Xavier Dussau* 奈格爾點作圖法(作者自行繪製)

如圖 02，三角形 $P_1P_2P_3$ 中，作者透過延長三角形 $P_1P_2P_3$ 的三邊並依據對應邊的長度選取輔助點，若$\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$，然後在$\overrightarrow{P_1P_2}$上取一點 P_1'，使$\overline{P_1P_1'}=\dfrac{a}{c}\overline{P_1P_2}$，以及在$\overrightarrow{P_1P_3}$上取一點 P_1''，使$\overline{P_1P_1''}=\dfrac{a}{b}\overline{P_1P_3}$；在$\overrightarrow{P_2P_3}$上取一點 P_2'，使$\overline{P_2P_2'}=\dfrac{b}{a}\overline{P_2P_3}$，以及在$\overrightarrow{P_2P_1}$上取一點 P_2''，使$\overline{P_2P_2''}=\dfrac{b}{c}\overline{P_1P_2}$；同樣在$\overrightarrow{P_3P_1}$上取一點 P_3'，使$\overline{P_3P_3'}=\dfrac{c}{b}\overline{P_1P_3}$，以及在$\overrightarrow{P_3P_2}$上取一點 P_3''，使$\overline{P_3P_3''}=\dfrac{c}{a}\overline{P_2P_3}$；最終證明由這些輔助點構成的三條直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$是共點的，而其交點即為三角形的奈格爾點。

儘管此作圖法的正確性已獲得證明，但我對其幾何意義深感好奇。這種看似獨立的作圖方式，為何能精準定位出與三角形周長平分性質相關的奈格爾點？是否能從其他幾何角度，例如相似形、比例關係或向量方法，對此作圖法提出更直觀或更深層的解釋？這激發了我深入探討此作圖法內在聯繫的興趣，期望能從不同的視角理解奈格爾點的幾何本質。

二、研究目的與問題

本研究旨在深入探討 *Xavier Dussau* 提出的三角形奈格爾點作圖法的幾何意義。透過幾何分析、比例推導或向量方法等途徑，嘗試從不同角度探索其可能蘊含的其他幾何性質。

根據研究目的，本研究的研究問題是探討連接 *Xavier Dussau* 作圖輔助點所形成的直線，其幾何特性是什麼？

貳、研究設備與器材

研究設備包括：紙、筆、筆電、Geogebra 5.0。在研究內容中，我們利用幾何的證明知識，進行推理論證。

參、研究過程與內容

為了將三角形頂點與相關的輔助點確立一套明確的命名系統，我們定義命名規則：

一、研究方法

（一）命名規則

1. 三角形的三個頂點 P_1、P_2、P_3，其中 $\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$。
2. 三角形的半周長 s 是指所有邊長總和的一半，即 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$。
3. 三角形 $P_1P_2P_3$ 的內心為 I，係指三角形三內角的角平分線交點。
4. 三角形的內切圓 I 與 $\overline{P_2P_3}$ 相切於 T_1，與 $\overline{P_1P_3}$ 相切於 T_2，與 $\overline{P_1P_2}$ 相切於 T_3。
5. 三角形的旁心 J_1：指三角形旁切圓 J_1 的圓心，旁切圓 J_1 與 $\overline{P_2P_3}$、$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 均相切，且旁切圓 J_1 與 $\overline{P_2P_3}$ 相切於 U_1。
6. 三角形的旁心 J_2：指三角形旁切圓 J_2 的圓心，旁切圓 J_2 與 $\overline{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 均相切，且旁切圓 J_2 與 $\overline{P_1P_3}$ 相切於 U_2。
7. 三角形的旁心 J_3：指三角形旁切圓 J_3 的圓心，旁切圓 J_3 與 $\overline{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 均

相切，且旁切圓 J_3 與 $\overline{P_1P_2}$ 相切於 U_3。

8. 三角形 $P_1P_2P_3$ 的重心：指三角形三中線的交點 G。

二、研究過程

（一）三角形的三條周長平分線共點

【引理一】（西瓦定理）

已知 $\triangle P_1P_2P_3$，Q_1 在 $\overline{P_2P_3}$ 上、Q_2 在 $\overline{P_3P_1}$ 上、Q_3 在 $\overline{P_1P_2}$ 上。

若 $\overline{P_1Q_1}$ 、 $\overline{P_2Q_2}$ 、 $\overline{P_3Q_3}$ 交於 K 點，則 $\dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=1$。

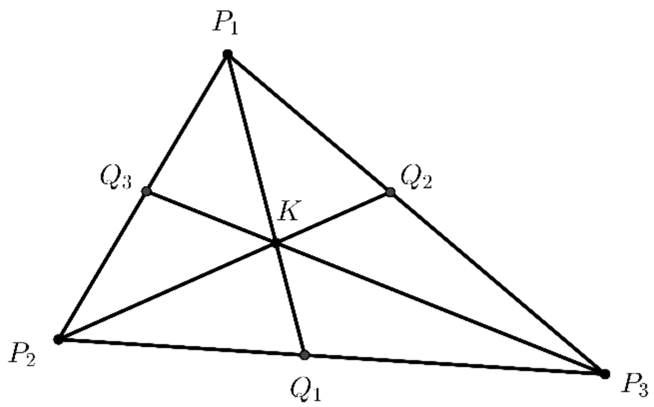


圖 03 三角形內的交線與西瓦定理(作者自行繪製)

【證明】

如圖 03，

$\because \triangle KP_2Q_1$ 和 $\triangle KP_3Q_1$ 是等高三角形，$\therefore \triangle KP_2Q_1$ 面積：$\triangle KP_3Q_1$ 面積＝$\overline{P_2Q_1}$ ： $\overline{P_2Q_1}$。

$\because \triangle P_1P_2Q_1$ 和 $\triangle P_1P_3Q_1$ 是等高三角形，$\therefore \triangle P_1P_2Q_1$ 面積：$\triangle P_1P_3Q_1$ 面積＝$\overline{P_2Q_1}$：$\overline{P_2Q_1}$。

$\Rightarrow \triangle P_1P_2K$ 面積：$\triangle P_1P_3K$ 面積

＝($\triangle P_1P_2Q_1$ 面積－$\triangle KP_2Q_1$ 面積)：($\triangle P_1P_3Q_1$ 面積－$\triangle KP_3Q_1$)

＝ $\overline{P_2Q_1}$ ： $\overline{P_2Q_1}$。

同理 $\triangle P_2P_3K$ 面積：$\triangle P_2P_1K$ 面積＝$\overline{P_3Q_2}$ ： $\overline{P_1Q_2}$

且 $\triangle P_3P_1K$ 面積：$\triangle P_3P_2K$ 面積＝$\overline{P_1Q_3}$ ： $\overline{P_2Q_3}$

$\therefore \dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=\dfrac{\triangle P_3P_1K\text{面積}}{\triangle P_3P_2K\text{面積}}\cdot\dfrac{\triangle P_1P_2K\text{面積}}{\triangle P_1P_3K\text{面積}}\cdot\dfrac{\triangle P_2P_3K\text{面積}}{\triangle P_2P_1K\text{面積}}=1$。

【引理二】(西瓦定理的逆定理)

已知△$P_1P_2P_3$，Q_1 在 $\overline{P_2P_3}$ 上、Q_2 在 $\overline{P_3P_1}$ 上、Q_3 在 $\overline{P_1P_2}$ 上。

若 $\dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=1$，則 $\overline{P_1Q_1}$ 、$\overline{P_2Q_2}$ 、$\overline{P_3Q_3}$ 交於一點。

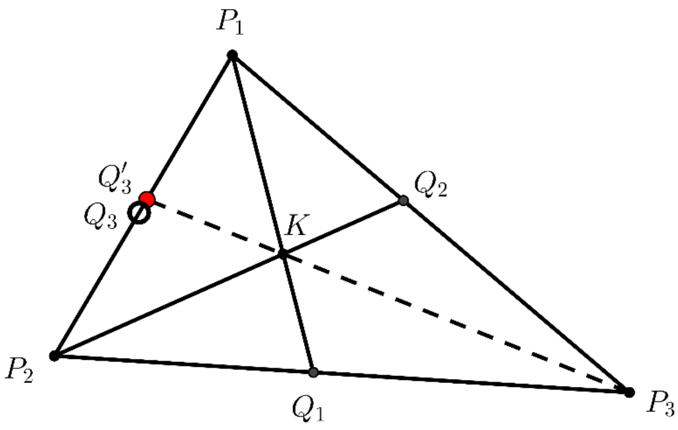


圖 04 西瓦定理的逆定理示意圖(作者自行繪製)

【證明】

如圖 04，假設 $\overline{P_1Q_1}$ 、$\overline{P_2Q_2}$ 交於 K 點，連接 $\overrightarrow{P_3K}$ 交 $\overline{P_1P_2}$ 於 Q_3'，

則根據引理一可知 $\dfrac{\overline{P_1Q_3'}}{\overline{Q_3'P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=1$；

又 $\because \dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=1$，$\therefore \dfrac{\overline{P_1Q_3'}}{\overline{Q_3'P_2}}=\dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}$

$\because Q_3$ 和 Q_3' 都在 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\dfrac{\overline{P_1Q_3'}}{\overline{Q_3'P_2}}=\dfrac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}$，

$\therefore Q_3$ 和 Q_3' 重合；

$\Rightarrow \overline{P_1Q_1}$ 、$\overline{P_2Q_2}$ 、$\overline{P_3Q_3}$ 交於同一點 K。

接下來，我將連接三角形各頂點與三角形對應旁切圓與三角形三邊相切點，說明其平分周線段之性質，然後對這些線段給出定義，接著說明奈格爾點的存在性。

【引理三】（三角形旁切圓與周長平分性質）

在△$P_1P_2P_3$ 中，已知圓 J_1、圓 J_2、圓 J_3 分別是三角形 $P_1P_2P_3$ 的旁切圓，其中圓 J_1 在∠$P_2P_1P_3$ 內，圓 J_2 在∠$P_3P_2P_1$ 內，圓 J_3 在∠$P_1P_3P_2$ 內；若圓 J_1 與 $\overline{P_2P_3}$ 相切於點 U_1，圓 J_2 與 $\overline{P_1P_3}$ 相切於點 U_2，圓 J_3 與 $\overline{P_1P_2}$ 相切於點 U_3，則 $\overline{P_1U_1}$ 、$\overline{P_2U_2}$ 、$\overline{P_3Q_3}$ 分別把△$P_1P_2P_3$ 周長平分。

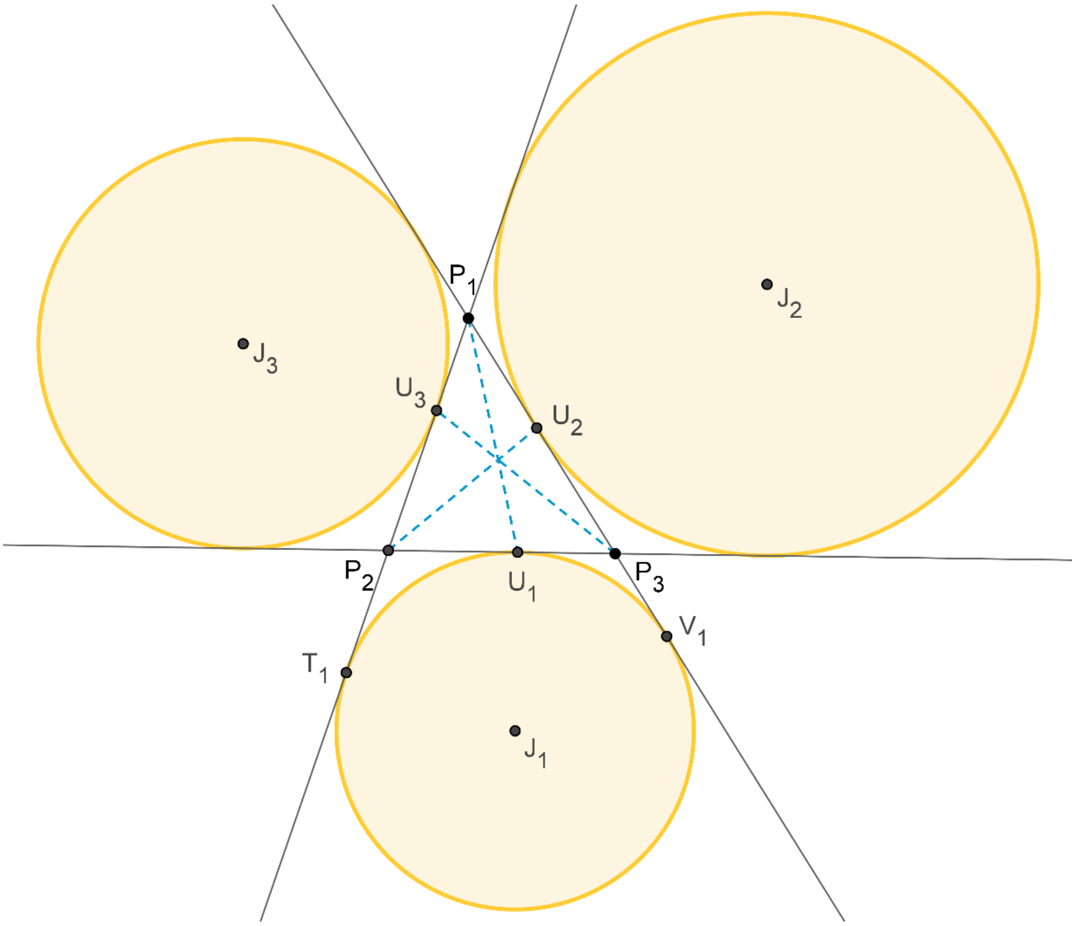


圖 05 三旁切圓的切點與頂點所構成之周長平分線(作者自行繪製)

【證明】

如圖 05，設△$P_1P_2P_3$ 的旁切圓 J_1 分別與 $\overrightarrow{P_1P_2}$、 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 切於 T_1、V_1，則 $\overline{P_1T_1}=\overline{P_1V_1}$ ；

∵△$P_1P_2P_3$ 的旁切圓 J_1 也分別與 $\overline{P_2P_3}$ 、$\overline{P_2T_1}$ 切於 T_1、U_1，

∴ $\overline{P_2T_1}=\overline{P_2U_1}$ ；同理 $\overline{P_3V_1}=\overline{P_3U_1}$ 。

∵△$P_1P_2P_3$ 的周長 $=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_1}=\overline{P_1P_2}+(\overline{P_2U_1}+\overline{U_1P_3})+\overline{P_3P_1}$

$=(\overline{P_1P_2}+\overline{P_2U_1})+(\overline{U_1P_3}+\overline{P_3P_1})=(\overline{P_1P_2}+\overline{P_2T_1})+(\overline{P_3V_1}+\overline{P_3P_1})=\overline{P_1T_1}+\overline{P_1V_1}=2\overline{P_1T_1}$

∴ $\overline{P_1T_1}=\dfrac{1}{2}$△$P_1P_2P_3$ 的周長 $=s \Rightarrow \overline{P_1P_2}+\overline{P_2U_1}=\overline{P_3U_1}+\overline{P_3P_1}=s$，

∴ $\overline{P_1U_1}$ 將△$P_1P_2P_3$ 周長平分；同理可證 $\overline{P_2U_2}$ 、$\overline{P_3Q_3}$ 將△$P_1P_2P_3$ 周長平分。

【定義一】三角形的周長平分線

在△$P_1P_2P_3$中，已知圓J_1、J_2、J_3分別是三角形$P_1P_2P_3$的旁切圓，其中圓J_1在$\angle P_2P_1P_3$內，圓J_2在$\angle P_3P_2P_1$內，圓J_3在$\angle P_1P_3P_2$內；若圓J_1與$\overline{P_2P_3}$相切於點U_1，圓J_2與$\overline{P_1P_3}$相切於點U_2，圓J_3與$\overline{P_1P_2}$相切於點U_3，則$\overline{P_1U_1}$、$\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3Q_3}$稱為三角形的**周長平分線**。

【性質一】（三角形的三條周長平分線共點）

在△$P_1P_2P_3$中，已知圓J_1、圓J_2、圓J_3分別是三角形$P_1P_2P_3$的旁切圓，其中圓J_1在$\angle P_2P_1P_3$內，圓J_2在$\angle P_3P_2P_1$內，圓J_3在$\angle P_1P_3P_2$內；若圓J_1與$\overline{P_2P_3}$相切於點U_1，圓J_2與$\overline{P_1P_3}$相切於點U_2，圓J_3與$\overline{P_1P_2}$相切於點U_3，則$\overline{P_1U_1}$、$\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3Q_3}$共點。

【證明】

由引理三可知：$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2U_1}=\overline{P_3U_1}+\overline{P_3P_1}=\overline{P_2P_3}+\overline{P_3U_2}=\overline{P_1U_2}+\overline{P_1P_2}=\overline{P_3P_1}+\overline{P_1U_3}$
$=\overline{P_2U_3}+\overline{P_2P_3}=s$，又$\because \overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$，

$\therefore \overline{P_1U_3}=s-b$，$\overline{P_2U_3}=s-a$，$\overline{P_2U_1}=s-c$，$\overline{P_3U_1}=s-b$，$\overline{P_3U_2}=s-a$，$\overline{P_1U_2}=s-c$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{P_1U_3}}{\overline{U_3P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2U_1}}{\overline{U_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3U_2}}{\overline{U_2P_1}}=\dfrac{s-b}{s-a}\cdot\dfrac{s-c}{s-b}\cdot\dfrac{s-a}{s-c}=1$，$\therefore \overline{P_1U_1}$、$\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3Q_3}$交於同一點。

【定義二】三角形的奈格爾點(*Nagel point*)

在△$P_1P_2P_3$中，已知圓J_1、J_2、J_3分別是三角形$P_1P_2P_3$的旁切圓，其中圓J_1在$\angle P_2P_1P_3$內，圓J_2在$\angle P_3P_2P_1$內，圓J_3在$\angle P_1P_3P_2$內；若圓J_1與$\overline{P_2P_3}$相切於點U_1，圓J_2與$\overline{P_1P_3}$相切於點U_2，圓J_3與$\overline{P_1P_2}$相切於點U_3，則$\overline{P_1U_1}$、$\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3U_3}$三線交於一點，此點稱為三角形$P_1P_2P_3$的奈格爾點(*Nagel point*)，簡記為N，如圖06。

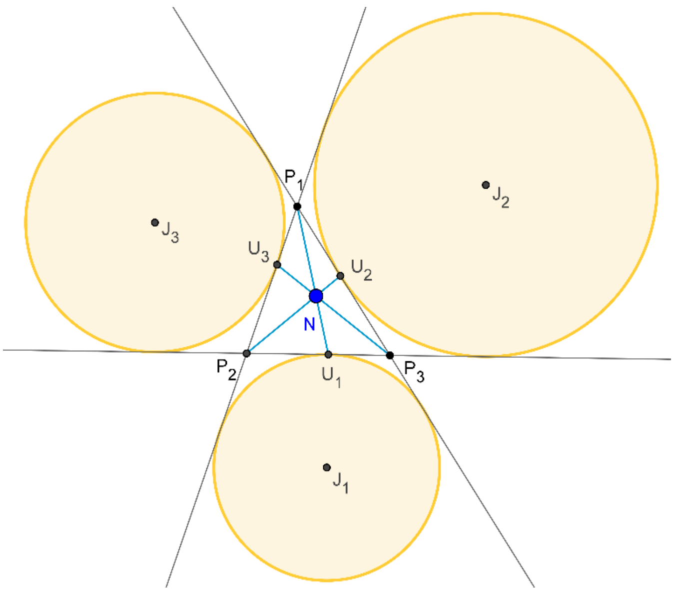


圖06 三角形的旁切圓與奈格爾點(作者自行繪製)

（二）重心、內心與奈格爾點的共線性

【引理四】（內心與旁切圓切點的幾何關係）

> $\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 I 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的內心，U_1 是 $\overline{P_2P_3}$ 與旁切圓 J_1 的切點，M_1 是 $\overline{P_2P_3}$ 的中點。若 T_1 是 I 在 $\overline{P_2P_3}$ 的垂足，V_1 是 P_1 在 $\overline{P_2P_3}$ 的垂足，則：(1) $\triangle IM_1T_1 \sim \triangle P_1U_1V_1$；(2) $\overline{IM_1} \,/\!/\, \overline{P_1U_1}$；(3) $\overline{IM_1} : \overline{P_1U_1} = a : 2s$。

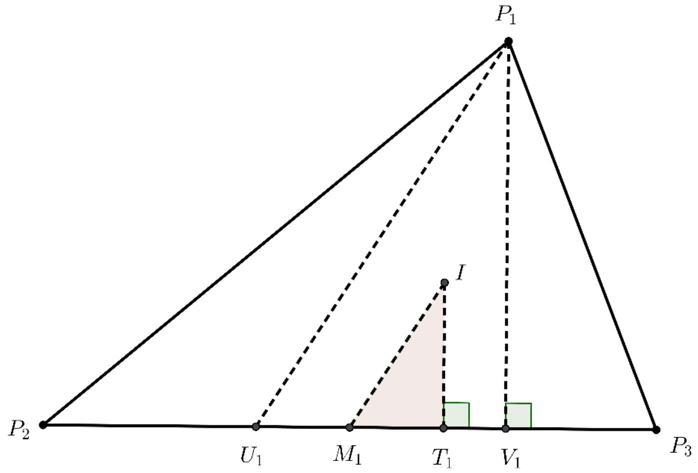


圖 07 內心至邊的垂足與旁切圓切點構成之相似三角形(作者自行繪製)

【證明】如圖 07，

$\because I$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的內心，且 T_1 是 I 在 $\overline{P_2P_3}$ 的垂足，$\therefore \overline{IT_1}$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的內切圓半徑，

$\Rightarrow \triangle P_1P_2P_3$ 的面積 $=\overline{IT_1}\cdot s$，$\Rightarrow \overline{IT_1}=\dfrac{\triangle P_1P_2P_3\text{的面積}}{s}$；

又 $\because V_1$ 是 P_1 在 $\overline{P_2P_3}$ 的垂足，$\therefore \triangle P_1P_2P_3$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot \overline{P_2P_3}\cdot \overline{P_1V_1}$，

$\Rightarrow \overline{P_1V_1}=\dfrac{2\triangle P_1P_2P_3\text{的面積}}{\overline{P_2P_3}}=\dfrac{2\triangle P_1P_2P_3\text{的面積}}{a}$

$\therefore \overline{IT_1} : \overline{P_1V_1}=\dfrac{\triangle P_1P_2P_3\text{的面積}}{s} : \dfrac{2\triangle P_1P_2P_3\text{的面積}}{a}=a : 2s$。

考慮 $\overline{M_1T_1}=\overline{M_1P_3}-\overline{T_1P_3}=\dfrac{1}{2}a-(s-c)=\dfrac{a}{2}-(\dfrac{a+b+c}{2}-c)=\dfrac{c-b}{2}$，

且 $\overline{U_1V_1}=\overline{U_1P_3}-\overline{V_1P_3}=(s-b)-\overline{P_1P_3}\cdot\cos P_3=(s-b)-b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=(\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{2b}{2})-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}=(\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{2b}{2})-(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b^2-c^2}{2a})=\dfrac{c-b}{2}-\dfrac{b^2-c^2}{2a}$

$=\dfrac{c-b}{2}-\dfrac{(b+c)\cdot(b-c)}{2a}=\dfrac{c-b}{2}\cdot(1+\dfrac{b+c}{a})=\dfrac{c-b}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{c-b}{2}\cdot\dfrac{2s}{a}$

$\therefore \overline{M_1T_1} : \overline{U_1V_1}=\dfrac{c-b}{2} : \dfrac{c-b}{2}\cdot\dfrac{2s}{a}=a : 2s$。

在 $\triangle IM_1T_1$ 和 $\triangle P_1U_1V_1$ 中，

$\because \angle IT_1M_1=\angle P_1V_1U_1=90^\circ$，且 $\overline{IT_1} : \overline{P_1V_1}=\overline{M_1T_1} : \overline{U_1V_1}=a : 2s$，

$\therefore \triangle IM_1T_1 \sim \triangle P_1U_1V_1$ (SAS 相似) $\Rightarrow \angle T_1M_1I=\angle V_1U_1P_1 \Rightarrow \overline{IM_1} \,/\!/\, \overline{P_1U_1}$；(同位角相等)

$\because \triangle IM_1T_1 \sim \triangle P_1U_1V_1$，$\therefore \overline{IM_1} : \overline{P_1U_1}=\overline{IT_1} : \overline{P_1V_1}=\overline{M_1T_1} : \overline{U_1V_1}=a : 2s$。

【引理五】(奈格爾點的線段分割比例)

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 U_1 是 $\overline{P_2P_3}$ 與旁切圓 J_1 的切點，U_3 是 $\overline{P_1P_2}$ 與旁切圓 J_3 的切點。若 $\overline{P_1U_1}$ 和 $\overline{P_3U_3}$ 交於 N 點，則 $\overline{P_1N}:\overline{NU_1}=a:(s-a)$，$\overline{P_3N}:\overline{NU_3}=c:(s-c)$。

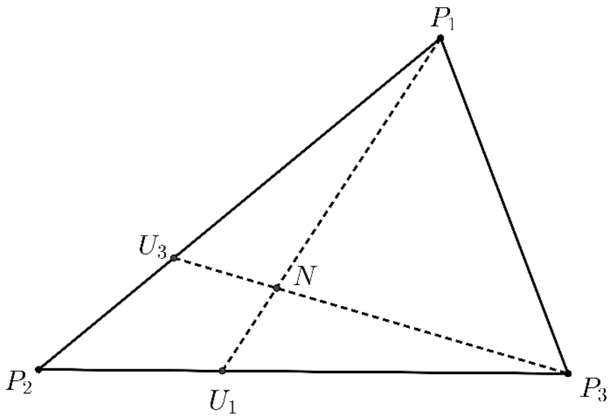


圖 08 奈格爾點在 $\overline{P_1U_1}$ 上的分比圖 (作者自行繪製)

【證明】

$\because U_1$ 是 $\overline{P_2P_3}$ 與旁切圓 J_1 的切點，U_3 是 $\overline{P_1P_2}$ 與旁切圓 J_3 的切點，

$\therefore$ 根據定義二，N 點即為 $\triangle P_1P_2P_3$ 的奈格爾點，如圖 08。

設 $\angle P_1P_3U_3=\alpha$，$\angle P_3U_3P_2=\beta$，

則 $\triangle P_3P_1U_3$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_3U_3}\cdot\sin\alpha$，$\triangle P_3U_3P_2$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_2P_3}\cdot\overline{P_3U_3}\cdot\sin\beta$，

$\triangle P_3P_1N$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_3N}\cdot\sin\alpha$，$\triangle P_3NU_1$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_3U_1}\cdot\overline{P_3N}\cdot\sin\beta$；

$\Rightarrow \triangle P_3P_1U_3$ 面積 $:\triangle P_3U_3P_2$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_3U_3}\cdot\sin\alpha:\frac{1}{2}\overline{P_2P_3}\cdot\overline{P_3U_3}\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha:a\cdot\sin\beta$；

$\triangle P_3P_1N$ 面積 $:\triangle P_3NU_1$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_3N}\cdot\sin\alpha:\frac{1}{2}\overline{P_3U_1}\cdot\overline{P_3N}\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha:(s-b)\cdot\sin\beta$。

$\because \triangle P_3P_1U_3$ 和 $\triangle P_3U_3P_2$ 是等高三角形，

$\therefore \triangle P_3P_1U_3$ 面積 $:\triangle P_3U_3P_2$ 面積 $=\overline{P_1U_3}:\overline{U_3P_2}=(s-b):(s-a)$；

$\Rightarrow b\cdot\sin\alpha:a\cdot\sin\beta=(s-b):(s-a)\quad\Rightarrow \boldsymbol{b\cdot\sin\alpha}=\dfrac{a(s-b)\cdot\sin\beta}{s-a}$

又 $\because \triangle P_3P_1N$ 和 $\triangle P_3NU_1$ 是等高三角形，

$\therefore \overline{P_1N}:\overline{NU_1}=\triangle P_3P_1N$ 面積 $:\triangle P_3NU_1$ 面積 $=\boldsymbol{b\cdot\sin\alpha}:(s-b)\cdot\sin\beta$

$$=\boldsymbol{\frac{a(s-b)\cdot\sin\beta}{s-a}}:(s-b)\cdot\sin\beta=a:(s-a)。$$

同理可得 $\overline{P_3N}:\overline{NU_3}=c:(s-c)$。

【引理六】（三角形重心位置之比例判別法）

如圖 09，△$P_1P_2P_3$ 中，已知 M_1 是$\overline{P_2P_3}$的中點，G 點在$\overline{IM_1}$上。若$\overline{P_1G}$：$\overline{GM_1}=2:1$，則 G 點是△$P_1P_2P_3$ 的重心。

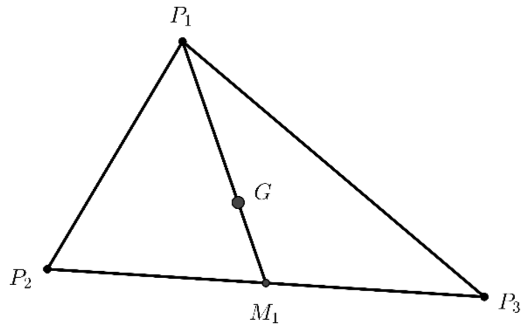


圖 09 $\overline{P_1G}$：$\overline{GM_1}=2:1$ (作者自行繪製)

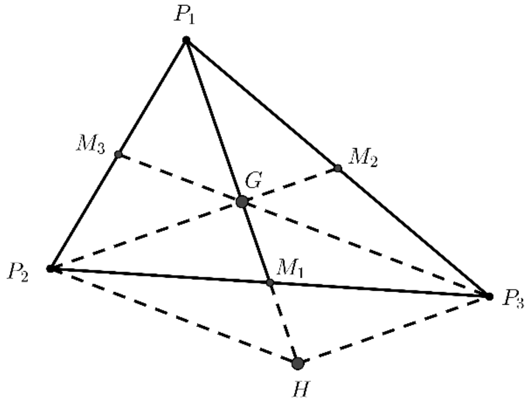


圖 10 輔助線構造圖 (作者自行繪製)

【證明】

如圖 10，延長 $\overrightarrow{P_1M_1}$，並在 $\overrightarrow{P_1M_1}$上取一點 H，使得$\overline{P_1G}=\overline{GH}$，則$\overline{GM_1}=\frac{1}{2}\overline{P_1G}=\frac{1}{2}\overline{GH}$，

$\therefore \overline{M_1H}=\overline{GH}-\overline{GM_1}=\overline{GH}-\frac{1}{2}\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{GH} \Rightarrow \overline{GM_1}=\overline{M_1H}$。

在四邊形 GP_2HP_3 中，$\because \overline{P_2M_1}=\overline{M_1P_3}$，且$\overline{GM_1}=\overline{M_1H}$，

$\therefore$四邊形 GP_2HP_3 是平行四邊形 $\Rightarrow$ $\overline{GP_3} // \overline{P_2H}$ 且 $\overline{P_2G} // \overline{HP_3}$。

延長 $\overrightarrow{P_2G}$交$\overline{P_1P_3}$於 M_2 點，延長 $\overrightarrow{P_3G}$交$\overline{P_1P_2}$於 M_3 點，

在△P_1P_2H 中，

$\because \overline{P_1G}$：$\overline{GH}=1:1$ 且 $\overrightarrow{P_3G} // \overline{P_2H}$，

$\therefore \overline{P_1M_3}$：$\overline{M_3P_2}=1:1$；

在△P_1HP_3 中，

$\because \overline{P_1G}$：$\overline{GH}=1:1$ 且 $\overrightarrow{P_2G} // \overline{HP_3}$，

$\therefore \overline{P_1M_2}$：$\overline{M_2P_3}=1:1$；

$\Rightarrow \overline{P_2M_2}$和$\overline{P_3M_3}$都是△$P_1P_2P_3$ 的中線，因此 G 點是△$P_1P_2P_3$ 的重心。

【性質二】(三角形內心、重心與奈格爾點的共線性與分比)

如圖 11，在△$P_1P_2P_3$ 中，若 I、G、N 分別是△$P_1P_2P_3$ 的內心、重心、奈格爾點，則 I、G、N 三點共線，且 $\overline{IG}$ ∶ $\overline{GN}$＝1∶2。

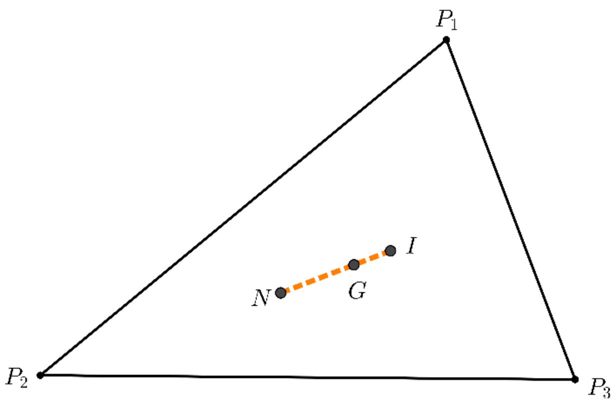


圖 11 奈格爾線示意圖 (作者自行繪製)

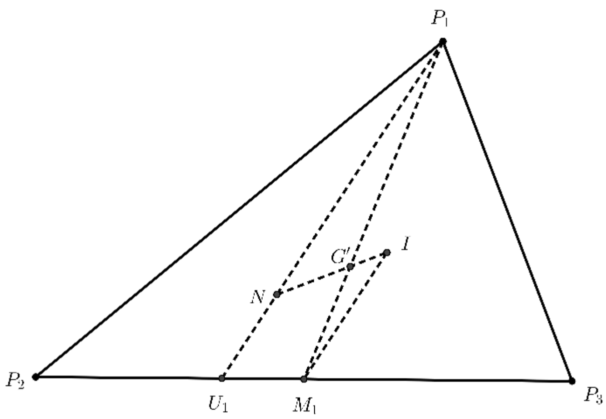


圖 12 奈格爾線輔助構圖 (作者自行繪製)

【證明】

如圖 12，取 $\overline{P_2P_3}$ 的中點 M_1，並設 U_1 是 $\overline{P_2P_3}$ 與旁切圓 J_1 的切點。

連接 $\overline{IM_1}$ 、$\overline{P_1U_1}$，則 N 必在 $\overline{P_1U_1}$ 上，

則根據引理四可得 $\overline{IM_1}$ // $\overline{P_1U_1}$ ，且 $\overline{IM_1}$ ∶ $\overline{P_1U_1}$ ＝a∶$2s$；

根據引理五可得 $\overline{P_1N}$ ∶ $\overline{NU_1}$＝a∶$(s－a)$ ⇒ $\overline{P_1N}$ ∶ $\overline{P_1U_1}$ ＝a∶s。

∴ $\overline{IM_1}$ ∶ $\overline{P_1U_1}$ ∶ $\overline{P_1N}$＝a∶$2s$∶$2a$ ⇒ $\overline{IM_1}$ ∶ $\overline{P_1N}$＝a∶$2a$＝1∶2。

連接 $\overline{IN}$、$\overline{P_1M_1}$，設 $\overline{IN}$ 和 $\overline{P_1M_1}$ 交於 G' 點。

在△$IG'M_1$ 和△$NG'P_1$ 中，

∵ ∠$M_1G'I$＝∠$P_1G'N$ (對頂角)

∠IM_1G'＝∠NP_1G' (內錯角相等∵ $\overline{IM_1}$ // $\overline{P_1U_1}$)

∴△$IG'M_1$～△$NG'P_1$ (AA 相似)

⇒ $\overline{G'M_1}$ ∶ $\overline{P_1G'}$＝ $\overline{IM_1}$ ∶ $\overline{P_1N}$＝1∶2

∵已知 M_1 是 $\overline{P_2P_3}$ 的中點，且 $\overline{G'M_1}$ ∶ $\overline{P_1G'}$＝1∶2，

∴由引理六可知 G' 點是△$P_1P_2P_3$ 的重心，即 G' 點與 G 點重合⇒I、G、N 三點共線；

又∵△$IG'M_1$～△$NG'P_1$，∴ $\overline{IG}$ ∶ $\overline{GN}$＝ $\overline{IM_1}$ ∶ $\overline{P_1N}$＝1∶2。

（三）*Xavier Dussau* 的三條作圖線共點

Xavier Dussau 所提出三條作圖線共點的證明方式，主要是運用重心座標系統（*barycentric coordinates*）來進行分析。他透過計算三個由輔助點與三角形頂點所構成的子三角形之面積比例，以此定義該共點的位置，並藉由這三條連接線的座標方程式，利用其係數構成一三階行列式，進而證明行列式值為零，即代表這三條線確實共點。隨後，再聯立三條線的方程式以求得交點座標，並比對知名三角形中心資料庫 ETC（*Encyclopedia of Triangle Centers*），確認該點的重心座標 $(b+c-a : c+a-b : a+b-c)$與奈格爾點 $X(8)$一致。

此一方法展現了代數幾何的嚴謹與高效率，具備精確性、可計算性與資料庫驗證的優勢。然而，此種純代數的證明方式在幾何理解上卻略顯薄弱，難以呈現三條線段幾何構造的本質，也無法解釋為何這三條線段的結構具有特別意義。因此，我認為有必要深入探討此三條作圖線的幾何意義。深入處理三條線的幾何意義，既是補充代數方法的不足，也是拓展本研究深度與貢獻的重要步驟。

為了補足純代數方法在幾何詮釋上的不足，並深入探討 *Xavier Dussau* 所構三條線段的幾何結構，本研究自「定義三」開始，展開一系列幾何性質的推導與分析。首先，藉由引入三角形內角平分線與其對應的平行線，探討 *Dussau* 作圖線與三角形內部結構間的對應關係，發現 *Dussau* 作圖線其實可視為內角平分線的平移。

接著，透過相似三角形與位似變換的結合，進一步揭示這三條構圖線實為三角形內心的對應映射。透過一系列的引理與圖形輔助，本研究逐步建立 *Dussau* 作圖法背後的幾何意義，並在此基礎上，構築出完整的七線共點架構，說明各構圖線段如何彼此串聯、匯聚於奈格爾點。

【定義三】*Xavier Dussau* 作圖輔助點與作圖線

在$\triangle P_1P_2P_3$中，在$\overrightarrow{P_1P_2}$上取一點P_1'，使$\overline{P_1P_1'}=\dfrac{a}{c}\overline{P_1P_2}$，以及在$\overrightarrow{P_1P_3}$上取一點$P_1''$，使$\overline{P_1P_1''}=\dfrac{a}{b}\overline{P_1P_3}$；在$\overrightarrow{P_2P_3}$上取一點 P_2'，使$\overline{P_2P_2'}=\dfrac{b}{a}\overline{P_2P_3}$，以及在$\overrightarrow{P_2P_1}$上取一點 P_2''，使$\overline{P_2P_2''}=\dfrac{b}{c}\overline{P_1P_2}$；在$\overrightarrow{P_3P_1}$上取一點$P_3'$，使$\overline{P_3P_3'}=\dfrac{c}{b}\overline{P_1P_3}$，以及在$\overrightarrow{P_3P_2}$上取一點$P_3''$，使$\overline{P_3P_3''}=\dfrac{c}{a}\overline{P_2P_3}$，則$P_1'$、$P_1''$、$P_2'$、$P_2''$、$P_3'$、$P_3''$這六點稱為$\triangle P_1P_2P_3$的 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。$P_1''$與$P_2'$的連線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$P_1'$與$P_3''$的連線$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$P_3'$與$P_2''$的連線$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$稱為 *Xavier Dussau* 作圖線。

根據三角形$\triangle P_1P_2P_3$的三邊長度關係，分以下兩種情形觀察 *Xavier Dussau* 作圖線，如附圖所示：圖 13：當$\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$時的構造情形。圖 14：當$\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2} > \overline{P_2P_3}$時的構造情形。

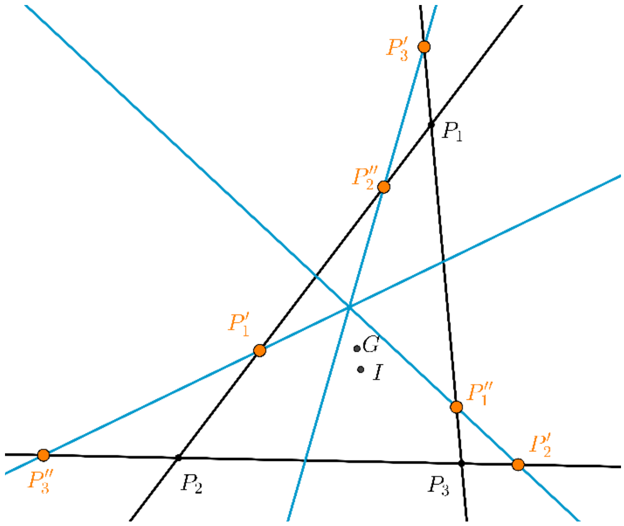


圖 13　$\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$下的 *Xavier Dussau* 作圖線 (作者自行繪製)

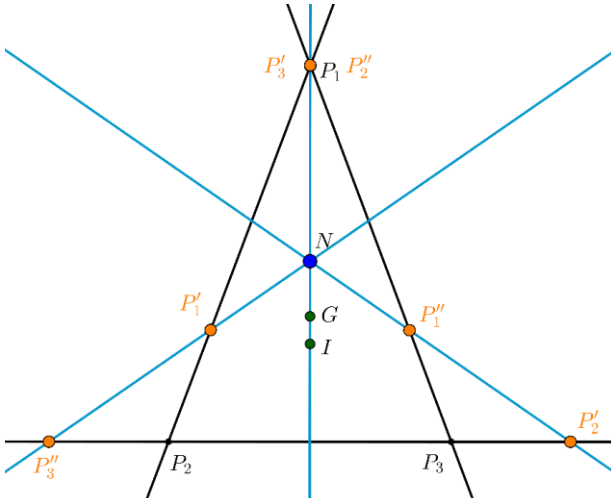


圖 14　$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$下的 *Xavier Dussau* 作圖線 (作者自行繪製)

從以上兩種邊長順序的情形中可見，*Xavier Dussau* 作圖輔助點的相對位置與三角形的邊長大小密切相關。這些點的分布雖然形式上對應於特定比例，但在不同的邊長配置下，所呈現的幾何結構也會隨之變化。

當$\triangle P_1P_2P_3$ 為等腰三角形時，$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} \neq \overline{P_2P_3}$（即 $c=b\neq a$）。在這種情況下，回顧 *Xavier Dussau* 的作圖步驟，我們可以觀察到輔助點位置的變化現象：由於 $c=b$，原本定義為$\overline{P_2P_2'}=\frac{b}{a}\overline{P_2P_3}$和$\overline{P_3P_3''}=\frac{c}{a}\overline{P_2P_3}$的線段長度將會相等，即$\overline{P_2P_2'}=\overline{P_3P_3'}=\frac{b}{a}\overline{P_2P_3}$。這意味著輔助點 P_2'和 P_3''在等腰三角形的底邊$\overline{P_2P_3}$上的相對位置會呈現對稱性，如圖 14。由於 $c=b$，原本定義為$\overline{P_1P_1'}=\frac{a}{c}\overline{P_1P_2}$和$\overline{P_1P_1''}=\frac{a}{b}\overline{P_1P_3}$的線段長度將會相等，即$\overline{P_1P_1'}=\overline{P_1P_1''}=\frac{a}{c}\overline{P_1P_2}$。這意味著輔助點 P_1'和 P_1''在等腰三角形的兩腰或其延長線上的相對位置會呈現對稱性。由於 $c=b$，原本定義為$\overline{P_2P_2''}=\frac{b}{c}\overline{P_1P_2}$和$\overline{P_3P_3'}=\frac{c}{b}\overline{P_1P_3}$的線段長度將會相等，即$\overline{P_2P_2''}=\overline{P_3P_3'}=\overline{P_1P_2}$。這意味著輔助點 P_2''和 P_3'在等腰三角形的頂點重合。

從圖 13 與圖 14 中可以觀察到，無論三角形$\triangle P_1P_2P_3$的三邊長滿足哪一種順序，*Xavier Dussau* 作圖輔助點所構成的三條作圖線都交於同一點。接下來，我將試著解釋這個現象。

【引理七】(三條作圖線分別平行於內角平分線)

如圖 16，已知 P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''這六點是$\triangle P_1P_2P_3$的 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。若 I 是$\triangle P_1P_2P_3$的內心，則$\overleftrightarrow{P_3'P_2''} \,//\, \overrightarrow{P_1I}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''} \,//\, \overrightarrow{P_2I}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'} \,//\, \overrightarrow{P_3I}$。

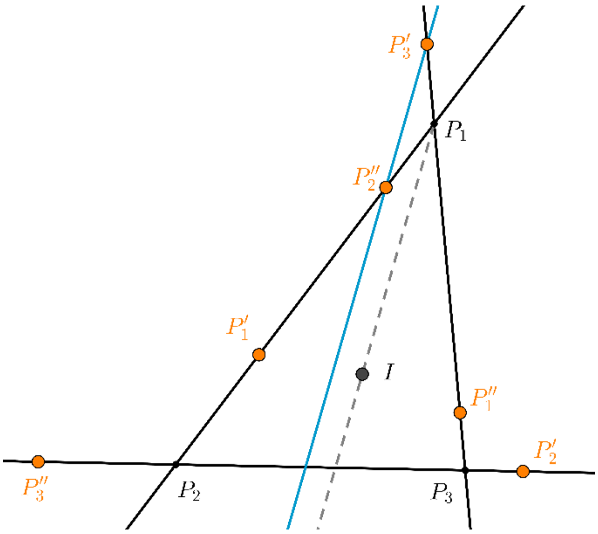


圖 15 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''} \,//\, \overrightarrow{P_1I}$ (作者自行繪製)

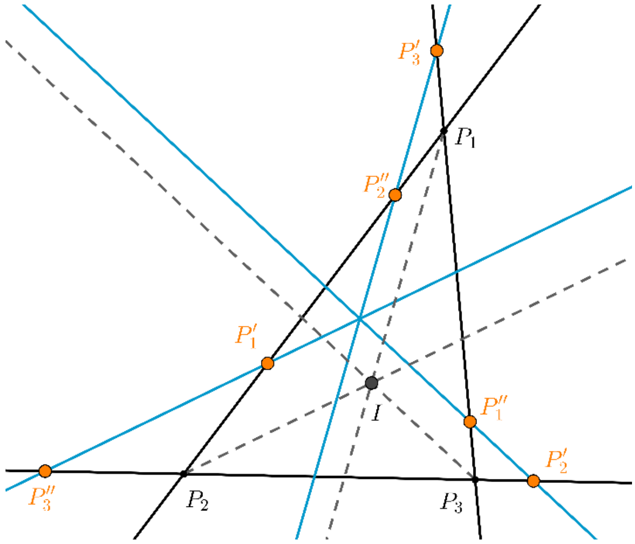


圖 16 三條作圖線與三內角平分線方向的平行關係 (作者自行繪製)

【證明】

如圖 15，不失一般性，我們僅討論$\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$的情況，即 $c>b>a$。

連接 $\overrightarrow{P_1I}$，$\because I$ 是$\triangle P_1P_2P_3$的內心，則$\angle P_2P_1I=\angle IP_1P_3 \Rightarrow \angle P_2P_1P_3=2\angle P_2P_1I$。

$\because P_1'$、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''是 *Xavier Dussau* 作圖輔助點，

$\therefore \overline{P_1P_1'}=\dfrac{a}{c}\overline{P_1P_2}=a$，$\overline{P_1P_1''}=\dfrac{a}{b}\overline{P_1P_3}=a$，$\overline{P_2P_2'}=\dfrac{b}{a}\overline{P_2P_3}=b$，$\overline{P_2P_2''}=\dfrac{b}{c}\overline{P_1P_2}=b$，

$\overline{P_3P_3'}=\dfrac{c}{b}\overline{P_1P_3}=c$，$\overline{P_3P_3''}=\dfrac{c}{a}\overline{P_2P_3}=c$。

在$\triangle P_1P_3'P_2''$中，考慮$\overline{P_1P_3'}=\overline{P_3P_3''}-\overline{P_1P_3}=c-b$，以及$\overline{P_1P_2''}=\overline{P_1P_2}-\overline{P_2P_2''}=c-b$

$\therefore \overline{P_1P_3'}=\overline{P_1P_2''}=c-b \Rightarrow \angle P_1P_2''P_3'=\angle P_2''P_3'P_1$

$\because \angle P_2P_1P_3$是$\triangle P_1P_3'P_2''$的外角，$\therefore \angle P_2P_1P_3=\angle P_1P_2''P_3'+\angle P_2''P_3'P_1=2\angle P_1P_2''P_3'$；

又$\because \angle P_2P_1P_3=2\angle P_2P_1I$，$\therefore 2\angle P_2P_1I=2\angle P_1P_2''P_3' \Rightarrow \angle P_2P_1I=\angle P_1P_2''P_3'$

$\therefore \overleftrightarrow{P_3'P_2''} \,//\, \overrightarrow{P_1I}$ (內錯角相等)

連接 $\overrightarrow{P_2I}$和 $\overrightarrow{P_3I}$，同理可得：$\overleftrightarrow{P_1'P_3''} \,//\, \overrightarrow{P_2I}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'} \,//\, \overrightarrow{P_3I}$。

【引理八】（平行構造引理）

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''這六點是 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。

（1）若過 P_3''作$\overleftrightarrow{P_3''Z_1} \parallel \overline{P_1P_2}$，且$\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$交於 Z_1 點，連接$\overline{Z_1P_2'}$，則$\overline{Z_1P_2'} \parallel \overline{P_1P_3}$。

（2）若過 P_1''作$\overleftrightarrow{P_1''Z_2} \parallel \overline{P_2P_3}$，且$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}$與$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$交於 Z_2 點，連接$\overline{Z_2P_3'}$，則$\overline{Z_2P_3'} \parallel \overline{P_1P_2}$。

（3）若過 P_2''作$\overleftrightarrow{P_2''Z_3} \parallel \overline{P_1P_3}$，且$\overleftrightarrow{P_2''Z_3}$與$\overleftrightarrow{P_2'P_1''}$交於 Z_3 點，連接$\overline{Z_3P_1'}$，則$\overline{Z_3P_1'} \parallel \overline{P_2P_3}$。

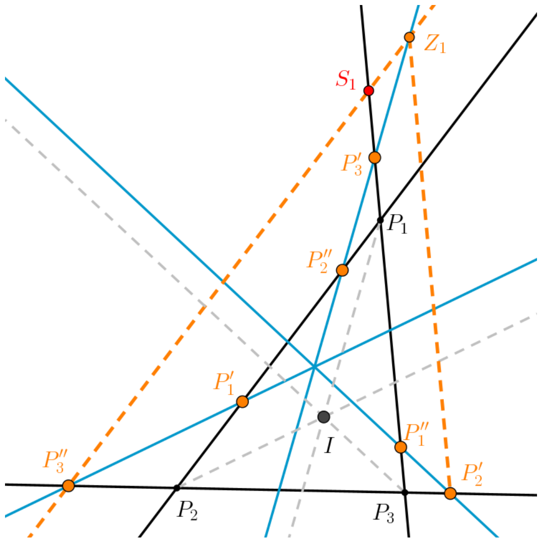


圖 17-*a*　$\overleftrightarrow{P_3''Z_1} \parallel \overline{P_1P_2}$，交於$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$上的交點關係 (作者自行繪製)

【證明】

（1） 如圖 17-*a*，不失一般性，我們僅討論$\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$的情況，即 $c>b>a$。

設 I 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的內心，則由引理七可得$\overleftrightarrow{P_3'P_2''} \parallel \overrightarrow{P_1I}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''} \parallel \overrightarrow{P_2I}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'} \parallel \overrightarrow{P_3I}$。

設$\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 S_1。在$\triangle P_3S_1P_3''$中，$\because \overleftrightarrow{P_3''Z_1} \parallel \overline{P_1P_2}$，$\therefore \angle S_1Z_1P_2'' = \angle P_1P_2''Z_1$

且$\overline{P_3P_2} : \overline{P_2P_3''} = \overline{P_3P_1} : \overline{P_1S_1} \Rightarrow a : (c-a) = b : \overline{P_1S_1} \Rightarrow \overline{P_1S_1} = \dfrac{b\cdot(c-a)}{a}$

同時在$\triangle P_3S_1P_3''$中，$\because \overleftrightarrow{P_3''Z_1} \parallel \overline{P_1P_2}$，$\therefore \overline{P_1P_2} : \overline{P_3''S_1} = \overline{P_3P_2} : \overline{P_3P_3''}$

$\Rightarrow \quad c : \overline{P_3''S_1} = a : c \quad \Rightarrow \quad \overline{P_3''S_1} = \dfrac{c^2}{a}$

考慮$\overline{P_1P_3'} = \overline{P_3P_3''} - \overline{P_1P_3} = c-b$，

$\therefore \overline{P_3'S_1} = \overline{P_1S_1} - \overline{P_1P_3'} = \dfrac{b\cdot(c-a)}{a} - (c-b) = \dfrac{c\cdot(b-a)}{a}$

$\because \overline{P_1P_3'} = \overline{P_1P_2''} = c-b \Rightarrow \angle P_2''P_3'P_1 = \angle P_1P_2''P_3'$，

$\therefore \angle Z_1P_3'S_1 = \angle P_2''P_3'P_1 = \angle P_1P_2''P_3' = \angle S_1Z_1P_3'$；

在△$S_1P_3'Z_1$中，∵∠$Z_1P_3'S_1$=∠$S_1Z_1P_3'$，∴ $\overline{S_1Z_1}=\overline{P_3'S_1}=\dfrac{c\cdot(b-a)}{a}$；

在△$P_3''P_2'Z_1$中，考慮$\overline{P_3''P_3}$：$\overline{P_3P_2'}=c:(b-a)$，

$$與\ \overline{P_3''S_1}:\overline{S_1Z_1}=\frac{c^2}{a}:\frac{c\cdot(b-a)}{a}=c:(b-a)$$

∵ $\overline{P_3''S_1}:\overline{S_1Z_1}=\overline{P_3''P_3}:\overline{P_3P_2'}=c:(b-a)$，∴ $\overline{S_1P_3}\parallel\overline{Z_1P_2'}$，即$\overline{Z_1P_2'}\parallel\overline{P_1P_3}$。

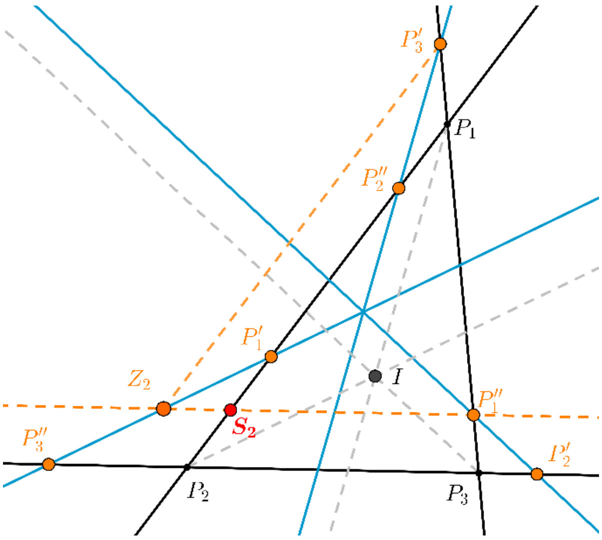


圖 17-*b* $\overleftrightarrow{P_1''Z_2}\parallel\overline{P_2P_3}$，交於$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$上的交點關係(作者自行繪製)

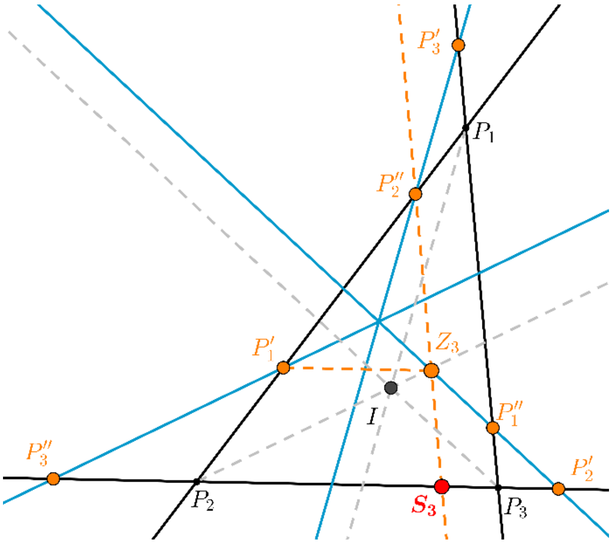


圖 17-*c* $\overleftrightarrow{P_2''Z_3}\parallel\overline{P_1P_3}$，交於$\overleftrightarrow{P_2'P_1''}$上的交點關係(作者自行繪製)

（2）如圖 17-*b*，設$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}$與$\overleftrightarrow{P_1P_2}$交於 S_2。

在△$P_1P_2P_3$中，∵$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}\parallel\overline{P_2P_3}$，∴∠$P_3P_2S_2$=∠$Z_2S_2P_2$ (內錯角)

且$\overline{P_2P_3}:\overline{S_2P_1''}=\overline{P_1P_3}:\overline{P_1P_1''}$ $\Rightarrow a:\overline{S_2P_1''}=b:a\Rightarrow\overline{S_2P_1''}=\dfrac{a^2}{b}$

同時在△$P_1P_2P_3$中，∵$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}\parallel\overline{P_2P_3}$，∴ $\overline{P_1S_2}:\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_1''}:\overline{P_1P_3}$

$\Rightarrow\ \overline{P_1S_2}:c=a:b\Rightarrow\overline{P_1S_2}=\dfrac{ac}{b}$；考慮$\overline{P_1'S_2}=\overline{P_1S_2}-\overline{P_1P_1'}=\dfrac{ac}{b}-a=\dfrac{a\cdot(c-b)}{b}$

∵∠$Z_2P_1'S_2$=∠$P_2P_3''P_1'$=∠$S_2Z_2P_1'$，∴ $\overline{S_2Z_2}=\overline{P_1'S_2}=\dfrac{a\cdot(c-b)}{b}$

在△$P_1''P_3'Z_2$中，考慮$\overline{P_1''P_1}$：$\overline{P_1P_3'}=a:(c-b)$，

$$與\ \overline{S_2P_1''}:\overline{S_2Z_2}=\frac{a^2}{b}:\frac{a\cdot(c-b)}{b}=a:(c-b)$$

∵ $\overline{P_1''P_1}:\overline{P_1P_3'}=\overline{S_2P_1''}:\overline{S_2Z_2}=a:(c-b)$，∴ $\overline{S_2P_1}\parallel\overline{Z_2P_3'}$，即$\overline{Z_2P_3'}\parallel\overline{P_1P_2}$。

（3）如圖 17-*c*，設$\overleftrightarrow{P_2''Z_3}$與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$交於 S_3，同理可得，$\overline{S_3P_2}\parallel\overline{Z_3P_1'}$，即$\overline{Z_3P_1'}\parallel\overline{P_2P_3}$。

【性質三】(*Xavier Dussau* 作圖線共點性質)

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''這六點是 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。

已知 $\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$，則三直線 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 共點。

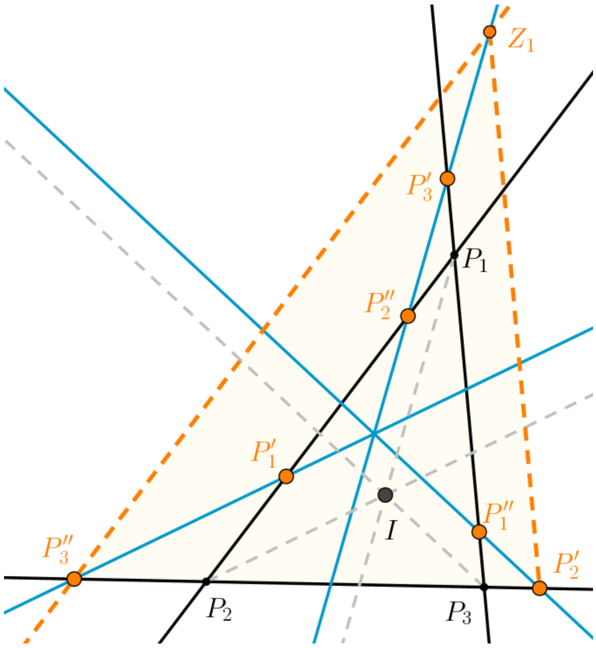


圖 18 三條 *Xavier Dussau* 作圖線共點圖 (作者自行繪製)

【證明】

如圖 18，過 P_3''作 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1} \,//\, \overline{P_1P_2}$，若 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$交於 Z_1 點，

連接 $\overline{Z_1P_2'}$，則依據引理八，可知：$\overline{Z_1P_2'} \,//\, \overline{P_1P_3}$。

設 I 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的內心，則由引理七可得 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''} \,//\, \overrightarrow{P_1I}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''} \,//\, \overrightarrow{P_2I}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'} \,//\, \overrightarrow{P_3I}$。

$\because \overleftrightarrow{P_3''Z_1} \,//\, \overline{P_1P_2}$，$\therefore \angle P_3P_2P_1 = \angle P_2'P_3''Z_1$（同位角）;

$\because \overline{Z_1P_2'} \,//\, \overline{P_1P_3}$，$\therefore \angle P_1P_3P_2 = \angle Z_1P_2'P_3''$（同位角）;

在$\triangle P_1P_2P_3$ 和$\triangle Z_1P_3''P_2'$中，$\because \angle P_3P_2P_1 = \angle P_2'P_3''Z_1$，且$\angle P_1P_3P_2 = \angle Z_1P_2'P_3''$

$\therefore \triangle P_1P_2P_3 \sim \triangle Z_1P_3''P_2'$（$AA$ 相似）$\Rightarrow \angle P_2P_1P_3 = \angle P_3''Z_1P_2'$

$\because \overline{Z_1P_2'} \,//\, \overline{P_1P_3}$，$\therefore \angle P_3'Z_1P_2' = \angle P_2''P_3'P_1$；$\because \overleftrightarrow{P_3'P_2''} \,//\, \overrightarrow{P_1I}$，$\therefore \angle P_2''P_3'P_1 = \angle IP_1P_3$

$\Rightarrow \angle P_3'Z_1P_2' = \angle P_2''P_3'P_1 = \angle IP_1P_3 = \dfrac{1}{2}\angle P_2P_1P_3 = \dfrac{1}{2}\angle P_3''Z_1P_2'$，

$\therefore \overleftrightarrow{P_3'P_2''}$是$\angle P_3''Z_1P_2'$的角平分線。

同理 $\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$是$\angle P_2'P_3''Z_1$ 的角平分線，且 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$是$\angle Z_1P_2'P_3''$的角平分線；

$\because \overleftrightarrow{P_3'P_2''}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$是$\triangle Z_1P_3''P_2'$三內角的角平分線，$\therefore \overleftrightarrow{P_3'P_2''}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$ 共點。

【引理九】(重心至內心方向與最短邊交點的分比關係)

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 $\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$，$I$、$G$ 分別是$\triangle P_1P_2P_3$ 的內心、重心。

(1) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 交於 C_1 點，則 $\overline{P_2C_1}$：$\overline{C_1P_3}=(c-a):(b-a)$。

(2) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 C_2 點，則 $\overline{P_3C_2}$：$\overline{C_2P_1}=(b-a):(c-b)$。

(3) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交於 C_3 點，則 $\overline{P_1C_3}$：$\overline{C_3P_2}=(c-b):(c-a)$。

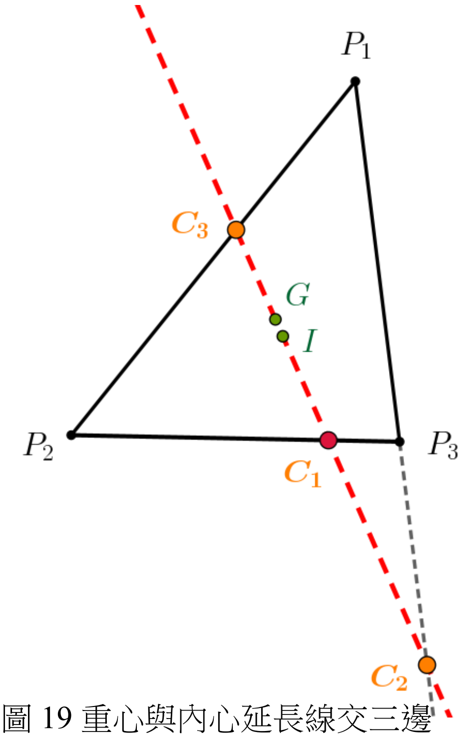


圖 19 重心與內心延長線交三邊之比例關係圖(作者自行繪製)

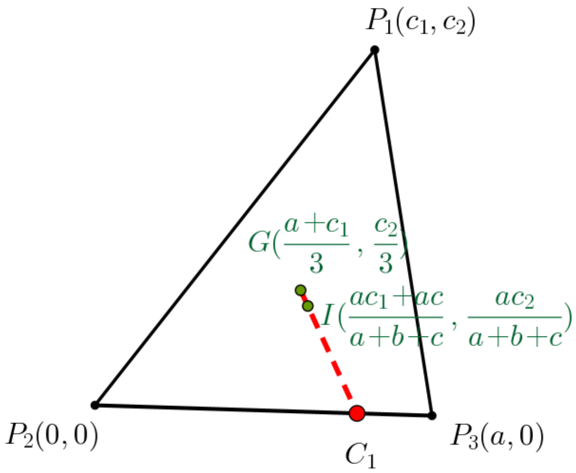


圖 20 建立坐標系以證明 $\overrightarrow{GI}$ 分割邊之比例性質 (作者自行繪製)

【證明】

(1) 如圖 20，在$\triangle P_1P_2P_3$ 所在的平面建立直角坐標系，

不失一般性，以 P_2 為原點，$\overrightarrow{P_2P_3}$ 為 x 軸的正向，並假設 P_1 點落在 x 軸上方。

設 P_1、P_2、P_3 三點坐標分別是 $P_1(c_1, c_2)$、$P_2(0, 0)$、$P_3(a, 0)$，其中 $a>0$，$c_2>0$。

則 G、I 兩點的坐標分別是：$G(\frac{a+c_1}{3}, \frac{c_2}{3})$、$I(\frac{ac_1+ac}{a+b+c}, \frac{ac_2}{a+b+c})$。

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{GI}$ 的方程式：$(2ac_2-bc_2-cc_2)x+(a^2+ab+bc_1+cc_1-2ac-2ac_1)y=ac_2\cdot(a-c)$

$\because$ $\overleftrightarrow{GI}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 交於 C_1 點，令 $y=0$ 代入 $\overleftrightarrow{GI}$ 的方程式，

可得 $x=\dfrac{ac_2\cdot(a-c)}{2ac_2-bc_2-cc_2}=\dfrac{a^2-ac}{2a-b-c}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}$；

$\therefore C_1\left(\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a},0\right) \quad\Rightarrow\quad \overline{P_2C_1}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}$

$\Rightarrow \overline{C_1P_3}=\overline{P_2P_3}-\overline{P_2C_1}=a-\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}=\dfrac{ab+ac-2a^2}{b+c-2a}-\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}=\dfrac{ab-a^2}{b+c-2a}$；

$\therefore \overline{P_2C_1}：\overline{C_1P_3}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}：\dfrac{ab-a^2}{b+c-2a}=(ac-a^2)：(ab-a^2)=(c-a)：(b-a)$。

(2) $\because$ $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 的方程式：$c_2x+(a-c_2)y=ac_2$，且 $\overleftrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 C_2 點，

化簡可得 $\overline{P_3C_2}：\overline{C_2P_1}=(b-a)：(c-b)$

(3) $\because$ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 的方程式：$c_2x-c_1y=0$，且 $\overleftrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交於 C_3 點，

同理可得 $\overline{P_1C_3}：\overline{C_3P_2}=(c-b)：(c-a)$。

【定義五】平面上的位似變換 $\eta(O,k)$

> 已知 O 是平面上一個定點，η 是平面上的變換。若對於任一對應點 P、P'，都有 $\overrightarrow{OP'}=k\cdot\overrightarrow{OP}$，其中 $k\neq 0$，則稱 η 是位似變換，記作 $\eta(O,k)$，O 稱為位似中心，k 稱為位似比。

【引理十】(由內心與重心導出之位似變換與輔助三角形關係)

> $\triangle P_1P_2P_3$ 中，$\overline{P_1P_2}>\overline{P_1P_3}>\overline{P_2P_3}$，已知 I、G 分別是$\triangle P_1P_2P_3$的內心、重心；P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''這六點是 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。
>
> (1) 過 P_3''作 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\,//\,\overline{P_1P_2}$，若 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 交於 Z_1 點，且 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 交於 C_1 點，
>
> 則 $\eta(C_1,\dfrac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$。
>
> (2) 過 P_1''作 $\overleftrightarrow{P_1''Z_2}\,//\,\overline{P_2P_3}$，若 $\overleftrightarrow{P_1''Z_2}$與 $\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$ 交於 Z_2 點，且 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 C_2 點，
>
> 則 $\eta(C_2,\dfrac{a+c-b}{b})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_2P_3''P_2'$。
>
> (3) 過 P_2''作 $\overleftrightarrow{P_2''Z_3}\,//\,\overline{P_1P_3}$，且 $\overleftrightarrow{P_2''Z_3}$與 $\overleftrightarrow{P_2'P_1''}$ 交於 Z_3 點，且 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交於 C_3 點，
>
> 則 $\eta(C_3,\dfrac{a+b-c}{c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_3P_3''P_2'$。

【證明】

(1) 如圖 21-a，$\because P_1'$、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''是$\triangle P_1P_2P_3$的 *Xavier Dussau* 作圖輔助點，

又 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\,//\,\overline{P_1P_2}$，則由引理八可知：$\overline{Z_1P_2'}\,//\,\overline{P_1P_3}$， 且易知$\triangle P_1P_2P_3\sim\triangle Z_1P_3''P_2'$。

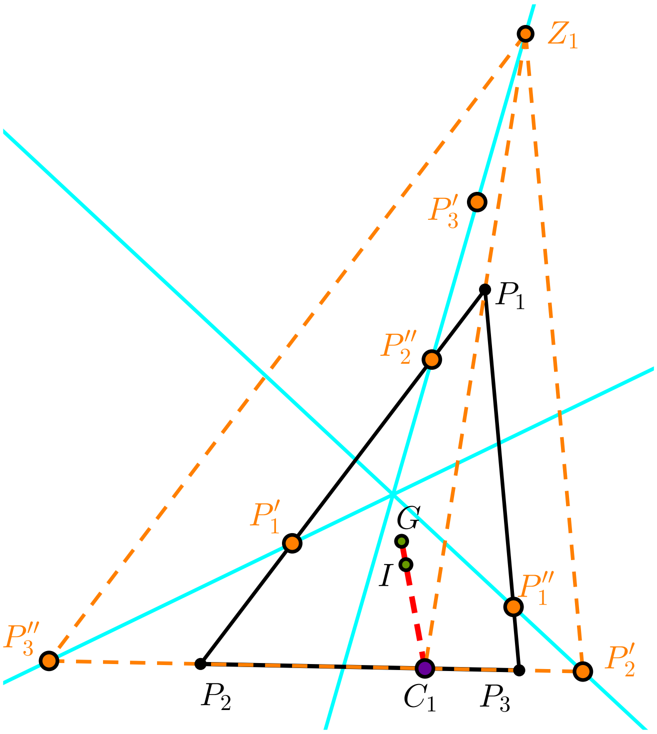


圖 21-a　$\eta(C_1, \dfrac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$ (作者自行繪製)

考慮 $\overline{P_2P_3}：\overline{P_3''P_2'}=\overline{P_2P_3}：(\overline{P_3''P_3}+\overline{P_3P_2'})=a：[c+(b-a)]=a：(b+c-a)$

$\because \triangle P_1P_2P_3 \sim \triangle Z_1P_3''P_2'$，$\therefore \overline{P_1P_2}：\overline{Z_1P_3''}=\overline{P_1P_3}：\overline{Z_1P_2'}=\overline{P_2P_3}：\overline{P_3''P_2'}=a：(b+c-a)$

又 $\because \overleftrightarrow{P_3''Z_1} \,//\, \overline{P_1P_2}$，$\therefore \overrightarrow{P_3''Z_1}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{P_2P_1}$。

$\because I$、G 分別是$\triangle P_1P_2P_3$的內心、重心，且 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 交於 C_1 點，

$\therefore$由引理九可知：$\overline{P_2C_1}：\overline{C_1P_3}=(c-a)：(b-a)$；

考慮 $\overline{C_1P_2}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}$以及 $\overline{C_1P_3''}=\overline{C_1P_2}+\overline{P_2P_3''}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}+(c-a)=\dfrac{(c-a)\cdot(b+c-a)}{b+c-2a}$

$\therefore \overline{C_1P_2}：\overline{C_1P_3''}=\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}：\dfrac{(c-a)\cdot(b+c-a)}{b+c-2a}=a：(b+c-a) \Rightarrow \overrightarrow{C_1P_3''}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_2}$；

考慮 $\overline{C_1P_3}=\dfrac{ab-a^2}{b+c-2a}$以及 $\overline{C_1P_2'}=\overline{C_1P_3}+\overline{P_3P_2'}=\dfrac{ab-a^2}{b+c-2a}+(b-a)=\dfrac{(b-a)\cdot(b+c-a)}{b+c-2a}$

$\therefore \overline{C_1P_3}：\overline{C_1P_2'}=\dfrac{ab-a^2}{b+c-2a}：\dfrac{(b-a)\cdot(b+c-a)}{b+c-2a}=a：(b+c-a) \Rightarrow \overrightarrow{C_1P_2'}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_3}$；

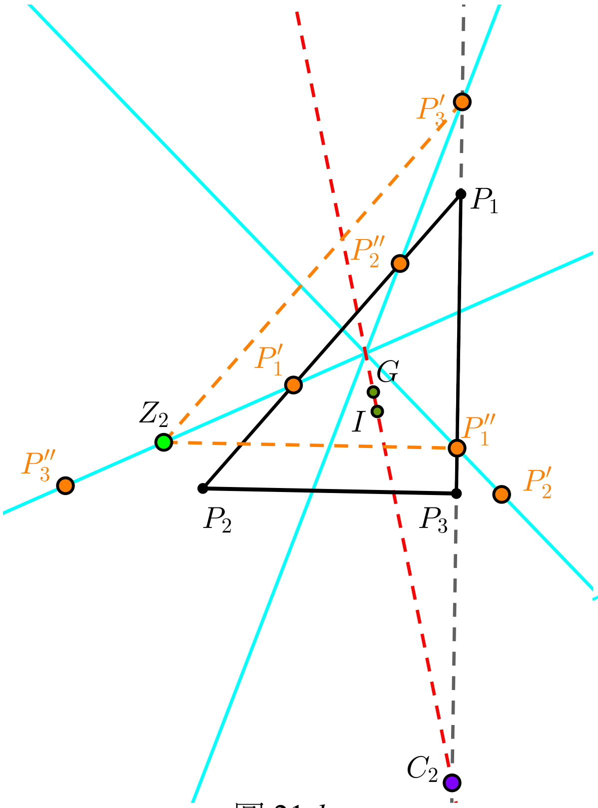
$$\because \overrightarrow{C_1Z_1}=\overrightarrow{C_1P_3''}+\overrightarrow{P_3''Z_1}=\frac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_2}+\frac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{P_2P_1}$$

$$=\frac{b+c-a}{a}\cdot(\overrightarrow{C_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_1})=\frac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_1}$$

$\therefore Z_1$、P_1、C_1 三點共線，且 $\overline{C_1P_1}：\overline{C_1Z_1}=a：(b+c-a)$

$\because \overrightarrow{C_1Z_1}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_1}$，$\overrightarrow{C_1P_3{}''}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_2}$ 且 $\overrightarrow{C_1P_2{}'}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overrightarrow{C_1P_3}$

$\therefore \eta(C_1,\dfrac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$。



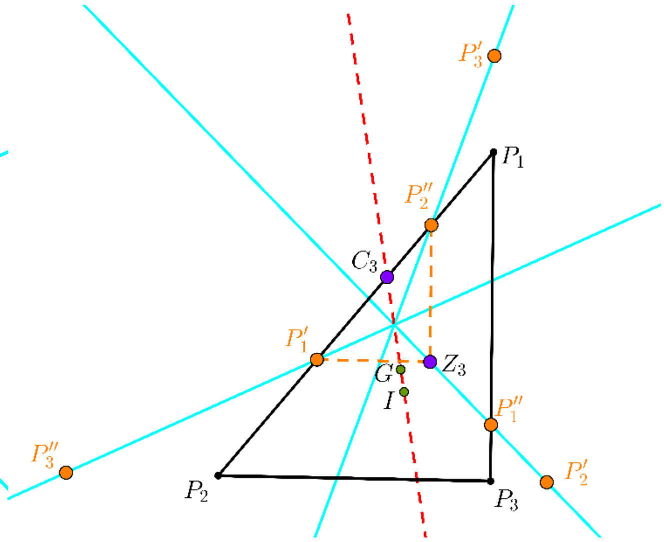


圖 21-b

$\eta(C_2,\dfrac{a+c-b}{b})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_2P_3''P_2'$

(作者自行繪製)

圖 21-c

$\eta(C_3,\dfrac{a+b-c}{c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_3P_3''P_2'$

(作者自行繪製)

(2) 如圖 21-b，由引理八可知：$\overline{Z_2P_3'}\,//\,\overline{P_1P_2}$， 且易知$\triangle P_1P_2P_3\sim\triangle P_3'Z_2P_1''$；

由引理九可知：$\overline{P_3C_2}:\overline{C_2P_1}=(b-a):(c-b)$；

同理可得 Z_2、P_2、C_2 三點共線，且 $\eta(C_2,\dfrac{a+c-b}{b})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_2P_3''P_2'$。

(3) 如圖 21-c，由引理八可知：$\overline{Z_3P_1'}\,//\,\overline{P_2P_3}$， 且易知$\triangle P_1P_2P_3\sim\triangle P_2''P_1'Z_3$；

由引理九可知：$\overline{P_1C_3}:\overline{C_3P_2}=(c-b):(c-a)$；

同理可得 Z_3、P_3、C_3 三點共線，且 $\eta(C_3,\dfrac{a+b-c}{c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_3P_3''P_2'$。

【引理十一】（延長線交點到重心與內心的距離比）

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 $\overline{P_1P_2} > \overline{P_1P_3} > \overline{P_2P_3}$，$I$、$G$ 分別是$\triangle P_1P_2P_3$ 的內心、重心。

(1) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 交於 C_1 點，則 $\overline{C_1G} : \overline{C_1I} = \dfrac{a+b+c}{3} : a$。

(2) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 C_2 點，則 $\overline{C_2G} : \overline{C_2I} = \dfrac{a+b+c}{3} : b$。

(3) 若 $\overrightarrow{GI}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交於 C_3 點，則 $\overline{C_3G} : \overline{C_3I} = \dfrac{a+b+c}{3} : c$。

【證明】

(1) 如圖 20，在$\triangle P_1P_2P_3$ 所在的平面建立直角坐標系，以 P_2 為原點，$\overrightarrow{P_2P_3}$ 為 x 軸的正向，並假設 P_1 點落在 x 軸上方。設 P_1、P_2、P_3 三點坐標分別是 $P_1(c_1, c_2)$、$P_2(0, 0)$、$P_3(a, 0)$，其中 $a>0$，$c_2>0$。則 G、I、C_1 兩點的坐標分別是：$G(\dfrac{a+c_1}{3}, \dfrac{c_2}{3})$、$I(\dfrac{ac_1+ac}{a+b+c}, \dfrac{ac_2}{a+b+c})$、$C_1(\dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}, 0)$。考慮 $\overrightarrow{C_1I} = (\dfrac{ac_1+ac}{a+b+c} - \dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}, \dfrac{ac_2}{a+b+c})$

$$=(\frac{abc_1+acc_1-2a^2c_1+abc+ac^2-2a^2c-a^2c-abc-ac^2+a^3+a^2b+a^2c}{(a+b+c)\cdot(b+c-2a)}, \frac{ac_2}{a+b+c})$$

$$=(\frac{abc_1+acc_1-2a^2c_1-2a^2c+a^3+a^2b}{(a+b+c)\cdot(b+c-2a)}, \frac{ac_2}{a+b+c})$$

$$=\frac{a}{a+b+c}\cdot(\frac{bc_1+cc_1-2ac_1-2ac+a^2+ab}{b+c-2a}, c_2)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a}\cdot\overrightarrow{CI} = (\frac{bc_1+cc_1-2ac_1-2ac+a^2+ab}{b+c-2a}, c_2)$$

考慮 $\overrightarrow{C_1G} = (\dfrac{a+c_1}{3} - \dfrac{ac-a^2}{b+c-2a}, \dfrac{c_2}{3}) = (\dfrac{ab+ac-2a^2+bc_1+cc_1-2ac_1-3ac+3a^2}{3(b+c-2a)}, \dfrac{c_2}{3})$

$$=(\frac{bc_1+cc_1-2ac_1-2ac+a^2+ab}{3(b+c-2a)}, \frac{c_2}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{bc_1+cc_1-2ac_1-2ac+a^2+ab}{b+c-2a}, c_2)$$

$$\therefore \overrightarrow{C_1G} = \frac{1}{3}(\frac{bc_1+cc_1-2ac_1-2ac+a^2+ab}{b+c-2a}, c_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{a+b+c}{a}\cdot\overrightarrow{CI} = \frac{a+b+c}{3a}\cdot\overrightarrow{C_1I}$$

$$\Rightarrow \overline{C_1G} : \overline{C_1I} = \frac{a+b+c}{3a} : 1 = \frac{a+b+c}{3} : a。$$

同理可得(2) $\overline{C_2G} : \overline{C_2I} = \dfrac{a+b+c}{3} : b$ ；(3) $\overline{C_3G} : \overline{C_3I} = \dfrac{a+b+c}{3} : c$。

【性質四】（*Xavier Dussau* 作圖線交於奈格爾點）

△$P_1P_2P_3$ 中，已知 P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''這六點是 *Xavier Dussau* 作圖輔助點。

則三直線 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$的交點恰好是△$P_1P_2P_3$ 的奈格爾點。

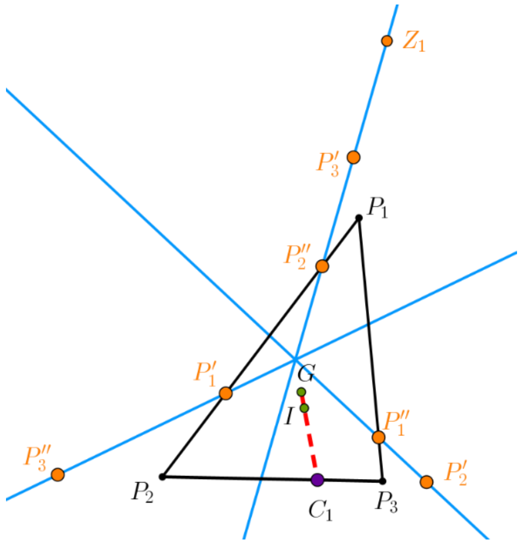


圖 22 三作圖線交點為三角形的奈格爾點 (作者自行繪製)

【證明】不失一般性，我們僅討論$\overline{P_1P_2}>\overline{P_1P_3}>\overline{P_2P_3}$的情況，即 $c>b>a$，如圖 22，。

∵P_1'、P_1''、P_2'、P_2''、P_3'、P_3''是△$P_1P_2P_3$*Xavier Dussau* 作圖輔助點。

過 P_3''作 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$ // $\overline{P_1P_2}$，設$\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$交於 Z_1 點，設 $\overrightarrow{GI}$ 與$\overline{P_2P_3}$交於 C_1 點，

則根據引理十可得：$\eta(C_1, \dfrac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$。

設$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$交於 N'點，由性質三可知 N'是△$Z_1P_3''P_2'$的內心。

∴$\eta(C_1, \dfrac{b+c-a}{a})(I)=N'$。⇒ N'、I、C_1 三點共線，$\overline{C_1N'}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overline{C_1I}$；

∵N'、I、C_1 三點共線，且 G、I、C_1 三點也共線，∴N'、G、I、C_1 四點共線；

∵ $\overline{C_1N'}=\dfrac{b+c-a}{a}\cdot\overline{C_1I}$，∴ $\overline{C_1N'}:\overline{C_1I}=(b+c-a):a$，

又由引理十一可知：$\overline{C_1G}:\overline{C_1I}=\dfrac{a+b+c}{3}:a \Rightarrow \overline{C_1N'}:\overline{C_1G}:\overline{C_1I}=(b+c-a):\dfrac{a+b+c}{3}:a$

$$\therefore \overline{N'G}:\overline{GI}=(\overline{C_1N'}-\overline{C_1G}):(\overline{C_1G}-\overline{C_1I})=[(b+c-a)-\frac{a+b+c}{3}]:(\frac{a+b+c}{3}-a)$$

$$=\frac{3b+3c-3a-a-b-c}{3}:\frac{a+b+c-3a}{3}=\frac{2b+2c-4a}{3}:\frac{b+c-2a}{3}=2:1。$$

∵N'、G、I 三點共線，且$\overline{N'G}:\overline{GI}=2:1$，

∴由性質二可知$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$的交點 N'恰好是△$P_1P_2P_3$ 的奈格爾點 N。

肆、研究結果

本研究經由幾何推理與代數分析，整合多種構圖與性質驗證，逐步揭示 *Xavier Dussau* 作圖法與奈格爾點幾何結構之關聯。主要研究結果如下：

一、補足代數方法的幾何詮釋

為補強代數坐標法難以呈現的幾何直觀性，本研究推導三條作圖線與三角形內角平分線的平行關係，發現其實每一條作圖線均可視為對應內角平分線的平移線，暗示奈格爾點與三內角構造具有高度關聯性，如引理七所述。

二、揭示作圖線構成的三角形間的位似關係

經由位似變換觀察，我們發現從內心 I、重心 G 所定義的位似中心出發，可將原三角形轉換為由 *Dussau* 作圖輔助點構成的輔助三角形，此轉換具有固定位似比，顯示多線共點的背後實際上暗藏有一組中心對應與比例守恆的幾何轉換關係，如圖 23。

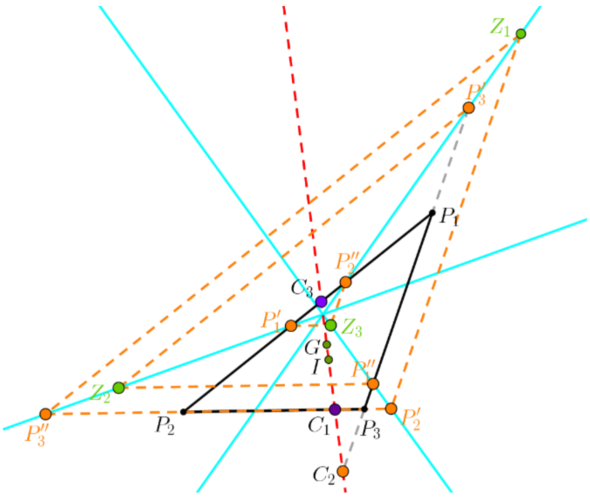


圖 23　由內心與重心導出之位似變換與輔助點對應圖 (作者自行繪製)

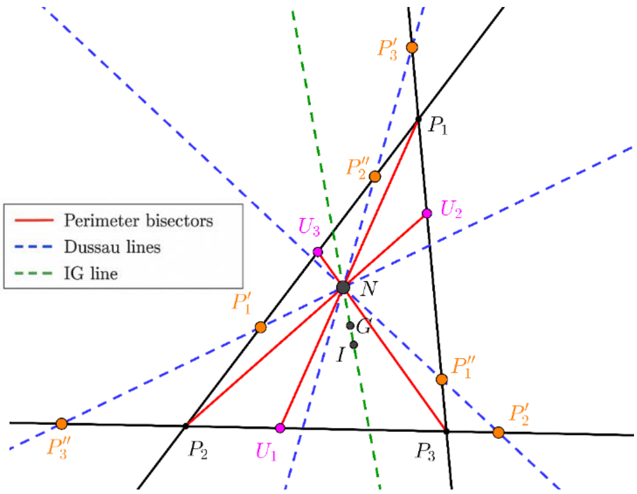


圖 24　七線共點於三角形的奈格爾點 (作者自行繪製)

三、七線共點架構完整建構

本研究整合三條 *Dussau* 作圖線、三條周長平分線（經旁切圓構造而得）與內心與重心的連線，共七條直線，最終證實這七條直線皆共點於同一個奈格爾點。此一「殊途同歸」的共點性驗證了奈格爾點的多重幾何定義。

伍、討論

本研究探討了包含三條周長平分線、三條 *Dussau* 作圖線，以及內心與重心的連線這七條線在奈格爾點的共點性，揭示奈格爾點不僅是周長分割的交點，也是三角形內部結構轉換下的對應點。*Dussau* 所構作的三條作圖線，分別與原三角形的三條內角平分線方向平行，顯示其作圖結構實為內角平分線在特定幾何轉換下的對應映射，具有深層的幾何對應關係。

本研究進一步想探討是否尚有其他具特定幾何性質之線段，亦可能交於奈格爾點，以期揭示奈格爾點作為多種幾何結構交匯核心的潛在可能性。此外，本研究亦想關注此類作圖法是否具有可遷移性，亦即是否可類比應用於其他三角形特殊點（例如內心或重心）之幾何構造。

一、是否尚有其他線段亦通過奈格爾點？新三線構造的發現

本研究在原有七線共點結構之外，進一步構造出三條與三角形中線分別平行的作圖線，經分析亦共點於奈格爾點，如性質五。

【性質五】(另一組通過奈格爾點的三條作圖線)

> 如圖 25，$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 $\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$。
>
> 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$上取一點 P_1'，使$\overline{P_1P_1'}=\dfrac{3a+b-c}{a+b+c}\overline{P_1P_2}$，在 $\overrightarrow{P_1P_3}$上取 P_1''，使$\overline{P_1P_1''}=\dfrac{3a-b+c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$；
>
> 在 $\overrightarrow{P_2P_3}$上取一點 P_2'，使$\overline{P_2P_2'}=\dfrac{-a+3b+c}{a+b+c}\overline{P_2P_3}$，在 $\overrightarrow{P_2P_1}$上取 P_2''，使$\overline{P_2P_2''}=\dfrac{a+3b-c}{a+b+c}\overline{P_1P_2}$；
>
> 在 $\overrightarrow{P_3P_1}$上取一點 P_3'，使$\overline{P_3P_3'}=\dfrac{a-b+3c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$，在 $\overrightarrow{P_3P_2}$上取 P_3''，使$\overline{P_3P_3''}=\dfrac{-a+b+3c}{a+b+c}\overline{P_2P_3}$，
>
> 則三直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點，且交點也恰好是$\triangle P_1P_2P_3$的奈格爾點。

【證明】

如圖 26，$\because \overline{P_3P_3'}=\dfrac{a-b+3c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$，$\overline{P_2P_2''}=\dfrac{a+3b-c}{a+b+c}\overline{P_1P_2}$，

$\therefore \overline{P_3P_3'}：\overline{P_1P_3}=(a-b+3c)：(a+b+c)$，$\overline{P_2P_2''}：\overline{P_1P_2}=(a+3b-c)：(a+b+c)$

$\Rightarrow \overline{P_3P_3'}：\overline{P_1P_3'}=(a-b+3c)：(2c-2b)$，$\overline{P_1P_2''}：\overline{P_2P_2''}=(2c-2b)：(a+3b-c)$

設 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 與 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 交於 D_1 點，則由孟氏定理知：$\dfrac{\overline{P_1P_2''}}{\overline{P_2''P_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2D_1}}{\overline{D_1P_3}}\cdot\dfrac{\overline{P_3P_3'}}{\overline{P_3'P_1}}=1$

$\Rightarrow\dfrac{2c-2b}{a+3b-c}\cdot\dfrac{\overline{P_2D_1}}{\overline{D_1P_3}}\cdot\dfrac{a-b+3c}{2c-2b}=1 \quad \Rightarrow\dfrac{\overline{P_2D_1}}{\overline{D_1P_3}}=\dfrac{a+3b-c}{a-b+3c}$，

$\Rightarrow\overline{P_2D_1}=\dfrac{a+3b-c}{2a+2b+2c}\overline{P_2P_3}=\dfrac{a(a+3b-c)}{2a+2b+2c}$ 且 $\overline{D_1P_3}=\dfrac{a-b+3c}{2a+2b+2c}\overline{P_2P_3}=\dfrac{a(a-b+3c)}{2a+2b+2c}$；

作 $\overline{P_2P_3}$ 的中點 M_1，連接 $\overline{P_1M_1}$，則 $\overline{P_1M_1}$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的一條中線。

$\therefore\overline{D_1M_1}=\overline{D_1P_3}-\overline{M_1P_3}=\dfrac{a(a-b+3c)}{2a+2b+2c}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a(2c-2b)}{2a+2b+2c}$，

考慮 $\overline{P_2D_1}:\overline{D_1M_1}=\dfrac{a(a-b+3c)}{2a+2b+2c}:\dfrac{a(2c-2b)}{2a+2b+2c}=(a-b+3c):(2c-2b)$

以及 $\overline{P_2P_2''}:\overline{P_1P_2''}=(a+3b-c):(2c-2b)$，

在 $\triangle P_2M_1P_1$ 中，$\because\overline{P_2D_1}:\overline{D_1M_1}=\overline{P_2P_2''}:\overline{P_1P_2''}$，$\therefore\overleftrightarrow{P_3'P_2''}\,//\,\overline{P_1M_1}$。

同理作 $\overline{P_1P_3}$ 的中點 M_2，與 $\overline{P_1P_2}$ 的中點 M_3，可得 $\overleftrightarrow{P_1'P_3''}\,//\,\overline{P_2M_2}$，且 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}\,//\,\overline{P_3M_3}$。

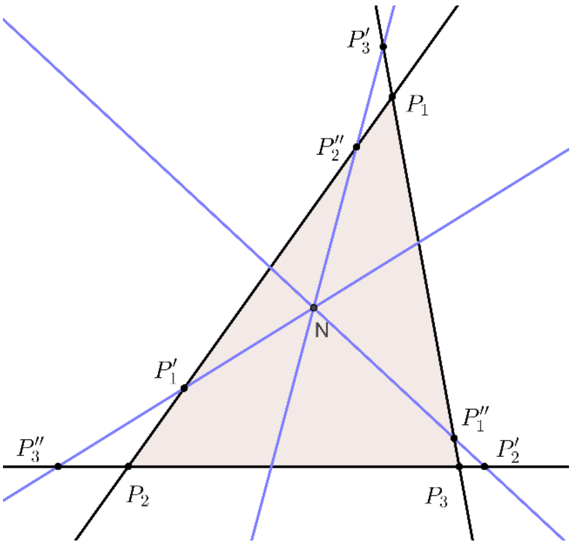


圖 25 發現額外三條與奈格爾點共點的幾何構造線 (作者自行繪製)

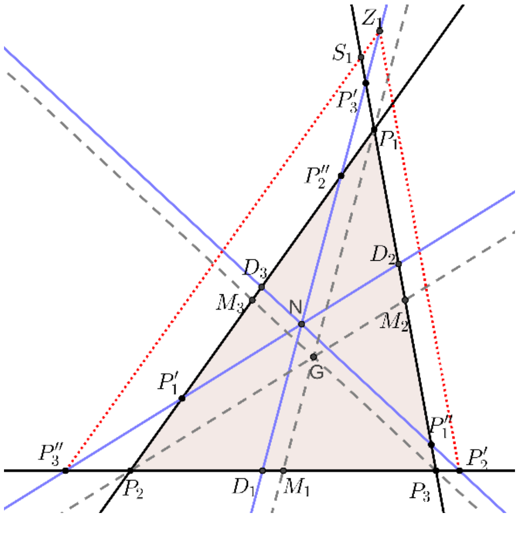


圖 26 新三線構造與三角形中線的平行對應關係 (作者自行繪製)

過 P_3'' 作 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\,//\,\overline{P_1P_2}$ 交 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 於 Z_1 點，連接 $\overline{Z_1P_2'}$，設 $\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$ 與 $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 交於 S_1。

在 $\triangle P_3S_1P_3''$ 中，$\because\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\,//\,\overline{P_1P_2}$，

$\therefore\overline{P_3P_2}:\overline{P_2P_3''}=\overline{P_3P_1}:\overline{P_1S_1}\ \Rightarrow a:\dfrac{a(2c-2a)}{a+b+c}=b:\overline{P_1S_1}\ \Rightarrow\ \overline{P_1S_1}=\dfrac{b(2c-2a)}{a+b+c}$

同時在 $\triangle P_3S_1P_3''$ 中，$\because\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\,//\,\overline{P_1P_2}$，$\therefore\overline{P_1P_2}:\overline{P_3''S_1}=\overline{P_3P_2}:\overline{P_3P_3''}$

$\Rightarrow\quad c：\overline{P_3''S_1}=a：\dfrac{a(-a+b+3c)}{a+b+c}\quad\Rightarrow\ \overline{P_3''S_1}=\dfrac{c(-a+b+3c)}{a+b+c}$

考慮$\overline{P_1P_3'}=\dfrac{b(2c-2b)}{a+b+c}$，則$\overline{P_3'S_1}=\overline{P_1S_1}-\overline{P_1P_3'}=\dfrac{b(2c-2a)}{a+b+c}-\dfrac{b(2c-2b)}{a+b+c}=\dfrac{b(2b-2a)}{a+b+c}$；

$\because\overleftrightarrow{P_3''Z_1}\parallel\overline{P_1P_2}$，$\therefore\triangle P_3'Z_1S_1\sim\triangle P_3'P_2''P_1\ \Rightarrow\ \overline{S_1Z_1}：\overline{P_3'S_1}=\overline{P_1P_2''}：\overline{P_3'P_1}$

$\therefore\overline{S_1Z_1}：\dfrac{b(2b-2a)}{a+b+c}=\dfrac{c(2c-2b)}{a+b+c}：\dfrac{b(2c-2b)}{a+b+c}\ \Rightarrow\ \overline{S_1Z_1}=\dfrac{c(2b-2a)}{a+b+c}$；

考慮$\overline{P_3''S_1}：\overline{S_1Z_1}=\dfrac{c(-a+b+3c)}{a+b+c}：\dfrac{c(2b-2a)}{a+b+c}=(-a+b+3c)：(2b-2a)$

以及$\overline{P_3P_3''}：\overline{P_3P_2''}=\dfrac{a(-a+b+3c)}{a+b+c}：\dfrac{a(2b-2a)}{a+b+c}=(-a+b+3c)：(2b-2a)$，

在$\triangle P_3''P_2'Z_1$中，$\because\overline{P_3''S_1}：\overline{S_1Z_1}=\overline{P_3P_3''}：\overline{P_3P_2''}$，$\therefore\overline{Z_1P_2'}\parallel\overline{S_1P_3}$。

$\Rightarrow\triangle P_1P_2P_3\sim\triangle Z_1P_3''P_2'$（$AA$ 相似）

又$\because\overline{P_3''D_1}=\overline{P_3''P_2}+\overline{P_2D_1}=\dfrac{a(2c-2a)}{a+b+c}+\dfrac{a(a+3b-c)}{2a+2b+2c}=\dfrac{a(-3a+3b+3c)}{2a+2b+2c}$，

且$\overline{D_1P_2'}=\overline{D_1P_3}+\overline{P_3P_2'}=\dfrac{a(a-b+3c)}{2a+2b+2c}+\dfrac{a(2b-2a)}{a+b+c}=\dfrac{a(-3a+3b+3c)}{2a+2b+2c}$，

$\therefore\overline{P_3''D_1}=\overline{D_1P_2'}$，即$D_1$是$\overline{P_3''P_2'}$的中點，$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$是$\triangle Z_1P_3''P_2'$的中線，

同理$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$和$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$都是$\triangle Z_1P_3''P_2'$的中線，因此，三直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點。

設$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點於$N$，則$N$是$\triangle Z_1P_3''P_2'$的重心。

若$\overrightarrow{GI}$與$\overline{P_2P_3}$交於C_1點，仿引理十的證法，則$\eta(C_1,\ \dfrac{-3a+3b+3c}{a+b+c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$。

設$\overline{P_1M_1}$、$\overline{P_2M_2}$、$\overline{P_3M_3}$交於G點，則 $\eta(C_1,\ \dfrac{-3a+3b+3c}{a+b+c})(G)=N$

$\Rightarrow N$、G、C_1三點共線，$\overline{C_1N}=\dfrac{-3a+3b+3c}{a+b+c}\cdot\overline{C_1G}$；

$\because N$、G、C_1三點共線，且G、I、C_1三點也共線，$\therefore N$、G、I、C_1四點共線；

$\because\overline{C_1N}=\dfrac{-3a+3b+3c}{a+b+c}\cdot\overline{C_1G}$，$\therefore\overline{C_1G}：\overline{C_1I}=\dfrac{a+b+c}{3}：a$，

$\therefore\overline{NG}：\overline{GI}=(\overline{C_1N}-\overline{C_1G})：(\overline{C_1G}-\overline{C_1I})=(-4a+2b+2c)：(-2a+b+c)=2：1$。

$\because N$、G、I三點共線，且$\overline{NG}：\overline{GI}=2：1$，

$\therefore$由性質二可知$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$的交點$N$恰好是$\triangle P_1P_2P_3$的奈格爾點。

二、此作圖法能否推廣至內心、重心

本研究進一步嘗試將類似的構圖邏輯推廣至三角形的內心、重心。

（一）作圖法在三角形內心的應用可能

我們構造出三條特定的輔助線段，分別與三角形的三條周長平分線方向平行，並證明這三條線交於三角形的內心 I。（證明過程在研究日誌上）

【性質六】（三條與周長平分線平行的作圖線亦通過內心）

如圖 27，$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 $\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$。

在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上取一點 P_1'，使 $\overline{P_1P_1'}=\dfrac{b}{b+a-c}\overline{P_1P_2}$，在 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 上取 P_1''，使 $\overline{P_1P_1''}=\dfrac{c}{c+a-b}\overline{P_1P_3}$；

在 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 上取一點 P_2'，使 $\overline{P_2P_2'}=\dfrac{c}{c+b-a}\overline{P_2P_3}$，在 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 上取 P_2''，使 $\overline{P_2P_2''}=\dfrac{a}{a+b-c}\overline{P_1P_2}$；

在 $\overrightarrow{P_3P_1}$ 上取一點 P_3'，使 $\overline{P_3P_3'}=\dfrac{a}{a+c-b}\overline{P_1P_3}$，在 $\overrightarrow{P_3P_2}$ 上取 P_3''，使 $\overline{P_3P_3''}=\dfrac{b}{b+c-a}\overline{P_2P_3}$，

則三直線 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 共點，且交點恰好是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的內心。

【說明】這樣的構造呈現出一種新的對應關係：若 *Dussau* 作圖線平行於三角形內角平分線，並交於奈格爾點 N，那麼類似地，另三條與周長平分線方向一致的輔助線，也能共點於內心 I。此結果不僅拓展了 *Dussau* 類型作圖法的應用視野，也進一步揭示內心與周長平分線之間隱含的幾何對稱性與方向一致性。

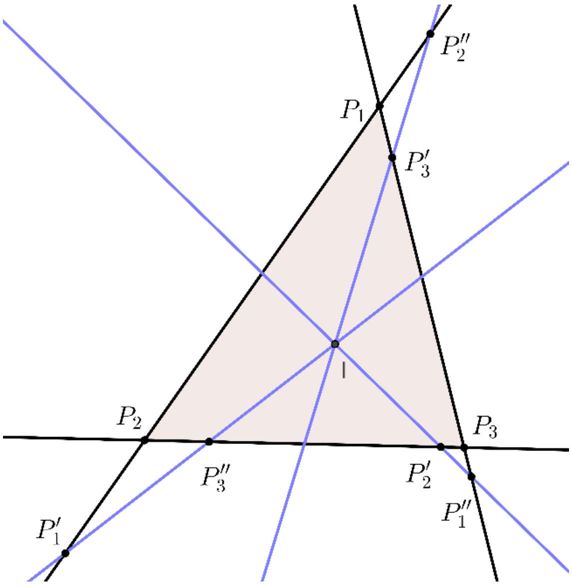


圖 27 內心作圖的新視角(作者自行繪製)

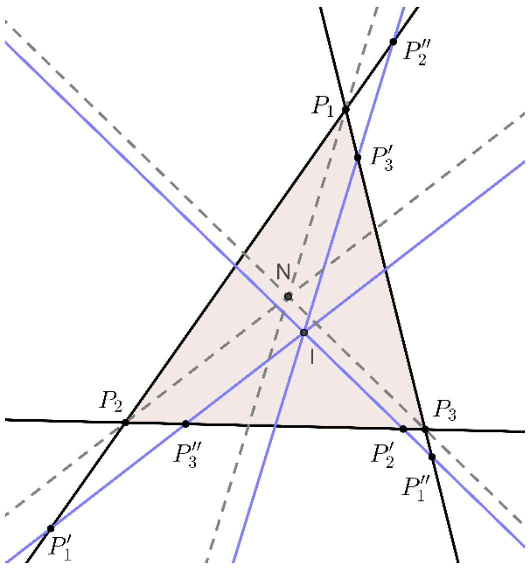


圖 28　周長平分線與內心的對應結構：三條平行作圖線的共點性 (作者自行繪製)

（二）作圖法在三角形重心的應用可能

在本研究進一步延伸作圖結構時，我們發現：若構造三條分別與原三角形三條內角平分線方向平行的作圖線，則這三條線將交於三角形的重心 G。（證明過程在研究日誌上）

【性質七】（從內角平分線導出之重心共點結構）

如圖 29，$\triangle P_1P_2P_3$ 中，已知 $\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$。

在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上取一點 P_1'，使 $\overline{P_1P_1'}=\dfrac{a+2c}{3c}\overline{P_1P_2}$，在 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 上取一點 P_1''，使 $\overline{P_1P_1''}=\dfrac{a+2b}{3b}\overline{P_1P_3}$；

在 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 上取一點 P_2'，使 $\overline{P_2P_2'}=\dfrac{2a+b}{3a}\overline{P_2P_3}$，在 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 上取一點 P_2''，使 $\overline{P_2P_2''}=\dfrac{b+2c}{3c}\overline{P_1P_2}$；

在 $\overrightarrow{P_3P_1}$ 上取一點 P_3'，使 $\overline{P_3P_3'}=\dfrac{2b+c}{3b}\overline{P_1P_3}$，在 $\overrightarrow{P_3P_2}$ 上取一點 P_3''，使 $\overline{P_3P_3''}=\dfrac{2a+c}{3a}\overline{P_2P_3}$，

則三直線 $\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$ 共點，且交點恰好是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心。

【說明】

這一結果顯示，內角平分線不僅與奈格爾點的結構息息相關，也與重心的定位具有幾何對應關係。從已知的結果可知，奈格爾點是內角平分線平行移動後的三條 *Dussau* 作圖線的共點；而在本構造中，重心則成為三條與原內角平分線方向一致的新作圖線的共點，這樣的對應性進一步凸顯了重心與內心、奈格爾點之間的幾何結構聯繫。

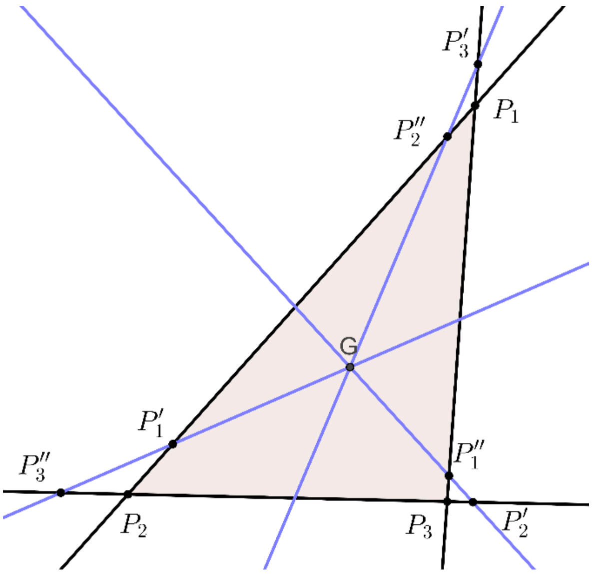


圖 29 發現通過重心的三條作圖線
(作者自行繪製)

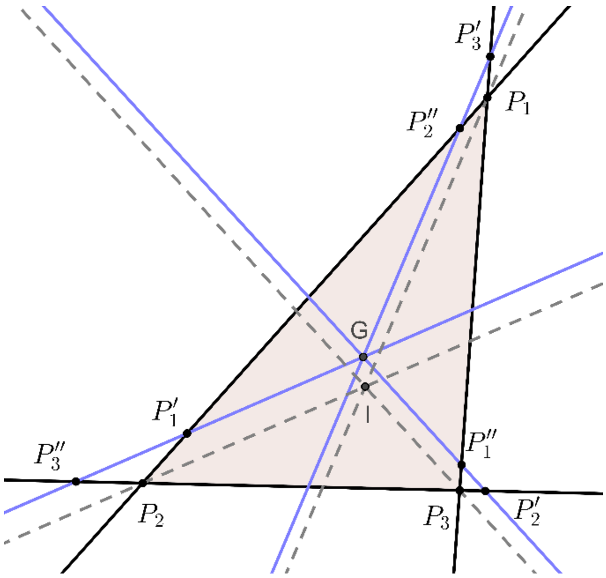


圖 30　三條與內角平分線平行的作圖線
亦共交於重心 (作者自行繪製)

陸、結論

本研究從 *Xavier Dussau* 提出的奈格爾點作圖法出發，深入探討其三條作圖線共點的幾何意義，並在原有代數證明基礎上，以幾何視角加以補充與詮釋。研究主要結論如下：

一、奈格爾點的共點結構再驗證與新視角

Xavier Dussau 所提出的三條作圖線雖由代數方法證明共點，但透過本研究進一步探討可知，這三條線實則分別平行於三角形的三條內角平分線，因而可視為內心相關結構的對應映射。*Xavier Dussau* 所提出的作圖輔助點與原三角形之間可建立一組具比例性的位似變換，並能導出一系列相似三角形與平行線關係，使得三條作圖線共同交於奈格爾點。

二、*Dussau* 作圖法之拓展與內心、重心的共點性揭示

本研究不僅揭示了 *Dussau* 作圖法的幾何本質，也成功地將 *Dussau* 作圖法的概念延伸至內心和重心，開啟了進一步探討類似構圖方式是否能遷移應用至其他三角形特殊點（如內心、重心）之可能性，未來可望拓展為一系列具遷移性的幾何研究主題。

柒、參考文獻資料

1. Nagel, C. H. (1836). Beiträge zur Theorie der Kreisbogendreiecke und der Dreiecke überhaupt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 16, 37-102.
2. Hoehn, L. (2007). A new characterization of the Nagel point. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *19*(1), 45-48.
3. Dussau, X. (2020). Elementary construction of the Nagel point. Elementary construction of the Nagel point

【評語】030405

此作品從 Xavier Dussau 提出的奈格爾點作圖法出發，探討三條周長平分線、三條 Dussau 作圖線，以及內心與重心的連線這七條線在奈格爾點的共點性。研究揭示奈格爾點不僅為周長分割的交點，也扮演三角形內部結構轉換下的重要對應點。作者進一步探討三條 Dussau 作圖線共點的幾何意義，並在原有代數證明基礎上，以幾何方法補充詮釋。研究中發現，這三條作圖線分別與三內角平分線平行，可視為內心在位似變換下的幾何映射。

此作品值得讚許的亮點與建議：

(1) 成功證明了三條周長平分線、內心與重心的連線以及特定作圖線段會共點於奈格爾點，加深了對奈格爾點作為幾何交會核心的理解。

(2) 進一步構造出三條與三角形中線平行的作圖線，並經分析亦共點於奈格爾點，這是一個重要的發現，也拓展了奈格爾點的性質。

(3) 靈活運用了西瓦定理的正逆定理、內心與旁切圓切點的幾何關係等純幾何方法，並輔以解析幾何的推導，方法運用得當，提升了證明的嚴謹性。

(4) 引理九描述了重心至內心方向與最短邊交點的分比關係，若能呈現完整證明內容於報告中，相信會增添此研究的完整性。

(5) 作品提到「是否還有其他具特定幾何性質的線段也會交於奈格爾點」，建議在前言或研究目的中更清楚說明這些性質的範圍與定義，以提升研究問題的明確性與理論聚焦度。

總體而言， 本作品深入研究三角形中奈格爾點相關的七線共點現象，並發現了額外的作圖線組亦匯聚於奈格爾點。研究透過西瓦定理、三角形幾何性質及解析幾何等多種方法進行驗證，展現了紮實的幾何基礎及結合理論推導與圖形輔助說明，脈絡清晰、內容完整，是一件相當優秀的作品。

作品海報

殊途同歸─不可思議的七線共點

壹、前言

研究動機

$\triangle P_1P_2P_3$ 中，若$\overline{P_2P_3}=a$，$\overline{P_1P_3}=b$，$\overline{P_1P_2}=c$，
Xavier Dussau 延長三角形$P_1P_2P_3$的三邊，
並在$\overrightarrow{P_1P_2}$上取一點P_1'，使$\overline{P_1P_1'}=\frac{a}{c}\overline{P_1P_2}$，
在$\overrightarrow{P_1P_3}$上取一點P_1''，使$\overline{P_1P_1''}=\frac{a}{b}\overline{P_1P_3}$；
在$\overrightarrow{P_2P_3}$上取一點P_2'，使$\overline{P_2P_2'}=\frac{b}{a}\overline{P_2P_3}$，
在$\overrightarrow{P_2P_1}$上取一點P_2''，使$\overline{P_2P_2''}=\frac{b}{c}\overline{P_1P_2}$；
在$\overrightarrow{P_3P_1}$上取一點P_3'，使$\overline{P_3P_3'}=\frac{c}{b}\overline{P_1P_3}$，
在$\overrightarrow{P_3P_2}$上取一點P_3''，使$\overline{P_3P_3''}=\frac{c}{a}\overline{P_2P_3}$；
則$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$是共點的，
而其交點即為三角形的奈格爾點。

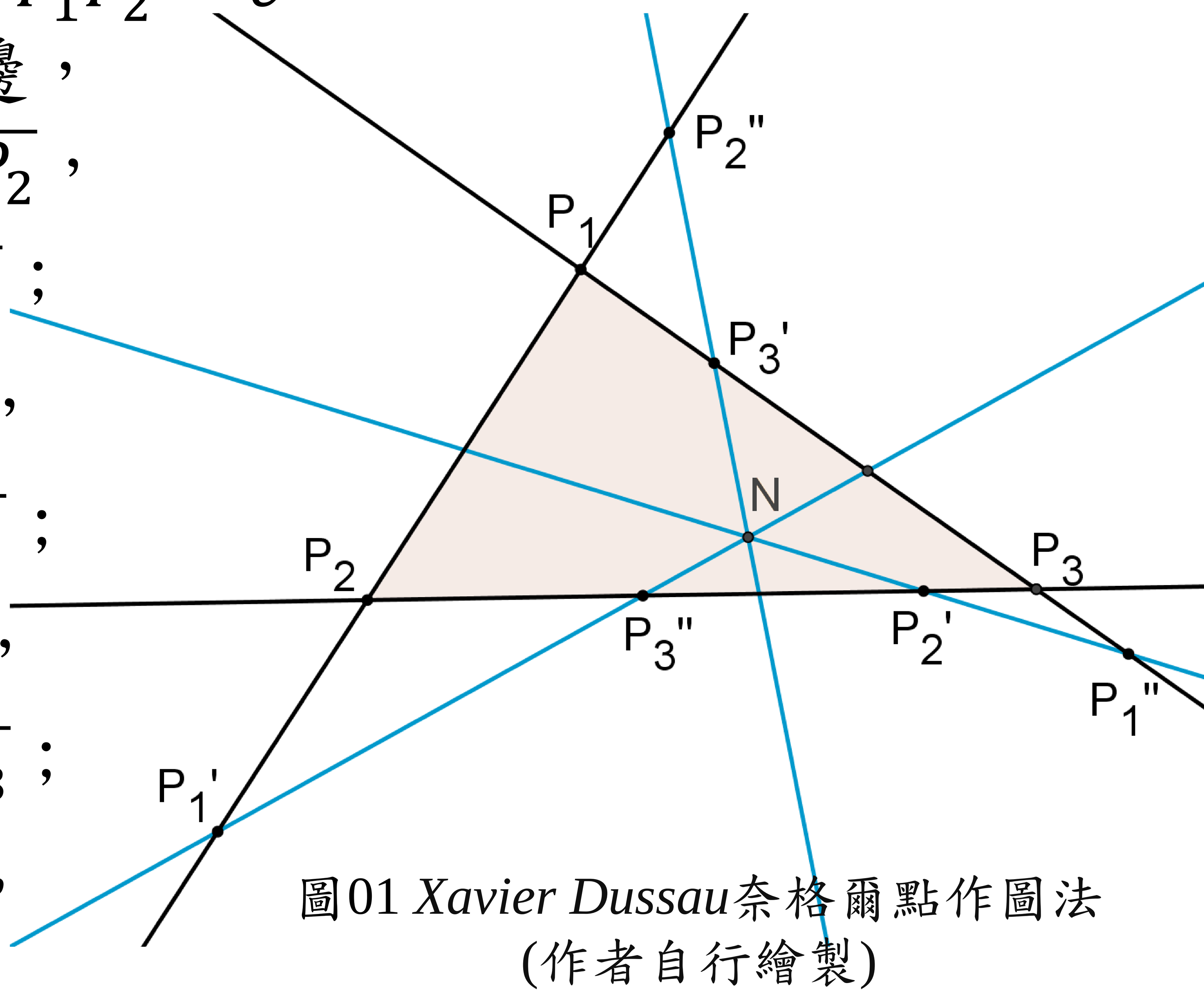


圖01 *Xavier Dussau*奈格爾點作圖法
(作者自行繪製)

貳、研究目的

儘管此作圖法的正確性已獲得證明，但我對其幾何意義深感好奇。這種看似獨立的作圖方式，為何能精準定位出與三角形周長平分性質相關的奈格爾點？是否能從其他幾何角度，例如相似形、比例關係或向量方法，對此作圖法提出更直觀或更深層的解釋？這激發了我深入探討此作圖法內在聯繫的興趣，期望能從不同的視角理解奈格爾點的幾何本質。

本研究旨在深入探討*Xavier Dussau*提出的三角形奈格爾點作圖法的幾何意義。透過幾何分析、比例推導或向量方法等途徑，嘗試從不同角度探索其可能蘊含的其他幾何性質。根據研究目的，本研究的研究問題是探討連接*Xavier Dussau*作圖輔助點所形成的直線，其幾何特性是什麼？

參、預備知識

一、西瓦定理的逆定理

已知$\triangle P_1P_2P_3$，Q_1在$\overleftrightarrow{P_2P_3}$上、$Q_2$在$\overleftrightarrow{P_3P_1}$上、$Q_3$在$\overleftrightarrow{P_1P_2}$上。若 $\frac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}}\cdot\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}}\cdot\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}}=1$，
則$\overleftrightarrow{P_1Q_1}$、$\overleftrightarrow{P_2Q_2}$、$\overleftrightarrow{P_3Q_3}$交於一點。

二、三角形的三條周長平分線共點

在$\triangle P_1P_2P_3$中，已知圓J_1、圓J_2、圓J_3分別是三角形$P_1P_2P_3$的旁切圓，其中圓J_1在$\angle P_2P_1P_3$內，圓J_2在$\angle P_3P_2P_1$內，圓J_3在$\angle P_1P_3P_2$內；若圓J_1與$\overline{P_2P_3}$相切於點U_1，圓J_2與$\overline{P_1P_3}$相切於點U_2，圓J_3與$\overline{P_1P_2}$相切於點U_3，則$\overleftrightarrow{P_1U_1}$、$\overleftrightarrow{P_2U_2}$、$\overleftrightarrow{P_3U_3}$共點，此點稱為$\triangle P_1P_2P_3$的奈格爾點。

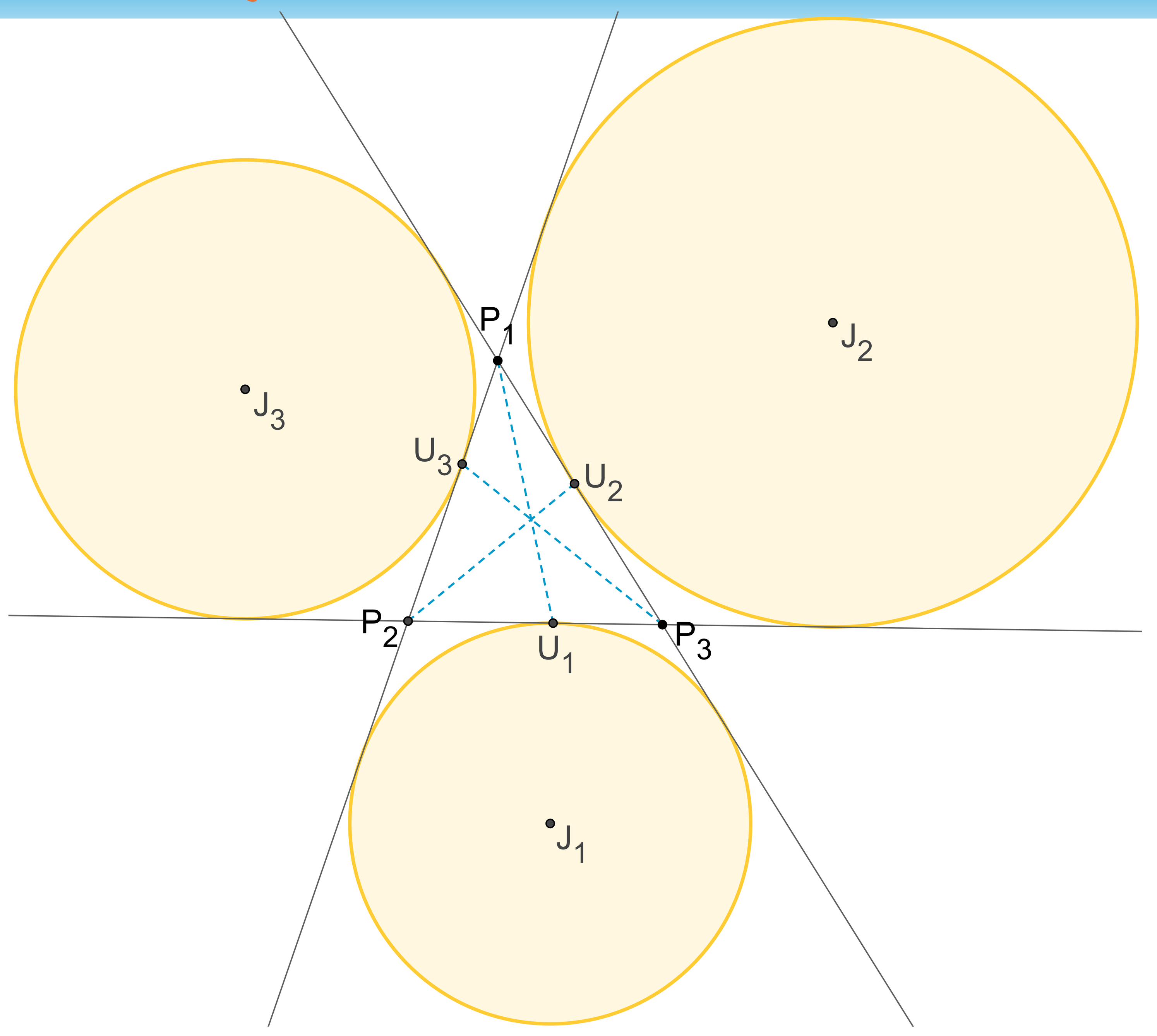


圖02 三旁切圓的切點與頂點所構成之周長平分線共點(作者自行繪製)

三、內心、重心與奈格爾點的共線性與分比

$\triangle P_1P_2P_3$中，若I、G、N分別$\triangle P_1P_2P_3$的內心、重心、奈格爾點，則I、G、N三點共線，且$\overline{IG}:\overline{GN}=1:2$。

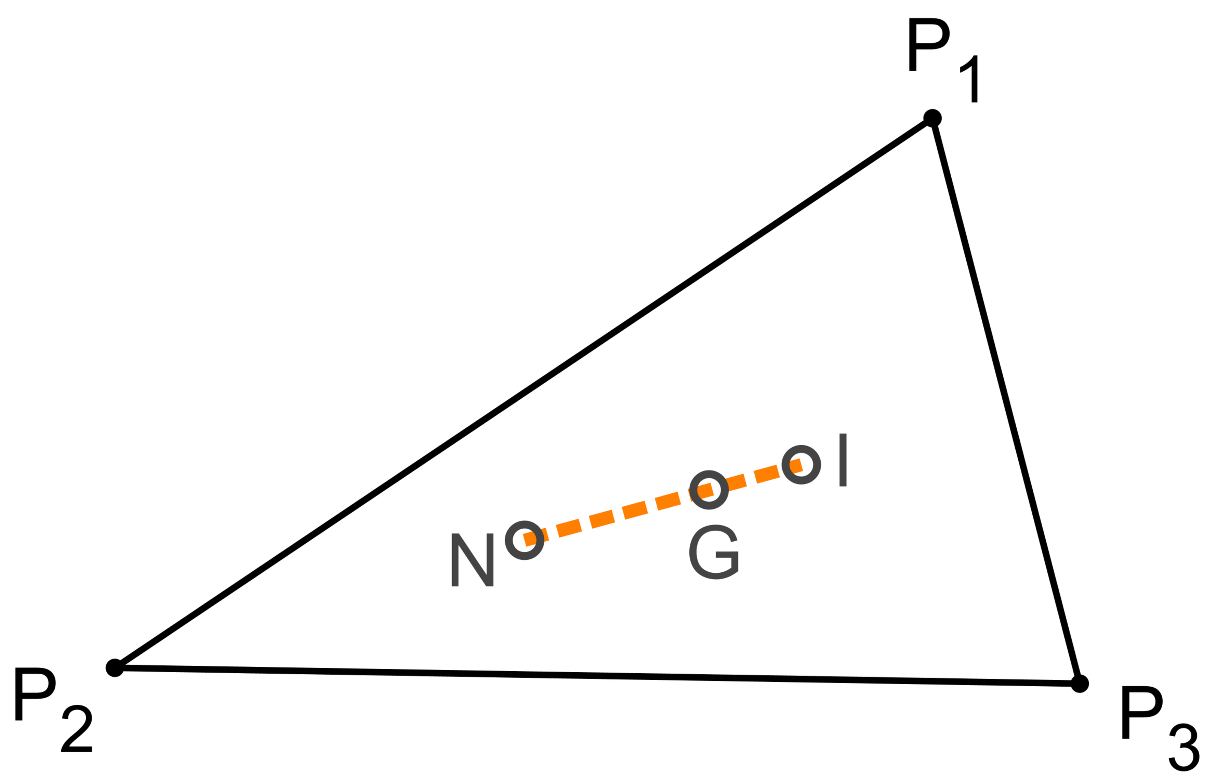


圖03 內心、重心與奈格爾點的共線性
(作者自行繪製)

肆、研究結果

一、*Xavier Dussau*三條作圖線分別平行於內角平分線

若I是$\triangle P_1P_2P_3$的內心，則$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}//\overrightarrow{P_1I}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}//\overrightarrow{P_2I}$、$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}//\overrightarrow{P_3I}$。

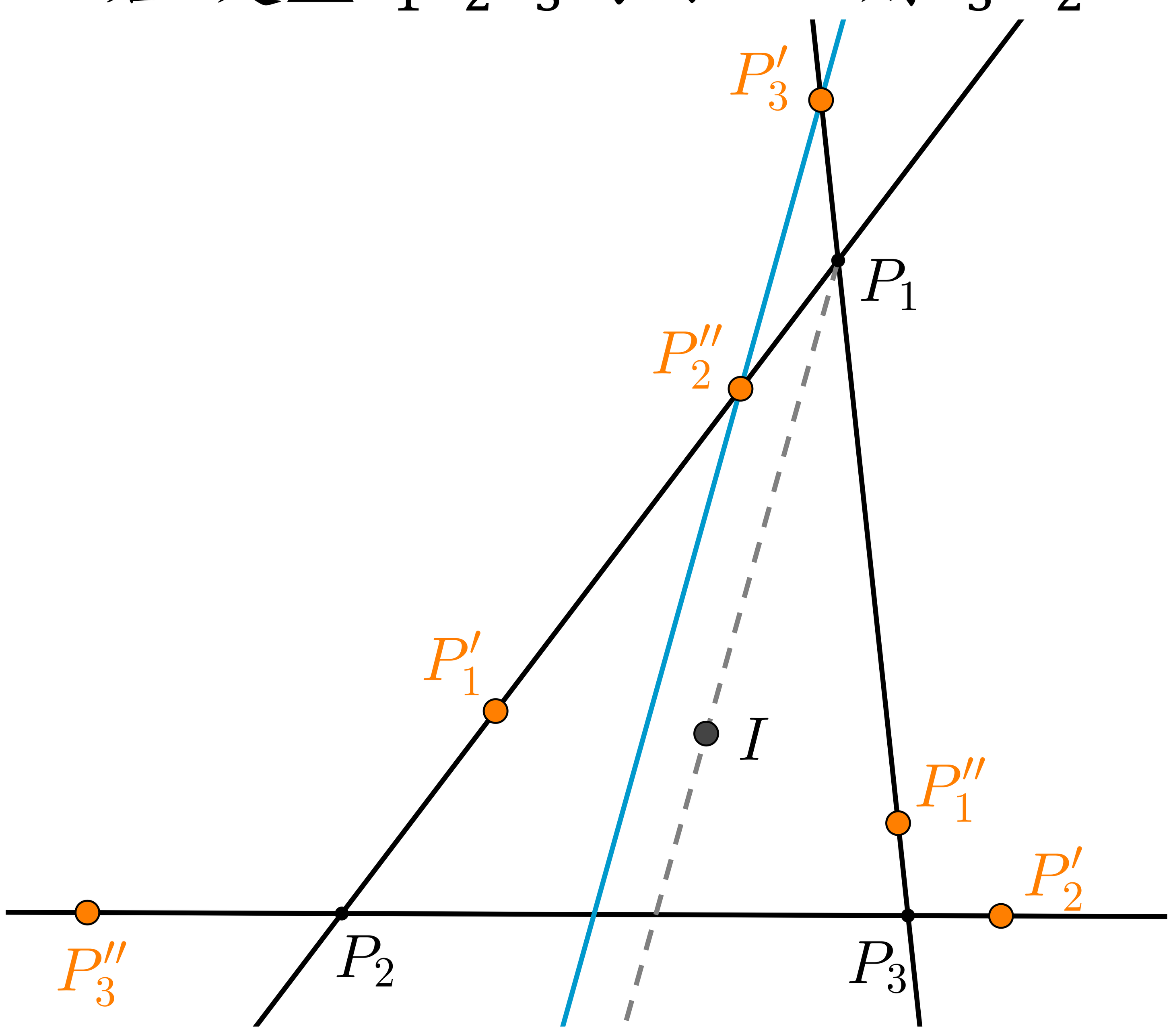


圖04 $\overleftrightarrow{P_3'P_2''}//\overrightarrow{P_1I}$ (作者自行繪製)

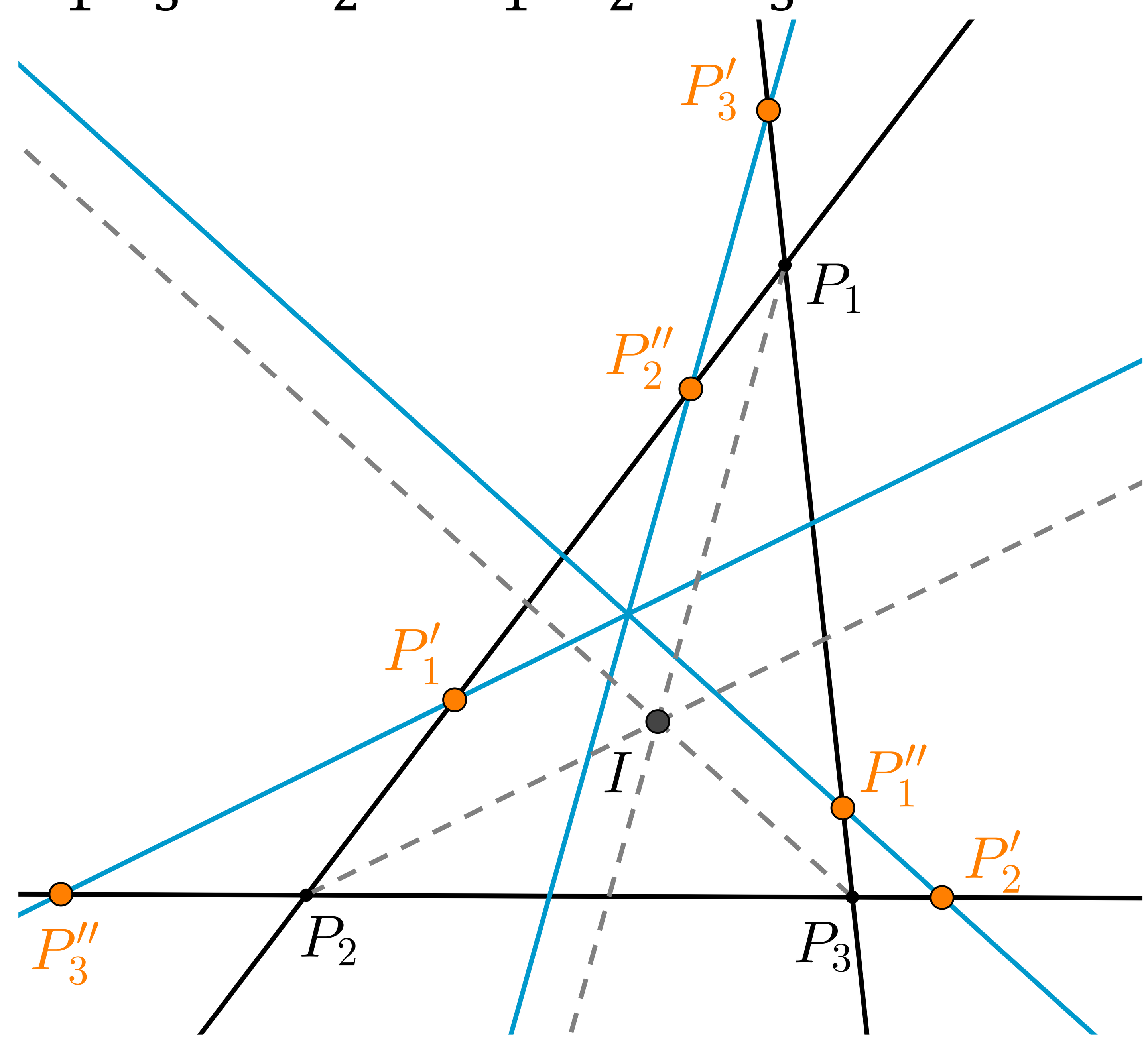


圖05 三條作圖線與三內角平分線方向的平行關係(作者自行繪製)

二、平行構造引理

（一）若過P_3''作$\overleftrightarrow{P_3''Z_1}//\overline{P_1P_2}$，$\overleftrightarrow{P_3''Z_1}$與$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$交於$Z_1$點，則$\overline{Z_1P_2'}//\overline{P_1P_3}$。

（二）若過P_1''作$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}//\overline{P_2P_3}$，$\overleftrightarrow{P_1''Z_2}$與$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$交於$Z_2$點，則$\overline{Z_2P_3'}//\overline{P_1P_2}$。

（三）若過P_2''作$\overleftrightarrow{P_2''Z_3}//\overline{P_1P_3}$，$\overleftrightarrow{P_2''Z_3}$與$\overleftrightarrow{P_2'P_1''}$交於$Z_3$點，則$\overline{Z_3P_1'}//\overline{P_2P_3}$。

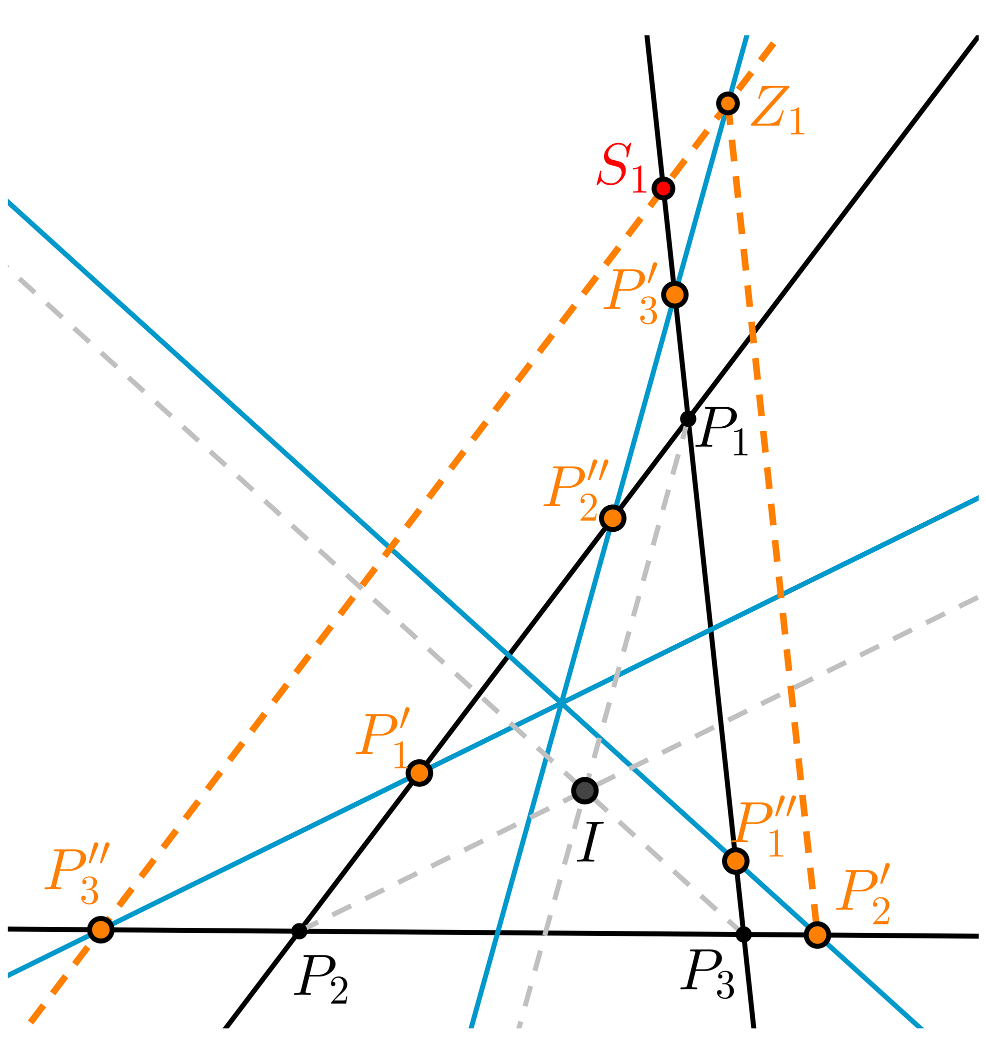


圖06 $\eta(C_1,\frac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$ (作者自行繪製)

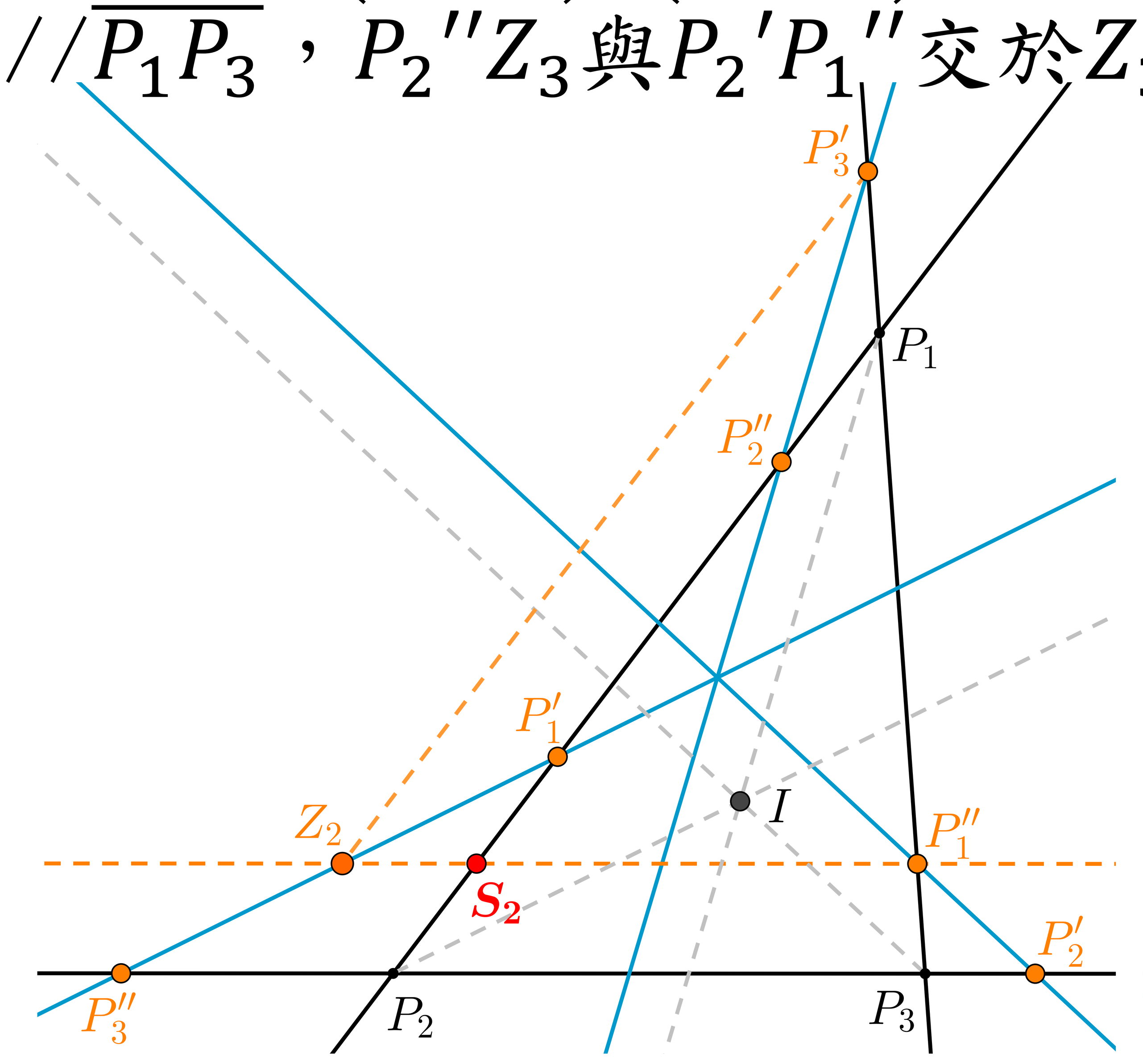


圖07 $\eta(C_2,\frac{a+c-b}{b})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_2P_3''P_2'$ (作者自行繪製)

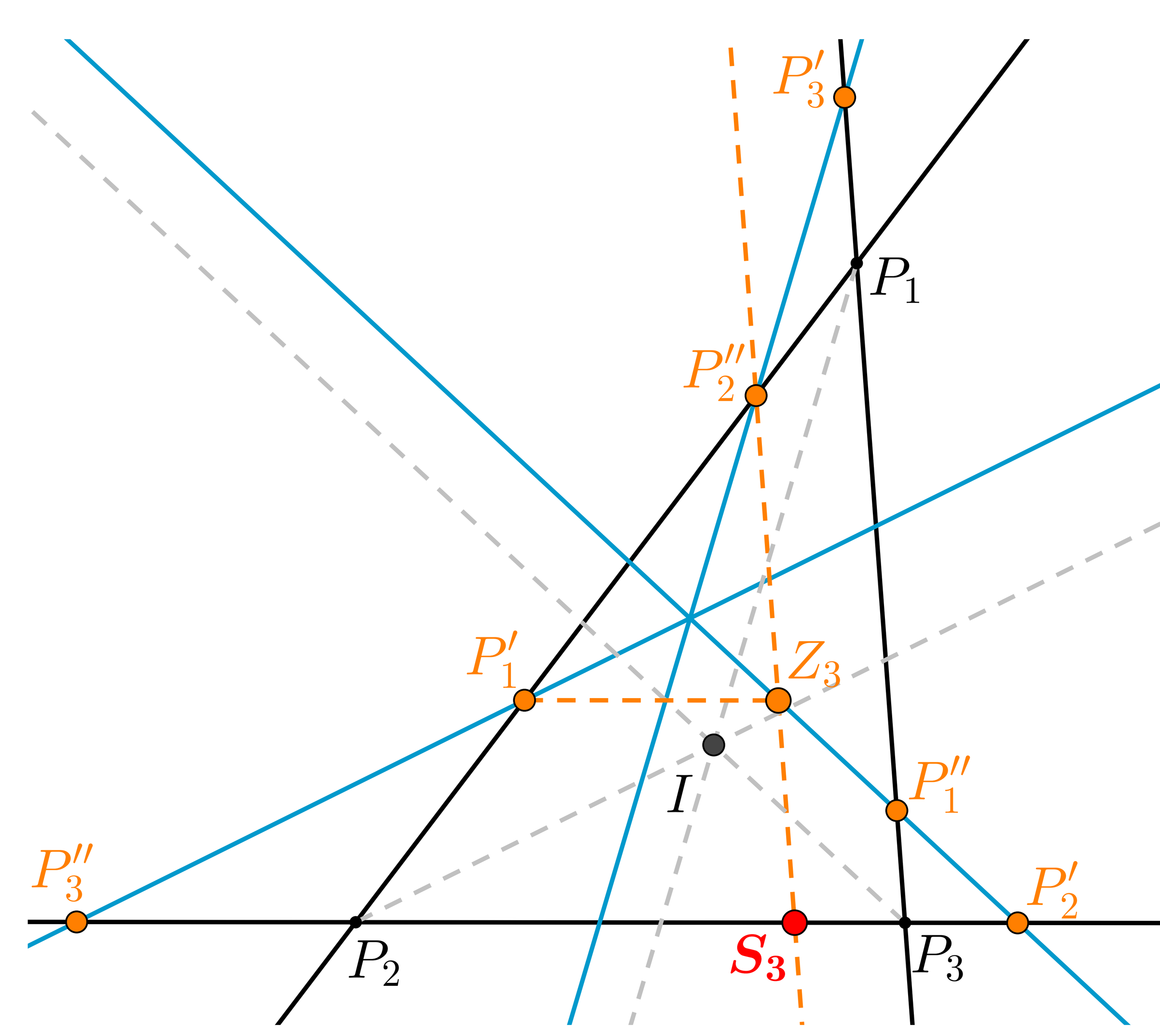


圖08 $\eta(C_3,\frac{a+b-c}{c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_3P_3''P_2'$(作者自行繪製)

三、由內心與重心導出之位似變換與輔助三角形關係

已知O是平面上一個定點，η是平面上的變換。若對於任一對應點P、P'，都有$\overrightarrow{OP'}=k\cdot\overrightarrow{OP'}$，其中$k\neq 0$，則稱$\eta$是位似變換，記作$\eta(O,\ k)$，$O$稱為位似中心，$k$稱為位似比。

（一）$\eta(C_1,\dfrac{b+c-a}{a})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_1P_3''P_2'$

（二）$\eta(C_2,\dfrac{a+c-b}{b})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_2P_3''P_2'$

（三）$\eta(C_3,\dfrac{a+b-c}{c})(\triangle P_1P_2P_3)=\triangle Z_3P_3''P_2'$

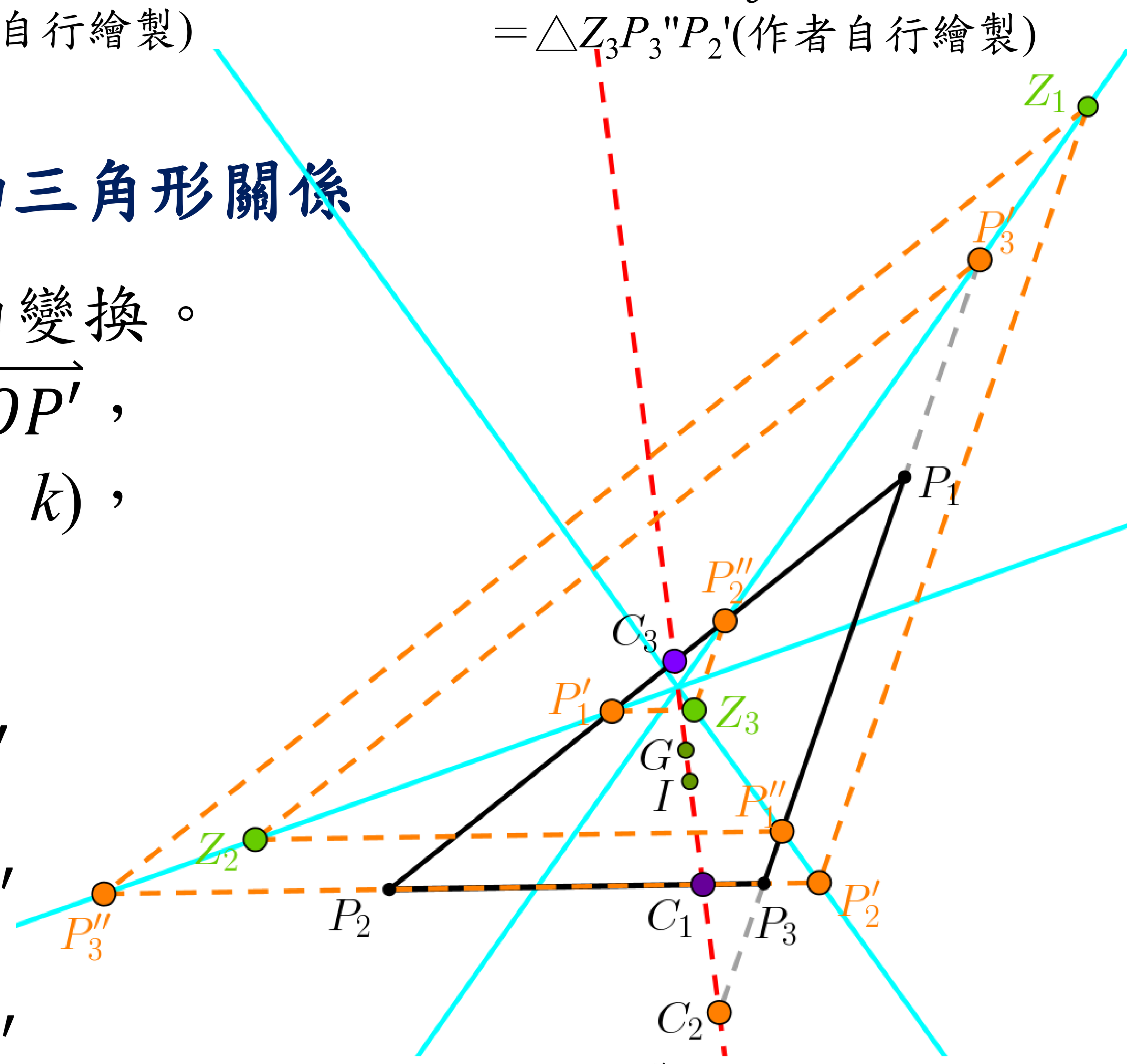


圖09 由內心與重心導出之位似變換與輔助點對應圖(作者自行繪製)

四、七線共點架構完整建構

本研究整合三條*Dussau*作圖線、三條周長平分線（經旁切圓構造而得）與內心與重心的連線，共七條直線，最終證實這七條直線皆共點於同一個奈格爾點。此一「殊途同歸」的共點性驗證了奈格爾點的多重幾何定義。

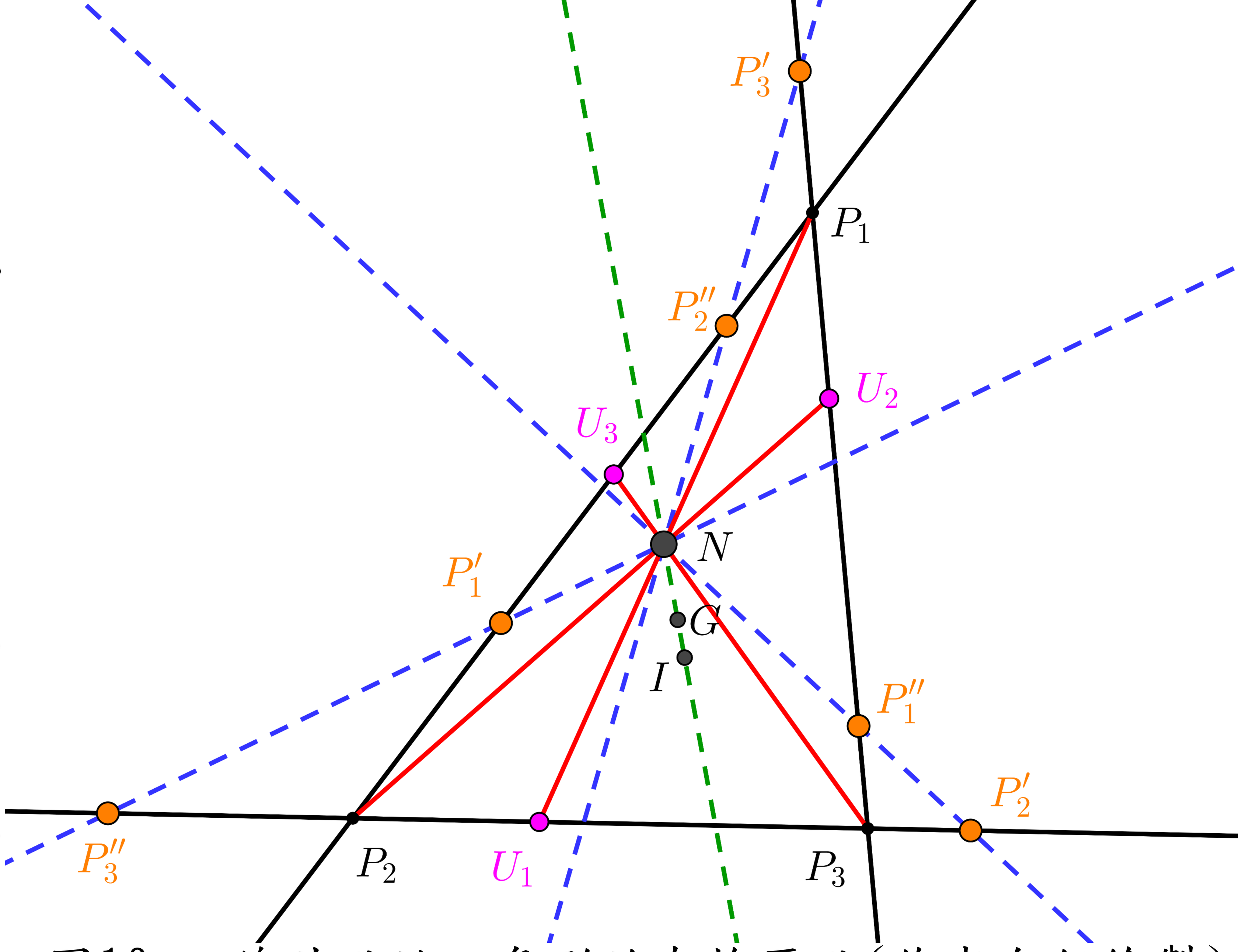


圖10 七線共點於三角形的奈格爾點(作者自行繪製)

伍、討論

一、是否尚有其他線段亦通過奈格爾點？新三線構造的發現

若 $\overline{P_1P_1'}=\frac{3a+b-c}{a+b+c}\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1P_1''}=\frac{3a-b+c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$；

$\overline{P_2P_2'}=\frac{-a+3b+c}{a+b+c}\overline{P_2P_3}$，$\overline{P_2P_2''}=\frac{a+3b-c}{a+b+c}\overline{P_1P_2}$；

$\overline{P_3P_3'}=\frac{a-b+3c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$，$\overline{P_3P_3''}=\frac{-a+b+3c}{a+b+c}\overline{P_1P_3}$，

則三直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點，

且交點也恰好是$\triangle P_1P_2P_3$的奈格爾點。

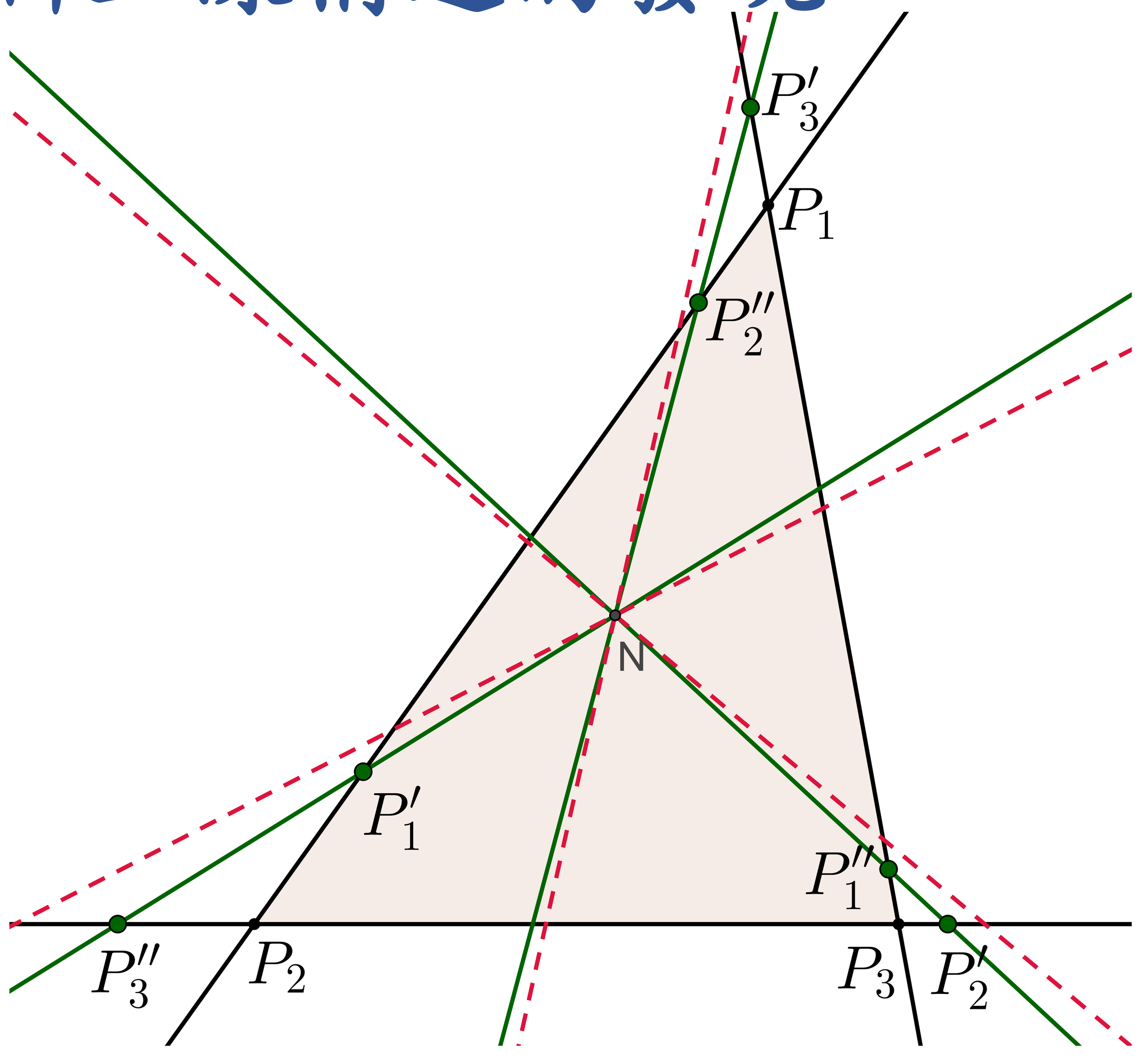


圖11發現額外三條與奈格爾點共點的幾何構造線(作者自行繪製)

二、此作圖法能否推廣至內心、重心

（一）若$\overline{P_1P_1'}=\frac{b}{b+a-c}\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1P_1''}=\frac{c}{c+a-b}\overline{P_1P_3}$；

$\overline{P_2P_2'}=\frac{c}{c+b-a}\overline{P_2P_3}$，$\overline{P_2P_2''}=\frac{a}{a+b-c}\overline{P_1P_2}$；

$\overline{P_3P_3'}=\frac{a}{a+c-b}\overline{P_1P_3}$，$\overline{P_3P_3''}=\frac{b}{b+c-a}\overline{P_1P_3}$，

則三直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點，

且交點恰好是$\triangle P_1P_2P_3$的內心。

（二）若$\overline{P_1P_1'}=\frac{a+2c}{3c}\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1P_1''}=\frac{a+2b}{3b}\overline{P_1P_3}$；

$\overline{P_2P_2'}=\frac{2a+b}{3a}\overline{P_2P_3}$，$\overline{P_2P_2''}=\frac{b+2c}{3c}\overline{P_1P_2}$；

$\overline{P_3P_3'}=\frac{2b+c}{3b}\overline{P_1P_3}$，$\overline{P_3P_3''}=\frac{2a+c}{3a}\overline{P_1P_3}$，

則三直線$\overleftrightarrow{P_1''P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_1'P_3''}$、$\overleftrightarrow{P_3'P_2''}$共點，

且交點恰好是$\triangle P_1P_2P_3$的重心。

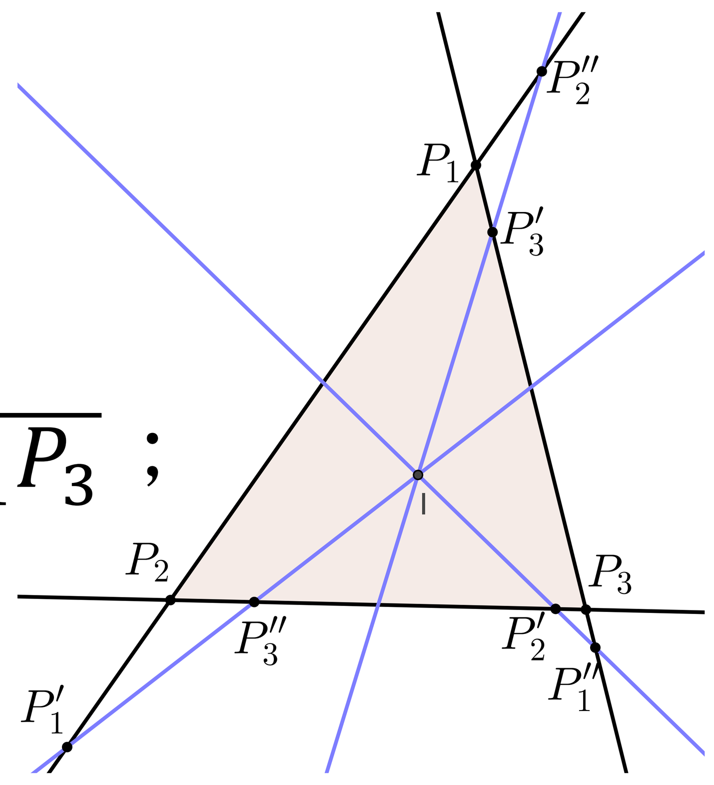


圖12內心作圖的新視角
(作者自行繪製)

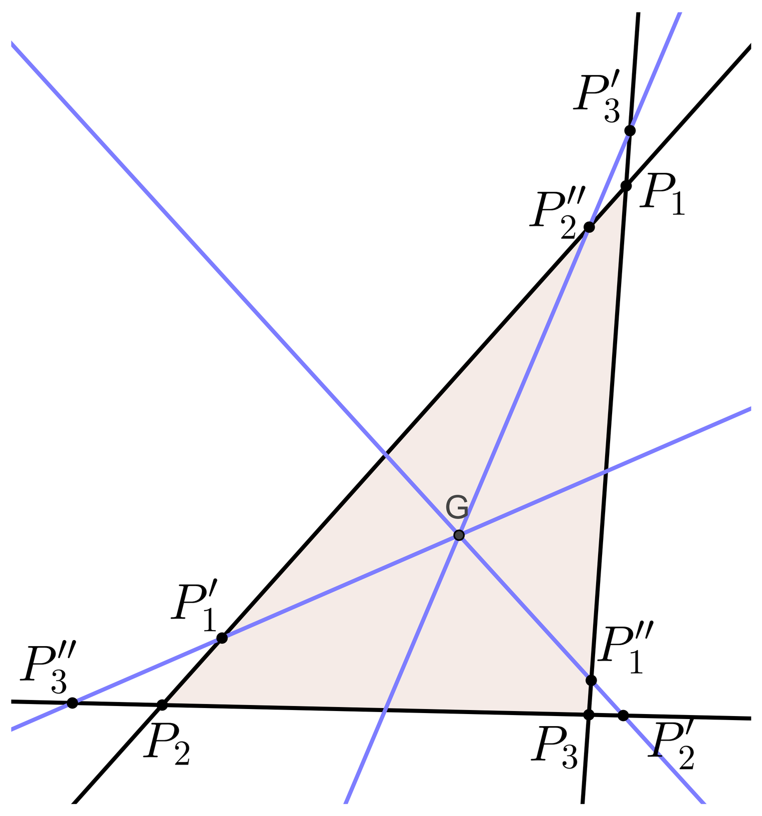


圖13 發現通過重心的三條作圖線
(作者自行繪製)

陸、結論

本研究從*Xavier Dussau*提出的奈格爾點作圖法出發，並在原有代數證明基礎上，以幾何視角加以補充詮釋。研究主要結論如下:

一、奈格爾點的共點結構再驗證與新視角

*Xavier Dussau*所提出的三條作圖線分別平行於三角形的三條內角平分線，因而可視為內心相關結構的對應映射。

二、*Dussau*作圖法之拓展與內心、重心的共點性揭示

本研究成功地將*Dussau*作圖法的概念延伸至內心和重心，開啟了進一步探討類似構圖方式是否能遷移應用至其他三角形特殊點之可能性，未來可望拓展為一系列具遷移性的幾何研究主題。

柒、參考文獻

[1] Nagel, C. H. (1836). Beiträge zur Theorie der Kreisbogendreiecke und der Dreiecke überhaupt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 16, 37-102.

[2] Hoehn, L. (2007). A new characterization of the Nagel point. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 19(1), 45-48.

[3] Dussau, X. (2020). Elementary construction of the Nagel point. Elementary construction of the Nagel point