

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

(鄉土)教材獎

030404

等角六邊形的秘密

學校名稱：臺南市私立德光高級中學

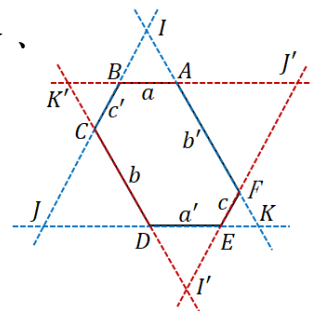
作者： 國二 林歆澄 國二 郭嘉菡	指導老師： 吳育珍 周子凱
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：等角六邊形、等差、完全平方數

摘要

任意等角六邊形 $ABCDEF$ 之6邊的延長線，即會得到兩個正三角形 ΔIJK 、 $\Delta I'J'K'$ ，其中三組對邊以 $[(a, b, c), (a', b', c')]$ 表示，則三組對邊均相互平行，

任兩相鄰邊長的和必等於其對邊長的和 $\begin{cases} a + b' = a' + b \\ b + c' = b' + c \\ c + a' = c' + a \end{cases}$ ，則有以下成果：



1. 若已知四邊長度，且其中三邊相鄰，即可決定唯一之等角六邊形。
2. 三組對邊都相等或都不相等，才能決定一個等角六邊形。
3. 兩組有相同公差的數列，各取連續三個正數為邊長，則可決定唯一的等角六邊形。
4. 一組等差數列中，任取6個連續正數 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 為邊長，可形成兩個相異的等角六邊形 $[(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6)]$ 、 $[(a_1, a_3, a_5), (a_2, a_4, a_6)]$ 。
5. 當等角六邊形邊長為完全平方數時，可以求出一些特列。
6. 討論等角六邊形的面積與用相同大小正三角內鑲嵌的個數。

壹、研究動機

某一天在查詢資料時，意外在國立台灣科學教育館的網站中(科學研習第62卷第6期)，發現一個有趣的數學題目：「森棚教官數學題——內角相等六邊形」——我們知道三個內角都相等的三角形必定是正三角形，但四個內角都相等的四邊形就不一定是正方形了，比如長寬不等的長方形就是一個例子。

我們就在思考：如何去畫邊長不同的等角六邊形？有哪些整數會是等角六邊形的6個邊長？並探討這些邊長之間的關係？

貳、研究目的

- 一、如何繪製不等邊的等角六邊形？並討論其邊長間的關係。
- 二、討論等角六邊形的6的邊長是否為等差數列？其排列方式是否有規律？
- 三、討論等角六邊形的6邊是否可能為6個完全平方數？其排列方式是否有規律？
- 四、討論等角六邊形的面積及鑲嵌上正三角形的問題？

參、研究過程及方法

一、如何繪製不等邊的等角六邊形？

1. 先做一個大的正三角形 ΔABC

2. 再以 $\triangle ABC$ 三個角為內角，作三個不相交且邊長不相等的正三角形
形 $\triangle AFE$ 、 $\triangle GBH$ 、 $\triangle JIC$ ，則六邊形 $EFGHIJ$ 即為所求。

六邊形 $EFGHIJ$ 的 6 個角均為 120° 度，6 個邊為三組平行線。

3. 令等角六邊形任不相鄰的三個邊長為 a 、 b 、 c ，其對邊長分別為 a' 、 b' 、 c' ，則三組對邊相互平行，如右圖所示。

$$\overline{AB} = b + a' + c, \overline{BC} = c + b' + a, \overline{AC} = a + c' + b$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

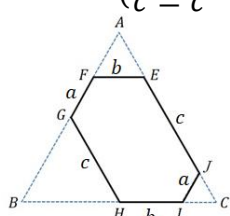
$$\text{則} \begin{cases} b + a' + c = c + b' + a \\ c + b' + a = a + c' + b \\ a + c' + b = b + a' + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + a' = b' + a \\ c + b' = c' + b \\ a + c' = a' + a \end{cases} \dots\dots\dots (*)$$

由(*)式得知

(1) 任兩相鄰邊的和必等於其對邊的和

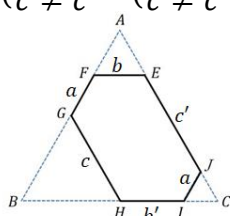
(2) 若已知四邊長度，且其中三邊相鄰，即可決定唯一之等角六邊形。

4. 討論，若 $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a \neq a' \\ b \neq b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 條件下(*)式是否成立？



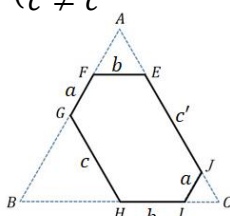
$$\begin{cases} b + a = b + a \\ c + b = c + b \\ a + c = a + a \end{cases}$$

，成立



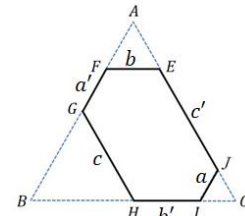
$$\begin{cases} b + a \neq b' + a \\ a + c \neq c' + a \end{cases}$$

，不成立



$$\begin{cases} b + a = b + a \\ c + b \neq c' + b \\ a + c' \neq a + c \end{cases}$$

，不成立



$$\begin{cases} b + a' = b' + a \\ c + b' = c' + b \\ a + c' = a' + c \end{cases}$$

例如

$$\begin{cases} 5 + 2 = 4 + 3 \\ 7 + 4 = 6 + 5 \\ 3 + 6 = 2 + 7 \end{cases}$$

成立

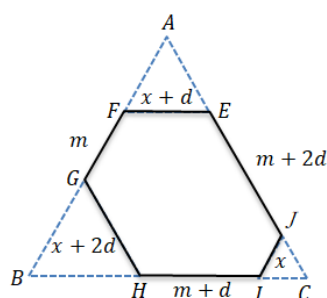
所以，三組對邊都相等或都不相等，才能決定一個等角六邊形。

二、討論等角六邊形的 6 的邊長是否為等差數列？

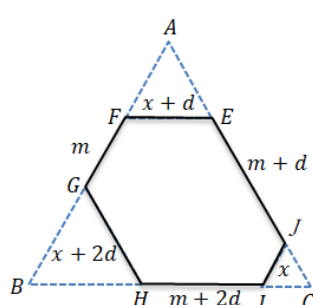
1. 若 6 個邊長為兩組公差相等的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，個連續三個正數

分別為 x 、 $x + d$ 、 $x + 2d$ 、 m 、 $m + d$ 、 $m + 2d$

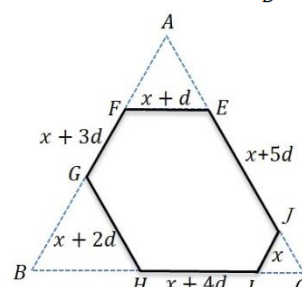
，其所有排列方式如下圖所示：



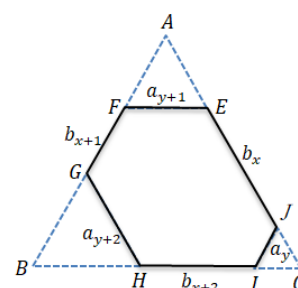
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2x + m + 3d \\ \overline{BC} &= 2x + m + 3d \\ \overline{AC} &= 2x + m + 3d \\ \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{AC} \text{ 成立} \end{aligned}$$

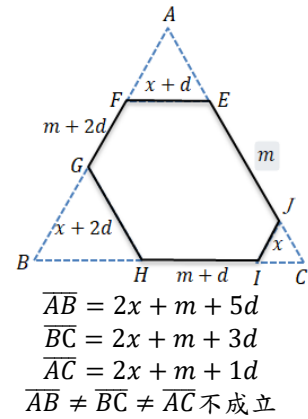
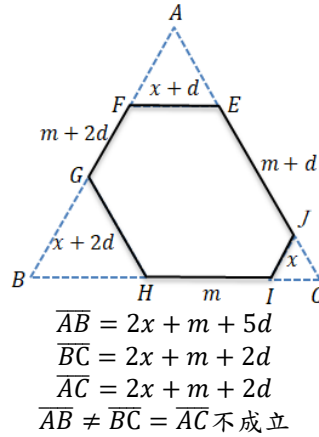
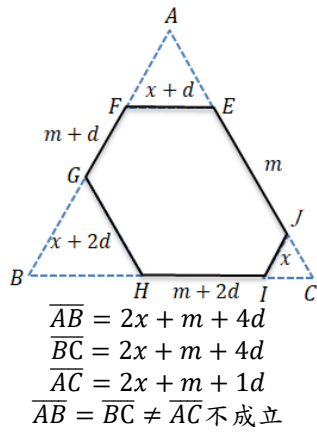


$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2x + m + 3d \\ \overline{BC} &= 2x + m + 4d \\ \overline{AC} &= 2x + m + 2d \\ \overline{AB} &\neq \overline{BC} \neq \overline{AC} \text{ 不成立} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2x + m + 3d \\ \overline{BC} &= 2x + m + 4d \\ \overline{AC} &= 2x + m + 2d \\ \overline{AB} &\neq \overline{BC} \neq \overline{AC} \text{ 不成立} \end{aligned}$$

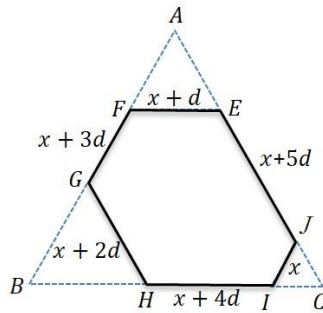




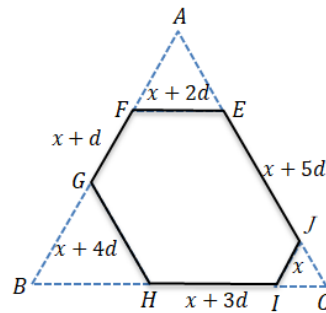
所以

兩組有共同公差等差數列，各取連續三個正數為邊長，則可決定唯一的等角六邊形。

2. 令等差數列首項為 x ，公差為 d ，6 個邊長分別為 x 、 $x+d$ 、 $x+2d$ 、 $x+3d$ 、 $x+4d$ 、 $x+5d$ ，依右圖方式排列，則：



$\overline{AB} = 3x + 6d$
 $\overline{BC} = 3x + 6d$
 $\overline{AC} = 3x + 6d$
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$
 成立



$\overline{AB} = 3x + 7d$
 $\overline{BC} = 3x + 7d$
 $\overline{AC} = 3x + 7d$
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$
 成立

所以

一組等差數列中，以任意 6 個連續正數為邊長，可形成兩個相異的等角六邊形。

三、討論等角六邊形的 6 邊長是否可能為 6 個完全平方數？

1. 令等角六邊形的 6 個邊長為 a^2 、 b^2 、 c^2 、 d^2 、 e^2 、 f^2 (不照順序)，任一組兩兩不相鄰的三邊為 a^2 、 b^2 、 c^2 ，其對邊的長度分別為 d^2 、 e^2 、 f^2 ，如下圖所示。

依上述的結論 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

$$\overline{AB} = b^2 + d^2 + c^2$$

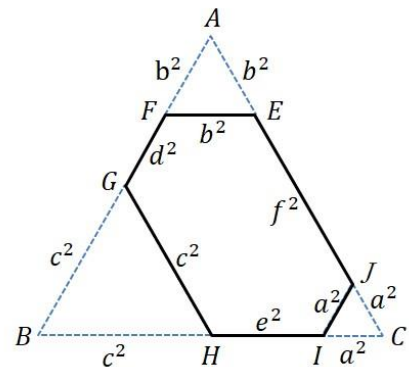
$$\overline{BC} = c^2 + e^2 + a^2$$

$$\overline{AC} = b^2 + f^2 + a^2$$

$$b^2 + d^2 + c^2 = c^2 + e^2 + a^2 = b^2 + f^2 + a^2$$

$$\begin{cases} b^2 + d^2 + c^2 = c^2 + e^2 + a^2 \\ c^2 + e^2 + a^2 = b^2 + f^2 + a^2 \\ b^2 + d^2 + c^2 = b^2 + f^2 + a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 + d^2 = e^2 + a^2 \\ c^2 + e^2 = b^2 + f^2 \\ d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \end{cases}$$



$$b^2 + d^2 = e^2 + a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = e^2 - d^2$$

$\Rightarrow (b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l$ ，假設 a 、 b 、 e 、 d 為相異正整數且 $l > 0$

$$\begin{cases} b-a = e-d \\ b+a = e+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e \\ a = d \end{cases} (\times), \begin{cases} b-a = e+d \\ b+a = e-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e \\ a = -d \end{cases} (\times), \text{又 } (b-a) \neq (b+a)$$

則 $(b-a)$ 、 $(b+a)$ 、 $(e-d)$ 、 $(e+d)$ 為 l 四個相異因數。

若 $(b-a)$ 為偶數 $\Rightarrow (b+a)$ 為偶數 $\Rightarrow (b-a)(b+a)$ 為偶數 $\Rightarrow (e-d)$ 、 $(e+d)$ 至少有一個為偶數 $\xrightarrow{e, d \text{ 為相異正整數}} (e-d)$ 、 $(e+d)$ 均為偶數

若 $(b-a)$ 為奇數 $\Rightarrow (b+a)$ 為奇數 $\Rightarrow (b-a)(b+a)$ 為奇數 $\Rightarrow (e-d)$ 、 $(e+d)$ 均為奇數

所以

l 為至少有4個因數的合數，其中 $(b-a)$ 、 $(b+a)$ 、 $(e-d)$ 、 $(e+d) > 0$ ，且同為奇數或偶數。

若 $(b-a)$ 、 $(b+a)$ 、 $(e-d)$ 、 $(e+d)$ 皆大於零，則 $b > a \rightarrow b^2 > a^2$ ； $e > d \rightarrow e^2 > d^2$ 。

$$\text{又 } c^2 + e^2 = b^2 + f^2 \rightarrow c^2 - b^2 = f^2 - e^2 \rightarrow \begin{cases} \text{若 } c^2 > b^2, \text{ 則 } f^2 > e^2 \dots\dots\dots ① \\ \text{若 } c^2 < b^2, \text{ 則 } f^2 < e^2 \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

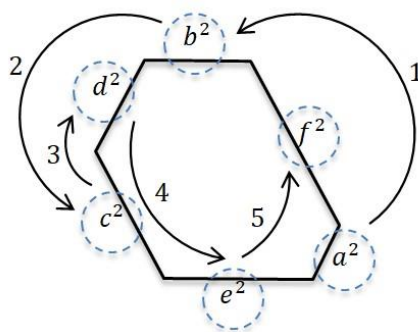
$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \rightarrow c^2 - a^2 = f^2 - d^2 \rightarrow \begin{cases} \text{若 } c^2 > a^2, \text{ 則 } f^2 > d^2 \dots\dots\dots ③ \\ \text{若 } c^2 < a^2, \text{ 則 } f^2 < d^2 \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

$$\text{由 } ①④ \text{ 得知 } \begin{cases} c^2 > b^2 > a^2 \text{ 且 } f^2 > e^2 > d^2 \\ b^2 > a^2 > c^2 \text{ 且 } e^2 > d^2 > f^2 \end{cases}$$

$$\text{由 } ②③ \text{ 得知 } b^2 > c^2 > a^2 \text{ 且 } e^2 > f^2 > d^2$$

所以 由上兩式得知

(a^2, b^2, c^2) 三個邊長大小的關係與其對邊長
 (d^2, e^2, f^2) 大小的關係相同。



已知 $(b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l = 2^n \times Q, n=0$

2. 若 $(b-a)$ 、 $(b+a)$ 、 $(e-d)$ 、 $(e+d)$ 均為奇數

(1) 奇合數 $l = 3^{x_1} \times (a_2)^{x_2}$ 為 3 的倍數，其中 $\begin{cases} \text{若 } x_1 = 1, \text{ 則 } x_2 \neq 0 \\ \text{若 } x_1 = 2, \text{ 則 } x_2 \neq 0 \\ \text{若 } x_1 \geq 3 \end{cases}$

	$(b-a)$	$\times$	$(b+a)$	$=$	$(e-d)$	$\times$	$(e+d)$
假設	1	$\times$	$(2k+1)$	$=$	3	$\times$	$\frac{(2k+1)}{3}$
	1	$\times$	$(6k'+3)$	$=$	3	$\times$	$(2k'+1)$
解	$b = 3k' + 2$ $a = 3k' + 1$				$e = k' + 2$ $d = k' - 1$		

因為 $\frac{(2k+1)}{3} \in \mathbb{Z}$ ，令 $k = 3k' + 1 \Rightarrow \frac{(2k+1)}{3} = \frac{2(3k'+1)+1}{3} = \frac{6k'+3}{3} = 2k' + 1$

$$(2k+1) = 2(3k'+1) + 1 = 6k' + 3$$

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (k'-1)^2 + c^2 = f^2 + (3k'+1)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 8(k')^2 + 8k' = 8[(k')^2 + k'] = (c-f)(c+f) \in \text{偶數}$$

，其中 $[(k')^2 + k']$ 必為偶數

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
①	1	$8[(k')^2 + k']$	$c = \frac{8[(k')^2 + k'] + 1}{2}$ 、 $f = \frac{8[(k')^2 + k'] - 1}{2}$	$\times$
②	2	$4[(k')^2 + k']$	$c = 2[(k')^2 + k'] + 1$ 、 $f = 2[(k')^2 + k'] - 1$	○
③	4	$2[(k')^2 + k']$	$c = [(k')^2 + k'] + 2$ 、 $f = [(k')^2 + k'] - 2$	○
④	8	$[(k')^2 + k']$	$c = \frac{[(k')^2 + k'] + 8}{2}$ 、 $f = \frac{[(k')^2 + k'] - 8}{2}$	○
⑤	$k' + 1$	$8k'$	$c = \frac{9k' + 1}{2}$ 、 $f = \frac{7k' - 1}{2}$ ， $k' \in \text{奇數}$	○
⑥	k'	$8[k' + 1]$	$c = \frac{9k' + 8}{2}$ 、 $f = \frac{7k' + 8}{2}$ ， $k' \in \text{偶數}$	○
⑦	$2[k' + 1]$	$4k'$	$c = 3k' + 1$ 、 $f = k' - 1$ ，邊長重複	$\times$
⑧	$2k'$	$4[k' + 1]$	$c = 3k' + 2$ 、 $f = k' + 2$ ，邊長重複	$\times$
⑨	$4[k' + 1]$	$2k'$	$c = 3k' + 2$ 、 $f = -k' - 2 < 0$	$\times$
⑩	$4k'$	$2[k' + 1]$	$c = 3k' + 1$ 、 $f = -k' + 1 < 0$	$\times$
⑪	$8[k' + 1]$	k'	$c = \frac{9k' + 8}{2}$ 、 $f = \frac{-7k' - 8}{2} < 0$	$\times$
⑫	$8k'$	$k' + 1$	$c = \frac{9k' + 1}{2}$ 、 $f = \frac{-7k' + 1}{2} < 0$	$\times$

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	c, f 的解	備註
⑬	$8[(k')^2 + k']$	1	$c = \frac{1+8[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{1-8[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
⑭	$4[(k')^2 + k']$	2	$c = 1+2[(k')^2 + k'], f = 1-2[(k')^2 + k'] < 0$	×
⑮	$2[(k')^2 + k']$	4	$c = 2+[(k')^2 + k'], f = 2-[(k')^2 + k'] < 0$	×
⑯	$[(k')^2 + k']$	8	$c = \frac{8+[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{8-[(k')^2 + k']}{2}$	×

由編號②得

$$(a, b, c, d, e, f) = (3k' + 1, 3k' + 2, 2[(k')^2 + k'] + 1, k' - 1, k' + 2, 2[(k')^2 + k'] - 1)$$

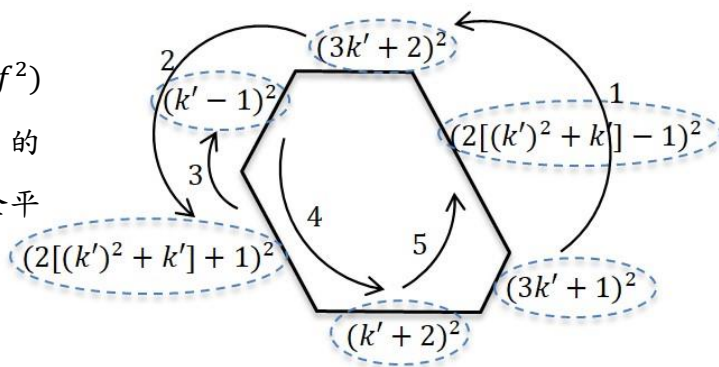
，其中 $k' \geq 2$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



由編號③得

$$(a, b, c, d, e, f) = (3k' + 1, 3k' + 2, [(k')^2 + k'] + 2, k' - 1, k' + 2, [(k')^2 + k'] - 2)$$

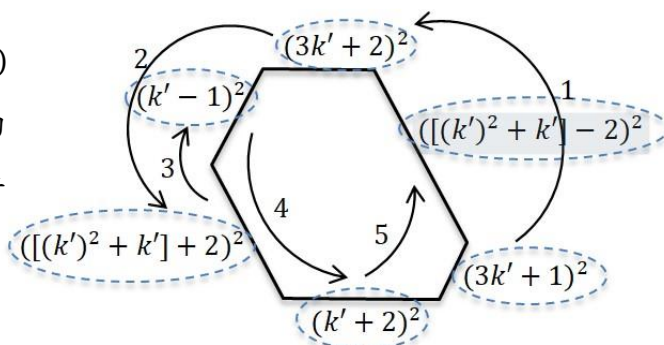
，其中 $k' \geq 2$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



由編號⑤得

$$(a, b, c, d, e, f) = (3k' + 1, 3k' + 2, \frac{9k' + 1}{2}, k' - 1, k' + 2, \frac{7k' - 1}{2})$$

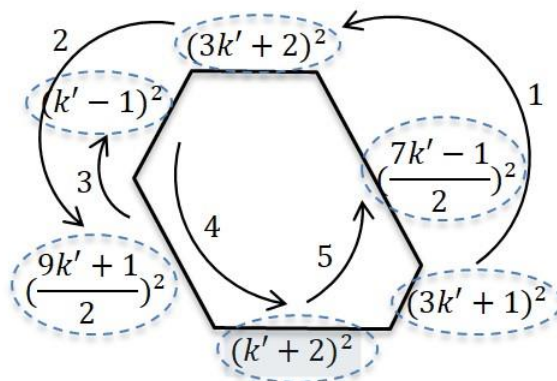
，其中 $k' \geq 7$ 的奇數

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



(2) 奇合數 $l = 5^{x_1} \times (a_2)^{x_2}$ 為 5 的倍數，其中 $\begin{cases} \text{若 } x_1 = 1, \text{ 則 } x_2 \neq 0 \\ \text{若 } x_1 = 2, \text{ 則 } x_2 \neq 0 \\ \text{若 } x_1 \geq 3 \end{cases}$

	$(b-a)$	$\times$	$(b+a)$	$=$	$(e-d)$	$\times$	$(e+d)$
假設	1	$\times$	$(2k+1)$	$=$	5	$\times$	$\frac{(2k+1)}{5}$
	1	$\times$	$(10k'+5)$	$=$	5	$\times$	$(2k'+1)$
解	$b = 5k' + 3$ $a = 5k' + 2$				$e = k' + 3$ $d = k' - 2$		

因為 $\frac{(2k+1)}{5} \in \mathbb{Z}$ ，令 $k = 5k' + 2 \Rightarrow \frac{(2k+1)}{5} = \frac{2(5k'+2)+1}{5} = \frac{10k'+5}{5} = 2k'+1$

$$(2k+1) = 2(5k'+2) + 1 = 10k' + 5$$

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (k'-2)^2 + c^2 = f^2 + (5k'+2)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 24(k')^2 + 24k' = 24[(k')^2 + k'] = (c-f)(c+f) \in \text{偶數}$$

，其中 $[(k')^2 + k']$ 必為偶數

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
①	1	$24[(k')^2 + k']$	$c、f$ 非整數	×
②	2	$12[(k')^2 + k']$	$c = 6[(k')^2 + k'] + 1, f = 6[(k')^2 + k'] - 1$	○
③	3	$8[(k')^2 + k']$	$c、f$ 非整數	×
④	4	$6[(k')^2 + k']$	$c = 3[(k')^2 + k'] + 2, f = 3[(k')^2 + k'] - 2$	○
⑤	6	$4[(k')^2 + k']$	$c = 2[(k')^2 + k'] + 3, f = 2[(k')^2 + k'] - 3$	○
⑥	8	$3[(k')^2 + k']$	$c = \frac{3[(k')^2 + k'] + 8}{2}, f = \frac{3[(k')^2 + k'] - 8}{2}$	○
⑦	12	$2[(k')^2 + k']$	$c = [(k')^2 + k'] + 6, f = [(k')^2 + k'] - 6$	○
⑧	24	$[(k')^2 + k']$	$c = \frac{[(k')^2 + k'] + 24}{2}, f = \frac{[(k')^2 + k'] - 24}{2}$	○
⑨	$k' + 1$	$24k'$	$c = \frac{25k' + 1}{2}, f = \frac{23k' - 1}{2}, k' \in \text{奇數}$	○
⑩	k'	$24[k' + 1]$	$c = \frac{25k' + 24}{2}, f = \frac{23k' + 24}{2}, k' \in \text{偶數}$	○
⑪	$2[k' + 1]$	$12k'$	$c = 7k' + 1, f = 5k' - 1$	○
⑫	$2k'$	$12[k' + 1]$	$c = 7k' + 6, f = 5k' + 6$	○
⑬	$3[k' + 1]$	$8k'$	$c = \frac{11k' + 3}{2}, f = \frac{5k' - 3}{2}, k' \in \text{奇數}$	○
⑭	$3k'$	$8[k' + 1]$	$c = \frac{11k' + 8}{2}, f = \frac{5k' + 8}{2}, k' \in \text{偶數}$	○
⑮	$4[k' + 1]$	$6k'$	$c = 5k' + 2, f = k' - 2$ ，重複	×
⑯	$4k'$	$6[k' + 1]$	$c = 5k' + 3, f = k' + 3$ ，重複	×

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	c, f 的解	備註
⑰	$6[k'+1]$	$4k'$	$c = 5k' + 3, f = -k' - 3 < 0$	×
⑱	$6k'$	$4[k'+1]$	$c = 5k' + 2, f = -k' + 2 < 0$	×
⑲	$8[k'+1]$	$3k'$	$c = \frac{11k' + 8}{2}, f = \frac{-5k' - 8}{2} < 0$	×
⑳	$8k'$	$3[k'+1]$	$c = \frac{11k' + 3}{2}, f = \frac{-5k' + 3}{2} < 0$	×
㉑	$12[k'+1]$	$2k'$	$c = 7k' + 6, f = -5k' - 6 < 0$	×
㉒	$12k'$	$2[k'+1]$	$c = 7k' + 1, f = -5k' + 1 < 0$	×
㉓	$24[k'+1]$	k'	$c = \frac{25k' + 24}{2}, f = \frac{-23k' - 24}{2} < 0$	×
㉔	$24k'$	$k' + 1$	$c = \frac{25k' + 1}{2}, f = \frac{-23k' + 1}{2} < 0$	×
㉕	$24[(k')^2 + k']$	1	$c = \frac{24[(k')^2 + k'] + 1}{2}, f = \frac{1 - 24[(k')^2 + k']}{2}$	×
㉖	$12[(k')^2 + k']$	2	$c = 1 + 6[(k')^2 + k'], f = 1 - 6[(k')^2 + k'] < 0$	×
㉗	$8[(k')^2 + k']$	3	$c = \frac{3 + 8[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{3 - 8[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
㉘	$6[(k')^2 + k']$	4	$c = 2 + 3[(k')^2 + k'], f = 2 - 3[(k')^2 + k'] < 0$	×
㉙	$4[(k')^2 + k']$	6	$c = 3 + 2[(k')^2 + k'], f = 3 - 2[(k')^2 + k'] < 0$	×
㉚	$3[(k')^2 + k']$	8	$c = \frac{8 + 3[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{8 - 3[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
㉛	$2[(k')^2 + k']$	12	$c = 6 + [(k')^2 + k'], f = 6 - [(k')^2 + k'] < 0$	×
㉜	$[(k')^2 + k']$	24	$c = \frac{24 + [(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{24 - [(k')^2 + k']}{2}$	×

由編號①得

(a, b, c, d, e, f)

$= (5k' + 2, 5k' + 3, 7k' + 1, k' - 2, k' + 3, 5k' - 1)$

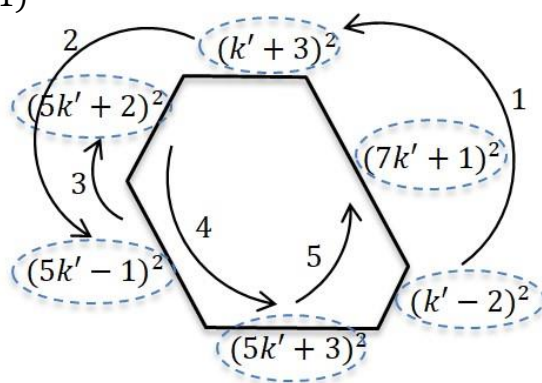
，其中 $k' \geq 3$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



由編號⑫得

(a, b, c, d, e, f)

$$= (5k' + 2, 5k' + 3, 7k' + 6, k' - 2, k' + 3, 5k' + 6)$$

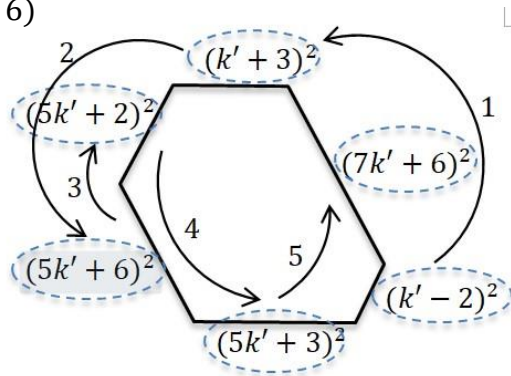
，其中 $k' \geq 3$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



(3) 奇合數 $l = 3^{x_1} \times 5^{x_2}$ 為 15 的倍數，其中 $x_1 \neq 0$ 且 $x_2 \neq 0$

	$(b - a)$	$\times$	$(b + a)$	$=$	$(e - d)$	$\times$	$(e + d)$
假設	1	$\times$	$(2k + 1)$	$=$	15	$\times$	$\frac{(2k + 1)}{15}$
	1	$\times$	$(30k' + 15)$	$=$	15	$\times$	$(2k' + 1)$
解	$b = 15k' + 8$ $a = 15k' + 7$				$e = k' + 8$ $d = k' - 7$		

$$\text{因為 } \frac{(2k + 1)}{15} \in \mathbb{Z}, \text{ 令 } k = 15k' + 7 \Rightarrow \frac{(2k + 1)}{15} = \frac{2(15k' + 7) + 1}{15} = \frac{30k' + 15}{15} = 2k' + 1$$

$$(2k + 1) = 2(15k' + 7) + 1 = 30k' + 15$$

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (k' - 7)^2 + c^2 = f^2 + (15k' + 7)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 224(k')^2 + 224k' = 224[(k')^2 + k'] = (c - f)(c + f) \in \text{偶數}$$

，其中 $[(k')^2 + k']$ 必為偶數

編號	$(c - f)$	$(c + f)$	c, f 的解	備註
①	1	$224[(k')^2 + k']$	c, f 非整數	×
②	2	$112[(k')^2 + k']$	$c = 56[(k')^2 + k'] + 1, f = 56[(k')^2 + k'] - 1$	○
③	4	$56[(k')^2 + k']$	$c = 28[(k')^2 + k'] + 2, f = 28[(k')^2 + k'] - 2$	○
④	7	$32[(k')^2 + k']$	c, f 非整數	×
⑤	8	$28[(k')^2 + k']$	$c = 14[(k')^2 + k'] + 4, f = 14[(k')^2 + k'] - 4$	○
⑥	14	$16[(k')^2 + k']$	$c = 8[(k')^2 + k'] + 7, f = 8[(k')^2 + k'] - 7$	○
⑦	16	$14[(k')^2 + k']$	$c = 7[(k')^2 + k'] + 8, f = 7[(k')^2 + k'] - 8$	○
⑧	28	$8[(k')^2 + k']$	$c = 4[(k')^2 + k'] + 14, f = 4[(k')^2 + k'] - 14$	○
⑨	32	$7[(k')^2 + k']$	$c = \frac{7[(k')^2 + k'] + 32}{2}, f = \frac{7[(k')^2 + k'] - 32}{2}$	○
⑩	56	$4[(k')^2 + k']$	$c = 2[(k')^2 + k'] + 28, f = 2[(k')^2 + k'] - 28$	○
⑪	112	$2[(k')^2 + k']$	$c = [(k')^2 + k'] + 56, f = [(k')^2 + k'] - 56$	○

編號	$(c - f)$	$(c + f)$	c, f 的解	備註
⑫	224	$[(k')^2 + k']$	$c = \frac{[(k')^2 + k'] + 224}{2}, f = \frac{[(k')^2 + k'] - 224}{2}$	○
⑬	$k' + 1$	$224k'$	$c = \frac{225k' + 1}{2}, f = \frac{223k' - 1}{2}, k' \in \text{奇數}$	○
⑭	k'	$224[k' + 1]$	$c = \frac{225k' + 224}{2}, f = \frac{223k' + 224}{2}, k' \in \text{偶數}$	○
⑮	$2[k' + 1]$	$112k'$	$c = 57k' + 1, f = 55k' - 1$	○
⑯	$2k'$	$112[k' + 1]$	$c = 57k' + 56, f = 55k' + 56$	○
⑰	$4[k' + 1]$	$56k'$	$c = 30k' + 2, f = 26k' - 2$	○
⑱	$4k'$	$56[k' + 1]$	$c = 30k' + 28, f = 26k' + 28$	○
⑲	$7[k' + 1]$	$32k'$	$c = \frac{39k' + 7}{2}, f = \frac{25k' - 7}{2}, k' \in \text{奇數}$	○
⑳	$7k'$	$32[k' + 1]$	$c = \frac{39k' + 32}{2}, f = \frac{25k' + 32}{2}, k' \in \text{偶數}$	○
㉑	$8[k' + 1]$	$28k'$	$c = 18k' + 4, f = 10k' - 4$	○
㉒	$8k'$	$28[k' + 1]$	$c = 18k' + 14, f = 10k' + 14$	○
㉓	$14[k' + 1]$	$16k'$	$c = 15k' + 7, f = k' - 7$, 邊長重複	×
㉔	$14k'$	$16[k' + 1]$	$c = 15k' + 8, f = k' + 8$, 邊長重複	×
㉕	$16[k' + 1]$	$14k'$	$c = 30k' + 8, f = -k' - 8 < 0$	×
㉖	$16k'$	$14[k' + 1]$	$c = 30k' + 7, f = -k' + 7 < 0$	×
㉗	$28[k' + 1]$	$8k'$	$c = 18k' + 14, f = -10k' - 14 < 0$	×
㉘	$28k'$	$8[k' + 1]$	$c = 18k' + 4, f = -10k' + 4 < 0$	×
㉙	$32[k' + 1]$	$7k'$	$c = \frac{39k' + 32}{2}, f = \frac{-25k' + 32}{2} < 0$	×
㉚	$32k'$	$7[k' + 1]$	$c = \frac{39k' + 7}{2}, f = \frac{-25k' + 7}{2} < 0$	×
㉛	$56[k' + 1]$	$4k'$	$c = 30k' + 28, f = -26k' - 28 < 0$	×
㉜	$56k'$	$4[k' + 1]$	$c = 30k' + 2, f = -26k' + 2 < 0$	×
㉝	$112[k' + 1]$	$2k'$	$c = 57k' + 56, f = -55k' - 56 < 0$	×
㉞	$112k'$	$2[k' + 1]$	$c = 57k' + 1, f = -55k' + 1 < 0$	×
㉟	$224[k' + 1]$	k'	$c = \frac{225k' + 224}{2}, f = \frac{-223k' - 224}{2} < 0$	×
㊱	$224k'$	$[k' + 1]$	$c = \frac{225k' + 1}{2}, f = \frac{-223k' + 1}{2} < 0$	×
㊲	$224[(k')^2 + k']$	1	$c = \frac{1 + 224[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{1 - 224[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
㊳	$112[(k')^2 + k']$	2	$c = 1 + 56[(k')^2 + k'], f = 1 - 56[(k')^2 + k'] < 0$	×
㊴	$56[(k')^2 + k']$	4	$c = 2 + 28[(k')^2 + k'], f = 2 - 28[(k')^2 + k'] < 0$	×
㊵	$32[(k')^2 + k']$	7	$c = \frac{7 + 32[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{7 - 32[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
㊶	$28[(k')^2 + k']$	8	$c = 4 + 14[(k')^2 + k'], f = 4 - 14[(k')^2 + k'] < 0$	×

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	c, f 的解	備註
④②	$16[(k')^2 + k']$	14	$c = 7 + 8[(k')^2 + k']$ 、 $f = 7 - 8[(k')^2 + k'] < 0$	×
④③	$14[(k')^2 + k']$	16	$c = 8 + 7[(k')^2 + k']$ 、 $f = 8 - 7[(k')^2 + k'] < 0$	×
④④	$8[(k')^2 + k']$	28	$c = 14 + 4[(k')^2 + k']$ 、 $f = 14 - 4[(k')^2 + k'] < 0$	×
④⑤	$7[(k')^2 + k']$	32	$c = \frac{32 + 7[(k')^2 + k']}{2}$ 、 $f = \frac{32 - 7[(k')^2 + k']}{2}$	×
④⑥	$4[(k')^2 + k']$	56	$c = 28 + 2[(k')^2 + k']$ 、 $f = 28 - 2[(k')^2 + k'] < 0$	×
④⑦	$2[(k')^2 + k']$	112	$c = 56 + [(k')^2 + k']$ 、 $f = 56 - [(k')^2 + k'] < 0$	×
④⑧	$[(k')^2 + k']$	224	$c = \frac{224 + [(k')^2 + k']}{2}$ 、 $f = \frac{224 - [(k')^2 + k']}{2}$	○

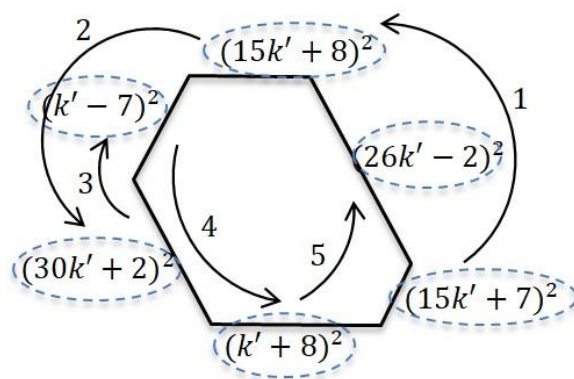
由編號①⑦得

$$(a, b, c, d, e, f) = (15k' + 7, 15k' + 8, 30k' + 2, k' - 7, k' + 8, 26k' - 2)$$

，其中 $k' \geq 8$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



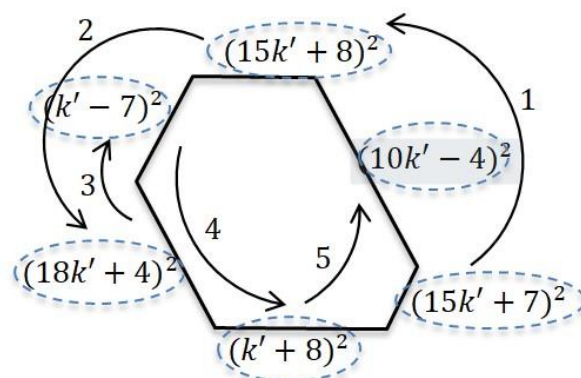
由編號②⑩得

$$(a, b, c, d, e, f) = (15k' + 7, 15k' + 8, 18k' + 4, k' - 7, k' + 8, 10k' - 4)$$

，其中 $k' \geq 8$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



(4) 奇合數 $l = 3^{x_1} \times 5^{x_2}$ 為 15 的倍數，其中 $x_1, x_2 \neq 0$

	$(b-a)$	$\times$	$(b+a)$	$=$	$(e-d)$	$\times$	$(e+d)$
假設	3	$\times$	$(2k+1)$	$=$	5	$\times$	$\frac{3(2k+1)}{5}$
	3	$\times$	$(10k'+5)$	$=$	5	$\times$	$(6k'+3)$
解	$b = 5k' + 4$ $a = 5k' + 1$				$e = 3k' + 4$ $d = 3k' - 1$		

因為 $\frac{3(2k+1)}{5} \in \mathbb{Z}$ ，令 $k = 5k' + 2 \Rightarrow \frac{3(2k+1)}{5} = \frac{3[2(5k'+2)+1]}{5} = \frac{30k'+15}{5} = 6k' + 3$

$$(2k+1) = 2(5k'+2) + 1 = 10k' + 5$$

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (3k' - 1)^2 + c^2 = f^2 + (5k' + 1)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 16(k')^2 + 16k' = 16[(k')^2 + k'] = (c-f)(c+f) \in \text{偶數}$$

，其中 $[(k')^2 + k']$ 必為偶數

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	c, f 的解	備註
①	1	$16[(k')^2 + k']$	c, f 非整數	×
②	2	$8[(k')^2 + k']$	$c = 4[(k')^2 + k'] + 1, f = 4[(k')^2 + k'] - 1$	○
③	4	$4[(k')^2 + k']$	$c = 2[(k')^2 + k'] + 2, f = 2[(k')^2 + k'] - 2$	○
④	8	$2[(k')^2 + k']$	$c = [(k')^2 + k'] + 4, f = [(k')^2 + k'] - 4$	○
⑤	16	$1[(k')^2 + k']$	$c = \frac{[(k')^2 + k'] + 16}{2}, f = \frac{[(k')^2 + k'] - 16}{2}$	○
⑥	$k' + 1$	$16k'$	$c = \frac{17k' + 1}{2}, f = \frac{15k' - 1}{2}, k' \in \text{奇數}$	○
⑦	k'	$16[k' + 1]$	$c = \frac{17k' + 16}{2}, f = \frac{15k' + 16}{2}, k' \in \text{偶數}$	○
⑧	$2[k' + 1]$	$8k'$	$c = 5k' + 1, f = 3k' - 1$ ，邊長重複	×
⑨	$2k'$	$8[k' + 1]$	$c = 5k' + 4, f = 3k' + 4$ ，邊長重複	×
⑩	$4[k' + 1]$	$4k'$	$c = 4k' + 2, f = -2 < 0$	×
⑪	$4k'$	$4[k' + 1]$	$c = 4k' + 2, f = 2$	○
⑫	$8[k' + 1]$	$2k'$	$c = 5k' + 4, f = -3k' - 4 < 0$	×
⑬	$8k'$	$2[k' + 1]$	$c = 5k' + 1, f = -3k' + 1 < 0$	×
⑭	$16[k' + 1]$	k'	$c = \frac{17k' + 16}{2}, f = \frac{-15k' - 16}{2} < 0$	×
⑮	$16k'$	$[k' + 1]$	$c = \frac{17k' + 1}{2}, f = \frac{-15k' + 1}{2} < 0$	×
⑯	$16[(k')^2 + k']$	1	$c = \frac{1 + 16[(k')^2 + k']}{2}, f = \frac{1 - 16[(k')^2 + k']}{2} < 0$	×
⑰	$8[(k')^2 + k']$	2	$c = 1 + 4[(k')^2 + k'], f = 1 - 4[(k')^2 + k'] < 0$	×

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
⑮	$4[(k')^2 + k']$	4	$c = 2 + 2[(k')^2 + k']、f = 2 - 2[(k')^2 + k'] < 0$	×
⑯	$2[(k')^2 + k']$	8	$c = 4 + [(k')^2 + k']、f = 4 - [(k')^2 + k'] < 0$	×
⑳	$1[(k')^2 + k']$	16	$c = \frac{16 + [(k')^2 + k']}{2}、f = \frac{16 - [(k')^2 + k']}{2}$	×

由編號⑪得

$$(a, b, c, d, e, f) = (5k' + 1, 5k' + 4, 4k' + 2, 3k' - 1, 3k' + 4, 2)$$

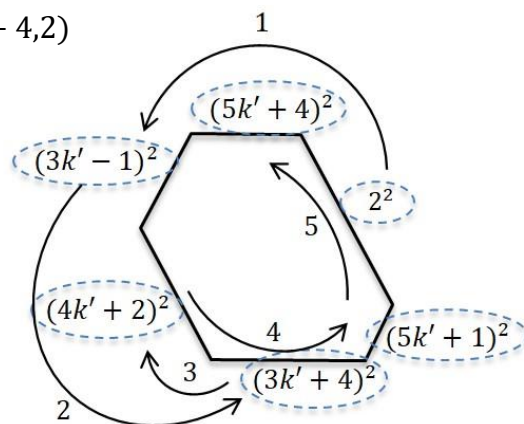
，其中 $k' \geq 3$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的

步驟，即可完成一個邊長全為完全平

方數的等角六邊形。



若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$
 $\Rightarrow n = 0$ ， $\sum x_i \geq 2$ 時，有解。
 若 $\sum x_i = 2$ ， $x_1、x_2 \neq 0$ (至少有兩個奇質因數)，亦有解。

3. 已知 $(b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l = P \times Q = R \times S$

$l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$

$\begin{cases} (b-a) = P、(b+a) = Q \\ (e-d) = R、(e+d) = S \end{cases}$ ， $l = P \times Q = R \times S$ ，因為 $a、b、e、d$ 為整數，而且均相

異，則 l 為至少有 4 個因數的合數，其中 $P、Q、R、S > 0$ ，且同為奇數或偶數

因為 $\begin{cases} \text{若 } P、Q \text{ 或 } R、S \text{ 同時為奇數時，} n = 0 \\ \text{若 } P、Q \text{ 或 } R、S \text{ 同時為偶數時，} n \geq 2 \end{cases}$

所以

$n = 1$ 時，必無解。

4. 若 $(b-a)$ 、 $(e-d)$ 、 $(b+a)$ 、 $(e+d)$ 均為相異偶數

偶合數 $l = 2^2 \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2}$ ，為4的倍數，其中 $x_1, x_2 \neq 0$

	$(b-a)$	$\times$	$(b+a)$	$=$	$(e-d)$	$\times$	$(e+d)$
假設	$2(2k+1)$	$\times$	$2(2k'+1)$	$=$	2	$\times$	$2(2k+1)(2k'+1)$
解	$b = 2k + 2k' + 2$ $a = 2k' - 2k$				$e = (2k+1)(2k'+1) + 1$ $d = (2k+1)(2k'+1) - 1$		

其中 k, k' 為相異的整數

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2$$

$$\Rightarrow [(2k+1)(2k'+1) - 1]^2 + c^2 = f^2 + [2k' - 2k]^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = (c-f)(c+f)$$

$$= [2k' - 2k]^2 - [(2k+1)(2k'+1) - 1]^2$$

$$= [2k' - 2k + (2k+1)(2k'+1) - 1][2k' - 2k - (2k+1)(2k'+1) + 1]$$

$$= [4kk' + 4k'][-4kk' - 4k]$$

$$= -16kk'(k+1)(k'+1)$$

所以 $f^2 - c^2 = 16kk'(k+1)(k'+1) = (f-c)(f+c)$ ，其中 k, k' 為相異的正整數，

即可找到一組 (a, b, c, d, e, f) 符合所求。

所以

$$\text{已知 } (b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l$$

$$\text{令 } \begin{cases} (b-a) = P, (a+c) = Q \\ (e-d) = R, (e+d) = S \end{cases}, l = P \times Q = R \times S \text{ 其中 } P, Q, R, S \text{ 為四個相異的偶數}$$

時，必可以找到對應的 $(a, b, c, d, e, f) \xrightarrow{\text{使得以}} (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ 為6個邊的等角六邊形(不照順序)。

若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$

$\Rightarrow n = 2$ 時， $\sum x_i \geq 2$ 時，有解，若 $\sum x_i = 2$ 時，其中 $x_1, x_2 \neq 0$

5. 偶合數 $l = 2^3 \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m} = (a-c)(a+c) = (e-d)(e+d)$
 , 為 8 的倍數, 其中 $\sum x_i \geq 1$

	$(b-a)$	$\times$	$(b+a)$	$=$	$(e-d)$	$\times$	$(e+d)$
假設	2	$\times$	$4(2k+1)$	$=$	4	$\times$	$2(2k+1)$
解	$b = 4k+3$ $a = 4k+1$				$e = 2k+3$ $d = 2k-1$		

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (2k-1)^2 + c^2 = f^2 + (4k+1)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 12 + 12k = 12(k^2 + k) = (c-f)(c+f) \in \text{偶數}$$

$$\text{其中 } (k^2 + k) \in \text{偶數}$$

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
①	1	$12(k^2+k)$	$c、f$ 非整數	$\times$
②	2	$6(k^2+k)$	$c = 3(k^2+k) + 1, f = 3(k^2+k) - 1$	○
③	3	$4(k^2+k)$	$c = \frac{4(k^2+k)+3}{2}, f = \frac{4(k^2+k)-3}{2}$ 非整數	$\times$
④	4	$3(k^2+k)$	$c = \frac{3(k^2+k)+4}{2}, f = \frac{3(k^2+k)-4}{2}$	○
⑤	6	$2(k^2+k)$	$c = (k^2+k) + 3, f = (k^2+k) - 3$	○
⑥	12	(k^2+k)	$c = \frac{(k^2+k)+12}{2}, f = \frac{(k^2+k)-12}{2}$	○
⑦	$k+1$	$12k$	$c = \frac{13k+1}{2}, f = \frac{11k-1}{2}, k \in \text{奇數}$	○
⑧	k	$12(k+1)$	$c = \frac{13k+12}{2}, f = \frac{11k+12}{2}, k \in \text{偶數}$	○
⑨	$2(k+1)$	$6k$	$c = 4k+1, f = 2k-1$, 邊長重複	$\times$
⑩	$2k$	$6(k+1)$	$c = 4k+3, f = 2k+3$, 邊長重複	$\times$
⑪	$3(k+1)$	$4k$	$c = \frac{7k+4}{2}, f = \frac{-k-4}{2} < 0$	$\times$
⑫	$3k$	$4(k+1)$	$c = \frac{7k+4}{2}, f = \frac{-k-4}{2} < 0$	$\times$
⑬	$4(k+1)$	$3k$	$c = \frac{7k+4}{2}, f = \frac{-k-4}{2} < 0$	$\times$
⑭	$4k$	$3(k+1)$	$c = \frac{7k+3}{2}, f = \frac{-k+3}{2} < 0$	$\times$
⑮	$6(k+1)$	$2k$	$c = 4k+3, f = -2k-3 < 0$	$\times$
⑯	$6k$	$2(k+1)$	$c = 4k+1, f = -2k+1 < 0$	$\times$
⑰	$12(k+1)$	k	$c = \frac{13k+12}{2}, f = \frac{-11k-12}{2} < 0$	$\times$

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
⑮	$12k$	$(k+1)$	$c = \frac{13k+1}{2}, f = \frac{-11k+1}{2} < 0$	×
⑯	$12(k^2+k)$	1	$c = \frac{1+12(k^2+k)}{2}, f = \frac{1-12(k^2+k)}{2} < 0$	×
⑰	$6(k^2+k)$	2	$c = 2+3(k^2+k), f = 2-3(k^2+k) < 0$	×
⑱	$4(k^2+k)$	3	$c = \frac{3+4(k^2+k)}{2}, f = \frac{3-4(k^2+k)}{2} < 0$	×
㉑	$3(k^2+k)$	4	$c = \frac{4+3(k^2+k)}{2}, f = \frac{4-3(k^2+k)}{2} < 0$	×
㉒	$2(k^2+k)$	6	$c = 3+(k^2+k), f = 3-(k^2+k)$	×
㉓	(k^2+k)	12	$c = \frac{12+(k^2+k)}{2}, f = \frac{12-(k^2+k)}{2}$	×

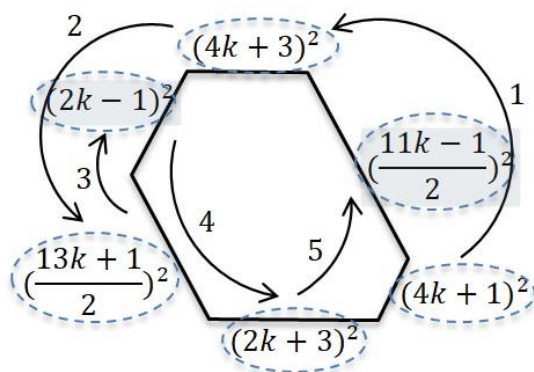
由編號⑦得

$$(a, b, c, d, e, f) = (4k+1, 4k+3, \frac{13k+1}{2}, 2k-1, 2k+3, \frac{11k-1}{2})$$

，其中 $k \geq 3$ 的奇數

6個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖1→2→3→4→5的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



所以

$$\text{已知}(b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l$$

$$\text{令} \begin{cases} (b-a) = P, (b+a) = Q \\ (e-d) = R, (e+d) = S \end{cases}, l = P \times Q = R \times S \text{ 其中 } P, Q, R, S \text{ 為四個相異的奇數}$$

時，必可以找到對應的 $(a, b, c, d, e, f) \xrightarrow{\text{使得以}} (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ 為6個邊的等角六邊形(不照順序)。

若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$
 $\Rightarrow n = 3, \sum x_i \geq 1$ 時，有解。

6. 偶合數 $l = 2^4 \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m} = (a - c)(a + c) = (e - d)(e + d)$
 , 為 16 的倍數, 其中 $\sum x_i \geq 1$

	$(b - a)$	$\times$	$(b + a)$	$=$	$(e - d)$	$\times$	$(e + d)$
假設	2	$\times$	$8(2k + 1)$	$=$	8	$\times$	$2(2k + 1)$
解	$b = 8k + 5$ $a = 8k + 3$				$e = 2k + 5$ $d = 2k - 3$		

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (2k - 3)^2 + c^2 = f^2 + (8k + 3)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 60k^2 + 60k = 60(k^2 + k) = (c - f)(c + f) \in \text{偶數}$$

$$\text{其中 } (k^2 + k) \in \text{偶數}$$

編號	$(c - f)$	$(c + f)$	c, f 的解	備註
①	1	$60(k^2 + k)$	c, f 非整數	$\times$
②	2	$30(k^2 + k)$	$c = 15(k^2 + k) + 1, f = 15(k^2 + k) - 1$	○
③	3	$20(k^2 + k)$	c, f 非整數	○
④	4	$15(k^2 + k)$	$c = \frac{15(k^2 + k) + 4}{2}, f = \frac{15(k^2 + k) - 4}{2}$	○
⑤	5	$12(k^2 + k)$	c, f 非整數	$\times$
⑥	6	$10(k^2 + k)$	$c = 5(k^2 + k) + 3, f = 5(k^2 + k) - 3$	○
⑦	10	$6(k^2 + k)$	$c = 3(k^2 + k) + 5, f = 3(k^2 + k) - 5$	○
⑧	12	$5(k^2 + k)$	$c = \frac{5(k^2 + k) + 12}{2}, f = \frac{5(k^2 + k) - 12}{2}$	○
⑨	15	$4(k^2 + k)$	c, f 非整數	$\times$
⑩	20	$3(k^2 + k)$	$c = \frac{3(k^2 + k) + 20}{2}, f = \frac{3(k^2 + k) - 20}{2}$	○
⑪	30	$2(k^2 + k)$	$c = (k^2 + k) + 15, f = (k^2 + k) - 15$	○
⑫	60	$(k^2 + k)$	$c = \frac{(k^2 + k) + 60}{2}, f = \frac{(k^2 + k) - 60}{2}$	○
⑬	$k + 1$	$60k$	$c = \frac{61k + 1}{2}, f = \frac{59k - 1}{2}, k \in \text{奇數}$	○
⑭	k	$60(k + 1)$	$c = \frac{61k + 60}{2}, f = \frac{59k + 60}{2}, k \in \text{偶數}$	○
⑮	$2(k + 1)$	$30k$	$c = 16k + 1, f = 14k - 1$	○
⑯	$2k$	$30(k + 1)$	$c = 16k + 15, f = 14k + 15$	○
⑰	$3(k + 1)$	$20k$	$c = \frac{23k + 3}{2}, f = \frac{17k - 3}{2}, k \in \text{奇數}$	○
⑱	$3k$	$20(k + 1)$	$c = \frac{23k + 20}{2}, f = \frac{17k + 20}{2}, k \in \text{偶數}$	○

編號	$(c - f)$	$(c + f)$	$c、f$ 的解	備註
①⑨	$4(k + 1)$	$15k$	$c = \frac{19k + 4}{2}、f = \frac{11k - 4}{2}，k \in \text{偶數}$	○
②⑩	$4k$	$15(k + 1)$	$c = \frac{19k + 15}{2}、f = \frac{11k + 15}{2}，k \in \text{奇數}$	○
②⑪	$5(k + 1)$	$12k$	$c = \frac{17k + 5}{2}、f = \frac{7k - 5}{2}，k \in \text{奇數}$	○
②⑫	$5k$	$12(k + 1)$	$c = \frac{17k + 12}{2}、f = \frac{7k + 12}{2}，k \in \text{偶數}$	○
②⑬	$6(k + 1)$	$10k$	$c = 8k + 3、f = 2k - 3，\text{邊長重複}$	×
②⑭	$6k$	$10(k + 1)$	$c = 8k + 5、f = 2k - 5，\text{邊長重複}$	×
②⑮	$10(k + 1)$	$6k$	$c = 8k + 5、f = -2k - 5 < 0$	×
②⑯	$10k$	$6(k + 1)$	$c = 8k + 3、f = -2k + 3 < 0$	×
②⑰	$12(k + 1)$	$5k$	$c = \frac{17k + 12}{2}、f = \frac{-7k - 12}{2} < 0$	×
②⑱	$12k$	$5(k + 1)$	$c = \frac{17k + 5}{2}、f = \frac{-7k + 5}{2} < 0$	×
②⑲	$15(k + 1)$	$4k$	$c = \frac{19k + 15}{2}、f = \frac{-11k - 15}{2} < 0$	×
③⑩	$15k$	$4(k + 1)$	$c = \frac{19k + 4}{2}、f = \frac{-11k + 4}{2} < 0$	×
③⑪	$20(k + 1)$	$3k$	$c = \frac{23k + 20}{2}、f = \frac{-17k - 20}{2} < 0$	×
③⑫	$20k$	$3(k + 1)$	$c = \frac{23k + 3}{2}、f = \frac{-17k + 3}{2} < 0$	×
③⑬	$30(k + 1)$	$2k$	$c = 16k + 15、f = -14k - 15 < 0$	×
③⑭	$30k$	$2(k + 1)$	$c = 16k + 1、f = -14k + 1 < 0$	×
③⑮	$60(k + 1)$	k	$c = \frac{61k + 60}{2}、f = \frac{-59k - 60}{2} < 0$	×
③⑯	$60k$	$(k + 1)$	$c = \frac{61k + 1}{2}、f = \frac{-59k + 1}{2} < 0$	×
③⑰	$60(k^2 + k)$	1	$c = \frac{1 + 60(k^2 + k)}{2}、f = \frac{1 - 60(k^2 + k)}{2} < 0$	×
③⑱	$30(k^2 + k)$	2	$c = 1 + 15(k^2 + k)、f = 1 - 15(k^2 + k) < 0$	×
③⑲	$20(k^2 + k)$	3	$c = \frac{3 + 10(k^2 + k)}{2}、f = \frac{3 - 10(k^2 + k)}{2} < 0$	×
④⑩	$15(k^2 + k)$	4	$c = \frac{4 + 15(k^2 + k)}{2}、f = \frac{4 - 15(k^2 + k)}{2} < 0$	×

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
④①	$12(k^2+k)$	5	$c = \frac{5+12(k^2+k)}{2}、f = \frac{5-12(k^2+k)}{2} < 0$	×
④②	$10(k^2+k)$	6	$c = 3+5(k^2+k)、f = 3-5(k^2+k) < 0$	×
④③	$6(k^2+k)$	10	$c = 5+3(k^2+k)、f = 5-3(k^2+k) < 0$	×
④④	$5(k^2+k)$	12	$c = \frac{12+5(k^2+k)}{2}、f = \frac{12-5(k^2+k)}{2} < 0$	×
④⑤	$4(k^2+k)$	15	$c = \frac{15+4(k^2+k)}{2}、f = \frac{15-4(k^2+k)}{2}$ 非整數	×
④⑥	$3(k^2+k)$	20	$c = \frac{20+3(k^2+k)}{2}、f = \frac{20-3(k^2+k)}{2}$	×
④⑦	$2(k^2+k)$	30	$c = 15+(k^2+k)、f = 15-(k^2+k)$	×
④⑧	(k^2+k)	60	$c = \frac{60+(k^2+k)}{2}、f = \frac{60-(k^2+k)}{2}$	×

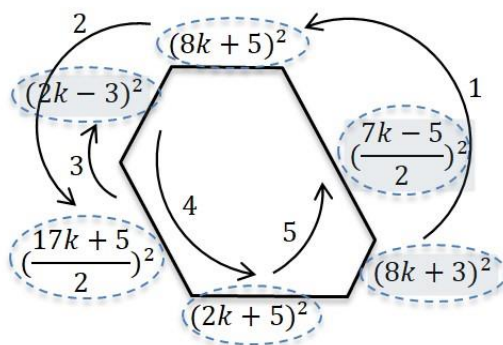
由編號②①得

$$(a, b, c, d, e, f) = (8k+3, 8k+5, \frac{17k+5}{2}, 2k-3, 2k+5, \frac{7k-5}{2})$$

，其中 $k \geq 3$ 的奇數

6個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖1→2→3→4→5的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



所以

$$\text{已知}(b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l$$

$$\text{令} \begin{cases} (b-a) = P、(b+a) = Q \\ (e-d) = R、(e+d) = S \end{cases}, l = P \times Q = R \times S \text{ 其中 } P、Q、R、S \text{ 為四個相異的奇數}$$

時，必可以找到對應的 $(a、b、c、d、e、f) \xrightarrow{\text{使得以}} (a^2、b^2、c^2、d^2、e^2、f^2)$ 為6個邊的等角六邊形(不照順序)。

若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$
 $\Rightarrow n = 4, \sum x_i \geq 1$ 時，有解。

7. 偶合數 $l = 2^5 \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m} = (a - c)(a + c) = (e - d)(e + d)$
 , 為 32 的倍數

	$(b - a)$	$\times$	$(b + a)$	$=$	$(e - d)$	$\times$	$(e + d)$
假設	4	$\times$	$8(2k + 1)$	$=$	8	$\times$	$4(2k + 1)$
解	$b = 8k + 6$ $a = 8k + 2$				$e = 4k + 6$ $d = 4k - 2$		

$$d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \Rightarrow (4k - 2)^2 + c^2 = f^2 + (8k + 2)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - f^2 = 48k^2 + 48k = 48(k^2 + k) = (c - f)(c + f) \in \text{偶數}$$

$$\text{其中 } (k^2 + k) \in \text{偶數}$$

編號	$(c - f)$	$(c + f)$	$c、f$ 的解	備註
①	1	$48(k^2 + k)$	$c、f$ 非整數	×
②	2	$24(k^2 + k)$	$c = 12(k^2 + k) + 1、f = 12(k^2 + k) - 1$	○
③	3	$16(k^2 + k)$	$c、f$ 非整數	×
④	4	$12(k^2 + k)$	$c = 6(k^2 + k) + 2、f = 6(k^2 + k) - 2$	○
⑤	6	$8(k^2 + k)$	$c = 4(k^2 + k) + 3、f = 4(k^2 + k) - 3$	○
⑥	8	$6(k^2 + k)$	$c = 3(k^2 + k) + 4、f = 3(k^2 + k) - 4$	○
⑦	12	$4(k^2 + k)$	$c = 2(k^2 + k) + 6、f = 2(k^2 + k) - 6$	○
⑧	16	$3(k^2 + k)$	$c = \frac{3(k^2 + k) + 16}{2}、f = \frac{3(k^2 + k) - 16}{2}$	○
⑨	24	$2(k^2 + k)$	$c = (k^2 + k) + 12、f = (k^2 + k) - 12$	○
⑩	48	$(k^2 + k)$	$c = \frac{(k^2 + k) + 48}{2}、f = \frac{(k^2 + k) - 48}{2}$	○
⑪	$k + 1$	$48k$	$c = \frac{49k + 1}{2}、f = \frac{47k - 1}{2}、k \in \text{奇數}$	○
⑫	k	$48(k + 1)$	$c = \frac{49k + 48}{2}、f = \frac{47k + 48}{2}、k \in \text{偶數}$	○
⑬	$2(k + 1)$	$24k$	$c = 13k + 1、f = 11k - 1$	○
⑭	$2k$	$24(k + 1)$	$c = 13k + 12、f = 11k + 12$	○
⑮	$3(k + 1)$	$16k$	$c = \frac{19k + 3}{2}、f = \frac{13k - 3}{2}、k \in \text{奇數}$	○
⑯	$3k$	$16(k + 1)$	$c = \frac{19k + 16}{2}、f = \frac{13k + 16}{2}、k \in \text{偶數}$	○
⑰	$4(k + 1)$	$12k$	$c = 8k + 2、f = 4k - 2$ ，邊長重複	×
⑱	$4k$	$12(k + 1)$	$c = 8k + 6、f = 4k + 6$ ，邊長重複	×
⑲	$6(k + 1)$	$8k$	$c = 7k + 3、f = k - 3$	○
⑳	$6k$	$8(k + 1)$	$c = 7k + 4、f = k + 1$	○
㉑	$8(k + 1)$	$6k$	$c = 7k + 4、f = -k - 4 < 0$	×

編號	$(c-f)$	$(c+f)$	$c、f$ 的解	備註
②②	$8k$	$6(k+1)$	$c = 7k + 3, f = -k - 1 < 0$	×
②③	$12(k+1)$	$4k$	$c = 8k + 6, f = -4k - 6 < 0$	×
②④	$12k$	$4(k+1)$	$c = 8k + 2, f = -4k + 2 < 0$	×
②⑤	$16(k+1)$	$3k$	$c = \frac{19k+16}{2}, f = \frac{-13k-16}{2} < 0$	×
②⑥	$16k$	$3(k+1)$	$c = \frac{19k+3}{2}, f = \frac{-13k+3}{2} < 0$	×
②⑦	$24(k+1)$	$2k$	$c = 13k + 12, f = -11k - 12 < 0$	×
②⑧	$24k$	$2(k+1)$	$c = 13k + 1, f = -11k - 11 < 0$	×
②⑨	$48(k+1)$	k	$c = \frac{49k+48}{2}, f = \frac{-47k-48}{2} < 0$	×
③⑩	$48k$	$(k+1)$	$c = \frac{49k+1}{2}, f = \frac{-47k+1}{2} < 0$	×
③⑪	$48(k^2+k)$	1	$c = \frac{1+48(k^2+k)}{2}, f = \frac{1-48(k^2+k)}{2} < 0$	×
③⑫	$24(k^2+k)$	2	$c = 2 + 12(k^2+k), f = 2 - 12(k^2+k) < 0$	×
③⑬	$16(k^2+k)$	3	$c = \frac{3+16(k^2+k)}{2}, f = \frac{3-16(k^2+k)}{2} < 0$	×
③⑭	$12(k^2+k)$	4	$c = 2 + 6(k^2+k), f = 2 - 6(k^2+k) < 0$	×
③⑮	$8(k^2+k)$	6	$c = 3 + 4(k^2+k), f = 3 - 4(k^2+k) < 0$	×
③⑯	$6(k^2+k)$	8	$c = 4 + 3(k^2+k), f = 4 - 3(k^2+k) < 0$	×
③⑰	$4(k^2+k)$	12	$c = 6 + 2(k^2+k), f = 6 - 2(k^2+k)$	×
③⑱	$3(k^2+k)$	16	$c = \frac{16+3(k^2+k)}{2}, f = \frac{16-3(k^2+k)}{2}$	×
③⑲	$2(k^2+k)$	24	$c = 12 + (k^2+k), f = 12 - (k^2+k)$	×
④⑩	(k^2+k)	48	$c = \frac{48+(k^2+k)}{2}, f = \frac{48-(k^2+k)}{2}, k = 2, 5, 6$	○

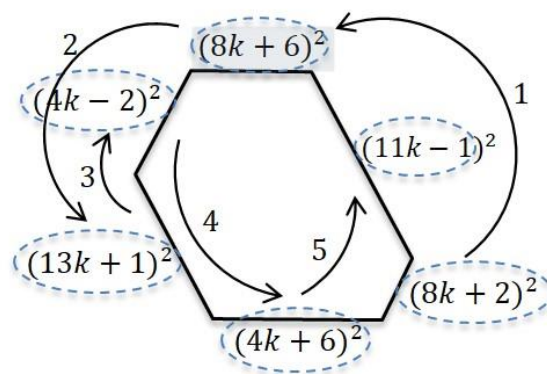
由編號⑬得

$$(a, b, c, d, e, f) = (8k + 2, 8k + 6, 13k + 1, 4k - 2, 4k + 6, 11k - 1)$$

，其中 $k \geq 1$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$

兩組邊長，依右圖 1→2→3→4→5 的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



由編號⑩得

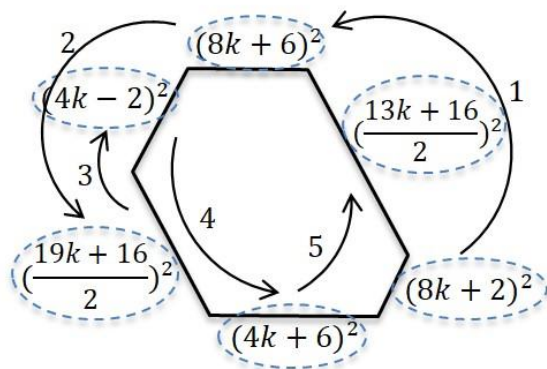
(a, b, c, d, e, f)

$$= (8k + 2, 8k + 6, \frac{19k + 16}{2}, 4k - 2, 4k + 6, \frac{13k + 16}{2})$$

，其中 $k \geq 2$ 的偶數

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$ 兩組邊長

，依右圖 1→2→3→4→5 的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



由編號⑪得

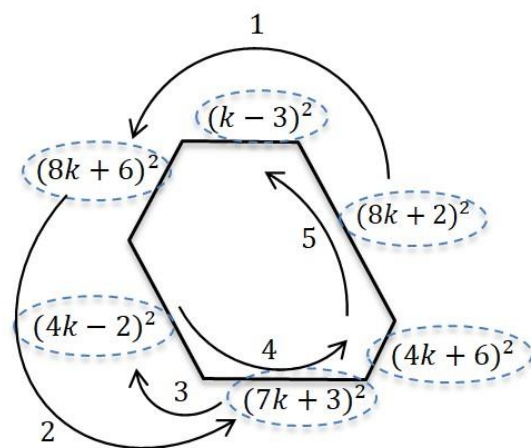
(a, b, c, d, e, f)

$$= (8k + 2, 8k + 6, 7k + 3, 4k - 2, 4k + 6, k - 3)$$

，其中 $k \geq 4$

6 個邊分別將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$ 兩組邊長

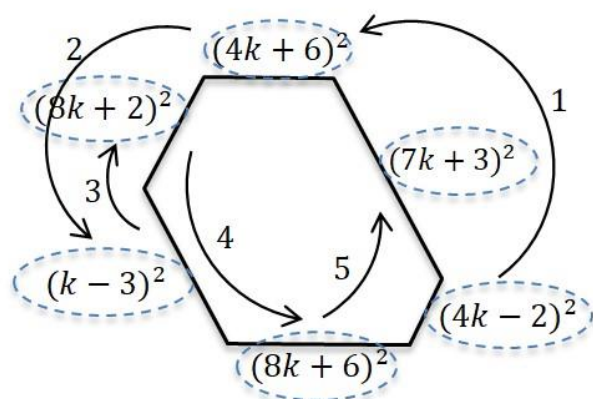
，依右圖 1→2→3→4→5 的步驟，即可完成一個邊長全為完全平方數的等角六邊形。



先填 (a^2, b^2, c^2) ，再填 (d^2, e^2, f^2) 的情況；

與先填 (d^2, e^2, f^2) ，再填 (a^2, b^2, c^2) 的情況

，所得的圖示相同的。



所以

$$\text{已知 } (b-a)(b+a) = (e-d)(e+d) = l$$

$$\text{令 } \begin{cases} (b-a) = P, (b+a) = Q \\ (e-d) = R, (e+d) = S \end{cases}, l = P \times Q = R \times S \text{ 其中 } P, Q, R, S \text{ 為四個相異的奇數}$$

時，必可以找到對應的 $(a, b, c, d, e, f) \xrightarrow{\text{使得以}} (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ 為 6 個邊的等角六邊形(不照順序)。

若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$

$\Rightarrow n = 5$ ，必有解。

由 5. 至 7. 得知

已知若 $l = 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$ ，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$

若 $n = 3$ 時， $\sum x_i \geq 1$ 時，有解。

若 $n = 4$ 時， $\sum x_i \geq 1$ 時，有解。

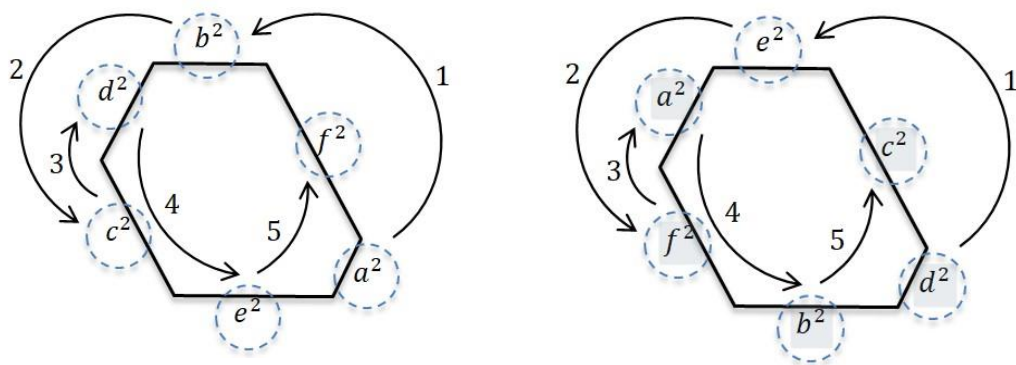
若 $n = 5$ 時，有解

$l = 8k, k = 3, 4, 5, \dots$

若 $l = 2^3 k$ ，其中， $k = 3, 4, 5, \dots$ ，必有解。必可以找到對應的 (a, b, c, d, e, f)

使得以

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ 為 6 個邊的等角六邊形(不照順序)。



將 $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ 分成 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$ 兩組邊長分別是兩兩不相鄰的邊。

再將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$ 的排列順序是有規律：

(1) 先將選一組資料依順序，逆時針跳 2 格排入。(步驟 1. 2.)

(2) 再順時針跳 1 格填入另一組的第一個數字。(步驟 3.)

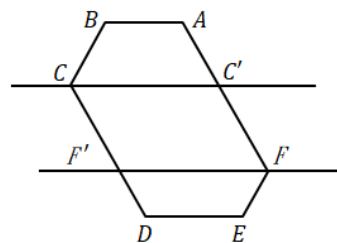
(3) 最後再最後 2 個資料一逆時針跳 2 格填入。(步驟 4. 5.)

將 $(a^2, b^2, c^2), (d^2, e^2, f^2)$ 依上圖 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 的步驟，即可以完成一個等角六邊形。

四、討論等角六邊形的面積及鑲嵌正三角形的問題？

1. 所有的等角六邊形都可以用正三角形鑲嵌。

將任意一個等角六邊形 $ABCDEF$ ，分割成兩個底角 60° 為等腰梯形+一個對角為 60° 的平行四邊形，所以一定可以用正三角形填滿。



2. 若邊長為 $(a, b, c), (a, b, c)$ 的等角六邊形的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} [(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$

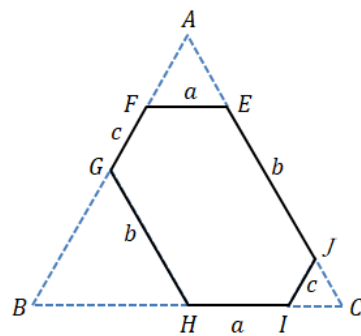
$= \frac{\sqrt{3}}{2} (ab + ac + bc)$ ，鑲嵌所需要大小相同正三角形的最大邊長為 (a, b, c) 的公因數，即

$H.C.F.(a、b、c) = H$ ，所需的正三角形個數為 $\frac{2(ab+ac+bc)}{H^2}$ 個。

等角六邊形 $EFGHIJ$ 的面積為大正三角形 $\triangle ABC$ 減掉三個小正三角形

等角六邊形 $EFGHIJ = \triangle ABC - (\triangle AEF + \triangle GBH + \triangle JIC)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)] = \frac{\sqrt{3}}{2}(ab+ac+bc) \end{aligned}$$



嵌所需要大小相同正三角形的最大邊長為 $(a、b、c)$ 的公因數，即 $H.C.F.(a、b、c) = H$

，所需的正三角形個數為 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(ab+ac+bc)}{\frac{\sqrt{3}}{4}H^2} = \frac{2(ab+ac+bc)}{H^2}$ 個。

3. 若邊長為 $(a_1、a_2、a_3)、(a'_1、a'_2、a'_3)$ 等角六邊形的面積為 A

就藍色三角形 $A = \frac{\sqrt{3}}{4}[(a_1+a'_3+a_2)^2 - (a_1^2+a_2^2+a_3^2)]$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_1^2+a_3'^2+a_2^2+2(a_1a_3'+a_1a_2+a_3'a_2)-a_1^2-a_2^2-a_3'^2] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_3'^2-a_3'^2+2(a_1a_3'+a_1a_2+a_3'a_2)] \end{aligned}$$

就紅色三角形 $A = \frac{\sqrt{3}}{4}[(a_3'+a_2+a'_1)^2 - a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2]$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_3'^2+a_2'^2+a_1'^2+2(a_3'a_2+a_3'a_1'+a_2a_1')-a_1'^2-a_2'^2-a_3'^2] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_2'^2-a_2'^2+2(a_3'a_2+a_3'a_1'+a_2a_1')] \end{aligned}$$

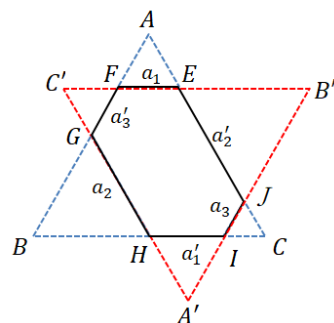
所以 $A = \frac{\sqrt{3}}{4}[a_i'^2-a_i'^2+2 \times (a_i \text{ 與兩鄰邊之兩兩乘積和})]$ ， $i = 1,2,3$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_i'^2-a_i'^2+2 \times (a_i' \text{ 與兩鄰邊之兩兩乘積和})]$$
， $i = 1,2,3$

鑲嵌所需要大小相同正三角形的最大邊長為 $(a_1、a_2、a_3、a'_1、a'_2、a'_3)$ 的最大公因數，即

最大公因數 $H.C.F.(a_1、a_2、a_3、a'_1、a'_2、a'_3) = H$

所需的正三角形個數為 $\frac{a_i'^2-a_i'^2+2 \times a_i \text{ 與兩鄰邊之兩兩乘積和}}{H^2}$ 個。

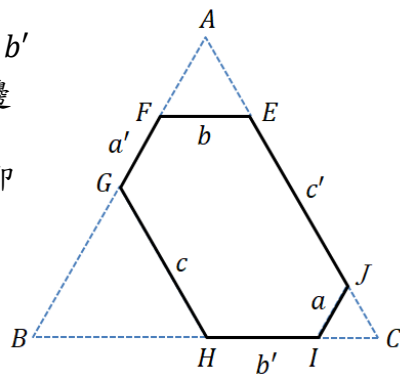


肆、結論

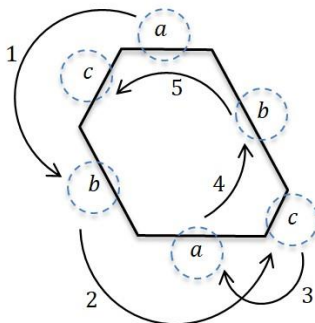
一、等角六邊形任不相鄰的三個邊長為 a 、 b 、 c 其對邊長分別為 a' 、 b' 、 c' ，則三組對邊均相互平行，任兩相鄰邊長的和必等於其對邊

$$\text{長的和} \begin{cases} a + b' = a' + b \\ b + c' = b' + c \\ c + a' = c' + a \end{cases}, \text{若已知相鄰三邊及任一邊的長度，即}$$

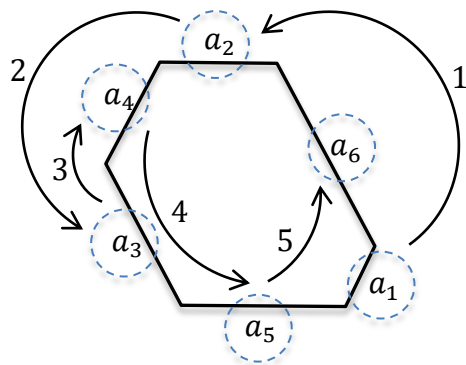
可決定唯一的等角六邊形。



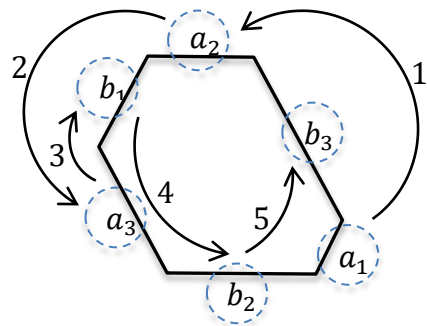
二、1. 相同兩組任意三個數 (a, b, c) 、 (a, b, c) ，必為等角六邊形的6個邊，以結論三的步驟填入(如右圖所示，正對邊相等)。



2. 以任6個等差數列為邊長，必能構成一個等角六邊形(不照順序)。若6個等差數列由小至大依序為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ，任選一個邊再依右圖1→2→3→4→5步驟的順序，即可完成一個等角六邊形。



2. 以任兩組公差相等的等差數列(各三個)為邊長，必能構成一個等角六邊形(不照順序)。若兩組公差相等的等差數列(各三個) (a_1, a_2, a_3) 及 (b_1, b_2, b_3) ，分別由小至大排列，以 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 的順序，再依右圖1→2→3→4→5的步驟，即可完成一個等角六邊形。



三、若等角六邊形的6個邊為 $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ (不照順序)

$$\begin{cases} b^2 + d^2 + c^2 = c^2 + e^2 + a^2 \\ c^2 + e^2 + a^2 = b^2 + f^2 + a^2 \\ b^2 + d^2 + c^2 = b^2 + f^2 + a^2 \end{cases} \xRightarrow{\text{化簡}} \begin{cases} b^2 + d^2 = e^2 + a^2 \\ c^2 + e^2 = b^2 + f^2 \\ d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \end{cases}$$

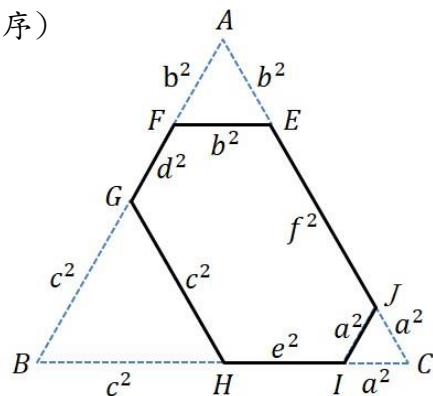
$$\text{令 } l = (b - a)(b + a) = (e - d)(e + d)$$

$$= 2^n \times (a_1)^{x_1} \times (a_2)^{x_2} \times (a_3)^{x_3} \times \cdots \times (a_m)^{x_m}$$

，其中 $\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$

1. 若 $n = 0$ ， $\sum x_i \geq 2$ 時，有解。

若 $\sum x_i = 2$ ， $x_1, x_2 \neq 0$ (至少有兩個奇質因數)，才有解。



2. 若 $n = 1$ 時，無解。

3. 若 $n = 2$ 時， $\sum x_i \geq 2$ 時，有解。

若 $\sum x_i = 2$ ， $x_1, x_2 \neq 0$ (至少有兩個奇質因數)，才有解。

4. 若 $n = 3$ 時， $\sum x_i \geq 1$ 時，有解。

5. 若 $n = 4$ 時， $\sum x_i \geq 1$ 時，有解。

6. 若 $n = 5$ 時，有解。

$l = 8k, k = 3, 4, 5, \dots$

四、6 個邊全為完全平方數的等角六邊形，其變化有規律。

將 $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ 分成 (a^2, b^2, c^2) 、 (d^2, e^2, f^2)

兩組邊長分別是兩兩不相鄰的邊。

(a^2, b^2, c^2) 、 (d^2, e^2, f^2) 的排列順序是有規律：

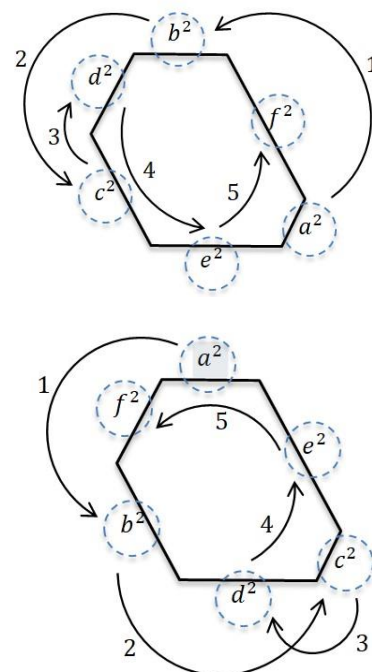
1. 先將選一組資料依順序，逆時針跳 2 格排入。(步驟 1. 2.)

2. 再順時針跳 1 格填入另一組的第一個數字。(步驟 3.)

3. 最後再最後 2 個資料依逆時針跳 2 格填入。(步驟 4. 5.)

將 (a^2, b^2, c^2) 、 (d^2, e^2, f^2) 依右圖 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 5 的步驟

，即可以完成一個等角六邊形。



五、六個邊長為完全平方數的等角六邊形之範例：

$(a, b, c, d, e, f) \rightarrow (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ ，先分成 (a^2, b^2, c^2) 及 (d^2, e^2, f^2) 兩組資料，再依結論二的圖示之步驟 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 5 順序，即可完成一個等角六邊形。

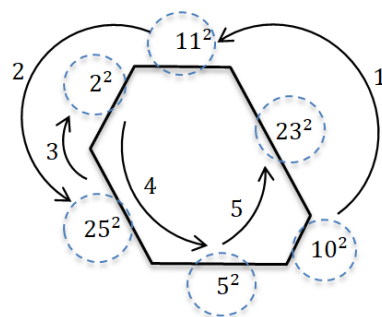
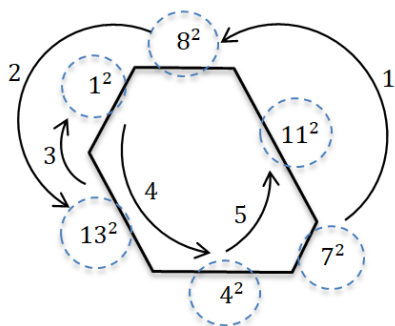
1. 等角六邊形範例 1

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ ，其中 $k \geq 2$		圖示
a^2	$(3k + 1)^2$	
b^2	$(3k + 2)^2$	
c^2	$(2(k^2 + k) + 1)^2$	
d^2	$(k - 1)^2$	
e^2	$(k + 2)^2$	
f^2	$(2(k^2 + k) - 1)^2$	

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = ((3k + 1)^2, (3k + 2)^2, (2(k^2 + k) + 1)^2, (k - 1)^2, (k + 2)^2, (2(k^2 + k) - 1)^2)$

$k = 2$ ， $(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (7^2, 8^2, 13^2, 1^2, 4^2, 11^2)$

$k = 3$ ， $(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (10^2, 11^2, 25^2, 2^2, 5^2, 23^2)$



2. 等角六邊形範例 2

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$, 其中 $k \geq 7$ 的奇數		圖示
a^2	$(3k+1)^2$	
b^2	$(3k+2)^2$	
c^2	$(\frac{9k+1}{2})^2$	
d^2	$(k-1)^2$	
e^2	$(k+2)^2$	
f^2	$(\frac{7k-1}{2})^2$	

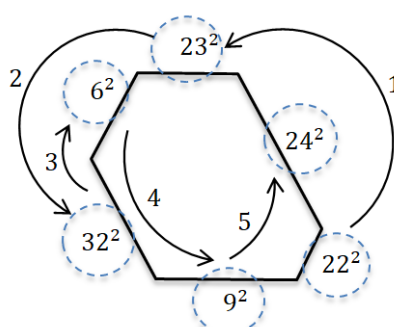
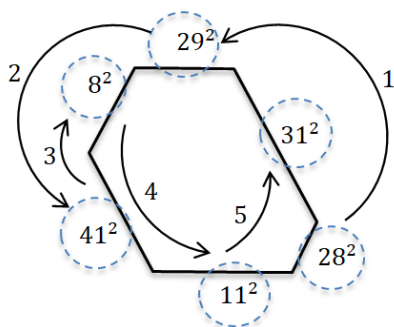
$$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = ((3k+1)^2, (3k+2)^2, (\frac{9k+1}{2})^2, (k-1)^2, (k+2)^2, (\frac{7k-1}{2})^2)$$

$$k=3, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (10^2, 11^2, 14^2, 2^2, 5^2, 10^2)$$

$$k=5, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (16^2, 17^2, 23^2, 4^2, 7^2, 17^2)$$

$$k=7, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (22^2, 23^2, 32^2, 6^2, 9^2, 24^2)$$

$$k=9, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (28^2, 29^2, 41^2, 8^2, 11^2, 31^2)$$



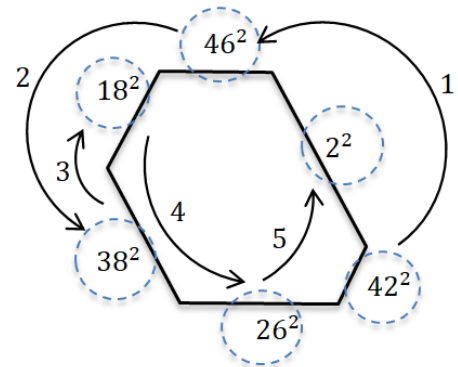
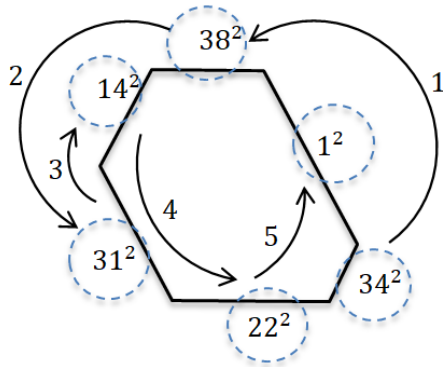
3. 等角六邊形範例 3

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$, 其中 $k \geq 4$		圖示
a^2	$(8k+2)^2$	
b^2	$(8k+6)^2$	
c^2	$(7k+3)^2$	
d^2	$(4k-2)^2$	
e^2	$(4k+6)^2$	
f^2	$(k-3)^2$	

$$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = ((8k+2)^2, (8k+6)^2, (7k+3)^2, (4k-2)^2, (4k+6)^2, (k-3)^2)$$

$$k=4, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (34^2, 38^2, 31^2, 14^2, 22^2, 1^2)$$

$$k=5, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (42^2, 46^2, 38^2, 18^2, 26^2, 2^2)$$



4. 等角六邊形範例 4

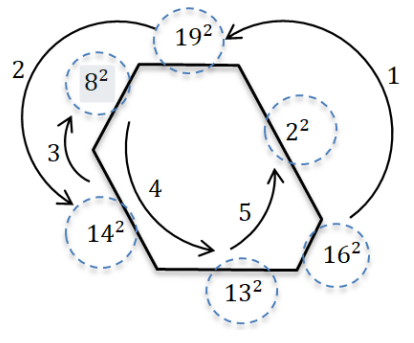
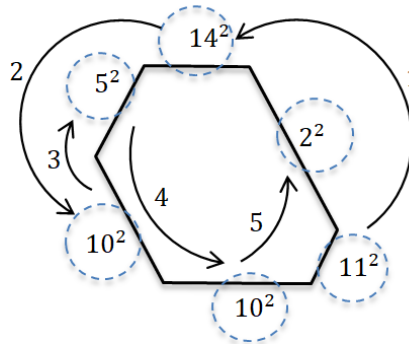
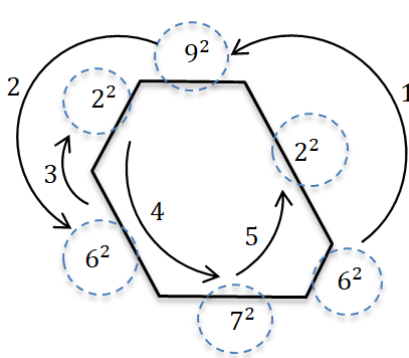
$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ ，其中 $k \geq 3$		圖示
a^2	$(5k+1)^2$	
b^2	$(5k+4)^2$	
c^2	$(4k+2)^2$	
d^2	$(3k-1)^2$	
e^2	$(3k+4)^2$	
f^2	$(2)^2$	

$$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = ((5k+1)^2, (5k+4)^2, (4k+2)^2, (3k-1)^2, (3k+4)^2, 2^2)$$

$$k=1, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (6^2, 9^2, 6^2, 2^2, 7^2, 2^2)$$

$$k=2, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (11^2, 14^2, 10^2, 5^2, 10^2, 2^2)$$

$$k=3, (a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2) = (16^2, 19^2, 14^2, 8^2, 13^2, 2^2)$$



六、等角六邊形面積

1. 所有的等角六邊形都可以用正三角形鑲嵌。

2. 若邊長為 (a, b, c) 、 (a, b, c) 的等角六邊形的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} [(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(ab + ac + bc) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{不相鄰三邊之兩兩乘積和})$ ，鑲嵌所需要大小相同正三角形的最大邊長為 $(a、b、c)$ 的公因數，即最大公因數 $H.C.F.(a、b、c) = H$ ，所需的正三角形個數為 $\frac{2(ab + ac + bc)}{H^2} = \frac{2(\text{不相鄰三邊之兩兩乘積和})}{H^2}$ 個。

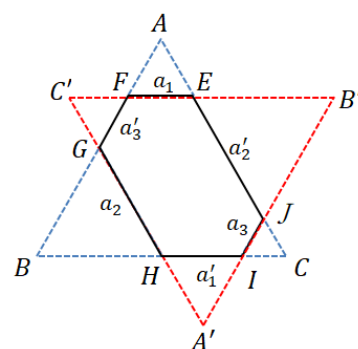
3. 若邊長為 $(a_1、a_2、a_3)、(a'_1、a'_2、a'_3)$ 等角六邊形的面積為 A

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}[a_3'^2 - a_3^2 + 2(a_1a_3' + a_1a_2 + a_3'a_2)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_2'^2 - a_2^2 + 2(a_3'^2a_2 + a_3'^2a_1' + a_2a_1')]$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}[a_i'^2 - a_i^2 + 2 \times (a_i \text{與兩鄰邊之兩兩乘積和})], i = 1, 2, 3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[a_i'^2 - a_i^2 + 2 \times (a_i' \text{與兩鄰邊之兩兩乘積和})], i = 1, 2, 3$$



鑲嵌所需要大小相同正三角形的最大邊長為 $(a_1、a_2、a_3、a'_{11}、a'_2、a'_3)$ 的最大公因數，即最大公因數 $H.C.F.(a_1、a_2、a_3、a'_{11}、a'_2、a'_3) = H$ ，即所需的正三角形個數為

$$\frac{a_i'^2 - a_i^2 + 2 \times a_i(\text{與兩鄰邊之兩兩乘積和})}{H^2} = \frac{a_i'^2 - a_i^2 + 2 \times (a_i' \text{與兩鄰邊之兩兩乘積和})}{H^2} \text{個。}$$

伍、未來展望

- 一、尋找一組等比數數列是否為等角六邊形的 6 個邊？
- 二、尋找 6 個完全立方數是否為等角六邊形的 6 個邊？是否有規律？
- 三、討論等角六邊形鑲嵌時，至少需要幾個不盡相同的正三角形？

陸、參考文獻

- 一、2023 年 12 月科學研習期刊第 62 卷第 6 期森棚教官數學題——內角相等六邊形」——游森棚教授。
- 二、作品的圖、表全由作者自己繪製。

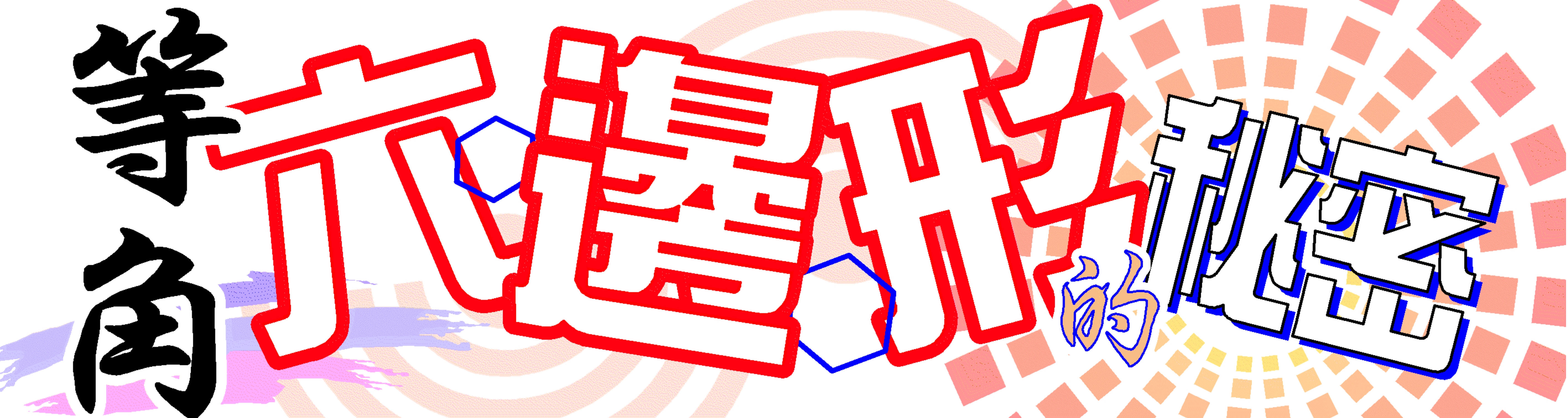
【評語】 030404

作者從《科學研習》2023 年 12 月第 62 卷第 6 期中游森棚教授提出的「內角相等六邊形」問題出發，進一步思考並探究以下幾何問題：如何繪製邊長不等但內角相等的六邊形、哪些整數組合可作為其六邊長、這些邊長間又具備何種數學關係。

此作品獲得成果值得肯定與建議的有：若已知四邊長且其中三邊相鄰，即可決定唯一的等角六邊形；三組對邊都相等或都不相等，才能決定一個等角六邊形，為等角六邊形的構造提供了明確的條件；證明了取兩組有相同公差的數列中連續三個正數為邊長，可決定唯一的等角六邊形；在一組等差數列中任取 6 個連續正數為邊長，可形成兩個相異的等角六邊形，展現了規律性；探討等角六邊形邊長為完全平方數的特殊情況，給出了在特定條件下存在解的結論，具有原創性。 另一方面，對於一些以敘述來說明的成果，若能以定理方式呈現、進一步探究其他方式所形成的等角六邊形的可能性質與探討對應的幾何性質，相信將增添此作品的研究廣度與深度。

總體而言，此作品發現多個關於等角六邊形邊長決定的條件和構造方法，結合幾何圖形與數論的探索精神，並透過表格與圖形輔助說明，是成果特色，值得肯定與鼓勵。

作品海報

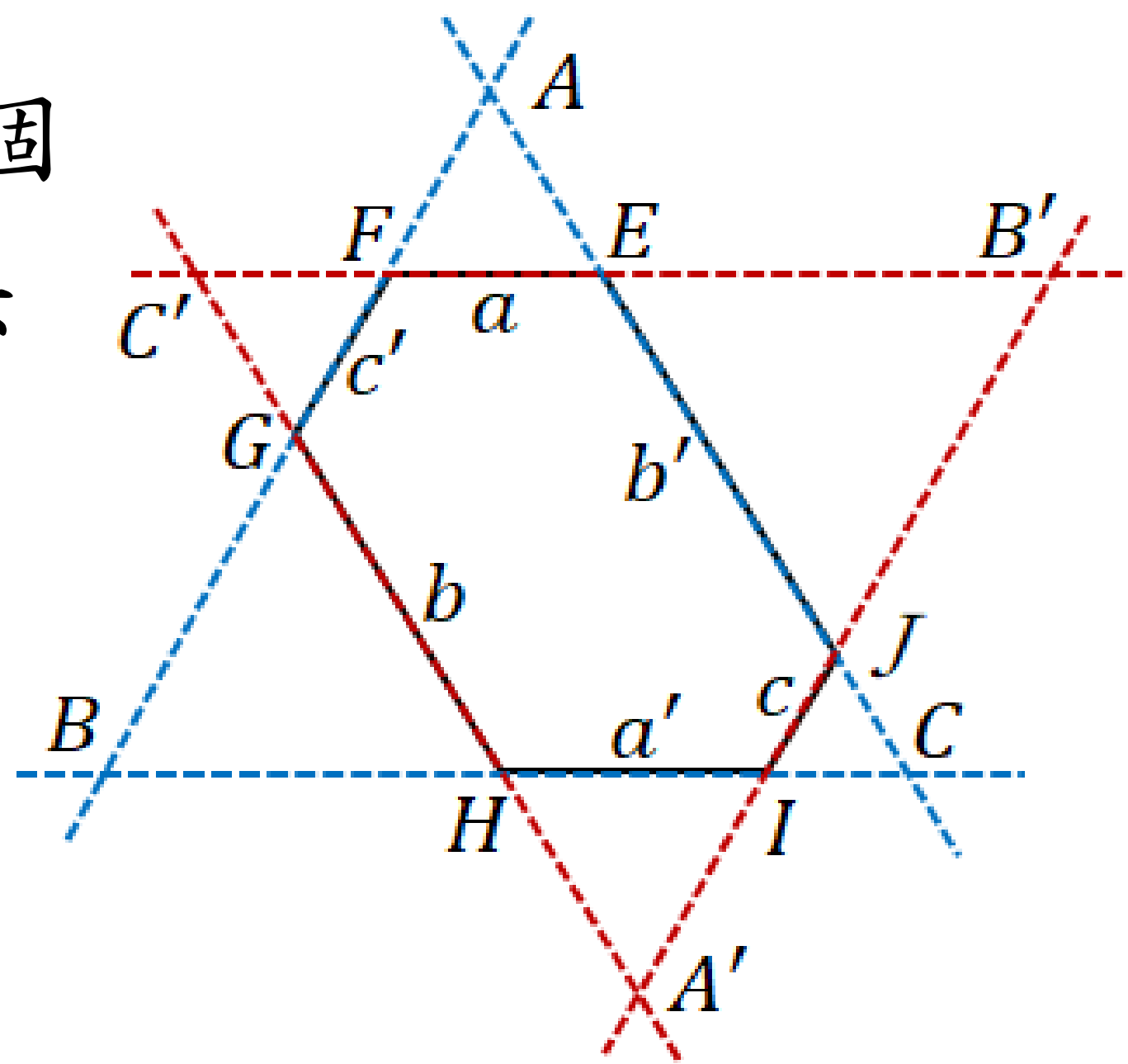


新电视

新电视

摘要

作任意等角六邊形之6邊的延長線，即會得到兩個正三角形，其中三組對邊以 $[(a, a'), (b, b'), (c, c')]$ 表示，則有以下成果：



1. 三組對邊均相互平行，任兩相鄰邊長和必等於其對邊長和(三組對邊差均相等)。等角六邊形的三組對邊 $\leftrightarrow [(x, y), (x + k, y + k), (x + m, y + m)]$ 。
2. 兩組有相同公差的數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為其特列，則若三組對邊為 $[(a_x, b_y), (a_{x+k}, b_{y+k}), (a_{x+m}, b_{y+m})]$ 時，可得唯一等角六邊形，其中 $a_i, b_i > 0$ 。
3. 已知4邊長度，且其中3邊相鄰，即可決定唯一之等角六邊形。
4. 三組對邊都相等或都不相等，才能決定一個等角六邊形。
5. 當等角六邊形邊長為完全平方數 $[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$ 時，可以求出6邊不相等的一些特例。
6. 討論等角六邊形的面積與用相同大小正三角形鑲嵌的最少個數。

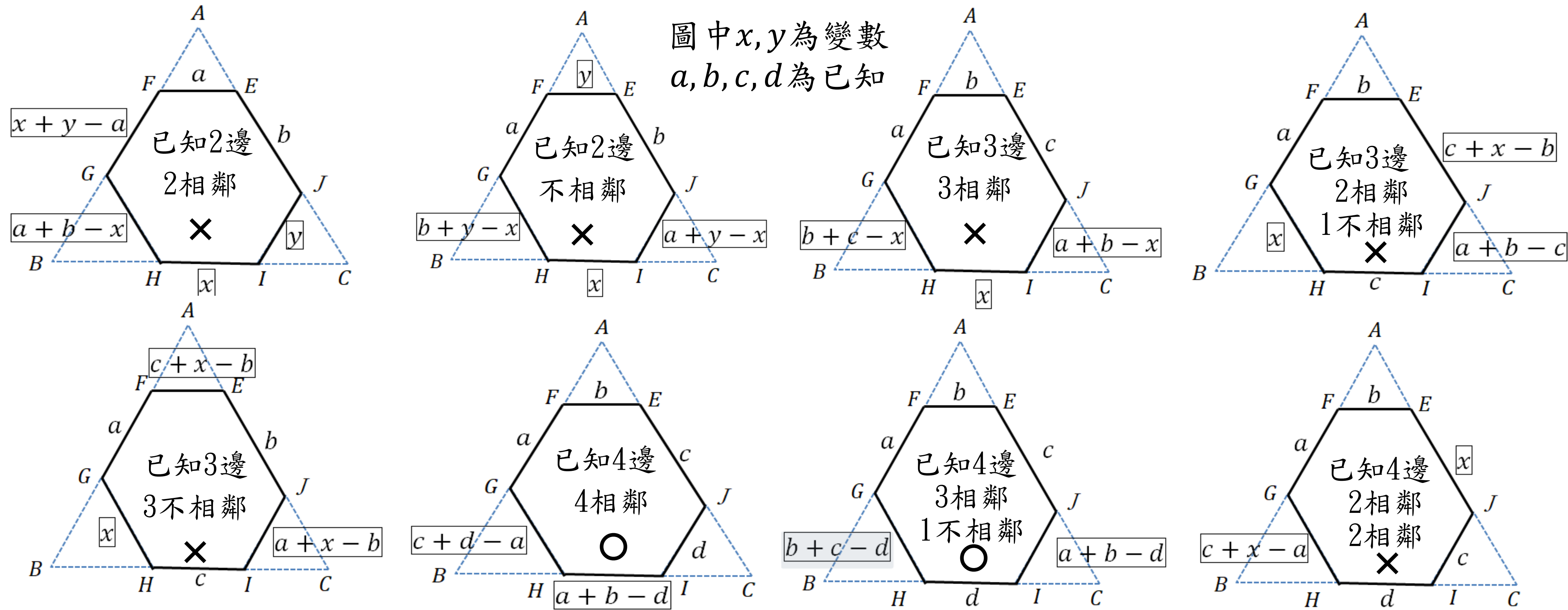
研究過程及方法

一、等角六邊形6邊長(三組對邊)為 $[(a, a'), (b, b'), (c, c')]$ ，如右上圖所示。

$$\overline{AB} = a + c' + b, \overline{BC} = b + a' + c, \overline{AC} = c + b' + a, \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

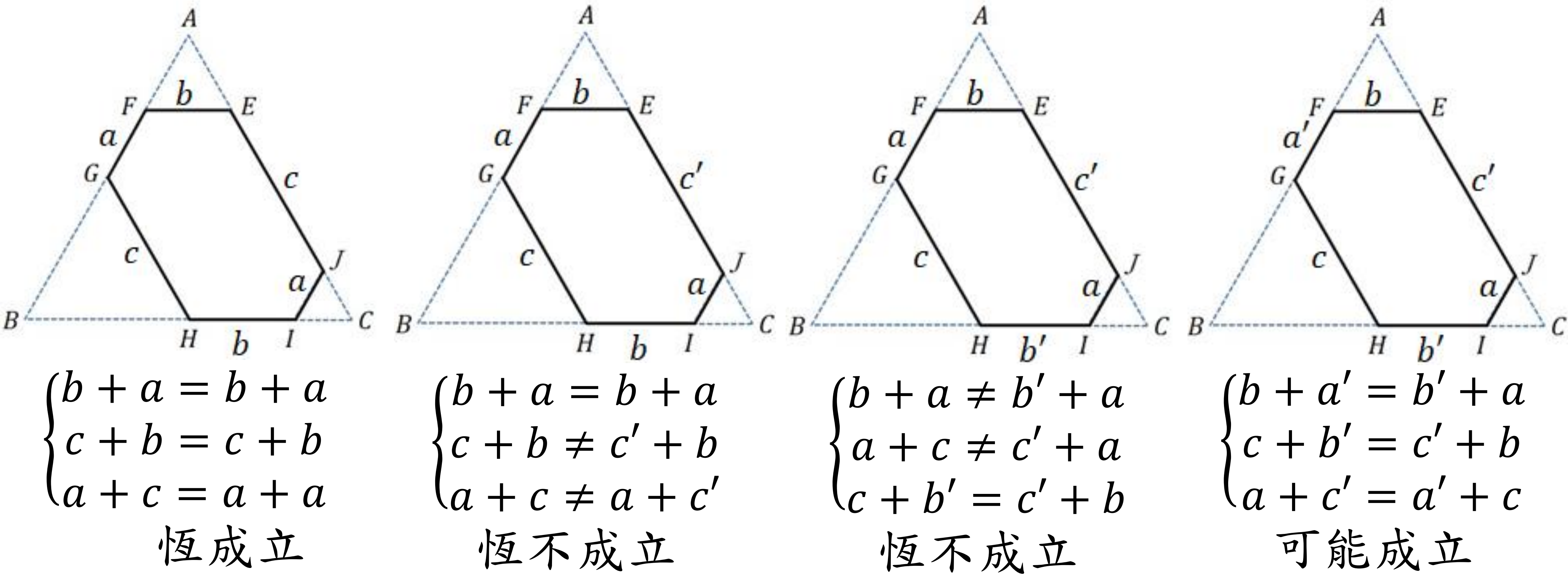
$$\text{則} \begin{cases} a + c' + b = b + a' + c \\ b + a' + c = c + b' + a \\ c + b' + a = a + c' + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + c' = a' + c \\ b + a' = b' + a \\ c + b' = c' + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - a' = c - c' \\ b - b' = a - a' \\ c - c' = b - b' \end{cases} \dots \dots (*)$$

已知1邊、2邊(相鄰, 不相鄰)、3邊(3相鄰, 2相鄰1不相鄰, 3不相鄰)、4邊(4相鄰, 3相鄰1不相鄰, 2相鄰2相鄰)等，9種情況加以討論。



1. 任兩相鄰邊長和必等於其對邊長和(三組對邊差均相等)。
2. 若已知4邊長度，且其中3邊相鄰，即可決定唯一之等角六邊形。

二、討論，若 $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a \neq a' \\ b \neq b' \\ c \neq c' \end{cases}$ 條件下 $(*)$ 式是否成立？



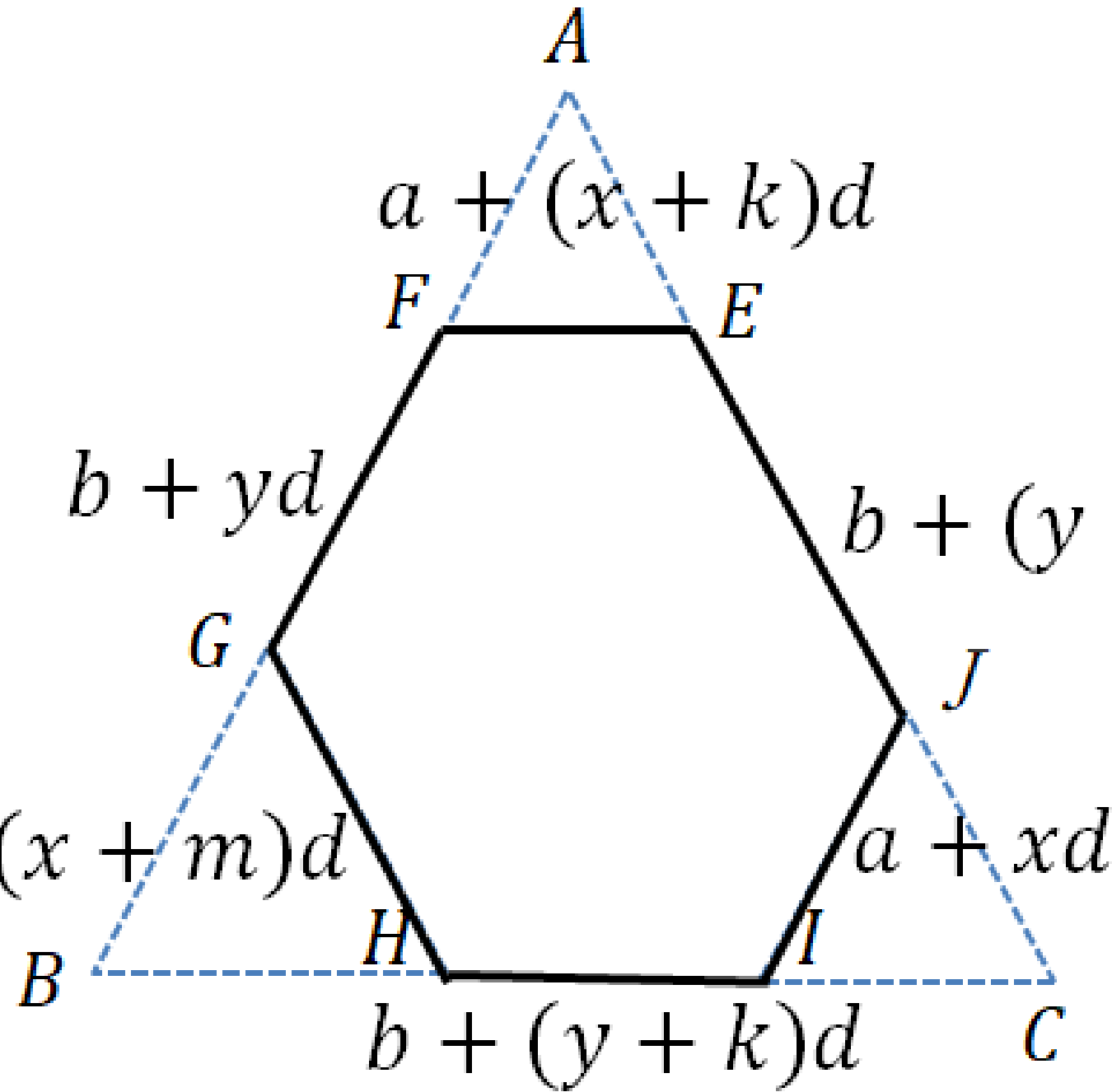
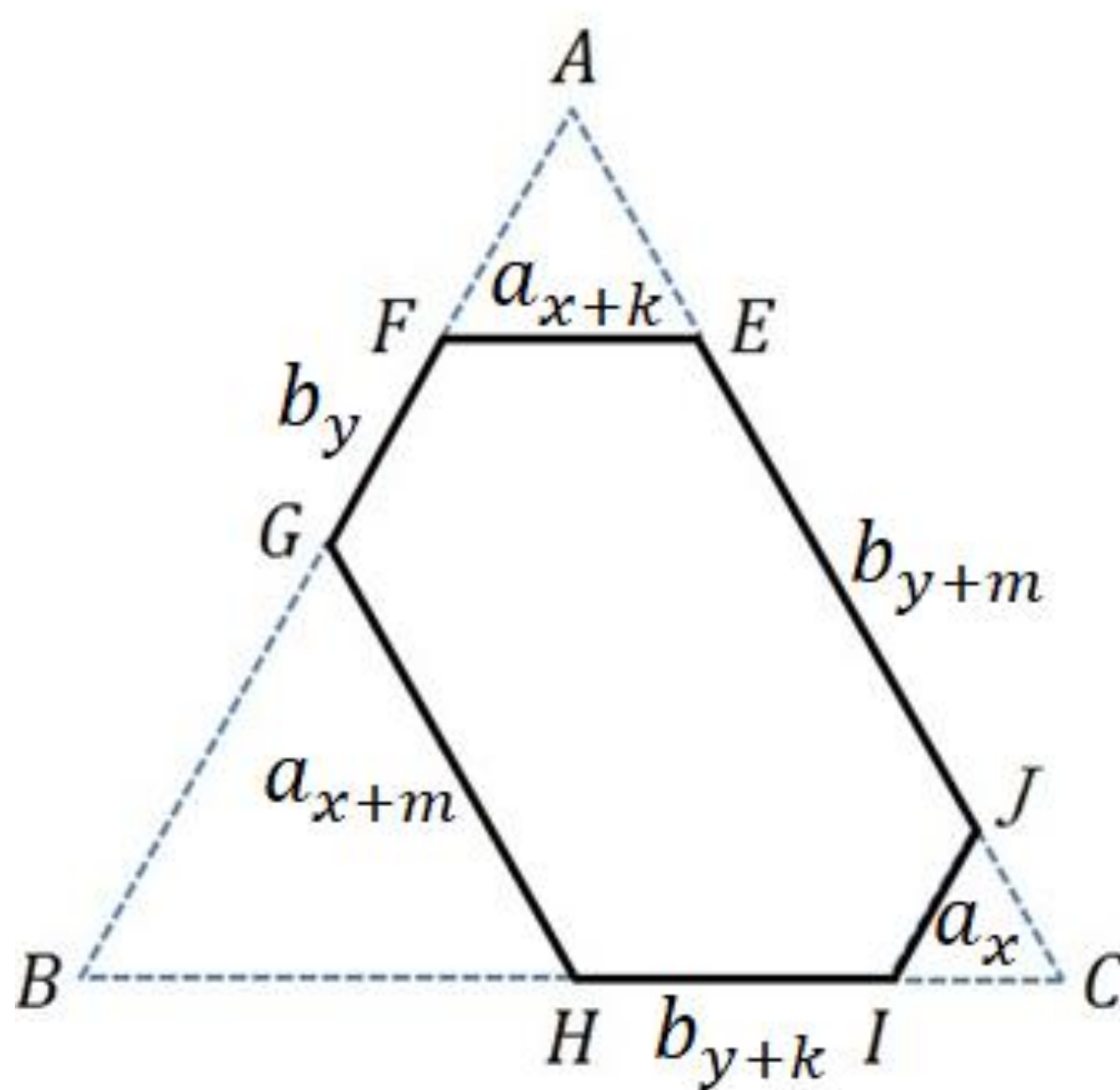
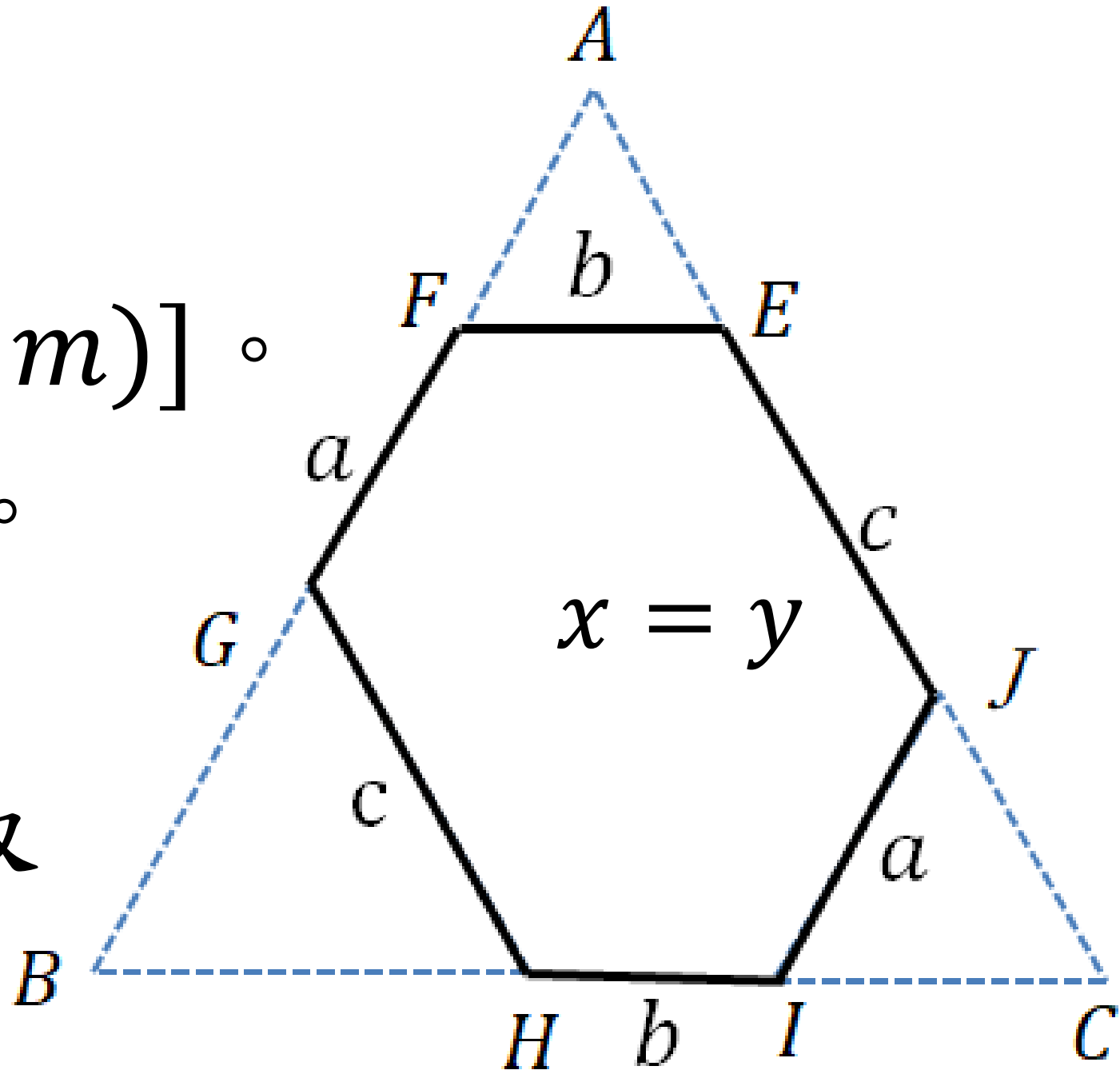
三、討論等角六邊形的6邊長是否為等差數列？

由(*)式得知，等角六邊形的邊長關係。

令等角六邊形的三組對邊為 $[(x, y), (x + k, y + k), (x + m, y + m)]$ 。

1. 若 $x = y$ ，得三組對邊相等 $[(a, a), (b, b), (c, c)]$ 的等角六邊形。
2. 若 $x \neq y$ ，兩組公差相等的數列為其特例。

兩數列分別為 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ ，其中 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。在 $\langle a_n \rangle$ 中任取3項分別為 (a_x, a_{x+k}, a_{x+m}) ，又在 $\langle b_n \rangle$ 中取對應的3項分別為 (b_y, b_{y+k}, b_{y+m}) ，其中兩數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 的首項分別為 a, b ，公差為 d ， $a_i, b_i > 0$ ，則 $[(a_x, b_y), (a_{x+k}, b_{y+k}), (a_{x+m}, b_{y+m})]$ 可得到唯一的等角六邊形。



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2a + b + (2x + y + k + m)d \\ \overline{BC} &= 2a + b + (2x + y + k + m)d \\ \overline{AC} &= 2a + b + (2x + y + k + m)d \\ \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{AC} \end{aligned}$$

四、討論等角六邊形的6邊長是否可能為6個完全平方數？

令等角六邊形的6邊長為 $[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$ ，右圖所示。

依(*)式的條件限制

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = e^2 + a^2 \\ c^2 + e^2 = b^2 + f^2 \\ d^2 + c^2 = f^2 + a^2 \end{cases}$$

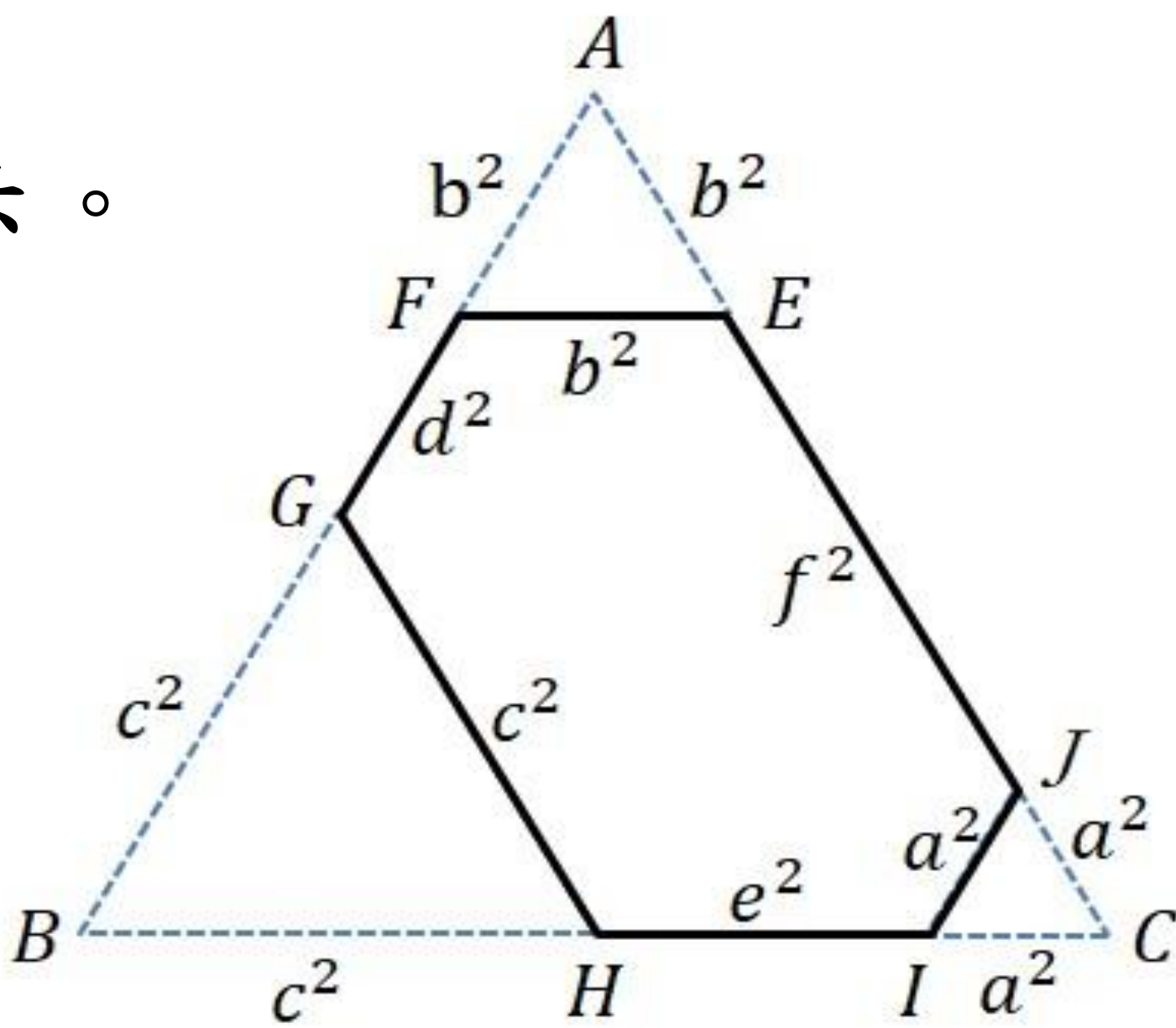
$\rightarrow b^2 + d^2 = e^2 + a^2 \rightarrow (b - a)(b + a) = (e - d)(e + d) = l$
，若 $a、b、e、d$ 為相異正整數且 $l > 0$ 。

$\begin{cases} b - a = e - d \\ b + a = e + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = e \\ a = d \end{cases} (\times), \begin{cases} b - a = e + d \\ b + a = e - d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = e \\ a = -d \end{cases} (\times)$ ，又 $\begin{cases} b - a \neq b + a \\ e - d \neq e + d \end{cases}$

若 $(b - a)$ 為偶數 $\rightarrow (b + a)$ 為偶數 $\rightarrow (b - a)(b + a)$ 為偶數 $\rightarrow (e - d), (e + d)$ 均為偶數
若 $(b - a)$ 為奇數 $\rightarrow (b + a)$ 為奇數 $\rightarrow (b - a)(b + a)$ 為奇數 $\rightarrow (e - d), (e + d)$ 均為奇數

則 $(b - a)、(b + a)、(e - d)、(e + d)$ 為 l 的四個同奇或同偶的相異因數。

假設 $(b - a) < (e - d)$ ，且 $p < q$ ， $p、q$ 為大於1的奇數



l		$(b - a)$	$(b + a)$	$(e - d)$	$(e + d)$	備註
奇數	pq	1	pq	p	q	3,5,15, ...的倍數
2的倍數	$2p$	無法找到4個相異同奇或同偶的因數				
	$2pq$	無法找到4個相異同奇或同偶的因數				
4的倍數	$4p$	無法找到4個相異同奇或同偶的因數				
	$4pq$	2	$2(2k + 1)(2k' + 1)$	$2(2k + 1)$	$2(k' + 1)$	
8的倍數	$8p$	2	$4(2k + 1)$	4	$2(2k + 1)$	
	$8pq$	2	$4pq$	4	$2pq$	
		2	$4pq$	$2p$	$4q$	
		2	$4pq$	$2q$	$4p$	$2q < 4q$
		4	$2pq$	$2p$	$4q$	
		4	$2pq$	$2q$	$4p$	$2q < 4q$
16的倍數	$16p$	$2p$	$4q$	$2q$	$4p$	$2q < 4q$
		2	$8(2k + 1)$	4	$4(2k + 1)$	
		2	$8(2k + 1)$	8	$2(2k + 1)$	$8 < 2(2k + 1)$
		2	$8p$	$2p$	8	$2p < 8$
		4	$4(2k + 1)$	8	$2(2k + 1)$	$8 < 2(2k + 1)$
16的倍數	$16p$	4	$4p$	$2p$	8	$2p < 8$

l		$(b - a)$	$(b + a)$	$(e - d)$	$(e + d)$	備註
16的倍數	$16pq$	2	$8pq$	4	$4pq$	
		2	$8pq$	8	$2pq$	
		2	$8pq$	$2p$	$8q$	
		2	$8pq$	$2q$	$8p$	$2q < 8p$
		2	$8pq$	$4p$	$4q$	
		2	$8pq$	$8p$	$2q$	$8p < 2q$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
32的倍數	$32p$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
		4	$8(2k + 1)$	8	$4(2k + 1)$	
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$l = 4pq, 8p, 8pq, 16p, 16pq, 32p \dots\dots$ 等，同偶情況，可歸納出的可能性

結論

任意等角六邊形之6邊，三組對邊以 $[(a, a'), (b, b'), (c, c')]$ 表示

- 等角六邊形的充要條件，任兩相鄰邊長和必等於其對邊長和（三組對邊差均相等）。
- 三組對邊相等 $[(a, a), (b, b), (c, c)]$ 及兩組等公差的數列 $[(a + xd, b + yd), (a + (x + k)d, b + (y + k)d), (a + (x + m)d, b + (y + m)d)]$ 均可得等角六邊形。
- 當等角六邊形邊長為完全平方數 $[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$ 時，可以求出6邊不相等的充要條件。
- 討論等角六邊形的面積與用相同大小正三角形鑲嵌的最少個數。
- 若 $l = 32p$ ，其中 $p = 2k + 1$

$$d^2+c^2=f^2+a^2$$

$$\rightarrow c^2-f^2=48k^2+48k$$

$$=48(k^2+k)=(c-f)(c+f)$$

$$\text{令}(c-f)=6(k+1)\text{且}(c+f)=8k\rightarrow c=7k+3、f=k-3$$

	$(b - a)$	$(b + a)$	$(e - d)$	$(e + d)$
假設	4	$8(2k + 1)$	8	$4(2k + 1)$
解	$b = 8k + 6$ $a = 8k + 2$		$e = 4k + 6$ $d = 4k - 2$	

$(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$ ，其中 $k \geq 4$

		圖示
a^2	$(8k + 2)^2$	
b^2	$(8k + 6)^2$	
c^2	$(7k + 3)^2$	
d^2	$(4k - 2)^2$	
e^2	$(4k + 6)^2$	
f^2	$(k - 3)^2$	

$$[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$$

$$= [(8k + 2)^2, (4k - 2)^2), ((8k + 6)^2, (4k + 6)^2), ((7k + 3)^2), (k - 3)^2)]$$

若 $k = 4$

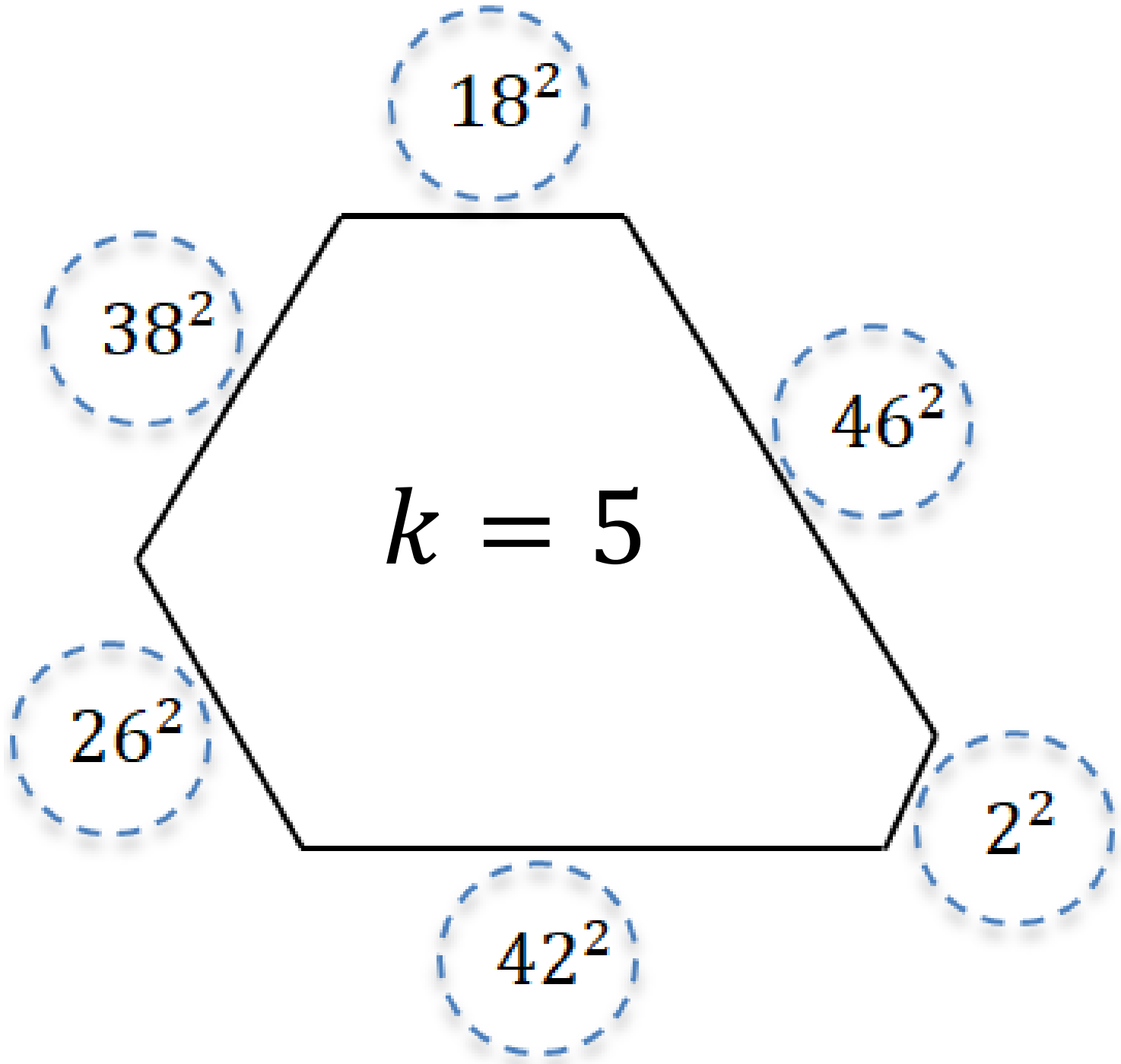
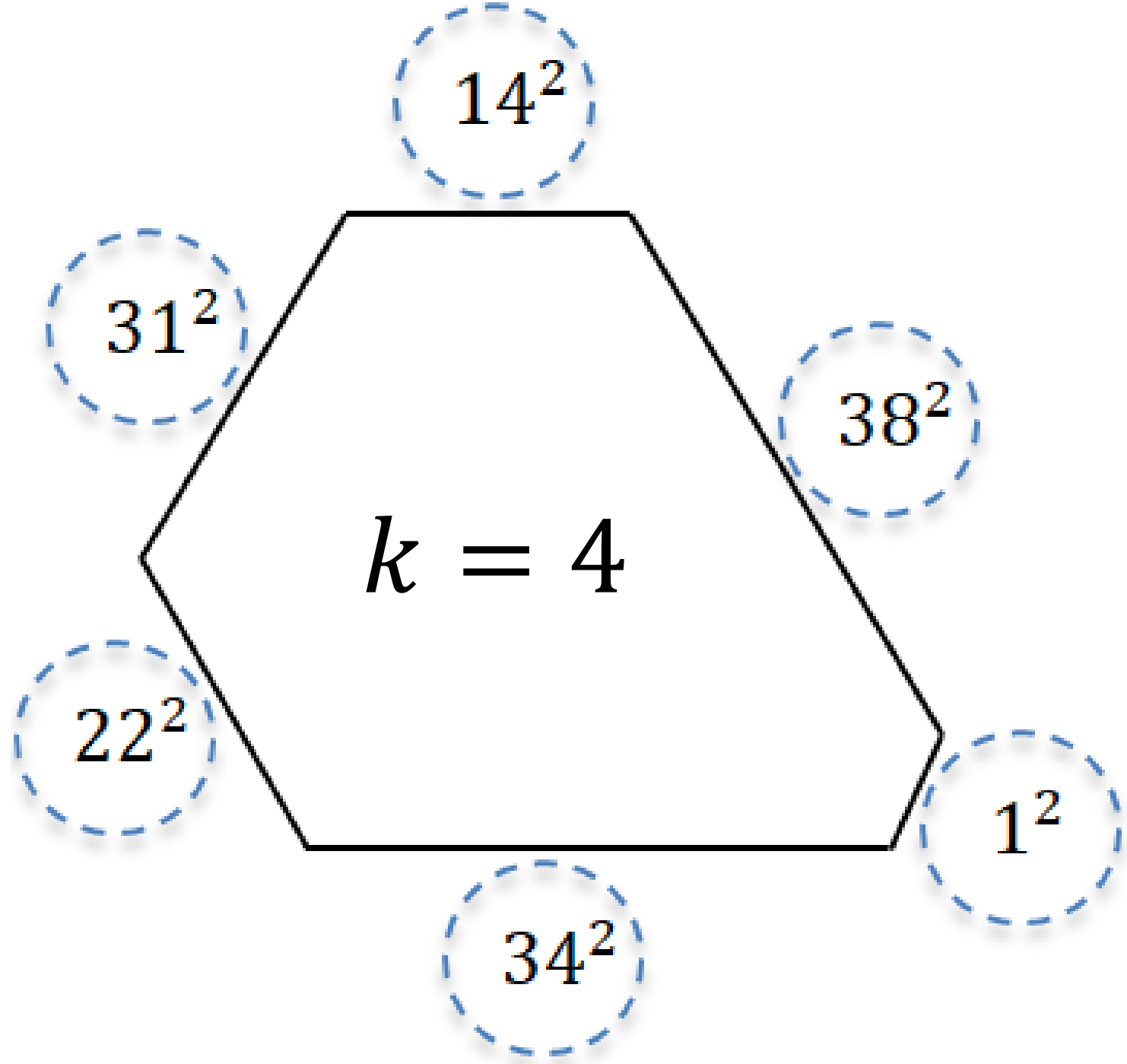
若 $k = 5$

$$[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$$

$$[(34^2, 14^2), (38^2, 22^2), (31^2, 1^2)]$$

$$[(a^2, d^2), (b^2, e^2), (c^2, f^2)]$$

$$[(42^2, 18^2), (46^2, 26^2), (38^2, 2^2)]$$



參考文獻

- 2023年12月科學研習期刊第62卷第6期森棚教官數學題---內角相等六邊形」---游森棚教授。
- 本作品所有圖表，都由作者創作。