中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030403

真心畫大冒險～真心三角形性質之探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 郭于甄	黎少奇
國二 鄭意霏	魏子超
國二 張宸菘	

關鍵詞：真心(X174)、相似、barycentric coordinates

摘要

本研究中所提到的「真心」即為三角百科中的 Kimberling center X_{174}，Wabash center 為三角百科中的 Kimberling center X_{364}。我們從 Wabash center 的作圖法，延伸出真心的概念，並定義了真心三角形。在本研究中，我們對於真心三角形、旁邊三角形、旁心三角形及其內切圓、外接圓進行研究，發現這些三角形有相似關係，其各心間則存在共點、共線、共圓等性質。同時我們也找出了真心的 barycentric coordinates，並以此作為基礎，提出真心之幾何作圖法。

壹、前言

一、 研究動機

在上數學課時，我們學到了三角形的五心以及其相關的性質，正巧我們在網路上看到一篇關於 Wabash center 的文章[1]，我們對這個點的性質很感興趣，所以我們由這個點的定義延伸出一個新的真心，並對其性質展開研究。

二、 研究目的

(一)真心三角形、旁邊三角形內心、外心相關連線三角形共圓、相似、共點、共線等性質。

(二)真心三角形、旁心三角形、旁邊三角形相似及邊長關係。

(三)任意三角形中，真心的作圖法。

(四)真心與 barycentric coordinates 關係。

三、 文獻回顧

(一)Wabash center 即 Kimberling center X_{364}

根據參考文獻資料一[1]，Wabash center 的作圖如下：

給定任一$\triangle ABC$ 及內部一點 X，過X點作一直線垂直於 $\angle A$ 之角平分線，該直線分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 Q、T 兩點，則A、Q、T 三點構成一等腰三角形。對$\angle B$、$\angle C$ 重複上述作圖，可得三個等腰三角形$\triangle AQT$、$\triangle BSP$、$\triangle CUR$，如圖 1。

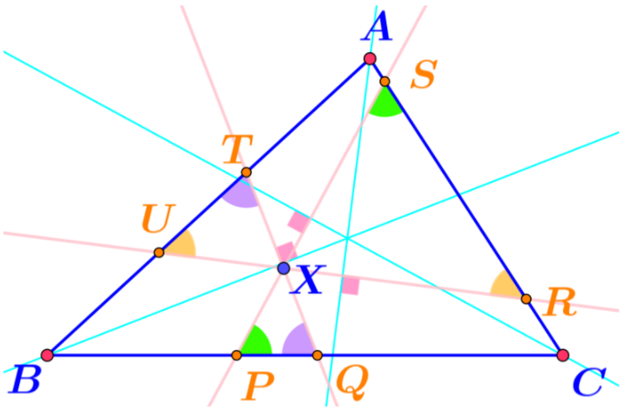


圖 1 Wabash center 作圖說明

當作圖中的三個等腰三角形 $\triangle AQT$、$\triangle BSP$、$\triangle CUR$ 面積相等時，該 X 點稱為 Wabash center。對應三角百科中，Wabash center 即為 Kimberling center X_{364}[2]。

(二) 用“心”（第 58 屆全國中小學科學展覽會參展作品）

該篇科展研究原三角形的三個旁心三角形(即本文所指旁邊三角形)中取其五心，連接對應三點形成連線三角形，觀察這些連線三角形與原三角形面積、五心之關係。

取旁心連線三角形(即本文所指旁心三角形)，與外心連線三角形(即本文所指旁外三角形)之關係。引用其性質 1-2：

$\triangle J_aJ_bJ_c \sim \triangle O_AO_BO_C$，即旁心$\triangle J_aJ_bJ_c$相似於旁外$\triangle O_AO_BO_C$ [3]，如圖 2。

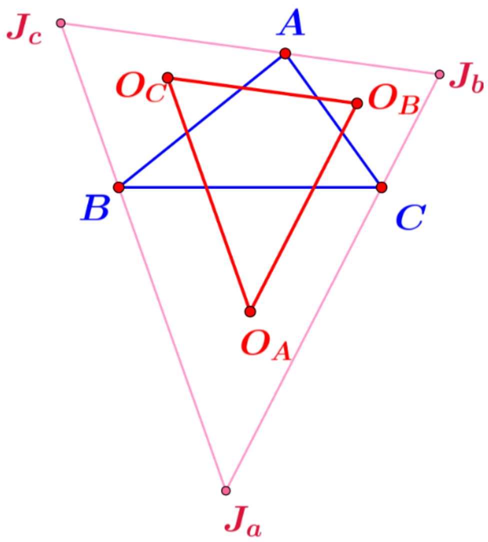


圖 2　旁心三角形相似於旁外三角形

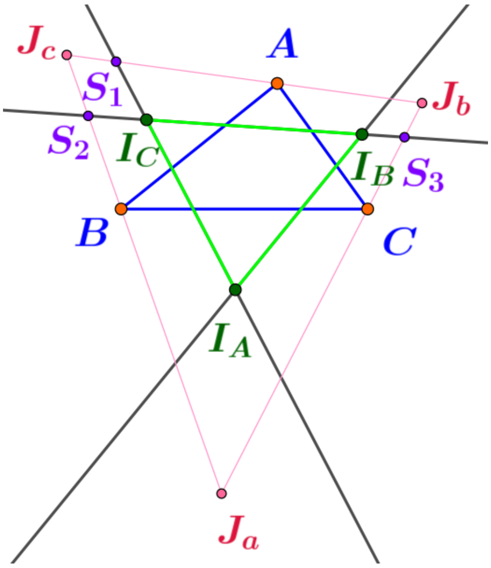


圖 3 證明$\overline{J_aS_2} = \overline{J_aS_3}$

(三)百度百科-旁心三角形[4]

根據參考文獻資料四中，引用其定理 1：

$\overline{J_aJ_b}$、$\overline{J_bJ_c}$、$\overline{J_aJ_c}$，分別是$\triangle ABC$外角平分線，$\triangle J_bAC$、$\triangle J_cAB$內心分別是I_B、I_C，$\overleftrightarrow{I_BI_C}$分別交$\overline{J_aJ_c}$、$\overline{J_aJ_b}$於點$S_2$、$S_3$，則$\overline{J_aS_2} = \overline{J_aS_3}$ [4]，如圖 3。

貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦、GeoGebra

參、研究過程及方法

一、 名詞定義

(一) W 三角形：

根據 Wabash center 的作圖方式，三個等腰三角形重疊部分的三個三角形，稱為 W 三角形。

如圖 4，△XPQ、△XRS、△XTU均為 W 三角形。

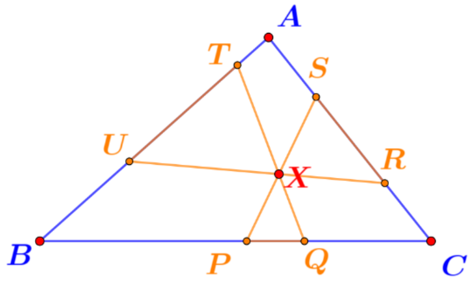


圖 4　W 三角形

(二)真心：

依照 Wabash center 的作圖法，當三個 W 三角形面積相等時，該點X即為真心，標示為J，如圖 5。

(三)真心三角形：

當 W 三角形面積相等時，此時之 W 三角形稱為真心三角形。如圖 5，△JPQ、△JRS、△JTU均為真心三角形。

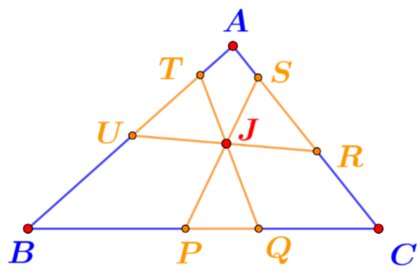


圖 5　真心與真心三角形

(四)旁邊三角形與旁心三角形：

三角形中任意一個旁心與原三角形中的兩頂點連線構成的三個三角形，稱為旁邊三角形。如圖 6，$\triangle BCJ_a$、$\triangle ACJ_b$、$\triangle ABJ_c$均為旁邊三角形。三個旁心連線所構成的三角形，稱為旁心三角形。如圖 6，$\triangle J_aJ_bJ_c$即為旁心三角形。

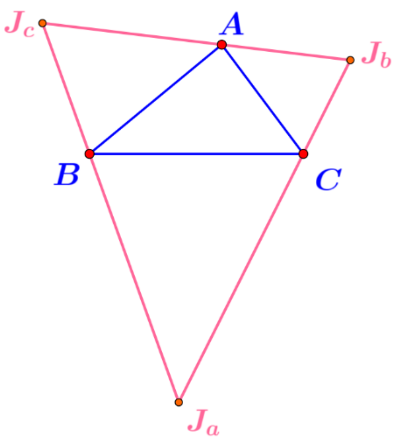


圖 6　旁邊與旁心三角形

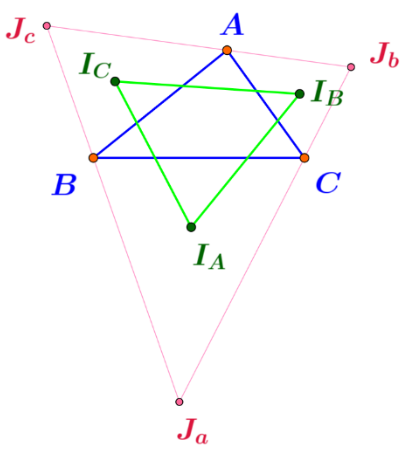


圖 7　旁內三角形

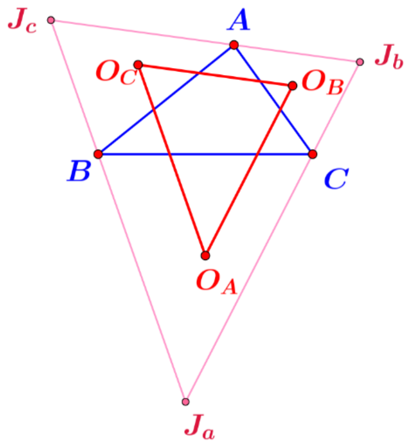


圖 8　旁外三角形

(五)旁內三角形、旁外三角形：

三個旁邊三角形內心連線所構成的三角形，稱為旁內三角形，如圖 7 中$\triangle I_AI_BI_C$。三個旁邊三角形外心連線所構成的三角形，稱為旁外三角形，如圖 8 中$\triangle O_AO_BO_C$。

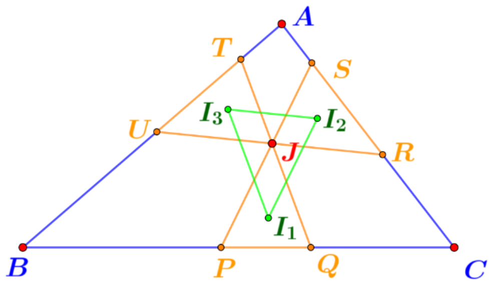


圖 9 真內三角形

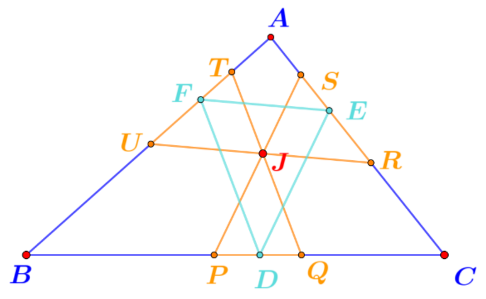


圖 10 真內切三角形

(六)真內三角形、真內切三角形與真外三角形：

三個真心三角形內心連線所構成的三角形，稱為真內三角形，如圖 9 中△ $I_1I_2I_3$。原三角形與其內切圓的切點連線所構成的三角形，稱為真內切三角形，如圖 10 中△ DEF。三個真心三角形外心連線所構成的三角形，稱為真外三角形，如圖 11 中△ $O_1O_2O_3$。

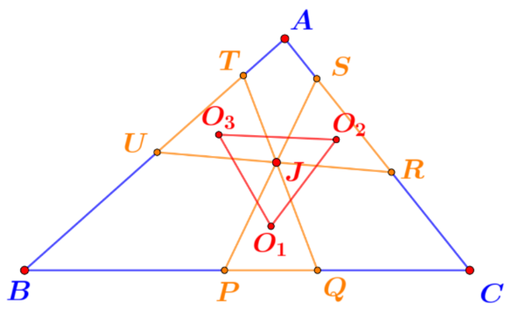


圖 11 真外三角形

(七)[ABC]：

△ ABC的有向面積以[ABC]表示，以逆時針為正，順時針為負。

二、 W 三角形與真心三角形性質之探討

(一) 性質 1：三個 W 三角形為一組相似三角形，即△ XPQ~ △ XRS~ △ XTU

已知：△ ABC中，其內部一點X， △ XPQ、 △ XRS、 △ XTU為三個 W 三角形

求證：三個W 三角形相似，即 △ XPQ~ △ XRS~ △ XTU

證明：

1.如圖 12，令△ ABC的三個角，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$，則$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\because$ ∠U、∠R為△ AUR的兩底角 $\therefore \angle U = \angle R = \frac{180° - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma$

$\because$ ∠T、∠Q為△ BTQ的兩底角 $\therefore \angle T = \angle Q = \frac{180° - 2\beta}{2} = \alpha + \gamma$

$\because$ ∠S、∠P為△ CSP的兩底角 $\therefore \angle S = \angle P = \frac{180° - 2\gamma}{2} = \alpha + \beta$

2.△ XPQ中，$\angle P = \alpha + \beta$；$\angle Q = \alpha + \gamma$

$\because 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\therefore \angle PXQ = 180° - (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \beta$

同理可得△ XRS、△ XTU的三個內角分別為

$\alpha + \beta$、$\beta + \gamma$、$\alpha + \gamma$，故△ XPQ~ △ XRS~ △ XTU(AA)

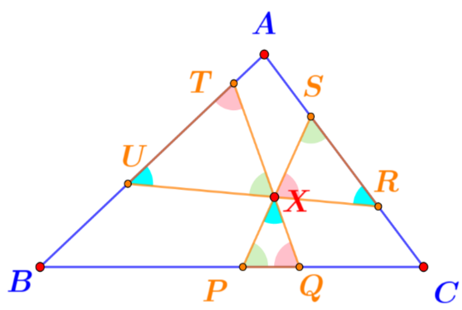


圖 12 W 三角形相似

(二) 性質 2：真心三角形必為全等三角形

由名詞定義可知，面積相等的 W 三角形即為真心三角形，且根據性質 1，W 三角形相似，故真心三角形必為全等三角形，即△ JPQ ≅△ JRS ≅△ JTU

肆、研究結果

在課堂中，老師為我們講解三角形的外心、內心、重心，並補充垂心、旁心的相關性質。如圖 13 的九點圓。如圖 14，垂心相關的兩類四點共圓。如圖 15，垂心相關的多組相似三角形。如圖 16，原三角形垂心與垂足三角形內心共點。如圖 17，△ $G_1G_2G_3$垂心與原三角形重心共點。如圖 18 的尤拉線為外心、重心、九點圓圓心、垂心共線。

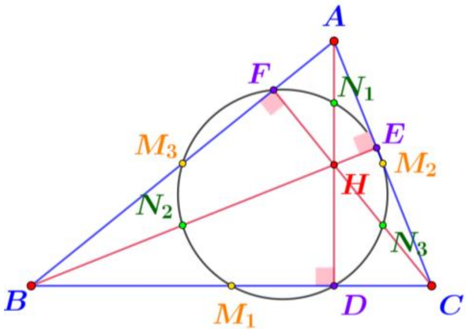


圖 13　九點圓

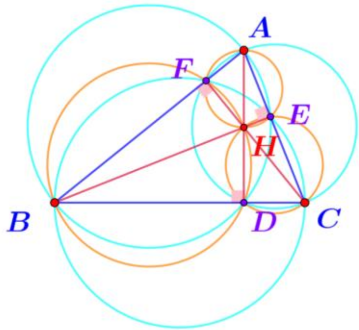


圖 14　垂心相關兩類四點共圓

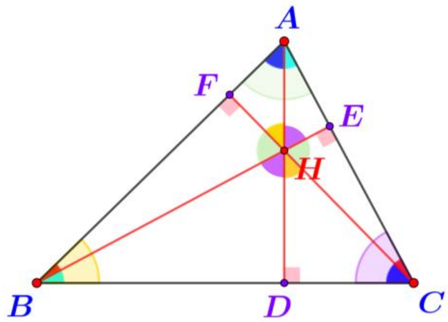


圖 15 垂心相關多組相似三角形

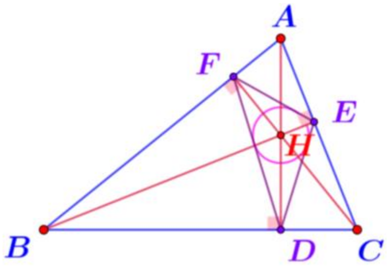


圖 16　原三角形垂心與垂足三角形內心共點

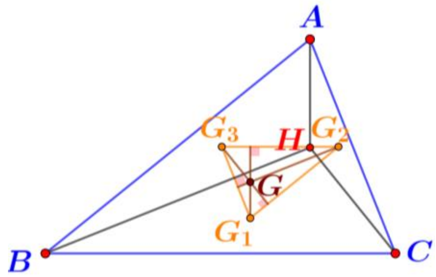


圖 17　△ $G_1G_2G_3$垂心與原三角形重心共點

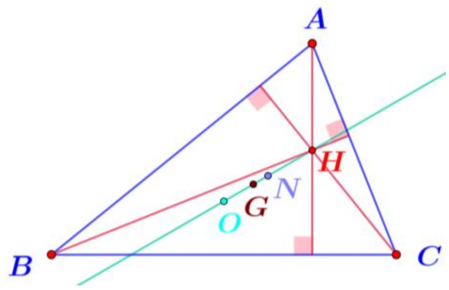


圖 18　尤拉線

我們想了解真心三角形與各三角形之間是否也有類似的共圓、相似、共點、共線等性質。

我們找出個三角形之間的關係，並整理成下圖：

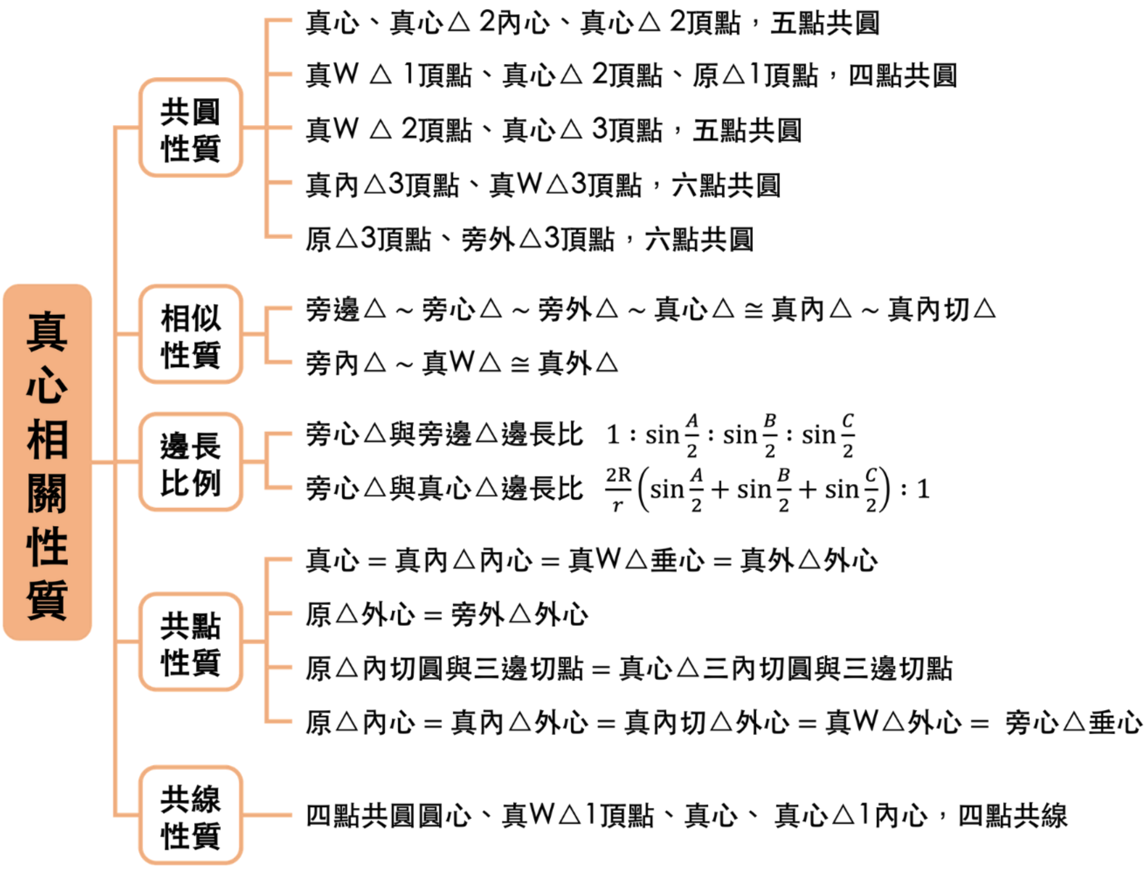


圖 19 真心三角形相關性質總表

我們針對以上關係分別進行證明。

一、真心三角形相關共圓性質之探討

定理一、共圓性質

定理 1-1 真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓

定理 1-2 真 W 三角形頂點、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

定理 1-3 真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

定理 1-4 真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓

定理 1-5 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓

各定理證明如下：

定理 1-1 真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓

已知：△ABC 中， △JPQ、 △JRS、 △JTU 為真心三角形，I_1、I_2、I_3為真心三角形內心

求證：真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓，即J、I_3、U、P、I_1五點共圓

證明：

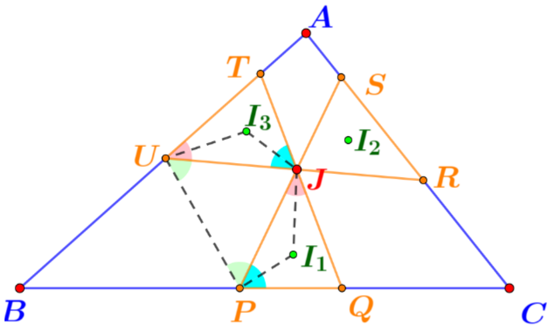


圖 20-1 真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點

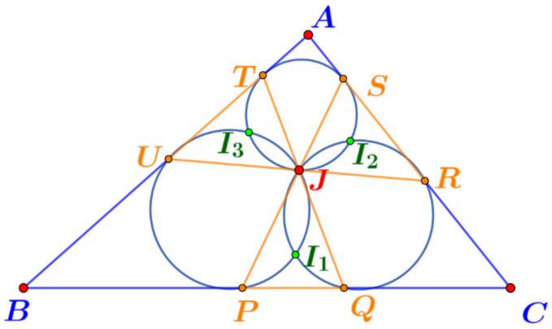


圖 20-2 真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓

1.如圖 20-1，△JTU和△JPQ為真心三角形，故$\overline{UJ}$=$\overline{PJ}$(對應邊等長)

令$\angle \mathrm{TUJ} = \angle \mathrm{PJQ} = 2\gamma$, $\angle \mathrm{TJU} = \angle \mathrm{JPQ} = 2\beta$(對應角相等)，$\overline{UI_3}$為$\angle$TUJ的角平分線

$\therefore \angle I_3\mathrm{UJ} = \angle I_1\mathrm{JP} = \angle \mathrm{TU}I_3 = \angle \mathrm{QJ}I_1 = \gamma$，令$\angle \mathrm{JUP} = \alpha$， $\because \overline{UJ} = \overline{PJ}$ $\therefore \angle \mathrm{JUP} = \angle \mathrm{JPU} = \alpha$，

則$\angle \mathrm{UJP} = 180° - 2\alpha$

2.$\because \angle \mathrm{TJU} + \angle \mathrm{UJP} + \angle \mathrm{PJQ} = 180°$，$2\beta + 180° - 2\alpha + 2\gamma = 180°$ $\therefore \beta + \gamma = \alpha$

$\angle \mathrm{UJ}I_1 + \angle \mathrm{UP}I_1 = (180° - 2\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = 180° - \alpha + \alpha = 180°$

故J、U、P、I_1四點共圓，同理可證J、P、U、I_3四點共圓

故J、I_3、U、P、I_1五點共圓，同理可證J、I_1、Q、R、I_2；J、I_2、S、T、I_3五點共圓(如圖 20-2)

名詞定義：

為了方便後續討論，我們將這三個五點共圓圓心連線構成的三角形稱為真 W 三角形。如圖 21，△$W_AW_BW_C$為**真 W 三角形**。

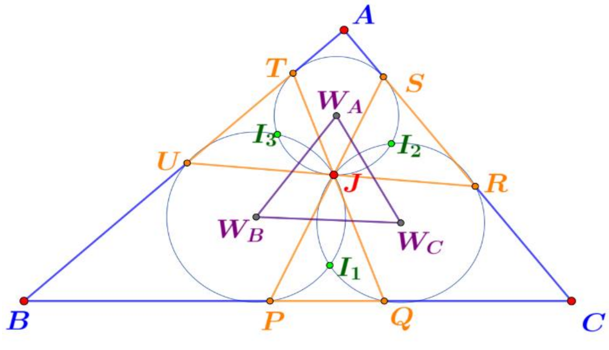


圖 21 真 W 三角形

定理 1-2 真 W 三角形頂點、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

已知：△ ABC 中， △ JPQ、 △ JRS、 △ JTU 為真心三角形，

W_A 、W_B 、W_C為定理 1-1 中三個五點共圓圓心

求證：五點共圓圓心、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

證明：

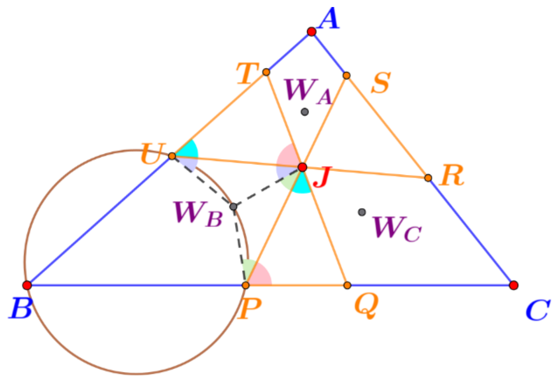


圖 22 真心、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓證明

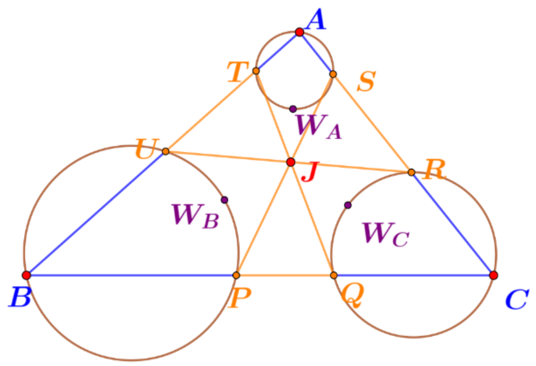


圖 23 真心、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

1.如圖 22，$\because \overline{UW_B} = \overline{JW_B} = \overline{PW_B}$(定理 1-2 五點共圓)

令$\angle W_BJU = \angle W_BUJ = \alpha$，$\angle W_BJP = \angle W_BPJ = \beta$，又$\triangle JTU$和$\triangle JPQ$為真心三角形

故令$\angle \mathrm{TUJ} = \angle \mathrm{PJQ} = \gamma$，$\angle \mathrm{TJU} = \angle \mathrm{QPJ} = \delta$ (對應角相等)

$\because \angle \mathrm{TJU} + \angle UJW_B + \angle W_BJP + \angle \mathrm{PJQ} = 180°$(平角) $\therefore \delta + \alpha + \beta + \gamma = 180°$

2.$\angle W_BPB = 180° - \beta - \delta$ ，$\angle W_BUB = 180° - \alpha - \gamma$

$\angle W_BPB + \angle W_BUB = (180° - \beta - \delta) + (180° - \alpha - \gamma) = 360° - (\delta + \alpha + \beta + \gamma) = 180°$

故U、B、P、W_B四點共圓，同理可證Q、C、R、W_C和S、A、T、W_A四點共圓(如圖 23)

定理 1-3 真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

已知：△ ABC 中，W_A 、W_B 、W_C為真 W 三角形三個頂點

△ JPQ、 △ JRS、 △ JTU 為真心三角形，I_1 、I_2 、I_3分別為真心三角形之內心

求證：真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

證明：

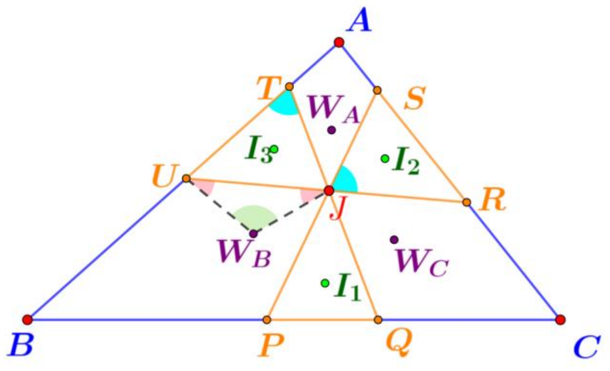


圖 24 真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓證明

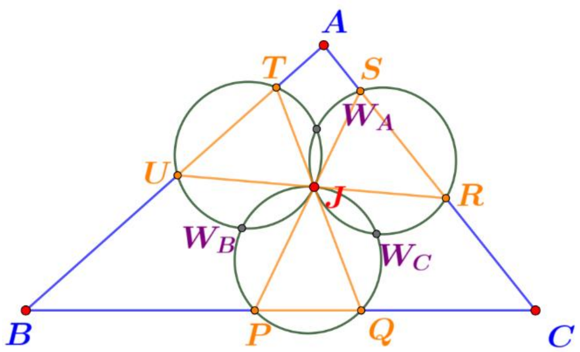


圖 25 真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

由性質 2 真心三角形必全等，即 △ JPQ ≅△ JRS ≅△ JTU，其對應邊、對應角必相等

由定理1-1，J、I_3 、U 、P 、I_1五點共圓

如圖 24，令$\angle \mathrm{UTJ} = \angle \mathrm{SJR} = 2\alpha$

$\because \overline{JU} = \overline{JP}$(性質 2)，$\overline{W_BU} = \overline{W_BP}$(五點圓半徑)，$\overline{W_BJ} = \overline{W_BJ}$(共用邊) $\therefore \triangle \mathrm{JU}W_B \cong \triangle \mathrm{JP}W_B(SSS)$

又$\angle \mathrm{UJP} = \angle \mathrm{SJR} = 2\alpha$(對頂角相等) $\therefore \angle \mathrm{PJ}W_B = \angle \mathrm{UJ}W_B = \alpha$

$\because \overline{W_BJ} = \overline{W_BU}$ (五點圓半徑) $\therefore \angle \mathrm{UJ}W_B = \angle \mathrm{JU}W_B = \alpha$，$\angle \mathrm{U}W_BJ = 180° - 2\alpha$

$\angle \mathrm{UTJ} + \angle \mathrm{U}W_BJ = 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180°$

故T 、U 、W_B 、J四點共圓，同理可證T 、U 、W_A 、J四點共圓

故T 、U 、W_B 、J 、W_A五點共圓

同理可證P 、Q 、W_C 、J 、W_B五點共圓、R 、S 、W_A 、J 、W_C五點共圓(如圖 25)

定理 1-4 真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓

已知：△ ABC 中， △ $I_1I_2I_3$為真內三角形， △ $W_AW_BW_C$為真 W 三角形

求證：真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓(如圖 28)

證明：

1.令$\angle UTJ = 2\alpha$，$\angle TJU = 2\beta$，$\angle JUT = 2\gamma$

則$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

如圖 26，I_3為△ JTU的內心 ∴ $\angle I_3TJ = \alpha$

∵ $\angle I_3TJ$和$\angle I_3W_AJ$共弧 ∴ $\angle I_3W_AJ = 2\alpha$

同理可得$\angle I_2W_AJ = 2\beta$

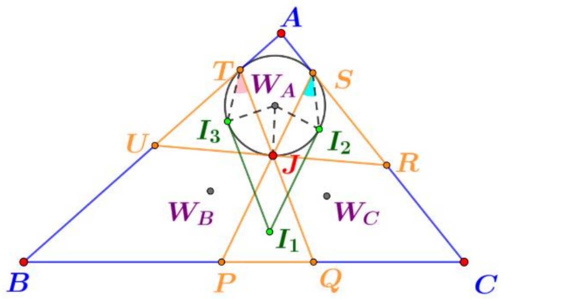


圖 26 真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓證明

2.如圖 27，∵ $\overline{RU}$為△ RSJ和△ TUJ內切圓之切線

U_1 、R_1分別為其切點

∴ $\overline{I_2R_1} \perp \overline{RU}$，$\overline{I_3U_1} \perp \overline{RU}$

且真心三角形內接圓半徑等長

∴ $\overline{I_2I_3} \parallel \overline{RU}$ (兩垂直線距離相等)

同理可得$\overline{I_1I_3} \parallel \overline{TQ}$、$\overline{I_1I_2} \parallel \overline{SP}$

∴ $\angle I_1I_3I_2 = \angle TJU = 2\beta$

$\angle I_3I_1I_2 = \angle PJQ = 2\gamma$

$\angle I_1I_2I_3 = \angle RJS = 2\alpha$

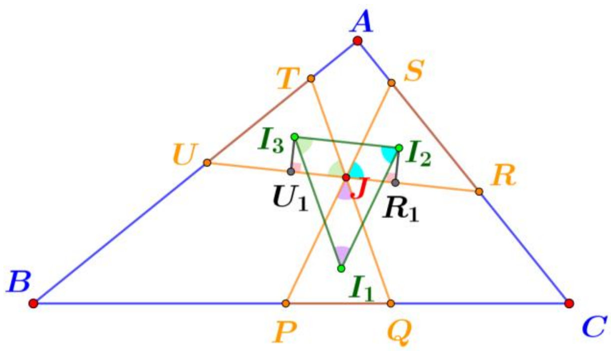


圖 27 真內三角形相似於真心三角形證明

3.如圖 26

$\angle I_3W_AI_2 + \angle I_3I_1I_2 = (2\alpha + 2\beta) + 2\gamma = 180°$

故I_1、I_2、I_3、W_A四點共圓

同理可證I_1、I_2、I_3、W_B四點共圓

I_1、I_2、I_3、W_C四點共圓

故I_1、I_2、I_3、W_A、W_B、W_C為六點共圓

(如圖 28)

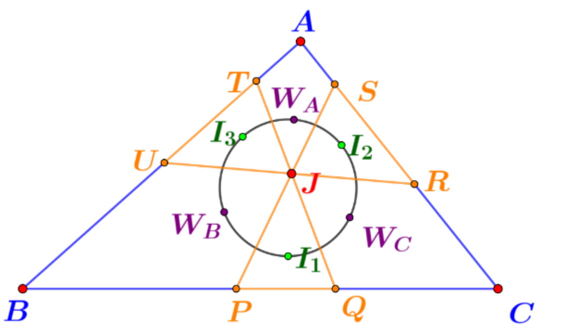


圖 28 真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓

定理 1-5 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓

已知：△ABC 中，J_a、J_b、J_c為旁心，O_A、O_B、O_C分別為三個旁邊三角形的外心

求證：原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓

證明：

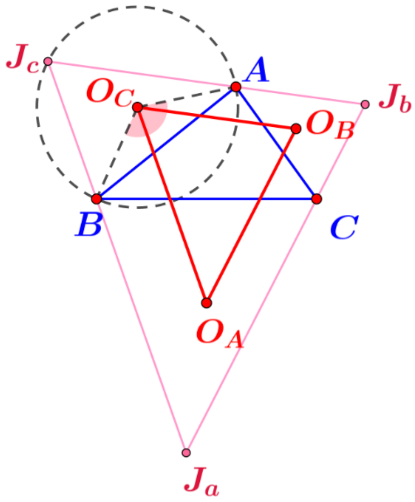


圖 29 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓證明

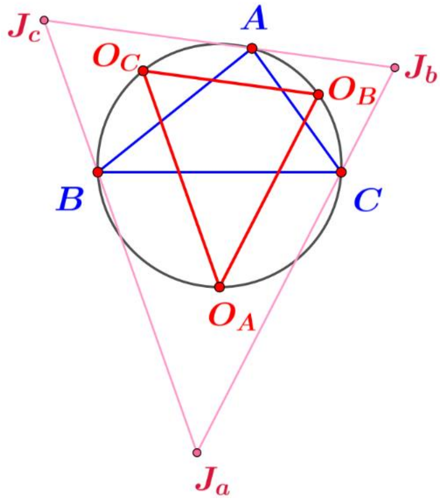


圖 30 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓

1.如圖 29，△ABC 中，令$\angle A = 2\alpha$、$\angle B = 2\beta$、$\angle C = 2\gamma$

$\because O_C$為△ABJ_C的外心$\therefore \angle AO_CB = 2\angle AJ_CB$(共弧)

2.$\angle AJ_cB = \alpha + \beta$，$\angle AO_CB = 2(\alpha + \beta)$，又$\angle C = 2\gamma$，且$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\therefore \angle AO_CB + \angle C = 2(\alpha + \beta) + 2\gamma = 180°$

故A、C、B、O_C四點共圓，同理可證A、B、C、O_B和B、A、C、O_A四點共圓

故A、B、C、O_A、O_B、O_C，六點共圓(如圖 30)

二、真心三角形相關相似性質之探討

定理二、相似性質

定理 2-1 旁邊三角形~旁心三角形~真心三角形≅真內三角形~真內切三角形~旁外三角形

定理 2-2 旁內三角形~真 W 三角形≅真外三角形

各定理證明如下：

定理 2-1 旁外三角形~旁心三角形~旁邊三角形~真心三角形≅真內三角形~真內切三角形

我們將此定理分成以下 3 個部分進行證明

Part1 旁外三角形~旁心三角形~旁邊三角形~真心三角形

已知：$\triangle \mathrm{ABC}$中，J為真心，$\triangle \mathrm{JPQ}$、$\triangle \mathrm{JRS}$、$\triangle \mathrm{JTU}$為真心三角形，

$\triangle \mathrm{BCJ_a}$、$\triangle \mathrm{ACJ_b}$、$\triangle \mathrm{ABJ_c}$為旁邊三角形及$\triangle \mathrm{J_aJ_bJ_c}$為旁心三角形

求證：$\triangle \mathrm{JPQ} \cong \triangle \mathrm{JRS} \cong \triangle \mathrm{JTU} \sim \triangle \mathrm{BCJ_a} \sim \triangle \mathrm{ACJ_b} \sim \triangle \mathrm{ABJ_c} \sim \triangle \mathrm{J_aJ_bJ_c} \sim \triangle O_AO_BO_C$

證明：

1.由文獻回顧(二)[3]可知$\triangle \mathrm{J_aJ_bJ_c} \sim \triangle O_AO_BO_C$

2.由性質 2 可知$\triangle \mathrm{JPQ} \cong \triangle \mathrm{JRS} \cong \triangle \mathrm{JTU}$

3.如圖 31，在$\triangle \mathrm{ABC}$ 中，

令$\angle \mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle \mathrm{B} = 2\beta$，$\angle \mathrm{C} = 2\gamma$

$\therefore 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\because \overline{AJ_b}$、$\overline{AJ_c}$為$\angle$A的外角平分線

$\therefore \angle \mathrm{CA}J_b = \angle \mathrm{BA}J_c = \dfrac{180° - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma$

$\because \overline{BJ_a}$、$\overline{BJ_c}$為$\angle$B的外角平分線

$\therefore \angle \mathrm{AB}J_c = \angle \mathrm{CB}J_a = \dfrac{180° - 2\beta}{2} = \alpha + \gamma$

$\because \overline{CJ_a}$、$\overline{CJ_b}$為$\angle$C的外角平分線

$\therefore \angle \mathrm{AC}J_b = \angle \mathrm{BC}J_a = \dfrac{180° - 2\gamma}{2} = \alpha + \beta$

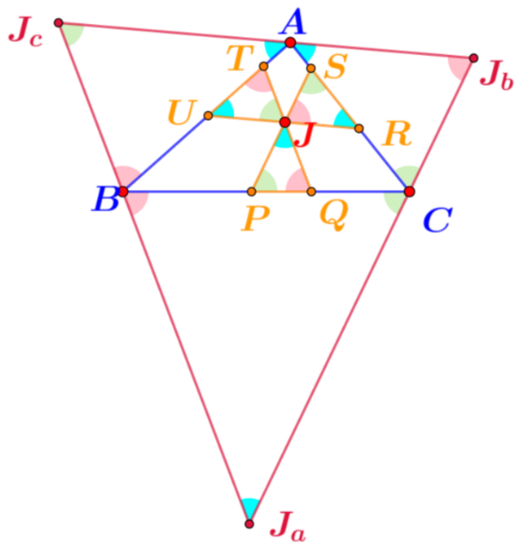


圖 31 旁邊三角形~旁心三角形~真心三角形

$\triangle \mathrm{ABJ_c}$中，$\angle \mathrm{BA}J_c = \beta + \gamma$；$\angle \mathrm{AB}J_c = \alpha + \gamma$

$\because 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\therefore \angle AJ_cB = 180° - (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \alpha + \beta$

同理可得，$\triangle \mathrm{BCJ_a}$、$\triangle \mathrm{ACJ_b}$的三個角分別為$\alpha + \beta$、$\beta + \gamma$、$\alpha + \gamma$

得$\triangle \mathrm{J_aJ_bJ_c}$的三個角：$\angle AJ_cB = \alpha + \beta$；$\angle BJ_aC = \beta + \gamma$；$\angle AJ_b\mathrm{C} = \alpha + \gamma$

由性質 1 可知真心三角形的三個角亦為$\alpha + \beta$、$\beta + \gamma$、$\alpha + \gamma$

故$\triangle \mathrm{JPQ} \cong \triangle \mathrm{JRS} \cong \triangle \mathrm{JTU} \sim \triangle \mathrm{BCJ_a} \sim \triangle \mathrm{ACJ_b} \sim \triangle \mathrm{ABJ_c} \sim \triangle \mathrm{J_aJ_bJ_c}$(AA 相似)

Part2 真心三角形≅真內三角形

已知：$\triangle ABC$中，$\triangle JPQ$、 $\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，且真心三角形全等

$\triangle I_1I_2I_3$為真內三角形

求證：真內三角形與真心三角形全等，即$\triangle I_1I_2I_3 \cong \triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

證明：

1.如圖 32，令$\angle UTJ = 2\alpha$、$\angle TJU = 2\beta$、$\angle JUT = 2\gamma$

則 $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$，$\alpha + \beta + \gamma = 90°$

$\angle I_3JT = \beta$，$\angle I_3TJ = \alpha$，$\angle TI_3J = 180° - \alpha - \beta = \alpha + \beta + 2\gamma = 90° + \gamma$

其餘兩角同理，且根據三個真心三角形的全等對應關係，可得三個三角形的角度

且 $\angle UJR = \angle UJT + \angle RJS + \angle TJS = 2\beta + 2\alpha + \angle TJS = 180°$，所以 $\angle TJS = 2\gamma$

2.將三角形切割成三塊，分別證明其全等

$\overline{I_3J} = \overline{I_3J}$ (共用邊)

$\overline{JI_2} = \overline{I_3T}$ (真心三角形全等)

且 $\angle I_3JI_2 = \alpha + \beta + 2\gamma = 90° + \gamma = \angle TI_3J$

所以 $\triangle TI_3J \cong \triangle I_3JI_2$ (SAS全等)

故$\overline{I_2I_3} = \overline{TJ}$(對應邊等長)

同理可證 $\overline{I_1I_2} = \overline{JQ} = \overline{UT}$

$\overline{I_3I_1} = \overline{JU}$

所以真心三角形 ≅ 真內三角形(SSS全等)

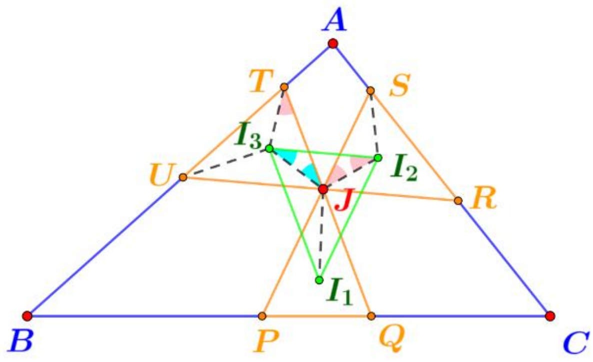


圖 32 真心三角形≅真內三角形

Part3 真心三角形~真內切三角形

已知：$\triangle ABC$中，$\triangle JPQ$、 $\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，且$\triangle DEF$為真內切三角形

求證：真內切三角形相似於真心三角形

即$\triangle DEF \sim \triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

證明：

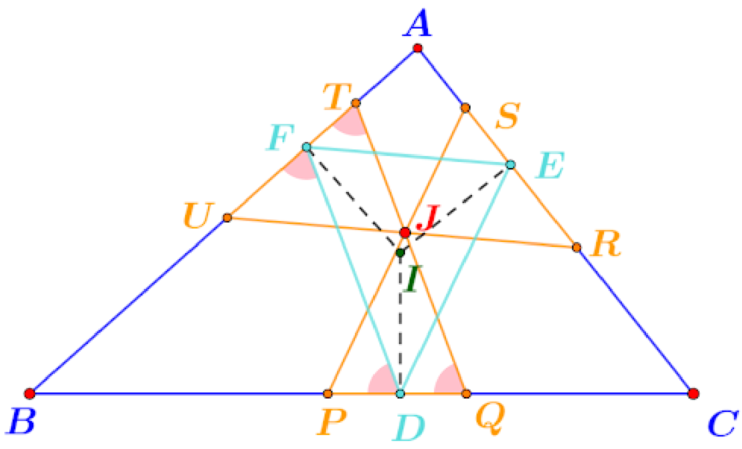


圖 33 真心三角形~真內切三角形證明

1.如圖 33，D、E、F為原三角形內切圓與三角形三邊的切點，故$\angle IFB = 90°$、$\angle IDB = 90°$

$\therefore$ I、F、B、D 四點共圓(對角互補)

令 $\angle ABC = 2\alpha$，則 $\angle FID = 180° - 2\alpha$(對角互補)

$\because \overline{IF} = \overline{ID}$ $\therefore \angle IFD = \angle IDF = \alpha$

$\because \angle IFB = 90°$、$\angle IDB = 90°$ $\therefore \angle FDB = \angle DFB = 90° - \alpha$

$\triangle BQT$為等腰三角形 $\therefore \angle BQT = \angle BTQ = 90° - \alpha$

2.$\because \angle BQT = \angle BTQ = \angle FDB = \angle DFB = 90° - \alpha$ $\therefore$ $\overline{FD} \parallel \overline{TQ}$(同位角相等)

同理可證$\overline{ED} \parallel \overline{SP}$，$\overline{EF} \parallel \overline{RU}$

$\therefore \angle UJT = \angle DFE$ ，同理可得其餘兩角

故真內切三角形與真心三角形相似(AA)

定理 2-2 旁內三角形~真 W 三角形≅真外三角形

我們將此定理分成以下 2 個部分進行證明

Part1 旁內三角形~真 W 三角形

已知：原△ ABC 中， △ $I_AI_BI_C$為旁內三角形，△ $W_AW_BW_C$為真 W 三角形

求證：旁內三角形相似於真 W 三角形

證明：

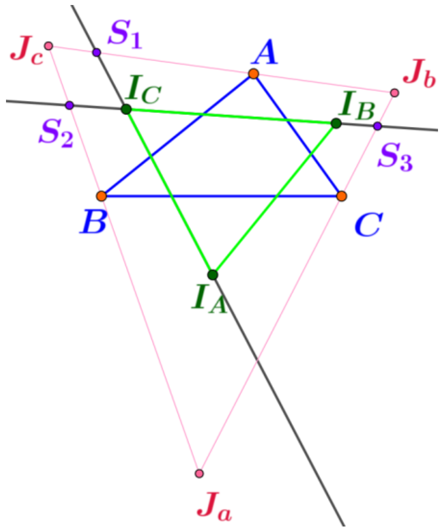


圖 35 旁內三角形~真 W 三角形證明

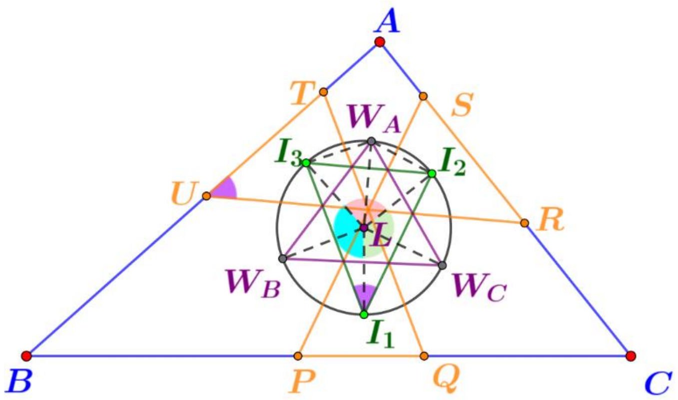


圖 36 旁內三角形~真 W 三角形證明

1.如圖 35，令原△ ABC的三個角，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$

根據文獻回顧(三)[4]，延長$\overline{I_BI_C}$，交$\overline{J_aJ_c}$、$\overline{J_aJ_b}$於S_2、S_3，得等腰△ $S_2S_3J_a$

延長$\overline{I_AI_C}$，交$\overline{J_bJ_c}$於S_1，可知$\angle J_aS_2S_3 = \angle J_aS_3S_2 = \frac{180°-\beta-\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2}$

則$\angle I_BS_2J_c = 180° - \left(90° - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\beta+\gamma}{2}$，同理可得$\angle J_cS_1I_A = 90° + \frac{\alpha+\gamma}{2}$

四邊形$I_CS_2J_cS_1$中，$\angle S_2I_CS_1 = 360° - \left(90° + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - \left(90° + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) - (\alpha+\beta) = 180° - \frac{3\alpha+3\beta+2\gamma}{2}$

又$\angle S_2I_CS_1 = \angle I_BI_CI_A = 180° - \frac{3\alpha+3\beta+2\gamma}{2}$ (對頂角)

同理可得$\angle I_CI_BI_A = 180° - \frac{3\alpha+3\gamma+2\beta}{2}$ ，$\angle I_BI_AI_C = 180° - \frac{3\beta+3\gamma+2\alpha}{2}$

2. 如圖 36，$\overline{LI_3} = \overline{LW_A} = \overline{LI_2}$(定理 1-4 六點圓半徑)，$\overline{W_AI_3} = \overline{W_AI_2}$(定理 1-1 五點圓半徑)

$\therefore \triangle LI_3W_A \cong \triangle LI_2W_A(SSS)$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{LW_A}}$為$\angle \mathrm{I_3LI_2}$之角平分線

同理可得$\overline{\mathrm{LW_B}}$為$\angle \mathrm{I_3LI_1}$之角平分線，$\overline{\mathrm{LW_C}}$為$\angle \mathrm{I_1LI_2}$之角平分線

$\because$ 真心 △≅ 真內 △ $\therefore \angle TUJ = \angle I_3I_1I_2 = \beta+\gamma$ ，$\angle I_3\mathrm{L}I_2 = 2\angle I_3I_1I_2 = 2(\beta+\gamma)$(等弧)

$\angle I_3W_AI_2 = 180° - (\beta+\gamma)$ 同理可得$\angle I_3\mathrm{L}I_1 = 2(\alpha+\gamma)$，$\angle I_2\mathrm{L}I_1 = 2(\alpha+\beta)$

故$\angle I_3W_AW_B=\frac{\alpha+\gamma}{2}$，$\angle I_3W_AW_C=\frac{\alpha+\beta}{2}$ (等弧)

$$\therefore \angle W_BW_AW_C=180°-\beta-\gamma-\frac{\alpha+\gamma}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

同理可得$\angle W_AW_BW_C=\frac{2\beta+\alpha+\gamma}{2}$ ，$\angle W_AW_CW_B=\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}$

3.又$2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$，$\angle I_BI_CI_A=180°-\frac{3\alpha+3\beta+2\gamma}{2}=\frac{4\alpha+4\beta+4\gamma}{2}-\frac{3\alpha+3\beta+2\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}$

同理可得$\angle I_CI_BI_A=\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}$，$\angle I_BI_AI_C=\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}$，故$\triangle I_AI_BI_C\sim\triangle W_AW_BW_C(AA)$

Part2 真 W 三角形≅真外三角形

已知：原△ ABC 中， $\triangle W_AW_BW_C$為真 W 三角形， $\triangle O_1O_2O_3$為真外三角形

求證：真 W 三角形全等於真外三角形，$\triangle W_AW_BW_C\cong\triangle O_1O_2O_3$

證明：

如圖 34 ，$\because \overline{W_BO_3}=\overline{W_CO_2}$ (定理 1-3，真心三角形外接圓半徑)

$\because \overline{W_BU}=\overline{W_BJ}$ (定理 1-1，五點共圓半徑)

且圓心必在弦的中垂線上

故$\overline{W_BO_3}$為$\overline{UJ}$中垂線 ；$\overline{W_CO_2}$為$\overline{RJ}$中垂線

$\therefore \overline{W_BO_3}\perp\overline{UR}$ ；$\overline{W_CO_2}\perp\overline{UR}$

$\therefore \overline{W_BW_C}\parallel\overline{O_3O_2}$，且$\overline{W_BW_C}=\overline{O_3O_2}$

同理可證 $\overline{W_AW_C}\parallel\overline{O_3O_1}$，且$\overline{W_AW_C}=\overline{O_3O_1}$

$\overline{W_AW_B}\parallel\overline{O_1O_2}$，且$\overline{W_AW_B}=\overline{O_1O_2}$

故$\triangle W_AW_BW_C\cong\triangle O_1O_2O_3(SSS全等)$

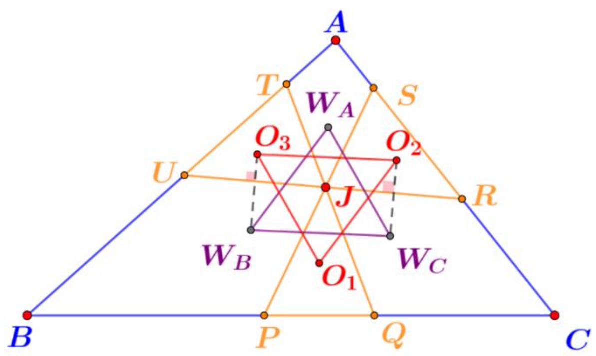


圖 34 真 W 三角形≅真外三角形證明

三、真心三角形相關邊長比例關係之探討

定理三、邊長比例

定理 3-1 旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 1：$\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$

定理 3-2 旁心三角形與真心三角形之邊長比，k:1=$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$

各定理證明如下：

定理 3-1 旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 $1：\sin\frac{A}{2}：\sin\frac{B}{2}：\sin\frac{C}{2}$

已知：△ABC中，I 為內心，△$J_aJ_bJ_c$為旁心三角形，

令$k_a=\frac{\overline{J_bJ_c}}{\overline{BC}}$，$k_b=\frac{\overline{J_aJ_c}}{\overline{AC}}$，$k_c=\frac{\overline{J_aJ_b}}{\overline{AB}}$，以旁心三角形邊長為基準，

旁心三角形與旁邊三角形的邊長比為$1：\frac{1}{k_a}：\frac{1}{k_b}：\frac{1}{k_c}$

求證：旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 $1：\sin\frac{A}{2}：\sin\frac{B}{2}：\sin\frac{C}{2}$

證明：

1.如圖 37，令$\angle J_a=\alpha$、$\angle J_b=\beta$、$\angle J_c=\gamma$

$\because \overline{AJ_a}$為∠A的內角平分線又$\overline{J_bJ_c}$為∠A的外角平分線

$\therefore \angle J_aAJ_c=\angle J_aAJ_b=90°$

同理可得，$\angle J_bBJ_c=\angle J_bBJ_a=90°$

$\angle J_cCJ_a=\angle J_cCJ_b=90°$

又$\angle IJ_cA=\angle CJ_cJ_b$(共用角)

$\therefore \triangle IAJ_c\sim\triangle J_bCJ_c$(AA 相似)

$\therefore \angle AIJ_c=\angle CJ_bJ_c=\beta$

$\therefore \angle AIJ_c=\angle CIJ_a=\beta$ (對頂角)

同理可證$\angle BIJ_c=\angle CIJ_b=\alpha$，$\angle BIJ_a=\angle AIJ_b=\gamma$

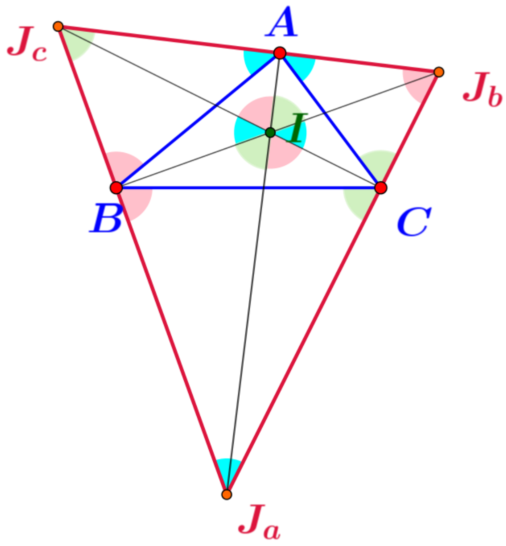


圖 37 旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比

2.$\because\ \alpha+\beta+\gamma=180°$ $\therefore \angle BIC+\angle BJ_aC=180°$ $\therefore$ B、I、C、J_a共圓(對角互補)

$\because \overline{BJ_b}$為∠B的角平分線， $\overline{BJ_a}$、$\overline{BJ_c}$為∠B的外角平分線

$\therefore \angle IBJ_a=\angle IBJ_c=90°$，同理可證$\angle ICJ_a=\angle ICJ_b=90°$，$\angle IAJ_b=\angle IAJ_c=90°$

3.$\because \angle J_cIJ_b=\angle BIC$ (對頂角)$\because \angle ICB=\angle ICJ_a-\angle BCJ_a=90°-\gamma$

$\angle J_cJ_bI=180°-\angle IAJ_b-\angle AIJ_b=90°-\gamma$ $\therefore \angle ICB=\angle J_cJ_bI$

$\therefore\triangle IBC\sim\triangle IJ_cJ_b$(AA) $\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{J_bJ_c}}=\frac{\overline{IC}}{\overline{IJ_b}}$ (對應邊成比例)$=\cos\alpha=\cos(90°-\frac{A}{2})=\sin\frac{A}{2}$

$\therefore \frac{1}{k_a}=\sin\frac{A}{2}$，又$\frac{\overline{BC}}{\overline{J_bJ_c}}=\frac{\overline{AJ_c}}{\overline{J_aJ_c}}$(相似三角形對應邊成比例)$\therefore \overline{AJ_c}：\overline{J_aJ_c}=1：k_a=1：\sin\frac{A}{2}$

同理可證$\overline{AC}：\overline{J_aJ_c}=1：k_b=1：\sin\frac{B}{2}$，$\overline{AJ_c}：\overline{J_aJ_c}=1：k_c=1：\sin\frac{C}{2}$

故 $1：\frac{1}{k_a}：\frac{1}{k_b}：\frac{1}{k_c}=1：\sin\frac{A}{2}：\sin\frac{B}{2}：\sin\frac{C}{2}$

所以旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 $1：\sin\frac{A}{2}：\sin\frac{B}{2}：\sin\frac{C}{2}$

引理 1：$[J_aJ_bJ_c]=2Rs$

證明：

1.令$s=\frac{a+b+c}{2}$，r 為△ABC 內切圓半徑，R 為△ABC 外接圓半徑

$$s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{-a+b+c}{2}$$

如圖 38 中，$[ABC]=[ABJ_a]+[AJ_aC]-[BJ_aC]$

$$=\frac{c\cdot r_a}{2}+\frac{b\cdot r_a}{2}-\frac{a\cdot r_a}{2}$$

$$=\frac{(c+b-a)\cdot r_a}{2}=(s-a)r_a$$

同理可得$[ABC]=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$

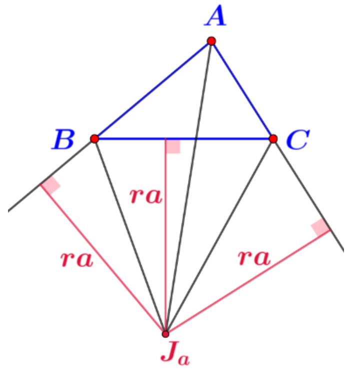


圖 38 [ABC]說明

2. $[ABC]=\sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}=r\cdot s$

$s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)=r^2s^2$，$(s-a)(s-b)(s-c)=r^2s$

$s^3-(a+b+c)s^2+(ab+ac+bc)s-abc=r^2s$，$\because \frac{abc}{4R}=r\cdot s\ \therefore abc=4Rrs$

$$s^3-(a+b+c)s^2+(ab+ac+bc)s-4Rrs=r^2s$$

$$s^2-(a+b+c)s+(ab+ac+bc)-4Rr=r^2$$

$$ab+ac+bc=r^2+4Rr+(a+b+c)s-s^2=r^2+4Rr+2s^2-s^2=r^2+4Rr+s^2$$

3.$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}+\frac{(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}+\frac{(s-a)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\frac{s^2-(b+c)s+bc+s^2-(a+c)s+ac+s^2-(a+b)s+ab}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{3s^2-2(a+b+c)s+(ab+ac+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{3s^2-4s^2+(ab+ac+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{(ab+ac+bc)-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{r^2+4Rr+s^2-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{r^2+4Rr}{r^2s}=\frac{4R+r}{rs}$$

4.$[J_aJ_bJ_c]=[ABC]+[AJ_cB]+[BJ_aC]+[ACJ_b]=\frac{1}{2}(a\cdot r_a+b\cdot r_b+c\cdot r_c)+r\cdot s$

$$=\frac{1}{2}\left(a\cdot\frac{r\cdot s}{s-a}+b\cdot\frac{r\cdot s}{s-b}+c\cdot\frac{r\cdot s}{s-c}\right)+r\cdot s=\frac{1}{2}r\cdot s\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right)+r\cdot s$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot s\left(\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}-3\right)+r\cdot s=\frac{1}{2}r\cdot s\left(s\cdot\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)-3\right)+r\cdot s$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot s\left(s\cdot\frac{4R+r}{rs}-3\right)+r\cdot s=\frac{4Rs+rs}{2}-\frac{3}{2}r\cdot s+r\cdot s=2Rs$$

定理 3-2 旁心三角形與真心三角形之邊長比，k:1=$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$

已知：$\triangle$ ABC中，旁心$\triangle J_aJ_bJ_c$，J 為真心

求證：旁心三角形與真心三角形之邊長比為 k:1=$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$

證明：

1.如圖 39，將$\triangle$ ABC沿$\overline{AJ}$、$\overline{BJ}$、$\overline{CJ}$切割成三個三角形

$$a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c=2[ABC]$$

$$\because \frac{\overline{AJ_a}}{h_a}=\frac{\overline{BJ_b}}{h_b}=\frac{\overline{CJ_c}}{h_c}=k \text{ (對應高成比例)}$$

$$\therefore h_a=\frac{\overline{AJ_a}}{k}\quad h_b=\frac{\overline{BJ_b}}{k}\quad h_c=\frac{\overline{CJ_c}}{k}$$

代入$a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c=2[ABC]$

$$a\left(\frac{\overline{AJ_a}}{k}\right)+b\left(\frac{\overline{BJ_b}}{k}\right)+c\left(\frac{\overline{CJ_c}}{k}\right)=2[ABC]$$

提出$\frac{1}{k}$，$\frac{1}{k}(a\cdot\overline{AJ_a}+b\cdot\overline{BJ_B}+c\cdot\overline{CJ_c})=2[ABC]$

$$k=\frac{a\cdot\overline{AJ_a}+b\cdot\overline{BJ_b}+c\cdot\overline{CJ_c}}{2[ABC]}$$

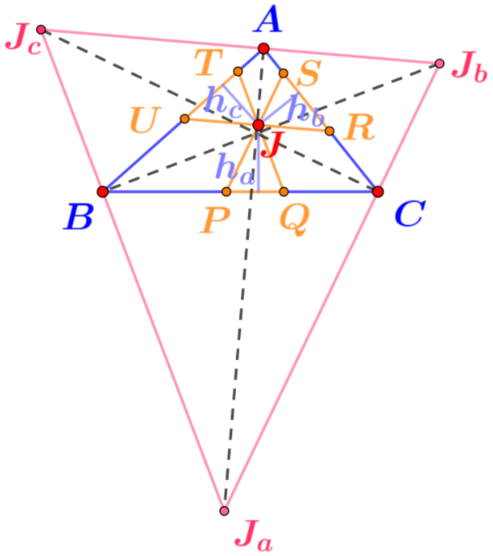


圖 39 旁心三角形與真心三角形之邊長比

2.根據旁心三角形與旁邊三角形的邊長關係

$$k_a=\frac{\overline{J_bJ_c}}{\overline{BC}}\text{，}k_b=\frac{\overline{J_aJ_c}}{\overline{AC}}\text{，}k_c=\frac{\overline{J_aJ_b}}{\overline{AB}}$$

$$a\cdot k_a=\overline{J_bJ_c}\ \therefore a=\frac{\overline{J_bJ_c}}{k_a}\text{，}b\cdot k_b=\overline{J_aJ_c}\ \therefore b=\frac{\overline{J_aJ_c}}{k_b}\text{，}c\cdot k_c=\overline{J_aJ_b}\ \therefore c=\frac{\overline{J_aJ_b}}{k_c}$$

$$k=\frac{\frac{\overline{J_bJ_c}}{k_a}\cdot\overline{AJ_a}+\frac{\overline{J_aJ_c}}{k_b}\cdot\overline{BJ_b}+\frac{\overline{J_aJ_b}}{k_c}\cdot\overline{CJ_c}}{2[ABC]}=\frac{\frac{2[J_aJ_bJ_c]}{k_a}+\frac{2[J_aJ_bJ_c]}{k_b}+\frac{2[J_aJ_bJ_c]}{k_c}}{2[ABC]}=\frac{([J_aJ_bJ_c])(\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c})}{[ABC]}$$

3.根據引理 1 $[ABC]=s\cdot r$， $[J_aJ_bJ_c]=2Rs$

$$k=\frac{([J_aJ_bJ_c])(\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c})}{[ABC]}=\frac{2sR\cdot(\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c})}{rs}=\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$\therefore k:1=\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})\ :1$$

四、真心三角形相關共點性質之探討

定理四、共點性質

定理 4-1 真心=真內三角形內心=真 W 三角形垂心=真外三角形外心

定理 4-2 原三角形外心=旁外三角形外心

定理 4-3 原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點

定理 4-4 原三角形內心=旁心三角形垂心=真內三角形外心=真內切三角形外心=真 W 三角形外心

各定理證明如下：

定理 4-1 真心=真內三角形內心=真 W 三角形垂心=真外三角形外心

我們將此定理分成以下 3 個部分進行證明

Part1 真心=真內三角形內心

已知：$\triangle ABC$中，真心三角形全等，$\triangle I_1I_2I_3$為真內三角形

求證：真內三角形內心即為真心

證明：

如圖 40，由定理 2-1 第二部分證明可得

$\triangle TI_3J \cong \triangle I_3JI_2$，$\triangle RI_2J \cong \triangle I_1JI_2$

$\triangle UI_3J \cong \triangle I_3JI_1$

故 $\angle JI_3I_1 = \angle JI_3I_2$， $\angle JI_2I_3 = \angle JI_2I_1$

$\angle JI_1I_3 = \angle JI_1I_2$

所以 $\overline{I_1J}$ 、 $\overline{I_2J}$, 、$\overline{I_3J}$ 分別為$\triangle I_1I_2I_3$

中$\angle I_1$ 、$\angle I_2$ 、$\angle I_3$ 的角平分線

所以真內三角形內心與真心共點

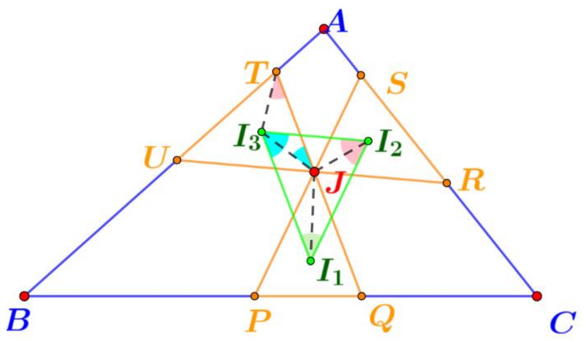


圖 40 真心=真內三角形內心證明

Part2 真心=真外三角形外心

已知：△ ABC，J 為真心，O_1 、O_2 、O_3分別為三個真心三角形的外心

求證：真外三角形外心為真心

證明：

因為三真心三角形全等，所以其外接圓半徑相同

如圖 41，即 $\overline{O_1J} = \overline{O_2J} = \overline{O_3J}$

故 J 為真外三角形外心

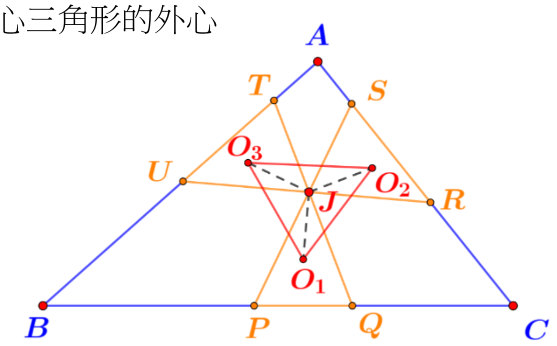


圖 41 真心=真外三角形外心證明

Part3 真心=真 W 三角形垂心

已知：原△ ABC 中， △ $W_AW_BW_C$為真 W 三角形，J 為真心

求證：真 W 三角形垂心為真心

證明：

如圖 42，

$\overline{W_AO_3}=\overline{W_AO_2}$(定理 1-1，五點共圓半徑)

$\overline{JO_3}=\overline{JO_2}$(真心三角形外接圓半徑)

故四邊形$W_AO_3JO_2$為箏形

$\therefore \overline{W_AJ}\perp\overline{O_3O_2}$，又$\overline{W_BW_C}\parallel\overline{O_3O_2}$

故$\overleftrightarrow{W_AJ}\perp\overline{W_BW_C}$

同理可證$\overleftrightarrow{W_BJ}\perp\overline{W_AW_C}$，$\overleftrightarrow{W_CJ}\perp\overline{W_AW_B}$

故真 W 三角形垂心為真心

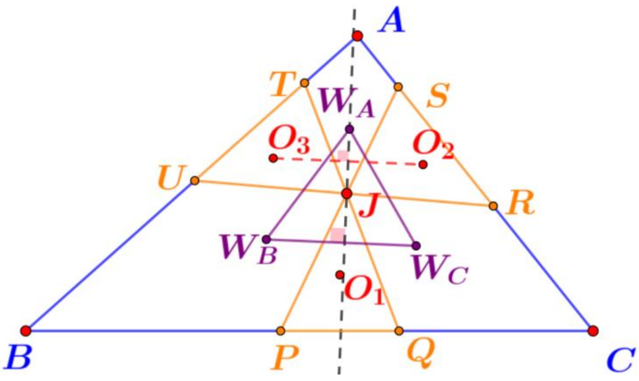


圖 42 真心=真 W 三角形垂心證明

我們將此定理整理成下表：

表 2 真心=真內三角形內心=真 W 三角形垂心=真外三角形外心

原三角形 △ ABC	真內三角形 △ $I_1I_2I_3$	真 W 三角形 △ $W_AW_BW_C$	真外三角形 △ $O_1O_2O_3$
真心	內心	垂心	外心

定理 4-2 原三角形外心=旁外三角形外心

因原△三頂點與旁外△三頂點六點共圓(定理 1-5)，故原△外心、旁外△外心共點

定理 4-3 原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點

已知：原△ ABC 中，I_1、I_2、I_3為三個真內三角形內心，D、E、F為原三角形內接圓與三邊之交點，T_1、T_2、T_3為真心三角形內接圓與原三角形三邊之交點，$\overleftrightarrow{I_1T_1}$、$\overleftrightarrow{I_2T_2}$交於$P_3$；$\overleftrightarrow{I_1T_1}$、$\overleftrightarrow{I_3T_3}$交於$P_2$；$\overleftrightarrow{I_2T_2}$、$\overleftrightarrow{I_3T_3}$交於$P_1$

求證：原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點

證明：

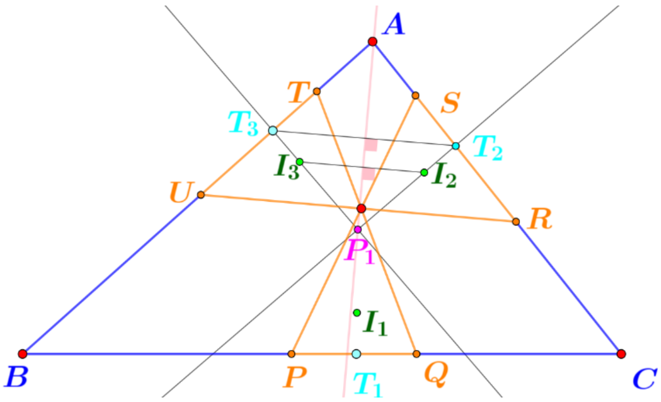


圖 43 原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點證明

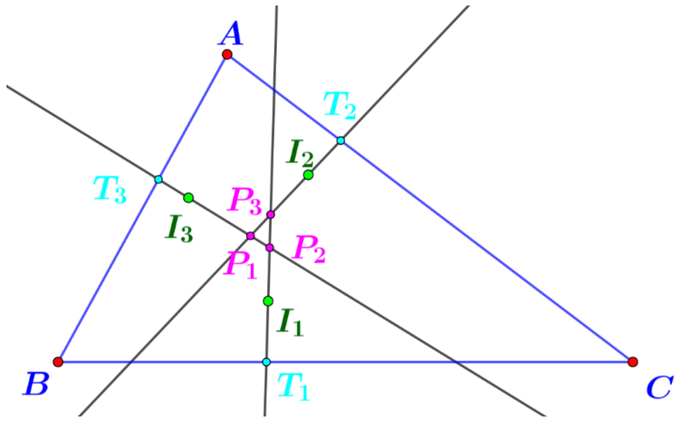


圖 44 P_1、P_2 、P_3共點證明

1.如圖 43，因為真心三角形全等，所以 $\overline{I_3T_3} = \overline{I_2T_2}$ (真心三角形內切圓半徑)，且 $\overline{I_3I_2} \parallel \overline{T_3T_2}$

故四邊形 $T_3T_2I_2I_3$ 為等腰梯形，因為$\angle P_1I_2I_3 = \angle P_1T_2T_3$、$\angle P_1I_3I_2 = \angle P_1T_3T_2$ (同位角相等)

△ $I_3I_2P_1$、△ $T_3T_2P_1$為等腰三角形 ∴ P_1 在 $\overline{I_3I_2}$ 、$\overline{T_3T_2}$ 中垂線上

同理可得P_2 在 $\overline{I_1I_3}$ 、$\overline{T_1T_3}$ 中垂線上，P_3 在 $\overline{I_1I_2}$ 、$\overline{T_1T_2}$ 中垂線上

2.如圖 44，已知P_3、I_1、T_1 共線、P_1、I_2、T_2 共線、P_2、I_3、T_3 共線

且$\overline{T_2P_1} = \overline{T_3P_1}$；$\overline{T_1P_2} = \overline{T_3P_2}$；$\overline{T_1P_3} = \overline{T_2P_3}$

令$\overline{P_1P_2} = x$ 、$\overline{P_2P_3} = y$、$\overline{P_1P_3} = z$ ，$\overline{T_3P_1} = l$

$\overline{T_1P_2} = \overline{T_3P_2} = l + x$，$\overline{T_1P_3} = \overline{T_2P_3} = l + x + y$ ，$\overline{T_3P_1} = \overline{T_2P_1} = l + x + y + z = l$

$\therefore x + y + z = 0$，故P_1、P_2 、P_3共點

3.令$P_1 = P_2$ =$P_3 = P$，P 為△$T_1T_2T_3$ 、 △$I_1I_2I_3$ 之外心

所以$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \overline{PT_3}$，且$\overline{PT_3} \perp \overline{AB}$、$\overline{PT_1} \perp \overline{BC}$、$\overline{PT_2} \perp \overline{AC}$

根據角平分線性質，P在$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線上，因此P與原三角形之內心I共點

故原△內切圓與三邊切點D、E、F =真心△三內切圓與三邊切點$\mathrm{T_1}$、$\mathrm{T_2}$、$\mathrm{T_3}$

定理 4-4 原三角形內心=真內三角形外心=真內切三角形外心=真 W 三角形外心=旁心三角形垂心

已知：原△ABC中，I 為內心，J_H為旁心△$J_aJ_bJ_c$的垂心，O'為真內△$\mathrm{I_1I_2I_3}$的外心，$\mathrm{W_O}$為真 W△$\mathrm{W_AW_BW_C}$的外心

求證：原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真內切三角形外心、真 W 三角形外心共點，即證明I、J_H、O'、W_O共點

證明：

1.原三角形內心為內角角平分線之交點，旁心為兩外角平分線及一內角平分線的交點

$\angle J_cCJ_b = \angle J_cCJ_a = 90°$，$\angle J_aAJ_b = \angle J_aAJ_c = 90°$，$\angle J_bBJ_c = \angle J_bBJ_a = 90°$

$\overline{J_aA}$、$\overline{J_bB}$、$\overline{J_cC}$為原三角形內角平分線、旁心三角形三邊的高

故原三角形內心與旁心三角形垂心共點

2.由定理 4-1 可知，原三角形內心、真內三角形外心、真內切三角形外心共點

3.又定理 1-4 真內三角形頂點、真 W 三角形頂點六點共圓，故真內△外心與真 W△外心共點

故原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真 W 三角形外心共點

我們將此定理整理成下表：

表 3 原三角形內心=真內三角形外心=真內切三角形外心=真 W 三角形外心=旁心三角形垂心

原三角形 △ABC	旁心三角形 △$J_aJ_bJ_c$	真內三角形 △$I_1I_2I_3$	真內切三角形 △DEF	真 W 三角形 △$W_AW_BW_C$
內心	垂心	外心	外心	外心

五、真心三角形相關共線性質之探討

定理五、共線性質

定理 5-1 四點共圓圓心、真 W 三角形頂點、真心、真心三角形內心，四點共線

已知：原△ABC 中，Wo_1、Wo_2、Wo_3為四點共圓圓心，W_A、W_B、W_C真心三角形頂點

I_1、I_2、I_3為真內三角形內心，J 為真心

求證：四點共圓圓心、五點共圓圓心、真心、真心三角形內心，四點共線

證明：

1.如圖 45，由定理 4-1 可知，真心 J 為△$W_AW_BW_C$的垂心

$\therefore \overleftrightarrow{W_AJ} \perp \overline{W_BW_C}$

又$\overline{W_BI_1} = \overline{W_BJ}$；$\overline{W_CI_1} = \overline{W_CJ}$

所以四邊形$W_CJW_BI_1$為箏形

$\therefore \overline{JI_1} \perp \overline{W_BW_C}$ (箏形兩對角線呈直角)

$\therefore W_A$、J、I_1三點共線

2.由定理 1-3 中，$\angle W_AJT = \angle W_AJS$

由定理 1-2 可得Wo_1在$\overline{TS}$的中垂線上

$\therefore Wo_1$、W_A、J三點共線

故Wo_1、W_A、J、I_1四點共線

同理可證Wo_2、W_B、J、I_2四點共線

Wo_3、W_C、J、I_3四點共線

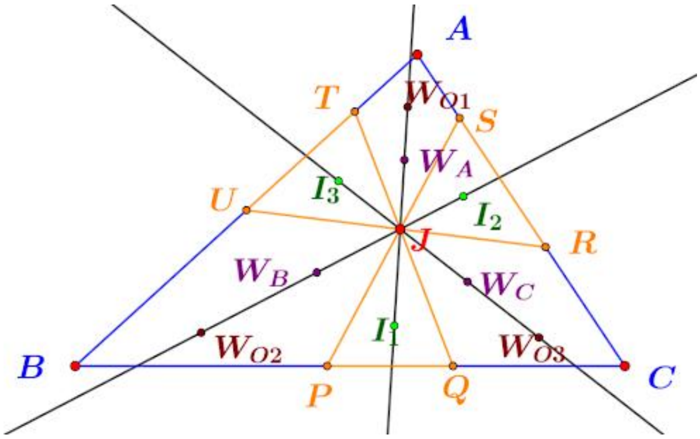


圖 45 四點共圓圓心、真 W 三角形頂點、真心、真心三角形內心，四點共線證明

六、真心作圖法之探討

知道原三角形、旁邊三角形、旁心三角形與真心三角形的邊長比例關係後，我們想知道如何以尺規作圖找出任意三角形中真心的位置。

(一)真心作圖法之發想

由定理 2-1 可知真心△PQJ與旁邊△BCJ_a相似，因此我們利用這個關係，我們將旁邊△BCJ_a看成真心△PQJ 的旋轉放大，將原△ABC依照同比例旋轉放大為△$A'B'C'$，此時旁邊△BCJ_a即為放大△$A'B'C'$之真心三角形，且旁心J_a為放大△$A'B'C'$之真心，令其縮放中心為M，如圖 46。

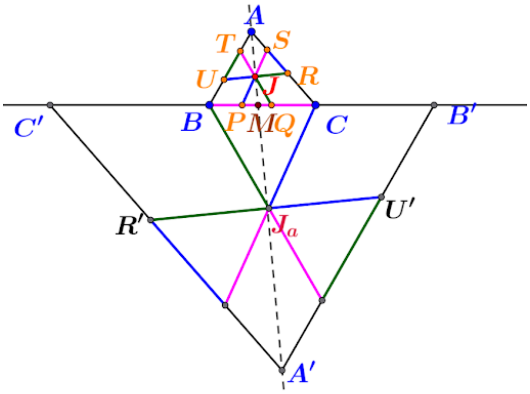


圖 46 真心作圖之概念

(二)真心作圖法步驟

關鍵步驟一：找出放大三角形對應點U、R之U'、R'

已知真心三角形全等，故對應邊等長，又$\overline{UR}\perp\angle$A角平分線，因此利用此概念，分別以J_a為圓心，$\overline{BJ_a}$、$\overline{CJ_a}$為半徑畫圓，取兩圓與過J_a垂直於$\angle$A角平分線之直線的交點，即為所求R'、U'。

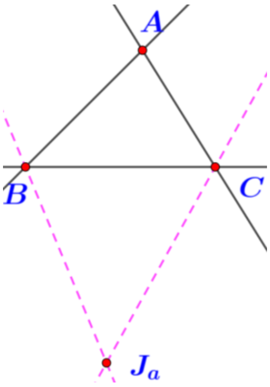


圖 47 步驟 1

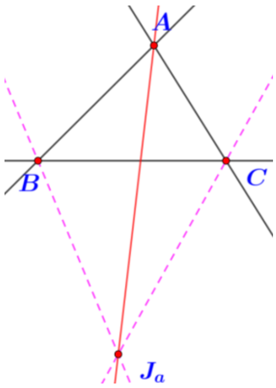


圖 48 步驟 2

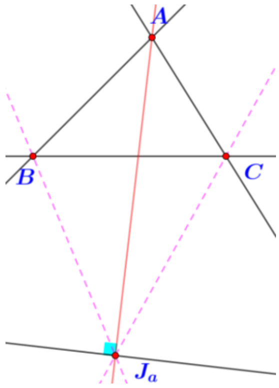


圖 49 步驟 3

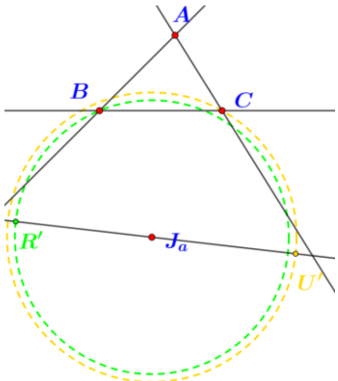


圖 50 步驟 4

步驟 1.任意三角形△ ABC，取$\angle$A對應旁心J_a，如圖 47。

步驟 2.作$\angle$A的內角平分線，如圖 48。

步驟 3.過旁心J_a，作$\angle$A角平分線的垂線，如圖 49。

步驟 4.以旁心J_a為圓心，分別以$\overline{BJ_a}$、$\overline{CJ_a}$為半徑畫圓，取兩圓與過J_a垂直於$\angle$A角平分線之直線的交點R'、U'，如圖 50。

關鍵步驟二：找到縮放中心

縮放中心為兩三角形各對應點連線之交點，作原三角形兩邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$，過U'、R'兩交點的平行線，取兩平行線的交點A'，連接A、A'；B、B'；C、B'，其交點即為縮放中心。

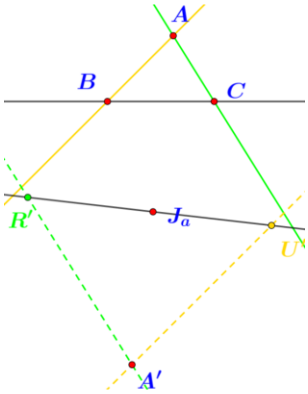


圖 51 步驟 5

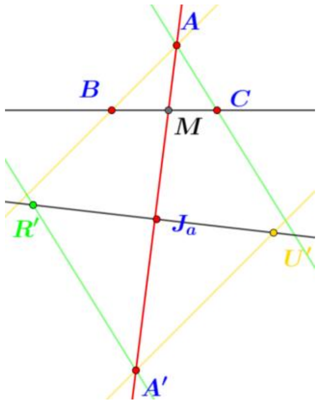


圖 52 步驟 6

步驟 5.作原三角形兩邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$，過U'、R'兩交點的平行線，取兩平行線的交點A'，如圖 51。

步驟 6.取$\overline{AA'}$與原三角形邊長$\overline{BC}$的交點M，即為原三角形與放大三角形的旋轉中心，如圖 52。

關鍵步驟三：利用縮放中心找出真心

作$\overleftrightarrow{U'M}$、$\overleftrightarrow{R'M}$與原三形邊長的交點即為對應之U、R，再作J_a與M的連線，與$\overline{UR}$的交點即為所求J。

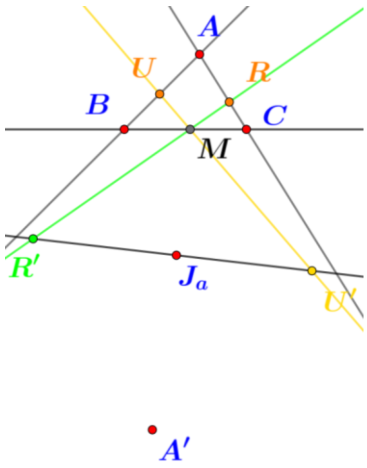


圖 53 步驟 7

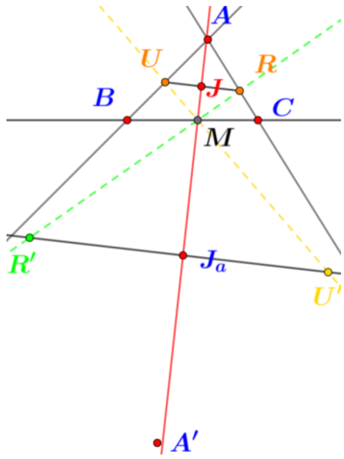


圖 54 步驟 8

步驟 7.作直線$\overleftrightarrow{U'M}$、$\overleftrightarrow{R'M}$，分別取其與原三形邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的交點U、R，如圖 53。

步驟 8.作旁心J_a與M的連線，與$\overline{UR}$的交點即為所求J，如圖 54。

伍、討論

市賽後，評審希望我們可以瞭解真心與 barycentric coordinates 之間的關係，因此我們進行以下研究：

一、真心與 barycentric coordinates 關係之探討

(一)、barycentric coordinates

根據參考資料[5]，給定△ABC及任意一點P，則P之 homogeneous barycentric coordinates 可被表示為$(u: v: w)$，其中$u: v: w = [PBC]:[PCA]:[PAB]$。且標準化後得$P$之 absolute barycentric coordinates 為$\left(\frac{u}{u+v+w}, \frac{v}{u+v+w}, \frac{w}{u+v+w}\right)$，如圖 55。

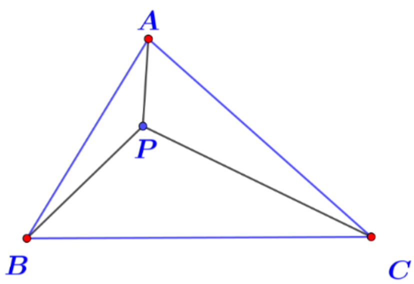


圖 55　barycentric coordinates 說明

(二)、真心對應之 homogeneous barycentric coordinates

定理六：真心的 barycentric coordinates 為（ $\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$ ）

已知：△ABC 中，J 為真心

求證：真心的 barycentric coordinates 為（ $\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$ ）

證明：

根據定理 3-1 及 3-2，如圖 56

$$[JBC]=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{J_bJ_c}}{k_a}\cdot\frac{\overline{AJ_a}}{k}$$

$$=\frac{1}{k_a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{J_bJ_c}\cdot\overline{AJ_a}}{k}=\frac{1}{k_a}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{k}$$

同理可得$[JCA]=\frac{1}{k_b}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{k}$、$[JAB]=\frac{1}{k_c}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{k}$

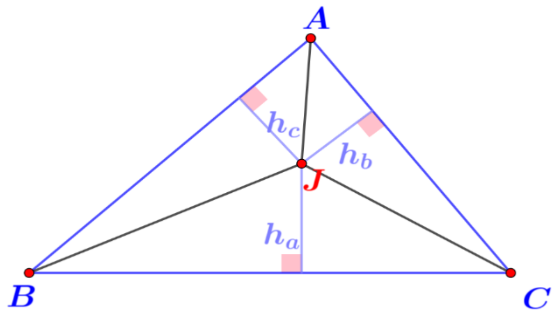


圖 56 真心對應之 barycentric coordinates 證明

$$[\mathrm{JBC}]:[\mathrm{JCA}]:[\mathrm{JAB}]=\left(\frac{1}{\mathrm{k_a}}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{\mathrm{k}}\right):\left(\frac{1}{\mathrm{k_b}}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{\mathrm{k}}\right):\left(\frac{1}{\mathrm{k_c}}\cdot\frac{[J_aJ_bJ_c]}{\mathrm{k}}\right)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{k_a}}:\frac{1}{\mathrm{k_b}}:\frac{1}{\mathrm{k_c}}=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$$

真心對應之 homogeneous barycentric coordinates 即為（ $\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$ ）

(三)、真心=Kimberling center X_{174}

我們在 Kimberling Center 的網站中以真心對應之 homogeneous barycentric coordinates（ $\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$)進行搜尋，找到以下資料：

X_{174}(YFF CENTER OF CONGRUENCE)其 barycentric coordinates 亦為

($\sin\frac{A}{2}$ ： $\sin\frac{B}{2}$ ： $\sin\frac{C}{2}$)。

經過比對後，我們發現X_{174}即為真心。

二、由幾何作圖與 homogeneous barycentric coordinates 探討真心作圖法

利用真心之 homogeneous barycentric coordinates 與真心直角坐標關係，找出對應D、E、F即可畫出真心。

1.如圖 57，$\triangle$ JAB 與$\triangle$ JCA同底($\overline{AJ}$)，且 $[JAB]:[JCA]=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}$

$\therefore \overline{BH_1}:\overline{CH_2}=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}$

$\because \angle BH_1D=\angle CH_2D=90°$，$\angle BDH_1=\angle CDH_2$(對頂角) $\therefore \triangle BH_1D\sim\triangle CH_2D(AA)$

因為相似三角形對應邊成比例 $\therefore \overline{BH_1}:\overline{CH_2}=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}=\overline{BD}:\overline{CD}$

故$\overrightarrow{AJ}$與$\overline{BC}$交於 D，且$\overline{BD}:\overline{CD}=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}$

同理可得$\overline{CE}:\overline{AE}=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{C}{2}$，$\overline{AF}:\overline{BF}=\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{A}{2}$ (如圖 58)

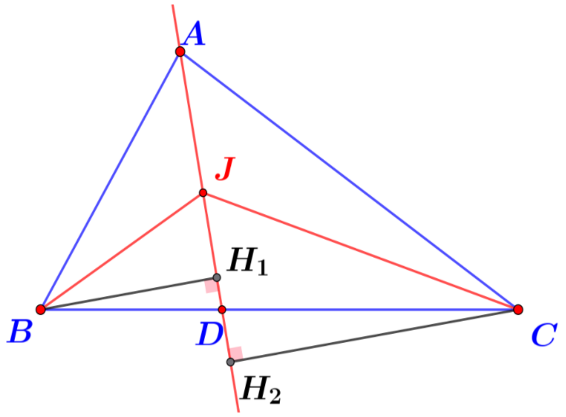


圖 57　真心直角坐標證明

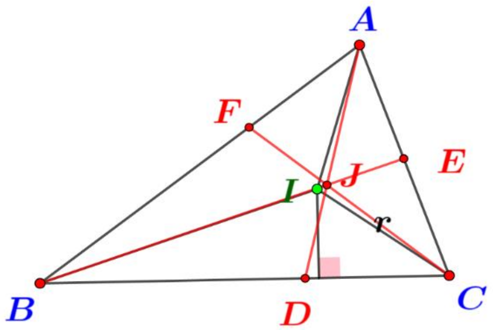


圖 58　真心作圖法

(一)真心之 homogeneous barycentric coordinates 作圖法之發想

如圖 58，在$\triangle$ ABC中，J為真心，作$\overleftrightarrow{AJ}$交$\overline{BC}$於D，$\overleftrightarrow{BJ}$交$\overline{AC}$於 E，$\overleftrightarrow{CJ}$交$\overline{AB}$於 F，由上述說明得知$\overline{BD}:\overline{CD}=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}$，$\overline{CE}:\overline{AE}=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{C}{2}$，$\overline{AF}:\overline{BF}=\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{A}{2}$。作$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之角平分線相交於$\triangle$ ABC 的內心 I。令$\triangle$ ABC內切圓半徑為r，觀察圖 58 中，可得$\frac{r}{\overline{IB}}=\sin\frac{B}{2}$；$\frac{r}{\overline{IC}}=\sin\frac{C}{2}$，則$\overline{IB}:\overline{IC}=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}:\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}=\sin\frac{C}{2}:\sin\frac{B}{2}$，故$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{IB}:\overline{IC}$，所以$\overline{ID}$為$\angle BIC$的角平分線，其餘兩邊同理。利用此概念作出$D$、$E$、$F$。

(二)真心作圖法步驟

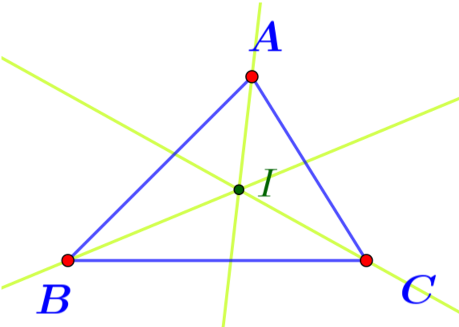


圖 59 步驟 1

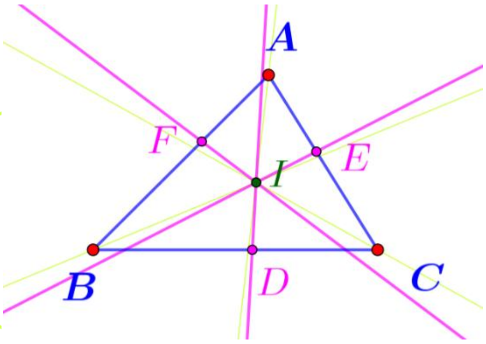


圖 60 步驟 2

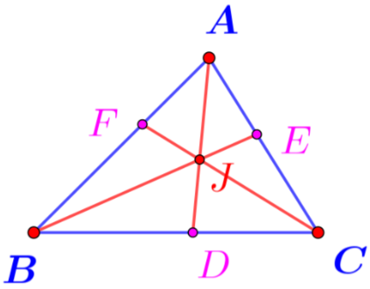


圖 61 步驟 3

步驟 1. 任意三角形△ABC，作其內心 I，如圖 59。

步驟 2. 作$\angle BIC$、$\angle CIA$、$\angle AIB$的角平分線，分別交$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$於D、E、F，如圖 60。

步驟 3. 連接$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，三條線交點即為真心，如圖 61。

(三)真心作圖與 Kimberling center X_{174}之關聯

比對 Kimberling center X_{174}的資料，其中一項：

Let D be the point on side BC such that (angle BID) = (angle DIC), and likewise for point E on side CA and point F on side AB. The lines AD, BE, CF concur in X(174). (Seiichi Kirikami, Jan. 29, 2010)

由上述說明，我們發現其與此真心作圖法相同。

陸、結論

一、真心即為 Kimberling center X_{174}，Wabash center 為X_{364}。

二、我們證明真心三角形、旁邊三角形內心、外心相關連線三角形共圓、相似、共點、共線等性質。(如圖 62)

三、我們證明真心三角形、旁心三角形、旁邊三角形相似及邊長關係。(如圖 62)

四、在 barycentric coordinates 的概念下，找出真心(X_{174})的 barycentric coordinates 與三角形三內角的半角有關，於是得到X_{174}的尺規作圖法。

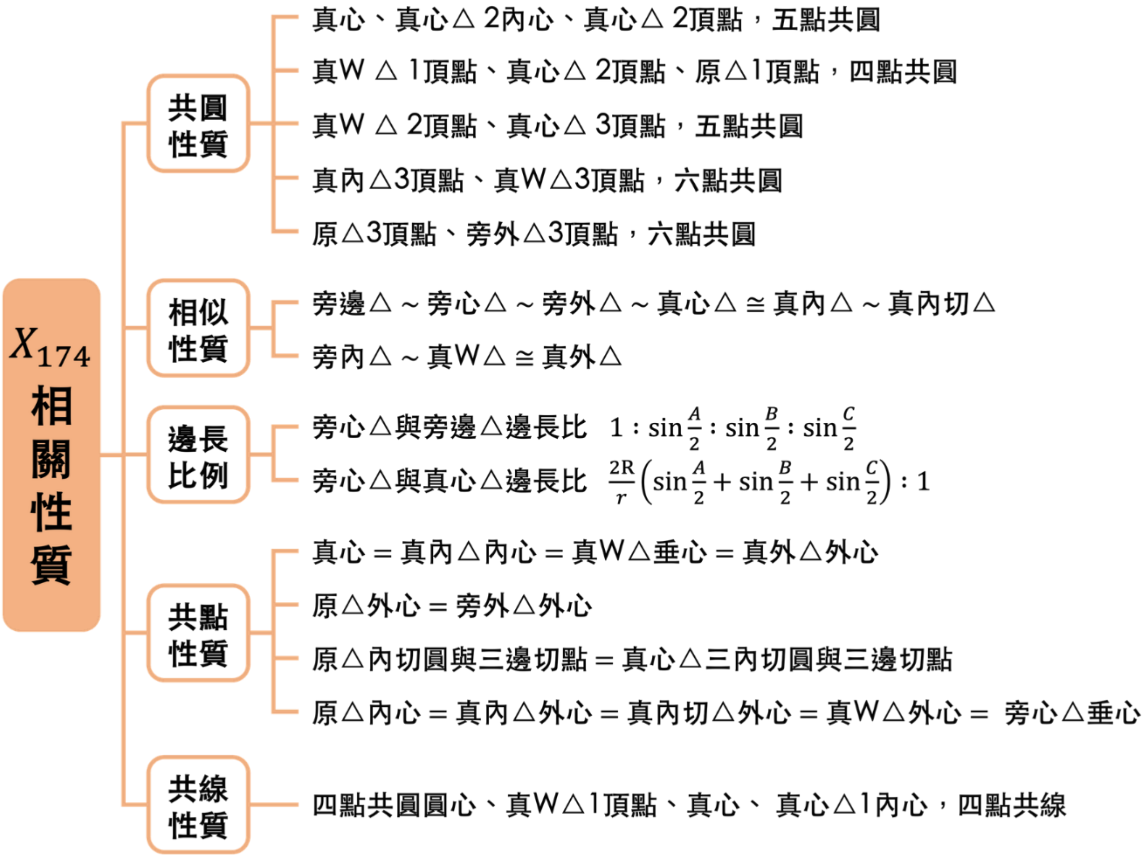


圖 62　真心(X_{174})三角形相關性質總表

柒、參考文獻資料

[1] Cambré, C. (n.d.). *X(364) Wabash center* [Interactive geometry resource]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/PBVRXsdU

[2] Kimberling, C. (n.d.). *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*. University of Evansville. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] 蘇敏文、吳浩安（2018）。*用“心”*。第 58 屆全國中小學科學展覽會參展作品。

[4] 百度百科（n.d.）。*旁心三角形*。https://baike.baidu.com/item/旁心三角形/8746734

[5] Yiu, P. (2013). *Barycentric coordinates with reference to a triangle* (Section 3.1). In *Introduction to the geometry of the triangle* (Version 13.0411, pp. 25–26). Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University.

【作品內圖表照片說明】本作品『真心畫大冒險～真心三角形性質之探討』內容皆由作者自行繪製。

【評語】030403

此作品從 Cambré 所提供的 GeoGebra 作圖資源(X(364) Wabash center) 出發，延伸出「真心」的概念，並進一步定義「真心三角形」。研究對象包括真心三角形、旁邊三角形與旁心三角形，以及它們的內切圓與外接圓。作者發現這些三角形間存在相似關係，且其各心之間具有共點、共線與共圓等幾何性質。此外，也成功求出真心的重心座標 (barycentric coordinates)，並據此提出真心的幾何作圖法。

此作品幾處值得注意與讚許，如: 共點性質的推導與證明進一步展現了對幾何點性質的深刻理解；成功證明原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真內切三角形外心和真 W 三角形外心共點，揭示了幾何中心間的奧秘關聯；確立了四點共圓圓心、真 W 三角形頂點、真心、真心三角形內心四點共線的定理，為複雜幾何圖形提供了簡潔結論；少部分證明內容相似性有些重複，可考慮加以精簡歸納；部分證明涉及圖形編號較多，可建議透過顏色標示或清晰線條區分，將有助於理解複雜的幾何關係，並增添內容的流暢性。

總體而言，此作品聚焦於幾何學中的「真心三角形」及其相關共點、共線性質的證明。研究從已知定理出發，通過邏輯推理和圖形輔助證明了多個幾何關係，展現了學生的幾何基礎和證明能力，值得肯定與嘉許。

作品海報

真心畫大冒險～
真心三角形性質之探討

壹、前言

一、研究動機

我們在網路上看到一篇關於 Wabash center 的文章，這個點的定義是：過該點分別做三角形三個角平分線的垂線，使形成之三個等腰三角形面積相等，我們對這個點的定義很感興趣，於是自己衍生出一個新的點「真心」，並對其性質展開一系列的研究。

二、研究目的

（一）真心三角形、旁邊三角形內心、外心相關連線三角形共圓、相似、共點、共線等性質。

（二）真心三角形、旁心三角形、旁邊三角形相似及邊長關係。

（三）任意三角形中，真心的作圖法。

（四）真心與 barycentric coordinates 關係。

三、基礎名詞定義

（一）Wabash center

（二）W三角形 $\triangle XPQ$、$\triangle XRS$、$\triangle XTU$

（三）真心J (X_{174})

（四）真心三角形 $\triangle JPQ$、$\triangle JRS$、$\triangle JTU$

（五）旁邊三角形 $\triangle BCJ_a$、$\triangle ACJ_b$、$\triangle ABJ_c$

（六）旁心三角形 $\triangle J_aJ_bJ_c$

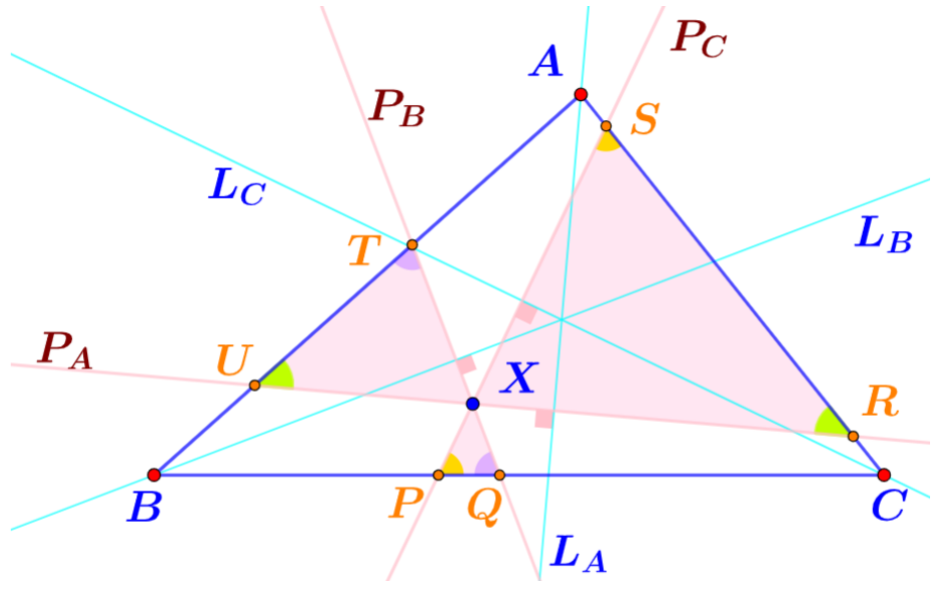


圖1 L_A、L_B、L_C 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線；P_A、P_B、P_C 分別為過 X 點 L_A、L_B、L_C的垂線；$\triangle XPQ$、$\triangle XRS$、$\triangle XTU$ 為W三角形

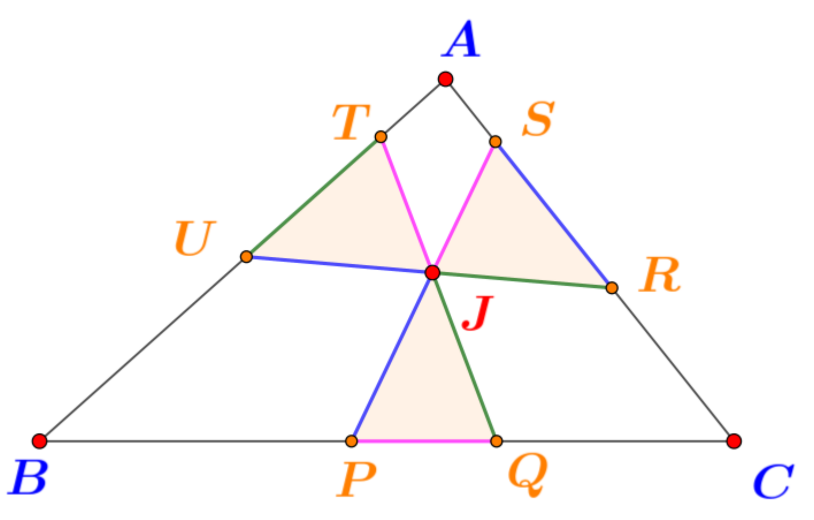


圖2 J為$\triangle ABC$的真心(X_{174})；$\triangle JPQ$、$\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形

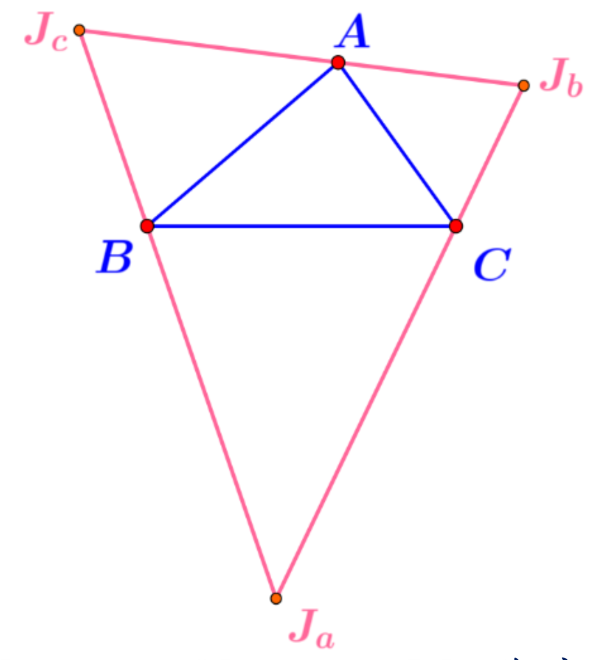


圖3 $\triangle BCJ_a$、$\triangle ACJ_b$、$\triangle ABJ_c$ 為旁邊三角形；$\triangle J_aJ_bJ_c$ 為旁心三角形

貳、研究過程與方法

一、研究流程圖

Wabash center

↓ W三角形相似

真心三角形全等

↓

真心、旁心、旁邊三角形相似

↓ 回到真心本身

定義與真心、旁心相關連線三角形

↓

研究各點關聯

↓

發現共圓、共點、共線性質

↓

真心與 barycentric coordinates

圖4 研究流程圖

二、真心、旁心與旁邊三角形之相似性質

性質1：W三角形為相似三角形，即$\triangle XPQ \sim \triangle XRS \sim \triangle XTU$。

性質2：真心三角形必為全等三角形。

性質3：旁邊三角形～旁心三角形～真心三角形。

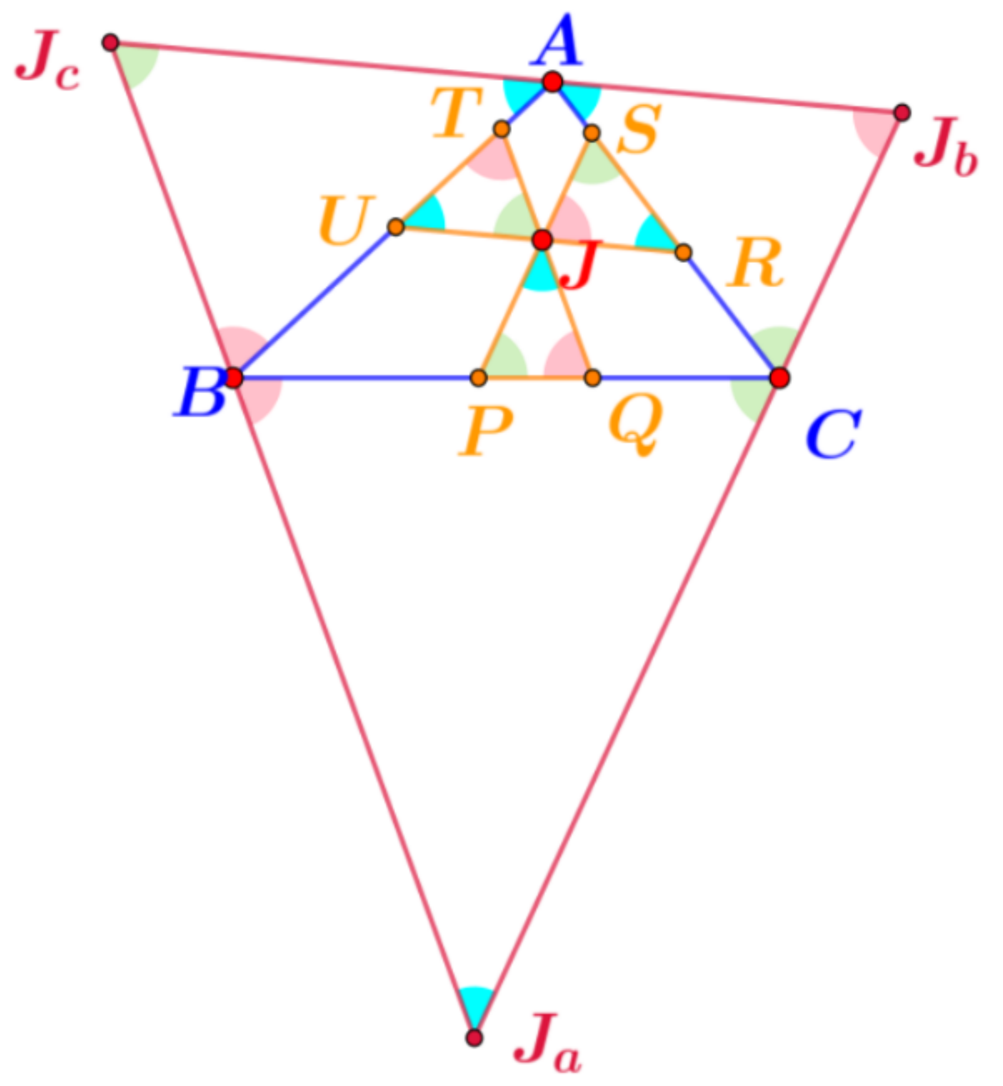


圖5 旁邊三角形~旁心三角形~真心三角形

三、真心、旁心與旁邊三角形之邊長比例關係

定理3-1 旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 $1:\frac{1}{k_a}:\frac{1}{k_b}:\frac{1}{k_c}=1:\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$。

$\triangle IBC \sim \triangle IJ_cJ_b \ \therefore \frac{\overline{IC}}{\overline{IJ_b}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{J_bJ_c}}=\frac{\overline{CJ_a}}{\overline{J_aJ_c}}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$

$\therefore \frac{1}{k_a}=\sin\frac{A}{2}$，$\therefore \overline{CJ_a}:\overline{J_aJ_c}=1:\sin\frac{A}{2}$

同理可證 $\overline{AC}:\overline{J_aJ_c}=1:\sin\frac{B}{2}$，$\overline{AJ_c}:\overline{J_aJ_c}=1:\sin\frac{C}{2}$

定理3-2 旁心三角形與真心三角形之邊長比 $k:1=\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$。

$a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c=2[ABC]$

$\frac{AJ_a}{h_a}=\frac{BJ_b}{h_b}=\frac{CJ_c}{h_c}=k$，$k_a=\frac{J_bJ_c}{BC}$，$k_b=\frac{J_aJ_c}{AC}$，$k_c=\frac{J_aJ_b}{AB}$

$[ABC]=s\cdot r$，$[J_aJ_bJ_c]=2Rs$

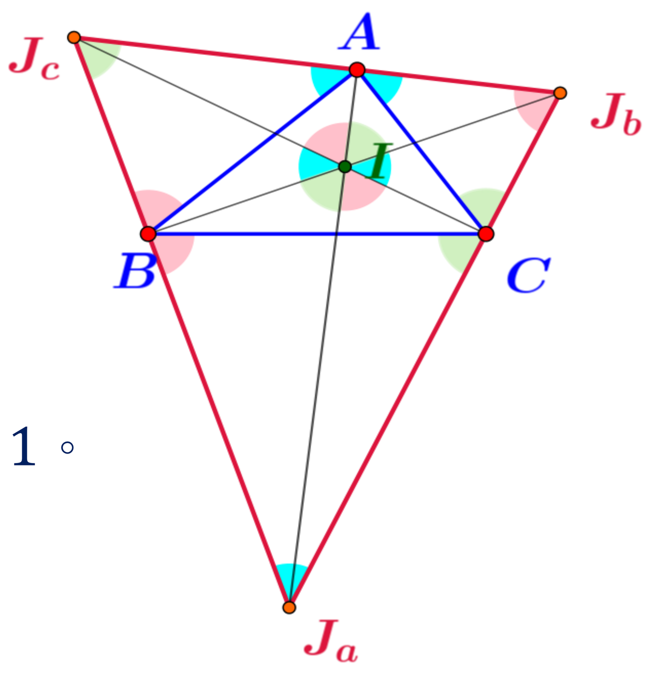


圖6 旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比

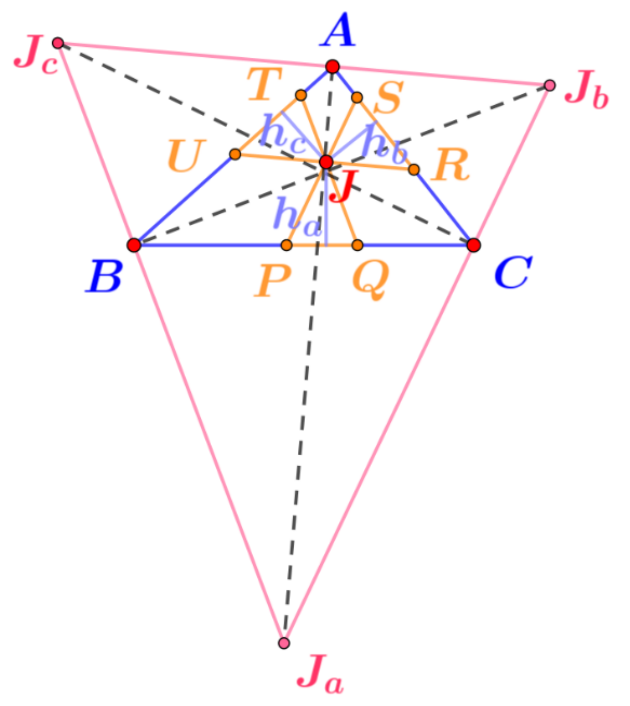


圖7 旁心三角形與真心三角形之邊長比

四、真心作圖法之探討

關鍵步驟一：找出放大三角形對應點 U、R 之 U'、R'

關鍵步驟二：找到縮放中心

關鍵步驟三：利用縮放中心找出真心

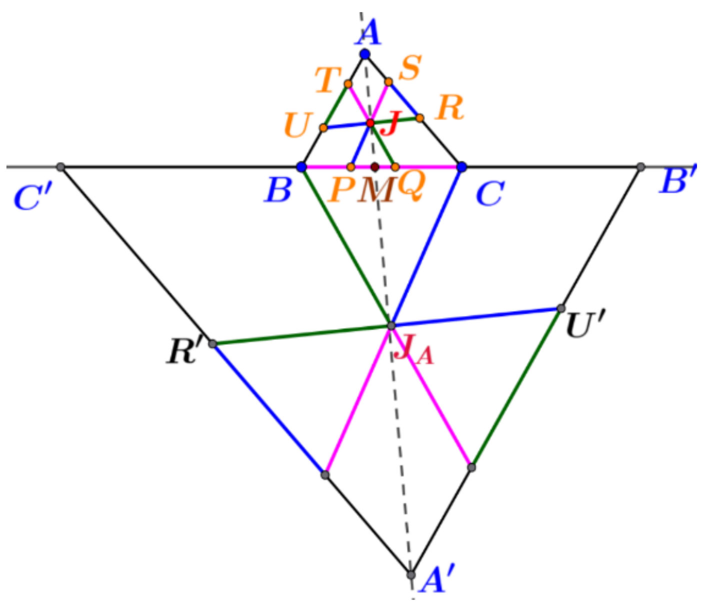


圖8 真心作圖法概念

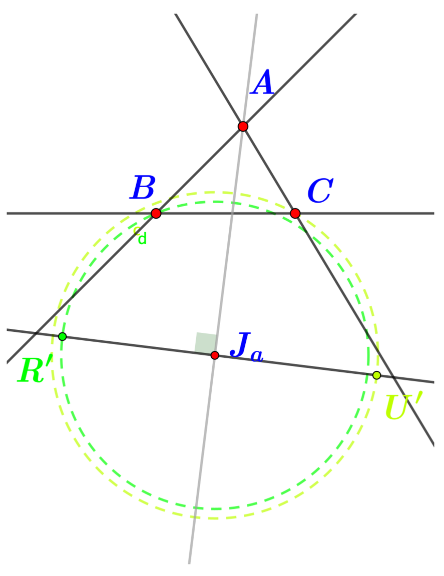


圖9 關鍵步驟1

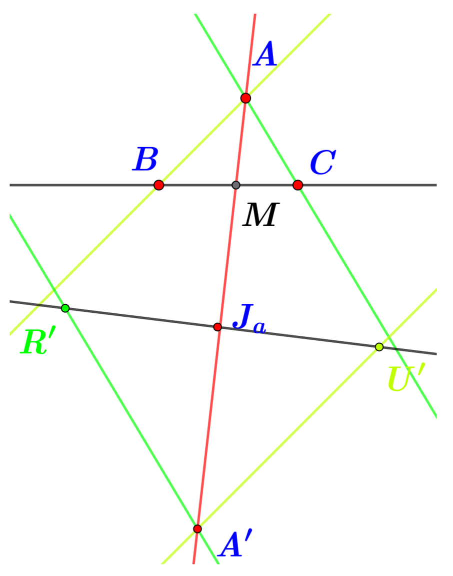


圖10 關鍵步驟2

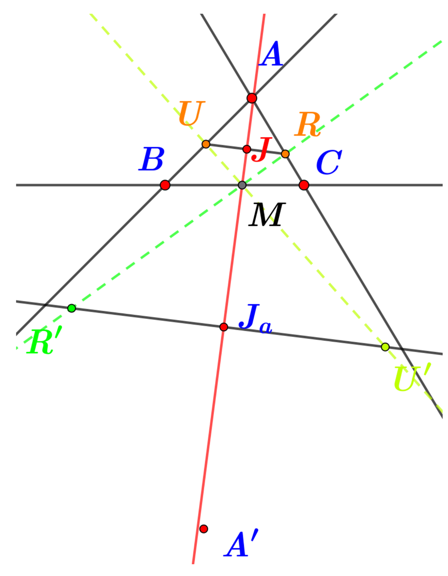


圖11 關鍵步驟3

參、研究結果

結果名詞定義

(一)真內三角形△$I_1I_2I_3$

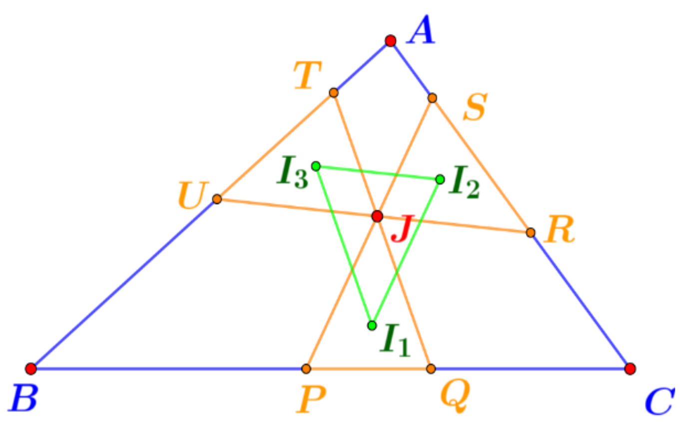


圖12 △$I_1I_2I_3$為真內三角形

(二)真內切三角形△DEF

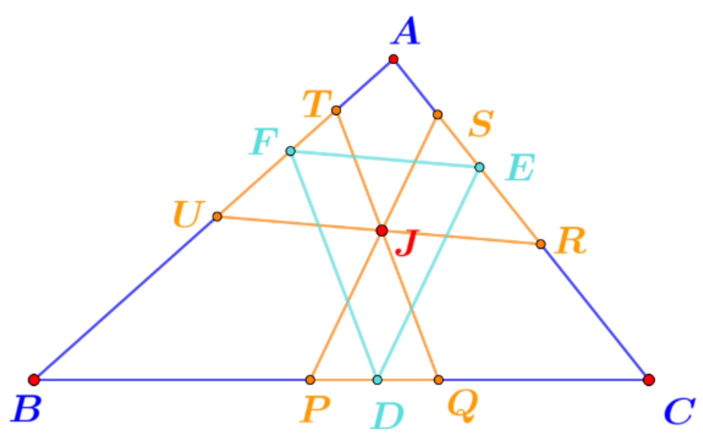


圖13 △DEF為真內切三角形

(三)真外三角形△$O_1O_2O_3$

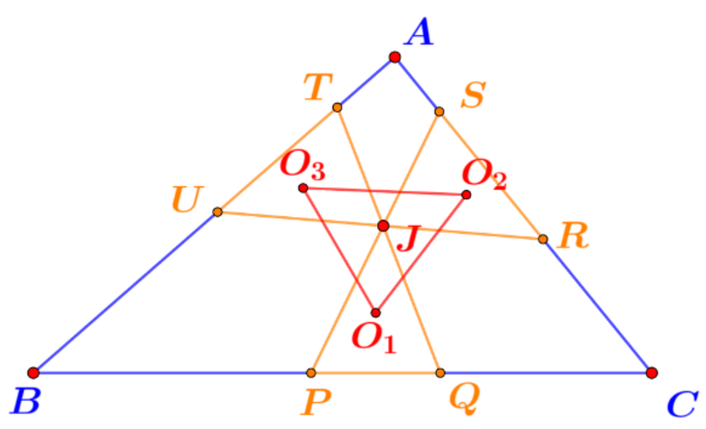


圖14 △$O_1O_2O_3$為真外三角形

(四)旁內三角形△$I_AI_BI_C$

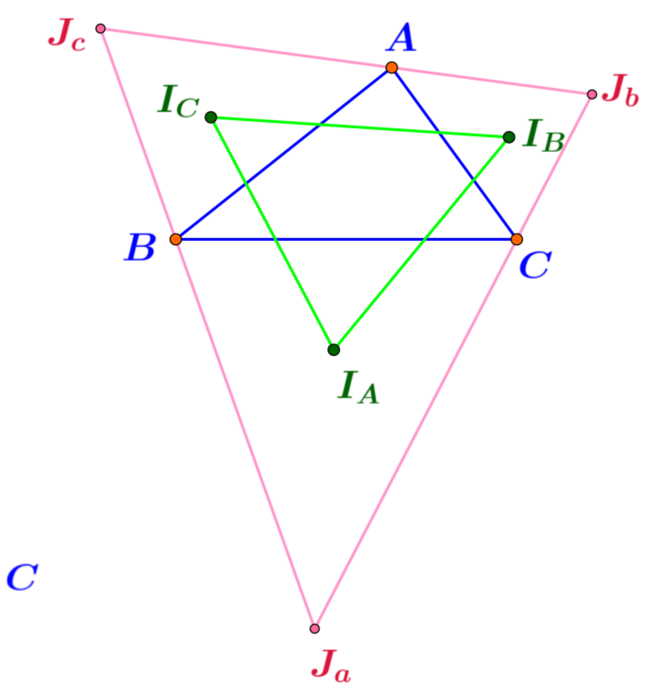


圖15 △$I_AI_BI_C$旁內三角形

(五)旁外三角形△$O_AO_BO_C$

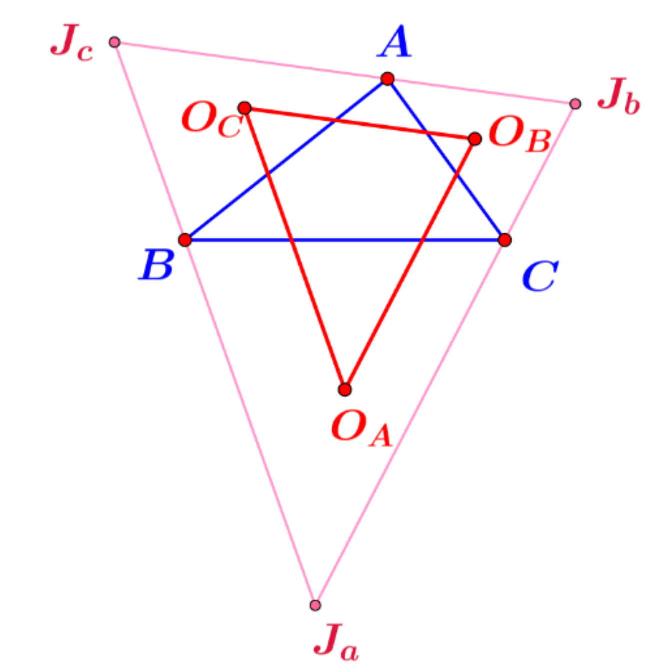


圖16 △$O_AO_BO_C$旁外三角形

一、共圓性質

定理1-1 真心、兩個真心三角形內心與兩個真心三角形頂點五點共圓。

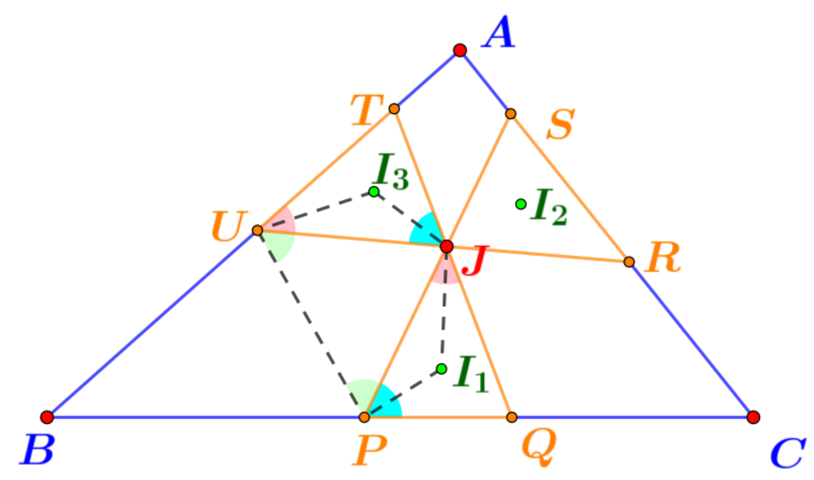


圖17 真心、兩個真心三角形內心與兩個真心三角形頂點五點共圓證明

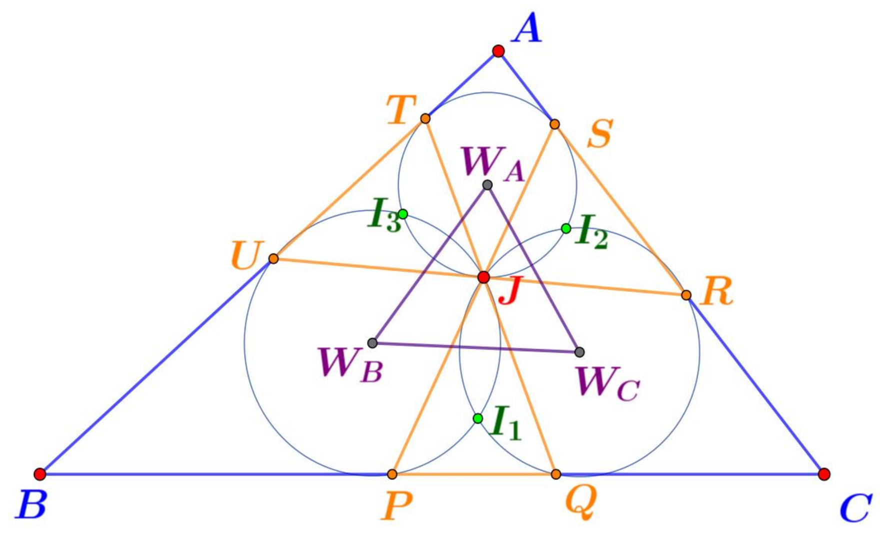


圖18 真心、兩個真心三角形內心與兩個真心三角形頂點五點共圓及真W三角形

定理1-4 真內三角形頂點與真W三角形頂點，六點共圓。

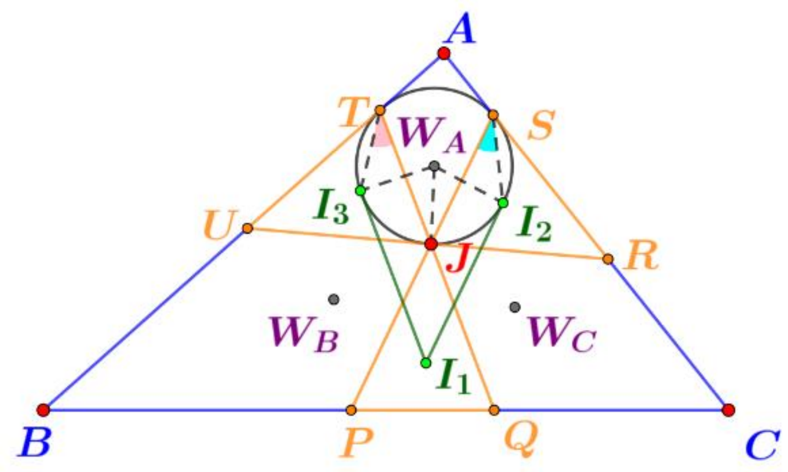


圖23 真內三角形頂點與真W三角形頂點，六點共圓證明

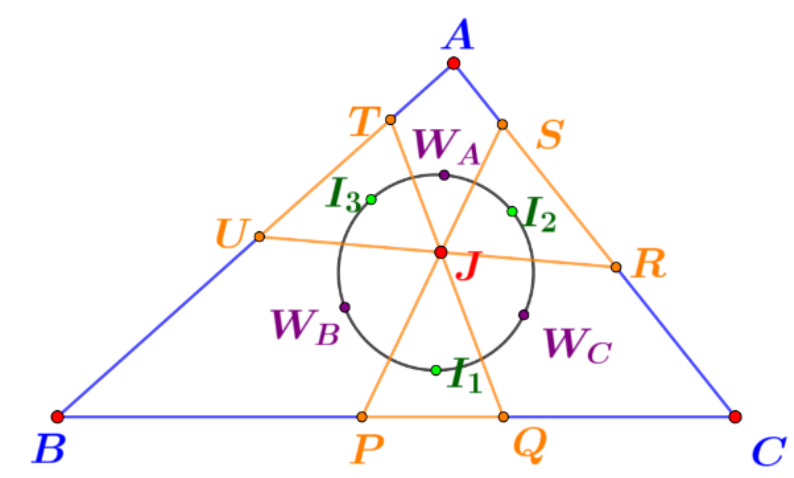


圖24 真內三角形頂點與真W三角形頂點，六點共圓

定理1-2 真W三角形頂點、兩個真心三角形頂點與原三角形頂點四點共圓。

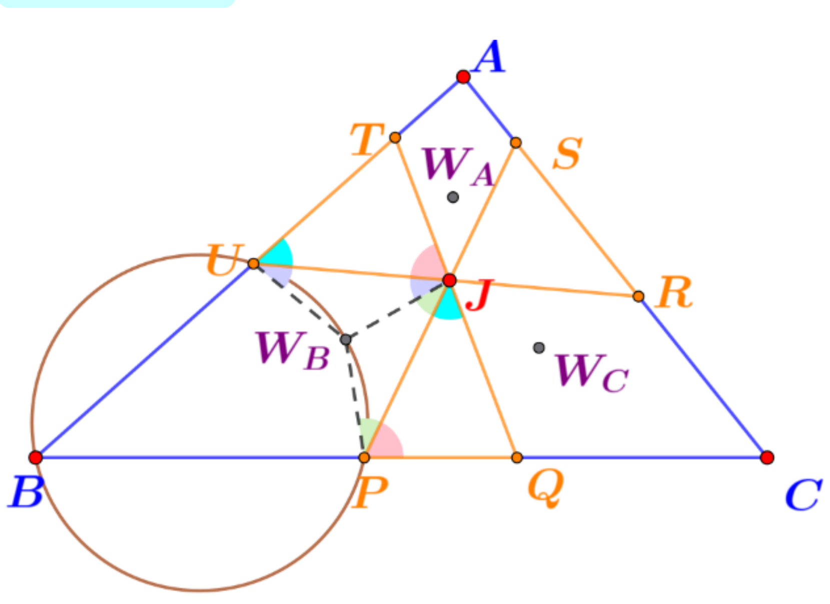


圖19 真W三角形頂點、兩個真心三角形頂點與原三角形頂點四點共圓證明

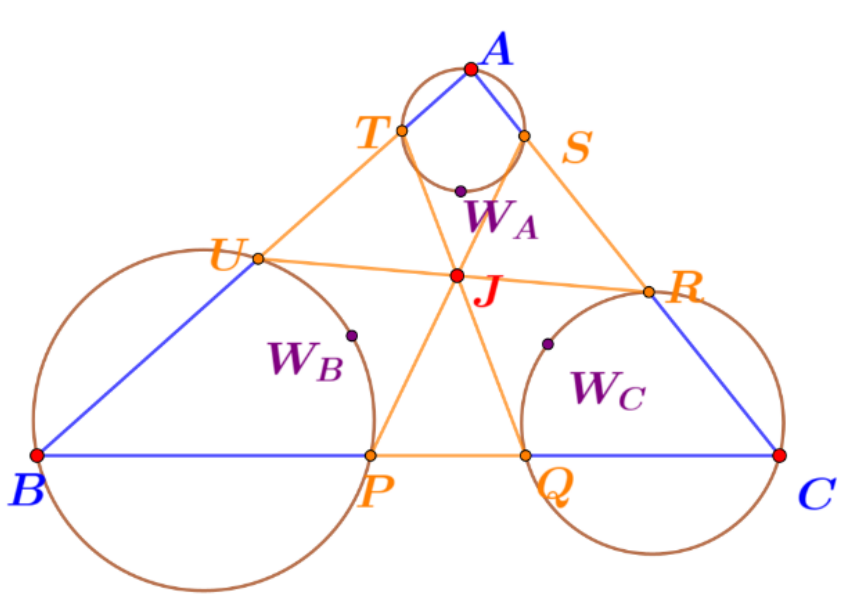


圖20 真W三角形頂點、兩個真心三角形頂點與原三角形頂點四點共圓

定理1-5 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓。

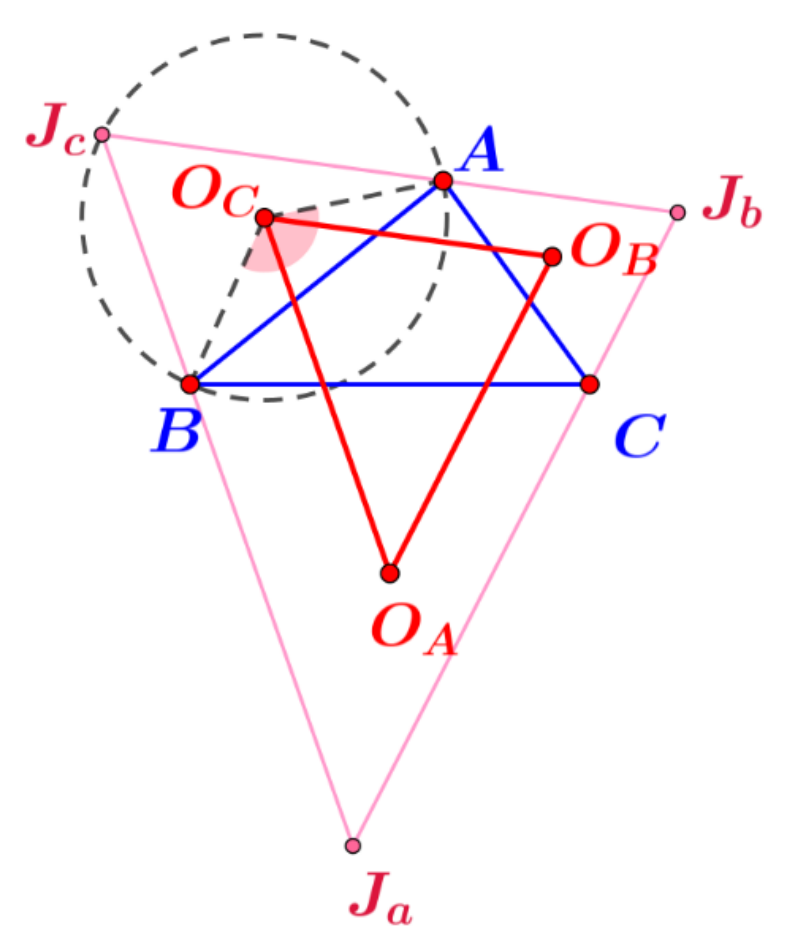


圖25 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓證明

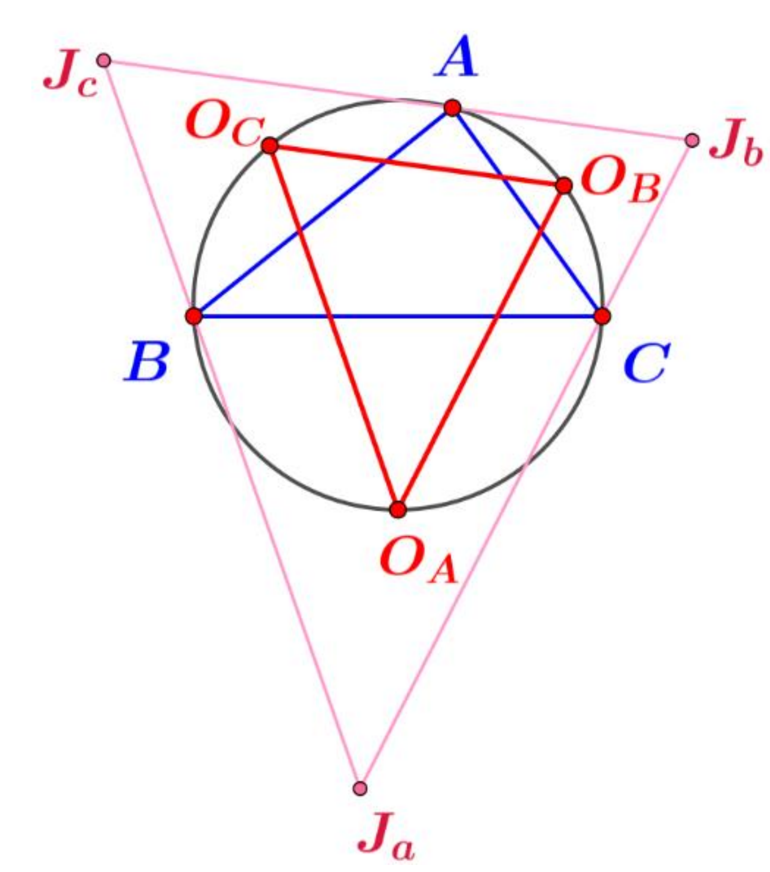


圖26 原三角形三頂點與旁外三角形三頂點，六點共圓

定理1-3 真W三角形兩頂點與真心三角形三頂點，五點共圓。

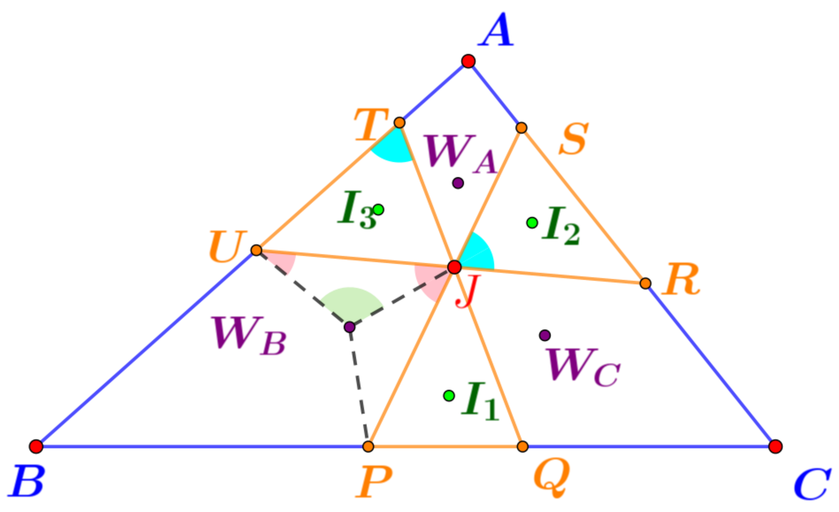


圖21 真W三角形兩頂點與真心三角形三頂點，五點共圓證明

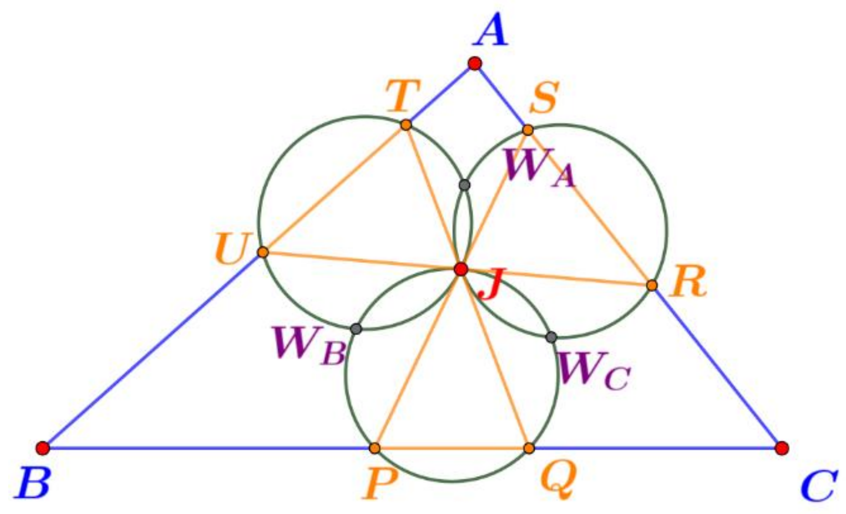


圖22 真W三角形兩頂點與真心三角形三頂點，五點共圓

二、共點性質

定理4-1 真心、真內三角形內心、真W三角形垂心與真外三角形外心重合。

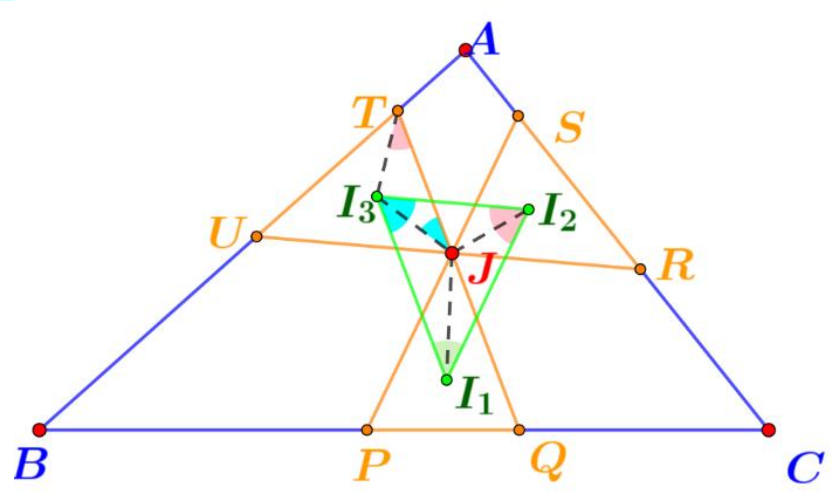


圖27 真心與真內三角形內心重合證明

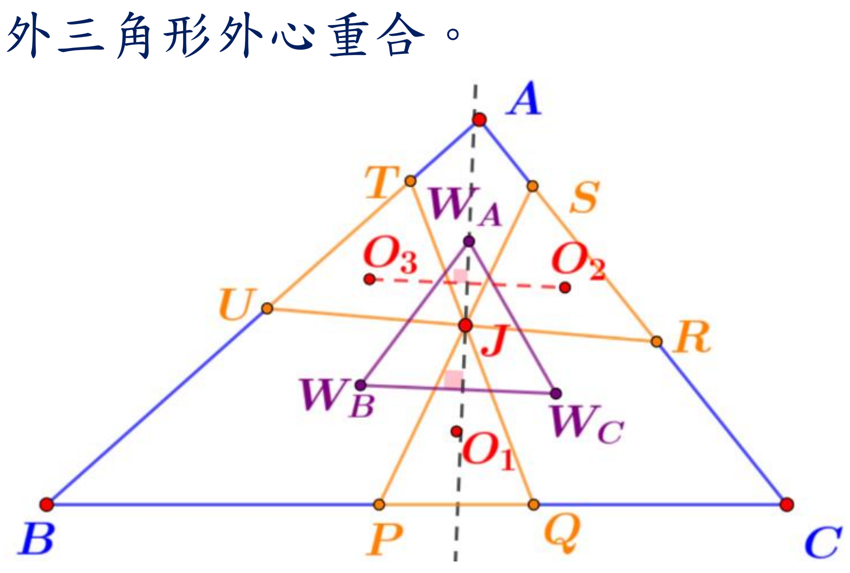


圖28 真心與真W三角形垂心重合證明

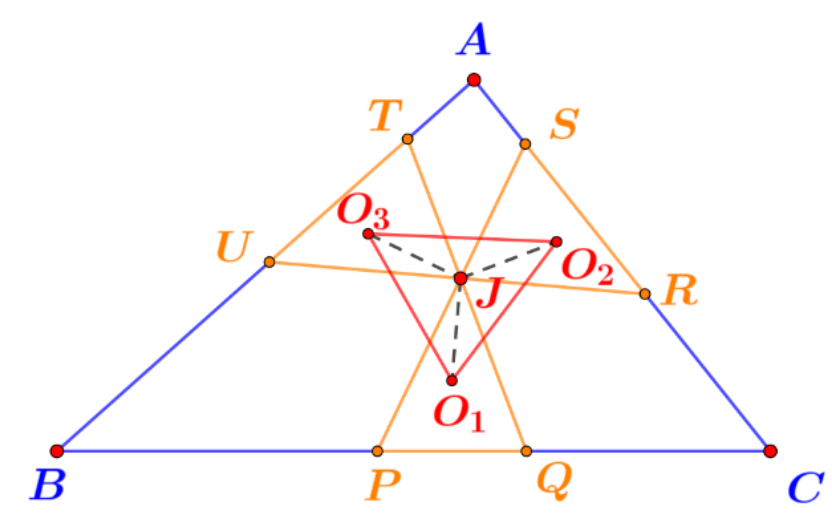


圖29 真心與真外三角形外心重合證明

表一 真心、真內三角形內心、真W三角形垂心與真外三角形外心重合。

原三角形△ABC	真內三角形△$I_1I_2I_3$	真W三角形△$W_AW_BW_C$	真外三角形△$O_1O_2O_3$
真心	內心	垂心	外心

定理4-2 原三角形外心與旁外三角形外心重合。

定理4-3 原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與原三角形三邊切點重合。

定理4-4 原三角形內心、真內三角形外心、真內切三角形外心、真W三角形外心與旁心三角形垂心重合。

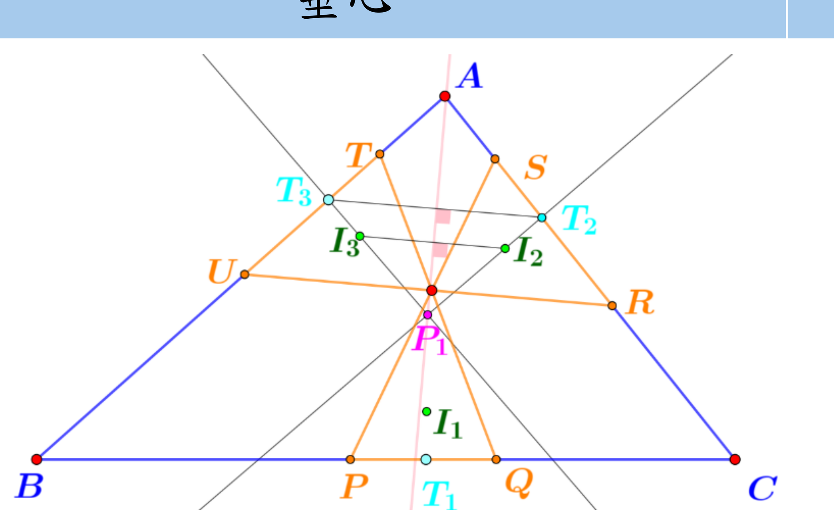


圖30 原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與原三角形三邊切點重合證明

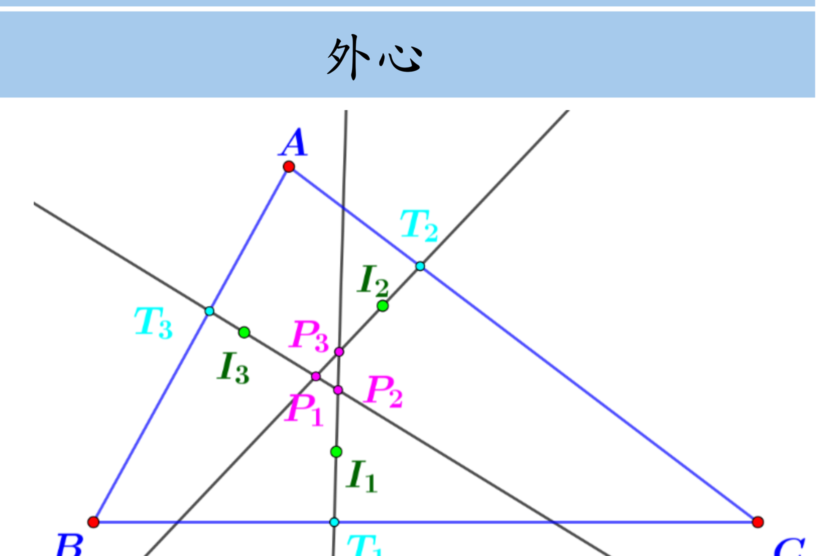


圖31 P_1、P_2 、P_3共點證明

表二 原三角形內心、真內三角形外心、真內切三角形外心、真W三角形外心與旁心三角形垂心重合。

原三角形△ABC	旁心三角形△$J_aJ_bJ_c$	真內三角形△$I_1I_2I_3$	真內切三角形△DEF	真W三角形△$W_AW_BW_C$
內心	垂心	外心	外心	外心

三、共線性質

定理5-1 四點共圓圓心、真W三角形頂點、真心與真心三角形內心，四點共線。

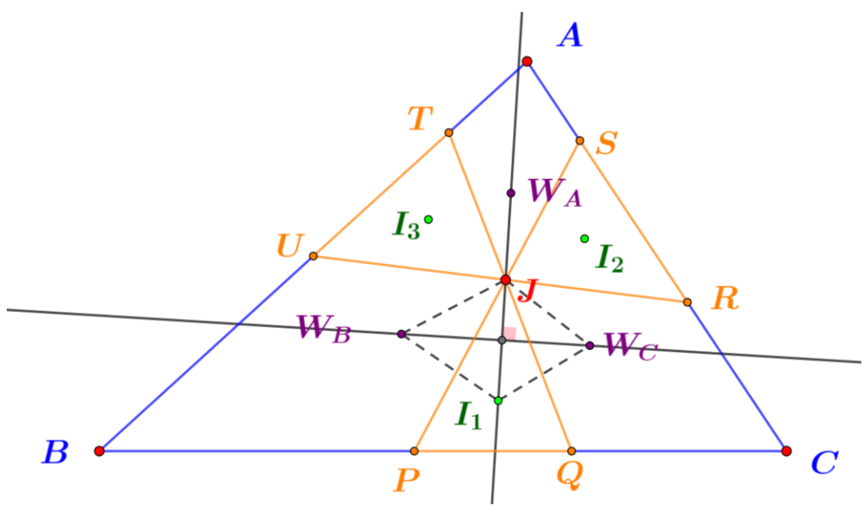


圖32 真W三角形頂點、真心與真心三角形內心，三點共線

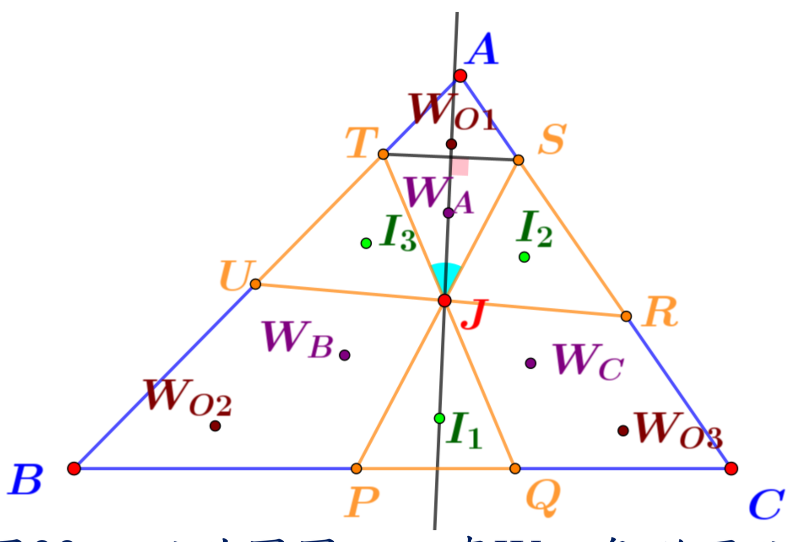


圖33 四點共圓圓心、真W三角形頂點與真心，三點共線

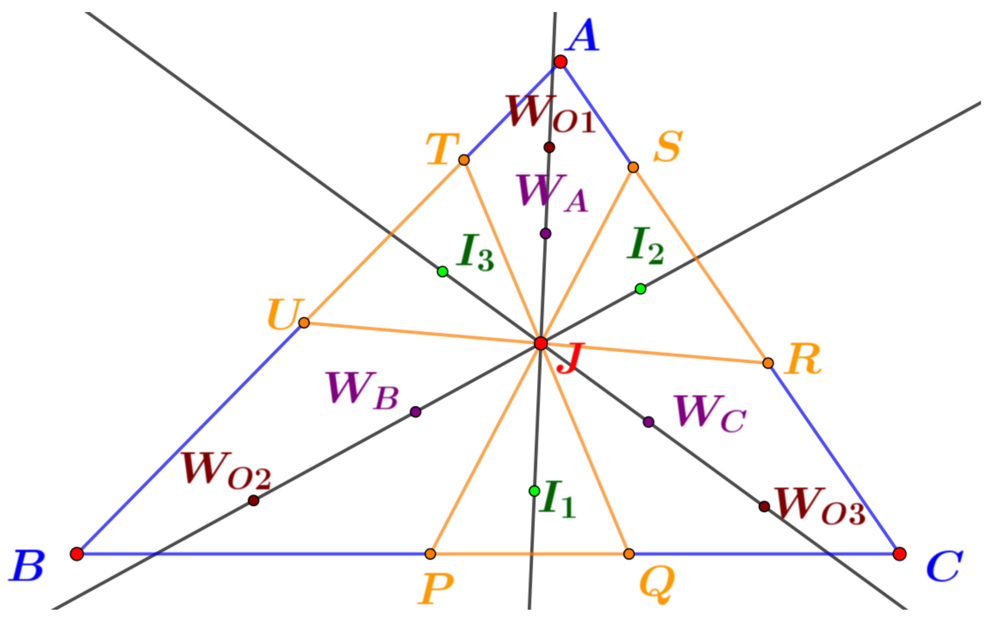


圖34 四點共圓圓心、真W三角形頂點、真心與真心三角形內心，四點共線

四、相似性質

定理2-1 真心三角形 ≅ 真內三角形 ~ 真內切三角形 ~ 旁外三角形。

定理2-2 旁內三角形 ~ 真W三角形 ≅ 真外三角形。

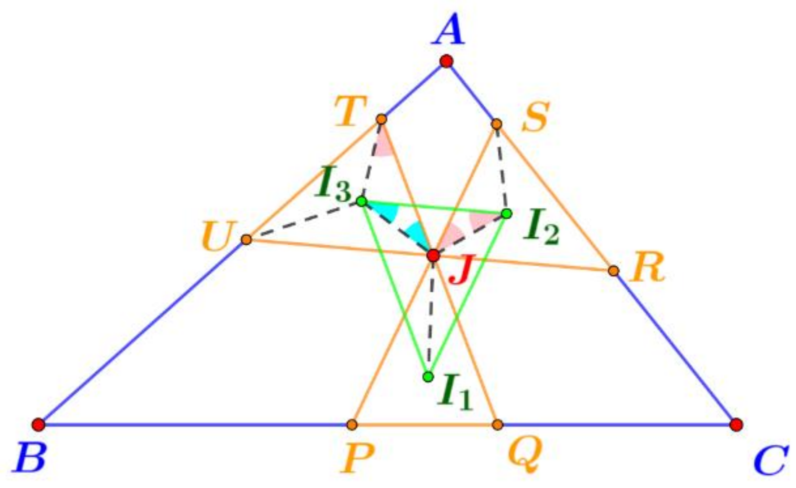


圖35 真心三角形 ≅ 真內三角形證明

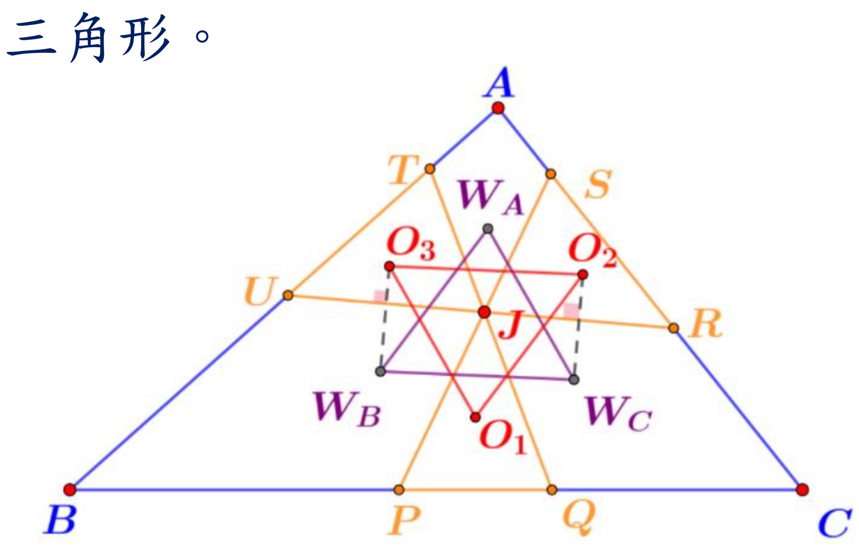
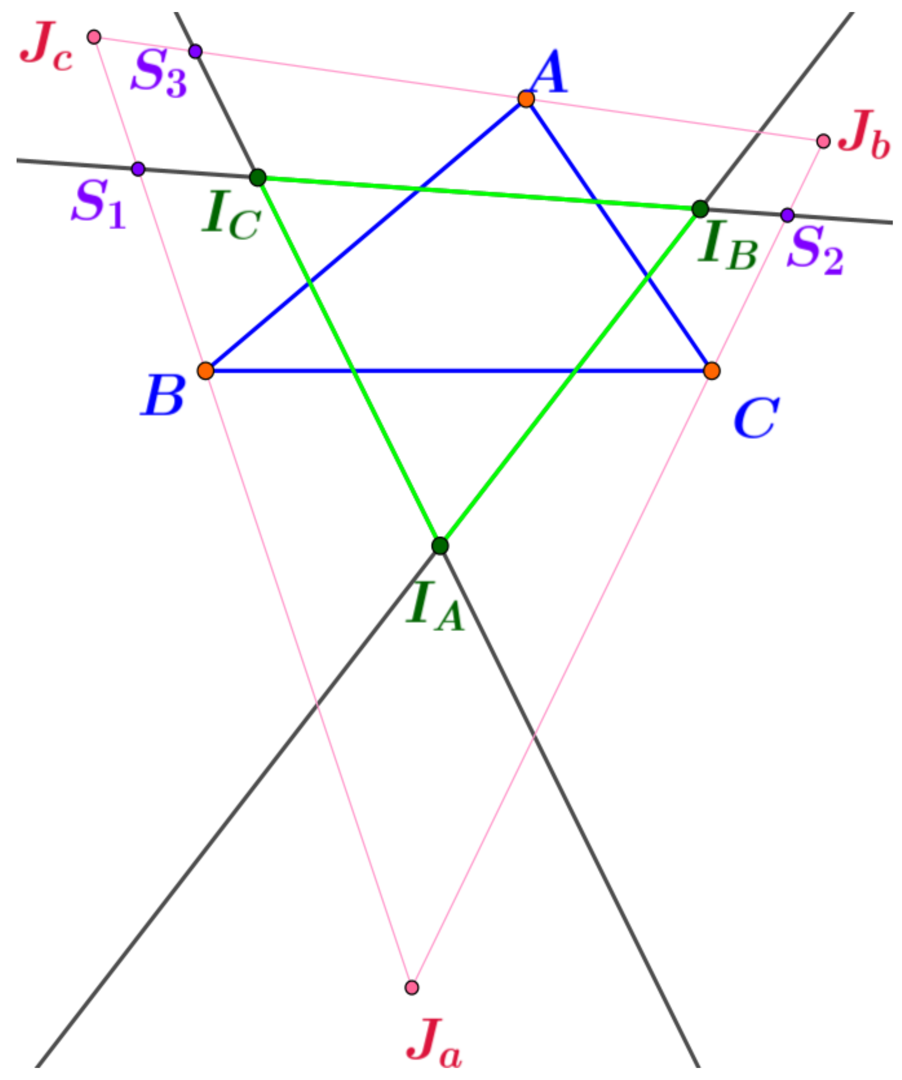


圖37 真W三角形 ≅ 真外三角形證明



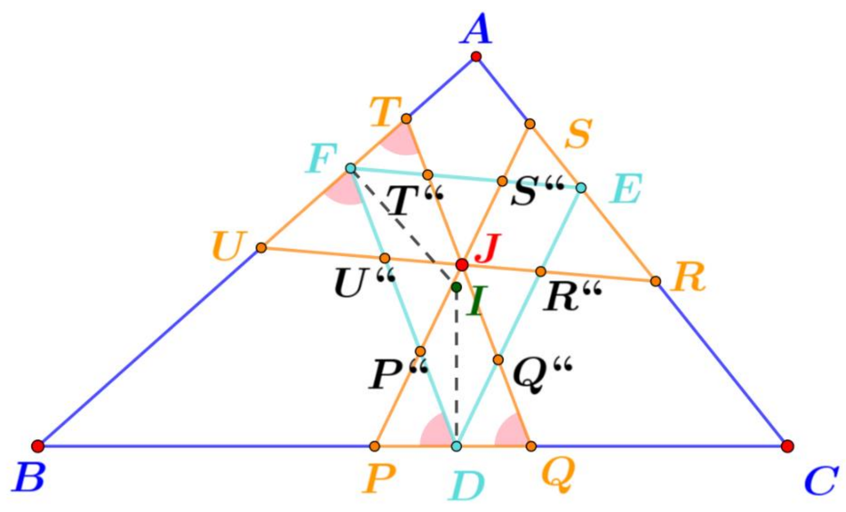


圖36 真心三角形 ~ 真內切三角形證明

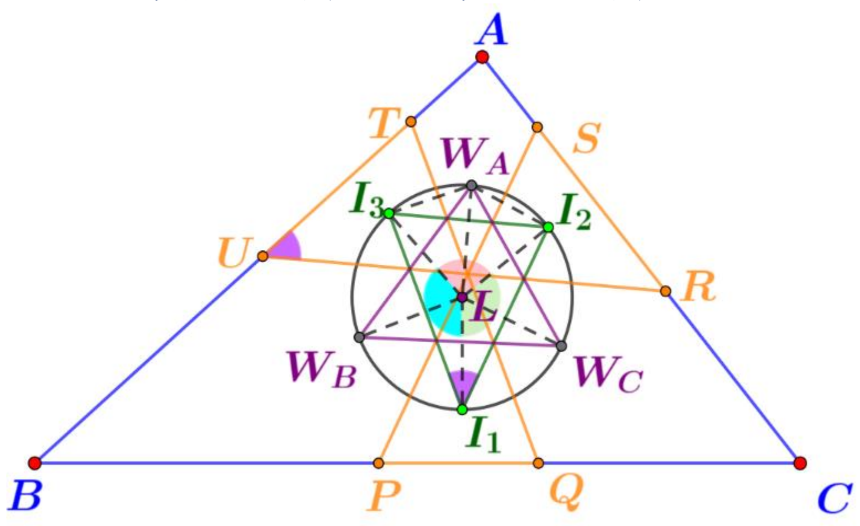


圖38 旁內三角形 ~ 真W三角形證明

圖39 旁內三角形 ~ 真W三角形證明

肆、討論

一、真心的 barycentric coordinates 為 $\left(\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}\right)$。

$\overline{BD} : \overline{CD} = \sin\frac{C}{2} : \sin\frac{B}{2}$，$\overline{CE} : \overline{AE} = \sin\frac{A}{2} : \sin\frac{C}{2}$

$\overline{AF} : \overline{BF} = \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{A}{2}$

二、真心即為 Kimberling center X_{174}。

三、由幾何作圖與 barycentric coordinates 探討真心作圖法。

$\frac{r}{\overline{IB}} = \sin\frac{B}{2}$；$\frac{r}{\overline{IC}} = \sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \overline{IB} : \overline{IC} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} : \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} = \sin\frac{C}{2} : \sin\frac{B}{2}$

真心作圖法步驟

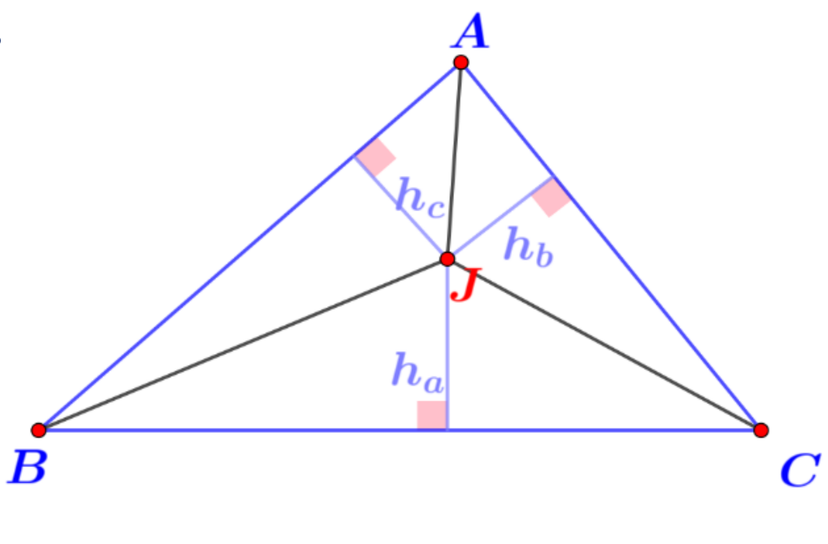


圖40 真心之 barycentric coordinates 為 $\left(\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}\right)$ 證明

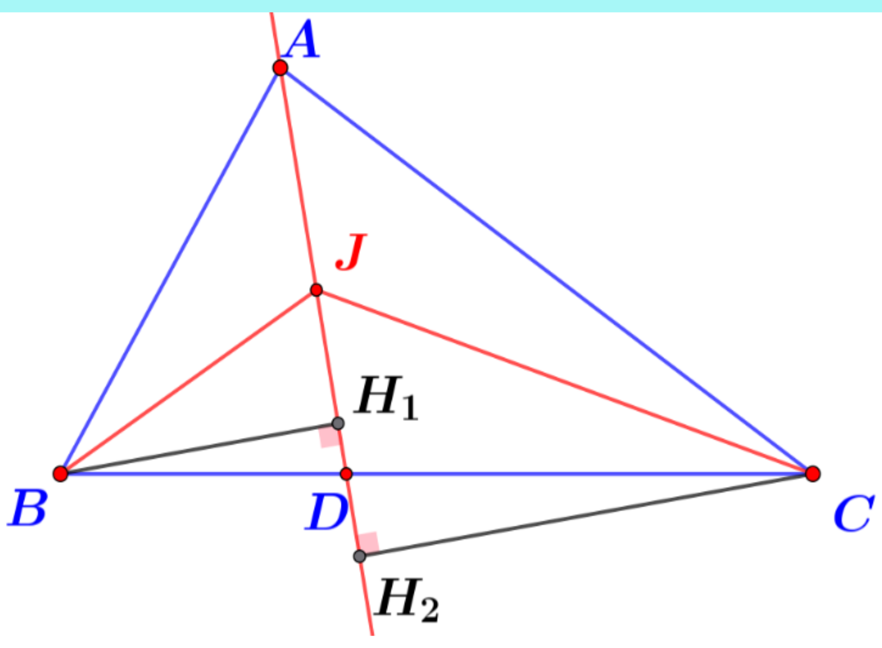


圖41 真心作圖法探討

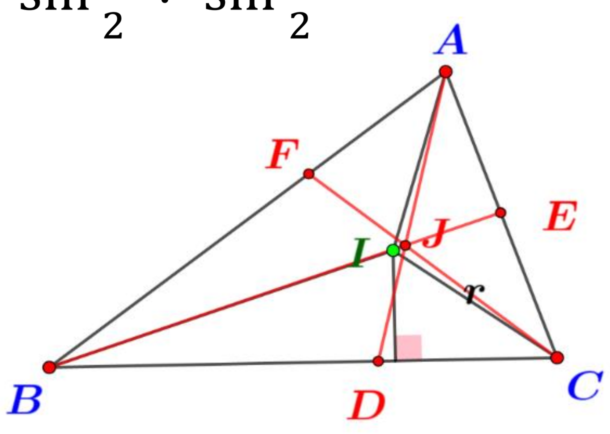


圖42 真心作圖法概念說明

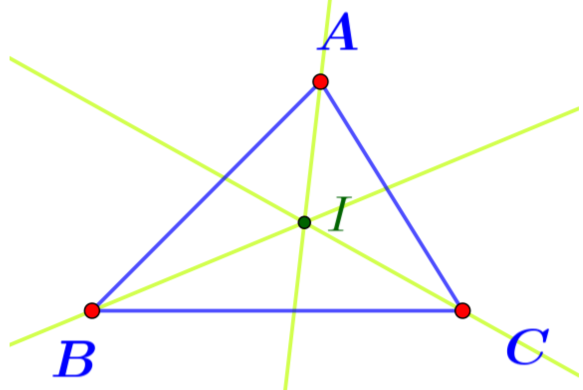


圖43 步驟1

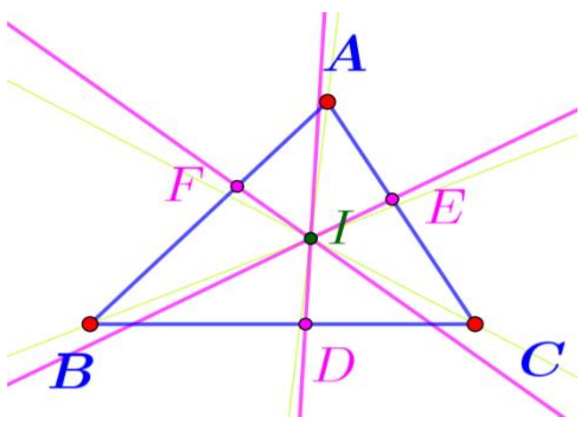


圖44 步驟2

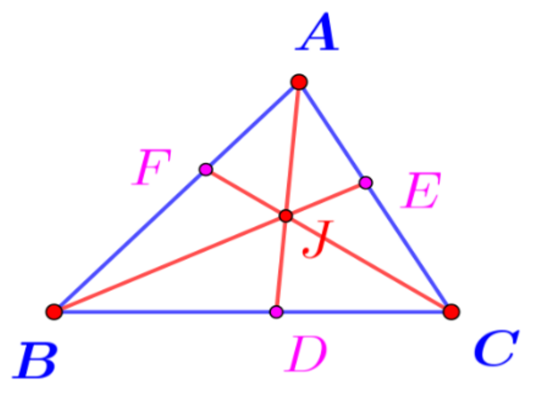


圖45 步驟3

伍、結論

一、真心(X_{174})相關性質：

共圓性質
- 真心、真心△2內心與真心△2頂點，五點共圓。
- 真W△1頂點、真心△2頂點與原△1頂點，四點共圓。
- 真W△2頂點與真心△3頂點，五點共圓。
- 真內△3頂點與真W△3頂點，六點共圓。
- 原△3頂點與旁外△3頂點，六點共圓。

共點性質
- 真心、真內△內心、真W△垂心與真外△外心重合。
- 原△外心與旁外△外心重合。
- 原△內切圓與三邊切點、真心△三內切圓與原△三邊切點重合。
- 原△內心、真內△外心、真內切△外心、真W △外心與旁心△垂心重合。

共線性質
- 四點共圓圓心、真W△1頂點、真心與真心△1內心四點共線。

相似性質
- 旁邊△~旁心△~旁外△~真心△≅真內△~真內切△。
- 旁內△~真W△≅真外△。

邊長比例
- 旁心△與旁邊△邊長比$1 : \sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$。
- 旁心△與真心△邊長比$\frac{2R}{r}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) : 1$。

二、真心即為Kimberling center X_{174}，Wabash center 為X_{364}。

三、在barycentric coordinates的概念下，找出真心(X_{174})的 barycentric coordinates與三角形三內角的半角有關，於是得到X_{174}的尺規作圖法。

陸、參考資料

[1] Cambré, C. (n.d.). *X(364) Wabash center* [Interactive geometry resource]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/PBVRXsdU

[2] Kimberling, C. (n.d.). *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*. University of Evansville. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] 蘇敏文、吳浩安（2018）。*用"心"*。第58屆全國中小學科學展覽會參展作品。

[4] 百度百科（n.d.）。*旁心三角形*。https://baike.baidu.com/item/旁心三角形/8746734

[5] Yiu, P. (2013). *Barycentric coordinates with reference to a triangle* (Section 3.1). In *Introduction to the geometry of the triangle* (Version 13.0411, pp. 25–26). Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University.