

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030401

「折折」稱奇

學校名稱： 雲林縣立雲林國民中學

作者： 國二 巫綠衣 國二 黃子庭	指導老師： 林慧貞
---------------------------------	------------------

關鍵詞： A 列×B 行方格紙、折線段數、最多段數與
最少段數

摘要

過 A 列 $\times B$ 行($A \leq B$)方格紙中每個小正方形中心一次的折線，(一) A 、 B 均為奇數，起點位置的列數 + 行數 = 奇數時，會餘下一格無法通過；起點在角落以逆時針螺旋型或S型走法，折線段數最少 $2A - 1$ 段；(二) A 為偶數走法如，最多段數 $A \times (B - 1) + 1$ ； A 為奇數走法如，最多段數(1) $B > A$ ， $A \times (B - 1) + 1 - (B - A)$ ，(2) $B = A$ ， $A \times (B - 1)$ 段；(三) $A \geq 3$ ， $2A - 1 \leq$ 可能的段數 $\leq$ 最多段數； $A = 2$ ，可能的段數為最少段數、最多段數及兩者間的連續偶數。(四)當 A 公差為 d ，折線最少段數為公差 $2d$ 的等差數列； A 相同且 B 公差 d ，若 A 為偶數，最多段數的公差為 $A \times d$ ，若 A 為奇數且(1) $A < B$ ，最多段數的公差為 $(A - 1) \times d$ ，(2)當 $B = A$ 時，與 $A < B$ 的最多段數不會成等差數列。

壹、前言

一、研究動機

在科學研習雙月刊第62卷第3期中看到台師大數學系游森棚教授提出一個問題，「將12個單位小正方形組成一個 3×4 的矩形，若要畫一條轉折次數最少的折線通過12個小正方形的中心各一次，轉折次數最少是多少？轉折次數最多是多少？有哪些可能的轉折次數？」，在好奇心驅使下我們畫出所有可能的狀況，為了方便記錄，將計算轉折次數改成計算折線的段數。而在數學課本第四冊第一章中探討數列與圖形的規律，我們便思考著若方格紙圖形是4列 $\times$ 5行、5列 $\times$ 6行、6列 $\times$ 7行…呢？若將問題擴大到 A 列 $\times (A + 1)$ 行、 A 列 $\times (A + 2)$ 行、 A 列 $\times (A + 3)$ 行、 A 列 $\times (A + 4)$ 行、 A 列 $\times (A + 5)$ 行…，甚至是 A 列 $\times A$ 行，折線的最少段數、最多段數與可能的段數是否具有規律性？是否能一般化？

二、研究目的

- (一)探討何種走法折線會有最少段？折線段數最少是幾段？
- (二)探討何種走法折線會有最多段？折線段數最多是幾段？
- (三)探討有哪些可能的折線段數？
- (四)折線段數是否具有規律性？是否能一般化？

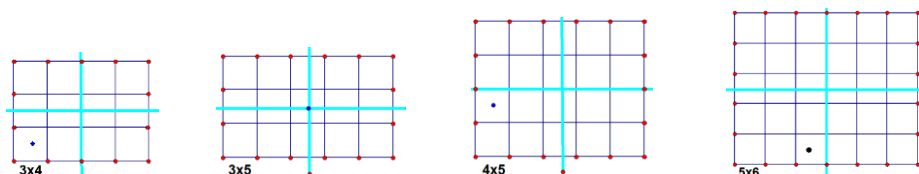
貳、研究設備及器材

A×B個小正方形組成的A列×B行方格紙、GSP電腦繪圖軟體、小畫家、紀錄表

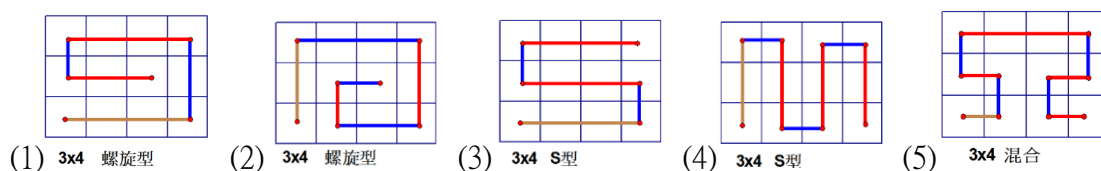
參、研究過程與方法

本研究先透過紙筆實作，觀察型態為由A×B個單位小正方形組成A列×B行($A \leq B$)的方格紙，通過其中每個小正方形中心(兩對角線交點)一次的折線，再以GSP繪圖軟體繪製實作所得到的圖形結果並轉貼至小畫家處理後，複製貼到本說明書。為延續游森棚教授的問題，由於所有 $A < B$ 的方格紙都是矩形，而當 $A = B$ 時，方格紙則是正方形，因此將此種特例置於討論問題中說明。

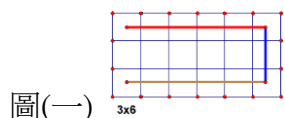
先畫出A列×B行($A \leq B$)方格紙的兩條對稱軸，將方格紙分成四等分，如下圖，以其對稱圖形的特性，避免重複作圖，故主要利用左下區進行研究。折線起點的位置，主要分成在方格紙的角落、非角落及對稱軸交點。



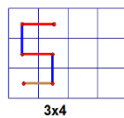
而折線行進路線如下圖所示，可分成(1)先橫列再直行的**逆時針螺旋型**、(2)先直行再橫列**順時針螺旋型**、(3)先橫列再直行S型(以**逆時針S型**稱之)、(4)先直行再橫列S型(以**順時針S型**稱之)、(5)混合共五種，畫出各種可能的折線情況進行比較。



尋找折線最少段數時，要讓折線的每一段能通過最多個小正方形方格，如圖(一)所示。而尋找最多段數時，則是盡最大可能讓折線上每一段只通過2個相鄰的小正方形方格。走法非唯一，但最快速的方式是當列數A為奇數，利用兩直行一組的逆時針S型 $\begin{array}{|c|} \hline \text{S} \\ \hline \end{array}$ 及兩橫列一組的順時針S型 $\begin{array}{|c|} \hline \text{S} \\ \hline \end{array}$ 混合完成最多折線段數的路線，如圖(二)；列數A為偶數，則以兩橫列一組的順時針S型 $\begin{array}{|c|} \hline \text{S} \\ \hline \end{array}$ 路線完成折線，如圖(三)。

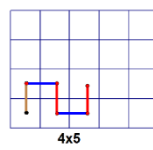


圖(一)



圖(二)：奇數列

圖(三)：偶數列



註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

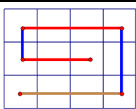
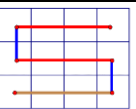
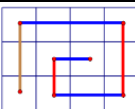
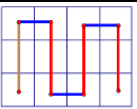
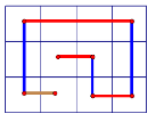
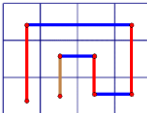
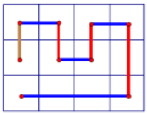
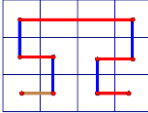
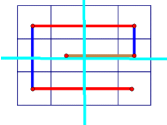
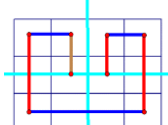
肆、研究結果

一、探討何種走法折線會有最少段？折線段數最少是幾段？

(一) 折線的走法

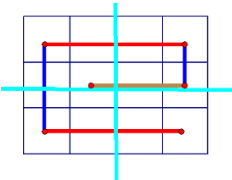
1、先以3列×4行的圖形為例，進行折線走法說明如下：

表(一) (起點到第一個轉折點稱為**第一段：咖啡色**)

行進方式	逆時針螺旋	逆時針S型	順時針螺旋	順時針S型
起點在四角落				
折線段數	5段	5段	6段	7段
行進方式	混合		混合	混合
起點不在角落				
折線段數	7段		8段	9段
行進方式	對稱螺旋(先橫列)		對稱螺旋(先直行)	
起點在對稱軸交點(旁)				
折線段數	5段		7段	

完成3列×4行實作結果，我們發現當起點在角落依先走橫列再走直行的螺旋型以及S型行進，因列數比行數少，故會比先走直行再走橫列的螺旋型以及S型方式有較少的轉折次數，折線的段數會最少。

此外，起點在對稱軸交點(旁) 依先往格數較多的橫列方向前進，再走直行的螺旋

型 ，我們發現圖形與起點在角落依逆時針螺旋型走法

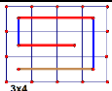
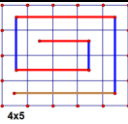
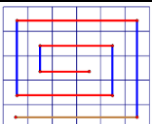
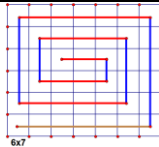
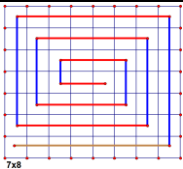
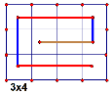
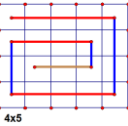
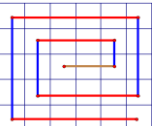
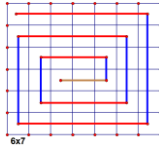
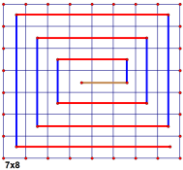
的圖形是對稱的，折線圖形其實是相同，折線段數都是最少的情況共有5段。

再將其它如：3x4、3x5、4x5、4x6、5x6、6x7、6x8…等圖形進行對照，我們發現如下狀況：

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

(1)A 為奇數，起點位置在由角落算起的(第 $\frac{A+1}{2}$ 列，第 $\frac{A+1}{2}$ 行)，依先橫列再直行的螺旋型
 (2)A 為偶數，起點位置在由角落算起的(第 $\frac{A}{2}$ 列，第 $\frac{A}{2}$ 行)，依先橫列再直行的螺旋型
 也都可得到相同的結果，如表(二)，故將此種圖形歸納到先走橫列再走直行的螺旋型，接下來就不再特地討論此類圖形。

表(二)：逆時針螺旋與對稱螺旋

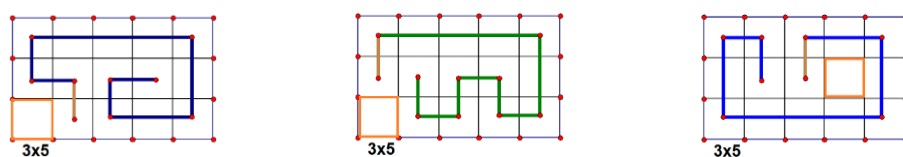
	3x4	4x5	5x6	6x7	7x8
逆時針螺旋					
對稱螺旋					

2、起點位置與折線是否能完成通過每個小方格中心的關係

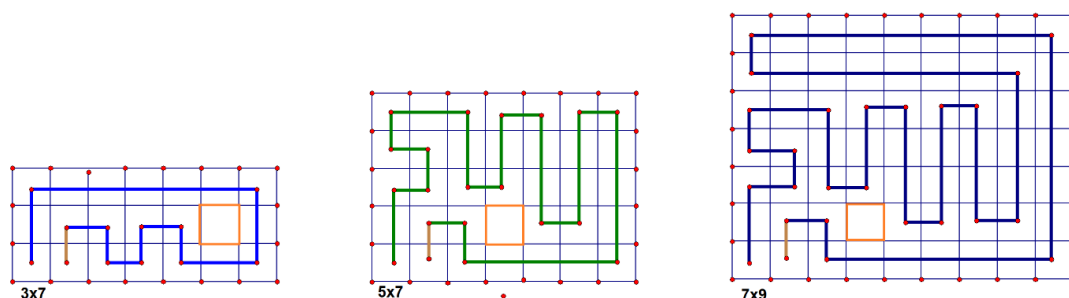
折線的起點分別選擇在四個角落、非四個角落與對稱軸交點進行，兩條對稱軸將A列×B行小正方形方格組成的矩形分成四個區域，利用左下方區域進行說明，其他三個區域利用上下、左右對稱可以類推。

(1) 奇數列×奇數行

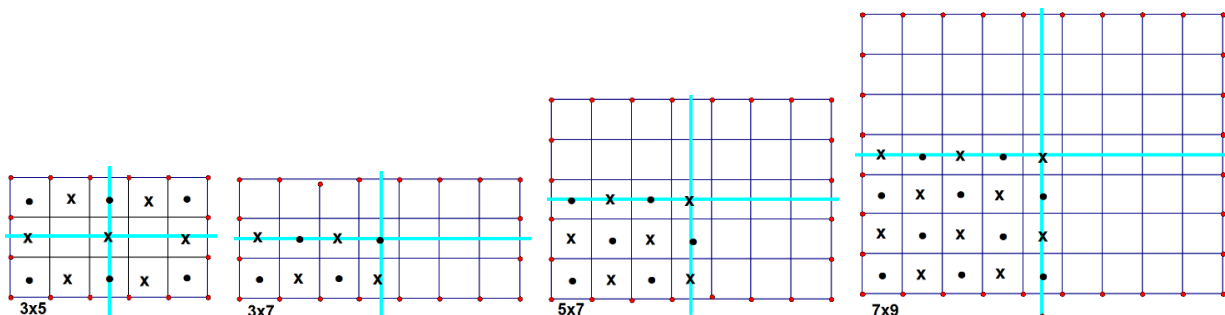
由3列×5行方格紙實作結果顯示，若折線起點位置在(第1列，第2行)、(第2列，第1行)、(第2列，第3行)，最後都會留下一格小正方形無法通過其中心。



再將3列×7行、5列×7行、7列×9行的圖形進行比較，結果都有相同情況。

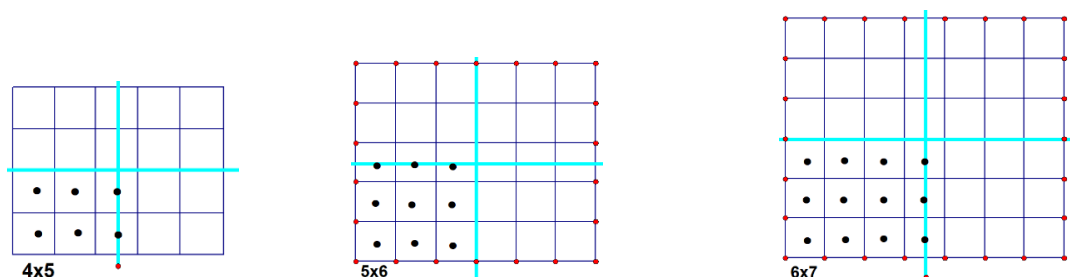


註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

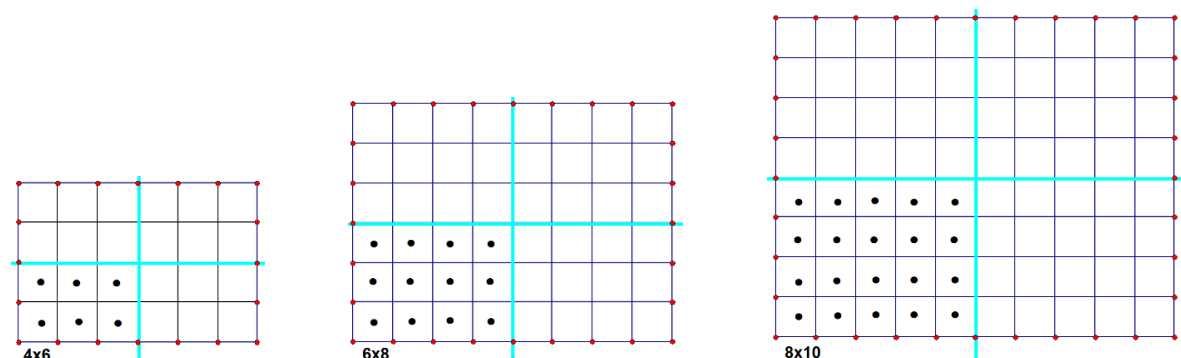


其中標示●表示起點在此，折線可以完成通過每個小正方形方格中心一次；標示×記號表示若起點在此，則折線不能完成通過每個小正方形方格中心一次。亦即A列×B行的方格紙，當A、B均為奇數，折線起點位置在(第i列，第j行)的方格中，若 $i + j = 2k + 1$ ， $k \in \mathbb{Z}^+$ ，則會餘下一格無法通過，折線無法完成通過每個小方格中心一次。

(2) 奇數列×偶數行、偶數列×奇數行



(3) 偶數列×偶數行



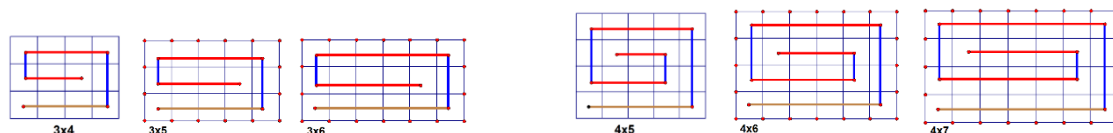
依(2)及(3)實作結果得知，只要列數A或行數B為偶數，起點不管在哪一個位置，折線都能完成通過每個小正方形方格中心一次。

(二) 折線最少的段數

根據(一)所得折線最少段數的走法，接著我們完成A列×(A + 1)行($3 \leq A \leq 8$)方格紙實作圖形。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

逆時針螺旋型走法的折線最少段數求法：



3列x 4行：橫列3段+ (直行4-2)段=橫列3段+[(橫列3+1) -2]段= 列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

3列x 5行：橫列3段+ (直行5-3)段=橫列3段+[(橫列3+2) -3]段= 列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

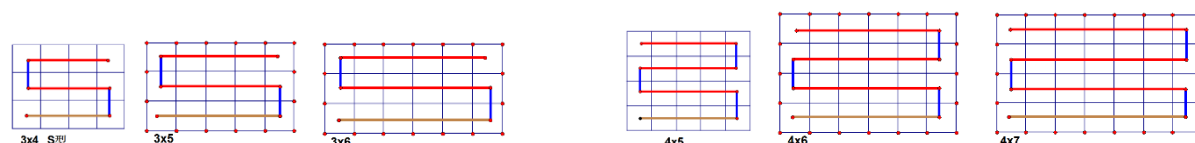
3列x 6行：橫列3段+ (直行6-4)段=橫列3段+[(橫列3+3) -4]段= 列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

4列x 5行：橫列4段+ (直行5-2)段=橫列4段+[(橫列4+1) -2]段= 列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

4列x 6行：橫列4段+ (直行6-3)段=橫列4段+[(橫列4+2) -3]段= 列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

4列x 7行：橫列4段+ (直行7-4)段=橫列4段+[(橫列4+3) -4]段= 列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

逆時針S型走法折線最少段數的求法：



3列x 4行：橫列3段+直行(3列-1)段=列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

3列x 5行：橫列3段+直行(3列-1)段=列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

3列x 6行：橫列3段+直行(3列-1)段=列數 $3 \times 2 - 1 = 5$ 段

4列x 5行：橫列4段+直行(4列-1)段=列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

4列x 6行：橫列4段+直行(4列-1)段=列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

4列x 7行：橫列4段+直行(4列-1)段=列數 $4 \times 2 - 1 = 7$ 段

A列x B行：橫列A段+直行(A列-1)段=列數 $A \times 2 - 1$ 段

依上述結果可知，逆時針螺旋型與逆時針S型走法，都能將最少的折線段數算法以：

列數 $A \times 2 - 1$ 段來表示。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

最後，將A列x B行($3 \leq A \leq 8$ 、 $A < B \leq A + 5$)方格紙以逆時針螺旋型走法實作的
圖形整理如下：(列數A = 2的情形於P.27中討論說明)

表(三)：起點在角落逆時針螺旋型折線段數整理表

A×B	A× (A + 1)	A× (A + 2)	A× (A + 3)	A× (A + 4)	A× (A + 5)
A=3	 3×2-1=5	 3×2-1=5	 3×2-1=5	 3×2-1=5	 3×2-1=5

A=4	 4×5 4×2-1=7	 4×6 4×2-1=7	 4×7 4×2-1=7	 4×8 4×2-1=7	 4×9 4×2-1=7
A=5	 5×6 5×2-1=9	 5×7 5×2-1=9	 5×8 5×2-1=9	 5×9 5×2-1=9	 5×10 5×2-1=9
A=6	 6×7 6×2-1=11	 6×8 6×2-1=11	 6×9 6×2-1=11	 6×10 6×2-1=11	 6×11 6×2-1=11
A=7	 7×8 7×2-1=13	 7×9 7×2-1=13	 7×10 7×2-1=13	 7×11 7×2-1=13	 7×12 7×2-1=13
A=8	 8×9 8×2-1=15	 8×10 8×2-1=15	 8×11 8×2-1=15	 8×12 8×2-1=15	 8×13 8×2-1=15

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

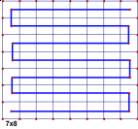
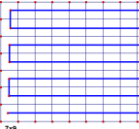
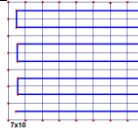
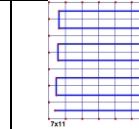
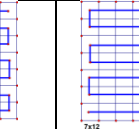
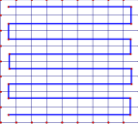
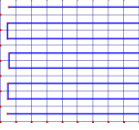
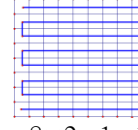
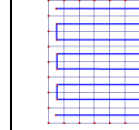
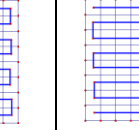
由表(三)可知，即使對於 $A \times (A + 2)$ 、 $A \times (A + 3)$ 、 $A \times (A + 4)$ 及 $A \times (A + 5)$ 的最少折線段數計算方式，與 $A \times (A + 1)$ 是相同的結果，可推論到A列×B行($3 \leq A < B$)的方格紙，起點在角落，先走橫列再走直行的螺旋型走法，折線會有最少段數：**列數 $A \times 2 - 1$ 段。**

接著將上述A列×B行($3 \leq A \leq 8$ 、 $A < B \leq A + 5$)的方格紙，改成起點在左下角

落，以先橫列再直行的逆時針S型走法進行實作，所得圖形整理如下表(四)：

逆時針S型走法(表四)：

A×B	$A \times (A + 1)$	$A \times (A + 2)$	$A \times (A + 3)$	$A \times (A + 4)$	$A \times (A + 5)$
A=3	 3×4 3×2-1=5	 3×5 3×2-1=5	 3×6 3×2-1=5	 3×7 3×2-1=5	 3×8 3×2-1=5
A=4	 4×5 4×2-1=7	 4×6 4×2-1=7	 4×7 4×2-1=7	 4×8 4×2-1=7	 4×9 4×2-1=7
A=5	 5×6 5×2-1=9	 5×7 5×2-1=9	 5×8 5×2-1=9	 5×9 5×2-1=9	 5×10 5×2-1=9
A=6	 6×7 6×2-1=11	 6×8 6×2-1=11	 6×9 6×2-1=11	 6×10 6×2-1=11	 6×11 6×2-1=11

A=7	 $7 \times 2 - 1 = 13$	 $7 \times 2 - 1 = 13$	 $7 \times 2 - 1 = 13$	 $7 \times 2 - 1 = 13$	 $7 \times 2 - 1 = 13$
A=8	 $8 \times 2 - 1 = 15$	 $8 \times 2 - 1 = 15$	 $8 \times 2 - 1 = 15$	 $8 \times 2 - 1 = 15$	 $8 \times 2 - 1 = 15$

表(四)中顯示，依逆時針S型完成折線，即使對於 $A \times (A + 2)$ 、 $A \times (A + 3)$ 、

$A \times (A + 4)$ 及 $A \times (A + 5)$ 的最少折線段數計算方式，與 $A \times (A + 1)$ 是相同的結果，折線會有最少的段數，都是：列數 $A \times 2 - 1$ 段。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明
研究發現一：

對於通過A列 $\times$ B行($3 \leq A < B$)方格紙中每個小正方形中心一次的折線：

- (一) 若A、B均為奇數，起點在方格紙的(第i列，第j行)，當 $i + j = 2k + 1$ ， $k \in \mathbb{Z}^+$ ，此折線無法完成通過每個小正方形方格中心一次。
- (二) 折線有最少段數的走法共有三種：(1)以角落為起點，依先橫列再直行交替的逆時針螺旋型走法；(2)以角落為起點，依先橫列再直行交替的S型走法；(3)起點在對稱軸交點(旁)依先往格數較多的橫列方向再走直行的螺旋型，與(1)所得圖形為對稱圖形。
- (三) 折線的最少段數都會等於：列數 $A \times 2 - 1$ (段)。

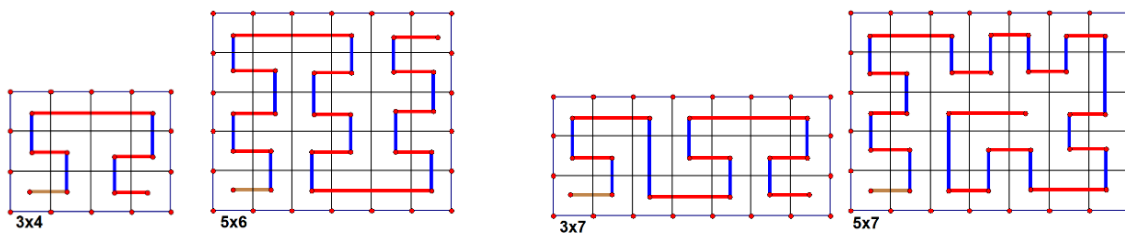
二、探討何種走法折線會有最多段？折線段數最多是幾段？

(一) 折線的走法

在尋找折線的最多折線段時，除了要讓折線通過每一個小正方形方格的中心點一次，更要盡最大可能讓折線上的每一線段都通過最少個相鄰的小正方形方格。

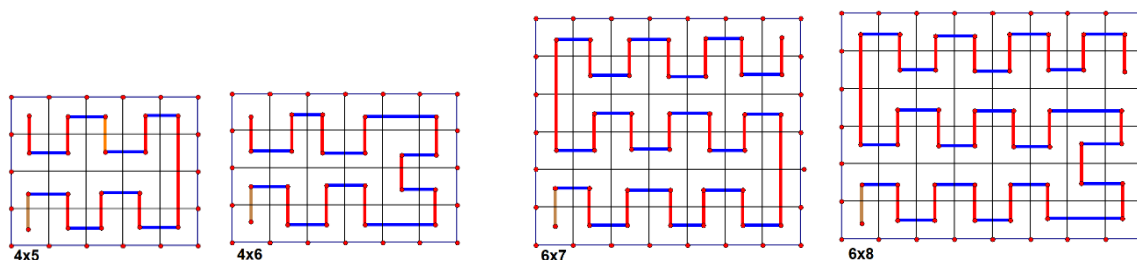
1、列數A為奇數

列數A為奇數時，若方格紙為奇數列 $\times$ 偶數行，起點在左下角方格，以逆時針S型完成兩直行一組的路線，再配合其左右對稱特性的混和走法，完成通過所有小正方形；若為奇數列 $\times$ 奇數行，則先以逆時針S型完成兩直行一組的路線，再以順時針S型走完兩橫列，兩種走法交替，完成通過所有的小正方形，此時折線段數都會是最多段，如下圖：



2、列數A為偶數

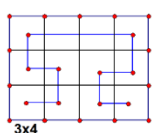
列數A為偶數時，不管是偶數列×偶數行或是偶數列×奇數行，起點在左下角方格，先以順時針S型 $\square$ 完成兩橫列一組的路線，再以其圖形對稱走法，完成通過所有小正方形的折線，折線段數會有最多段，如下圖：



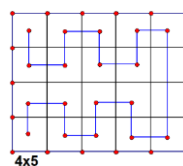
$\square$ 有 $2(\text{列}) \times 3(\text{行}) - 1 = 5$ 段與 $\sqcup$ 有 $2(\text{行}) \times 3(\text{列}) - 1 = 5$ 段，折線段數都一樣。

(二) 折線最多段數

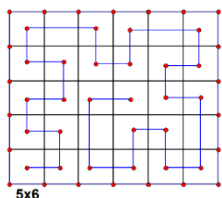
從原先的3列×4行方格紙開始擴張到4列×5行、5列×6行、6列×7行、7列×8行、8列×9行，我們發現由A列×(A+1)行小正方形組成的方格紙，最多折線段數有如下的規律：



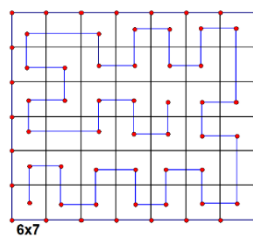
$$9 = 3^2 \text{ 段}$$



$$17 = 4^2 + 1 \text{ 段}$$

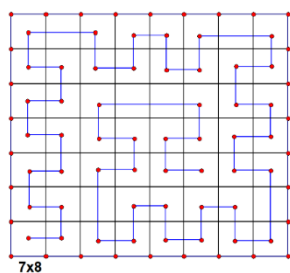


$$25 = 5^2 \text{ 段}$$

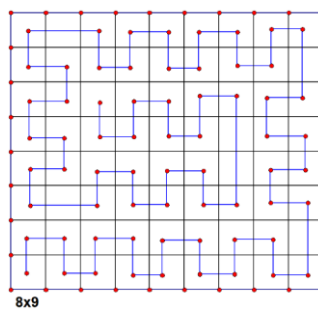


$$37 = 6^2 + 1 \text{ 段}$$

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明



$$49 = 7^2 \text{ 段}$$

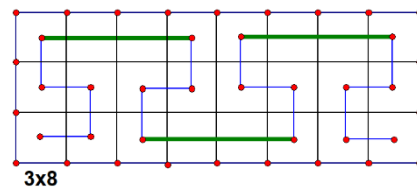
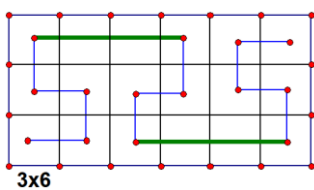
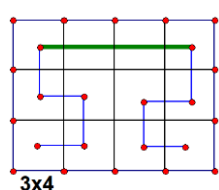


$$65 = 8^2 + 1 \text{ 段}$$

亦即，若**A為奇數**，最多折線段數共 **A^2 段**，若**A為偶數**，最多折線段數為 **$A^2 + 1$ 段**。

接著進行A列 $\times$ (A + 2)行、A列 $\times$ (A + 3)行、A列 $\times$ (A + 4)行、A列 $\times$ (A + 5)行的實作後，發現到若只考量列數A值，它們的規律性無法以上述A列 $\times$ (A + 1)行的方式表示，因此改成以奇數列依逆時針S型  走法，而偶數列依順時針S型  走法的段數為基準計算最多折線段數，並化簡求其算法與列數、行數的關係式。

1、奇數列 $\times$ 偶數行(A=3)



偶數行左右對稱的特性，每兩個相鄰  圖型，就會共用一段綠色線段。先求 $n = \frac{\text{行數}}{2}$

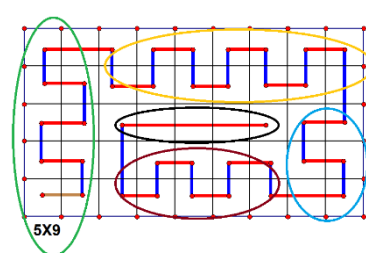
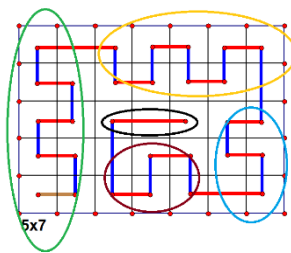
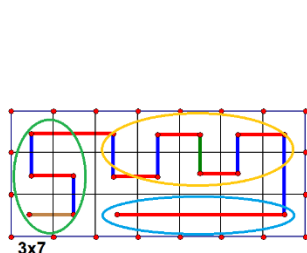
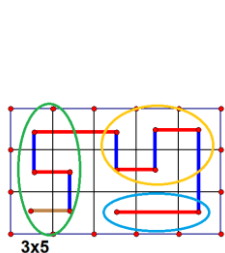
的值，等於有n個  相連，則會有n - 1段重複計算的綠色線段，例如：

$$3\text{列} \times 4\text{行} : \frac{4\text{行}}{2} \times (2 \times 3 - 1) - (\frac{4}{2} - 1) = 3 \times (4 - 1) - 0 = 9\text{段}$$

$$3\text{列} \times 6\text{行} : \frac{6\text{行}}{2} \times (2 \times 3 - 1) - (\frac{6}{2} - 1) = 3 \times (6 - 1) - 2 = 13\text{段}$$

$$3\text{列} \times 8\text{行} : \frac{8\text{行}}{2} \times (2 \times 3 - 1) - (\frac{8}{2} - 1) = 3 \times (8 - 1) - 4 = 17\text{段}$$

2、奇數列 $\times$ 奇數行(A=3)



註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

所有的奇數列 $A \geq 3$ 也可以逆時針S型 $\square$ 與順時針S型 $\square$ 圖形依逆時針螺旋型的混合交替計算最多段數，如圖：

5列×7行：

依綠色、黃色、藍色、咖啡色、黑色順序計算各色塊中有幾個相連的S型及其段數

$$\left[\left(\frac{5-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{5-3}{2}\right] + \left[\left(\frac{7-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{7-2-3}{2}\right] + \left(\frac{5-2-3}{2}+1\right) \times 5 + \left(\frac{7-2-2-3}{2}+1\right) \times 5 + (5-2-2) \times 1$$

$$= (2 \times 5 - 1) + (2 \times 5 - 1) + 1 \times 5 + 1 \times 5 + 1$$

$$= 5 \times 6 + 1 - 2$$

$$= 5 \times (7-1) + 1 - (7-5) \text{ 段}$$

5列×9行：

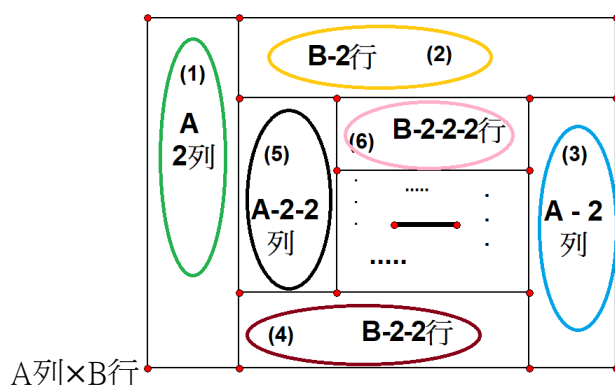
$$\left[\left(\frac{5-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{5-3}{2}\right] + \left[\left(\frac{9-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{9-2-3}{2}\right] + \left(\frac{5-2-3}{2}+1\right) \times 5 + \left[\left(\frac{9-2-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{9-2-2-3}{2}\right] + (5-2-2) \times 1$$

$$= (2 \times 5 - 1) + (3 \times 5 - 2) + 1 \times 5 + (2 \times 5 - 1) + 1$$

$$= 5 \times 8 - 1 - 2 - 1 + 1$$

$$= 5 \times (9-1) + 1 - (9-5) \text{ 段}$$

對所有的奇數列 $A \times$ 奇數行 B ，折線最多段數走法圖示如下



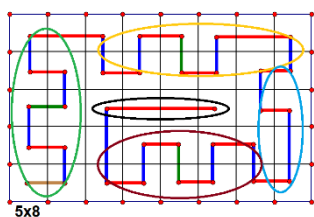
其折線最多段數計算方法為

依區塊編號(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)……順序，計算各區塊中有幾個相連的S型圖形，乘以每個S型有五段，再減去重複計算的線段，直到最後一列沒有出現S型圖形，其中 $A-2-2\cdots-2=1$ (列)時為最後一列，折線只剩一段。

將所有個區塊的段數加總，可以得到下列計算式：

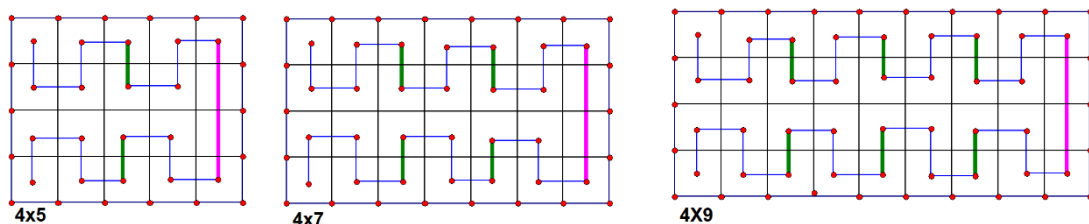
$$\left[\left(\frac{A-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{A-3}{2}\right] + \left[\left(\frac{B-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{B-2-3}{2}\right] + \left[\left(\frac{A-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{A-2-3}{2}\right] + \left[\left(\frac{B-2-2-3}{2}+1\right) \times 5 - \frac{B-2-2-3}{2}\right] + \cdots + (A-2-2\cdots-2)$$

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明



雖然奇數列×偶數行計算折線最多段樹的方法也可以跟奇數列×奇數列的方法一樣，但比較的結果來看，還是依 1 的方式比較簡單清楚。

3、偶數列×奇數行(A=4)



以等差數列計算行數中有 n 個 $\square$ 圖形相連，其中有 $n-1$ 段重複計算的綠色線段：

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$ ，其中 $a_n = B$ ， $a_1 = 3$ 行，公差 $d=2$ ，

即 $B = 3 + (n-1) \times 2$ ，得 $n = \frac{B-3}{2} + 1$ ，有 $n-1 = \frac{B-3}{2}$ (段)共用線段。

可得A列×B行： $\frac{A_{\text{列}}}{2} \times \left[(2 \times 3 - 1) \times \left(\frac{B-3}{2} + 1 \right) - \left(\frac{B-3}{2} \right) \right] - 1 = A \times B - \frac{A}{2} - 1$ (段)

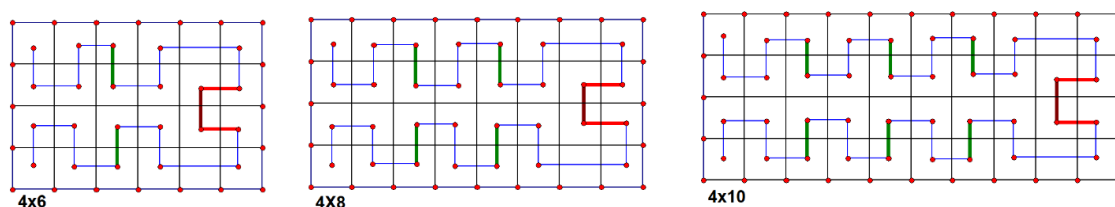
但4列×5行中 $A = 4$ ， $B = 5$ ，代入後得 $4 \times 5 - 2 - 1 = 4 \times 5 - 4 + 1 = 4 \times (5-1) + 1 = 17$ 段

而4列×7行： $A = 4$ ， $B = 7$ ，代入後得 $4 \times 7 - 2 - 1 = 4 \times 7 - 4 + 1 = 4 \times (7-1) + 1 = 25$ 段

且4列×9行： $A = 4$ ， $B = 9$ ，代入後得 $4 \times 9 - 2 - 1 = 4 \times 9 - 4 + 1 = 4 \times (9-1) + 1 = 33$ 段

因此，又可以化簡成：列數 $A \times (\text{行數} B - 1) + 1$

4、偶數列×偶數行(A=4)



若由連續 n 個 $\square$ 組成的行數必為奇數，因此對於偶數行，計算有幾段重複的綠色線段，將條件改成：

$a_n \geq a_1 + (n-1) \times d$ ，即 $n-1 \leq \frac{a_n - a_1}{2}$ ，其中 n 取最大整數值。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

上圖中4列×6行、4列×8行以及4列×10行中重複的綠色線段數量 $n - 1$ 分別如下：

$6 \geq 3 + (n - 1) \times 2$ ，求得有 $n = 2$ 個，即 $n - 1 = 1$ (段)

$8 \geq 3 + (n - 1) \times 2$ ，求得有 $n = 3$ 個，即 $n - 1 = 2$ (段)

$10 \geq 3 + (n - 1) \times 2$ ，求得有 $n = 4$ 個，即 $n - 1 = 3$ (段)

4列×6行： $\frac{4\text{列}}{2} \times [(2 \times 3 - 1) \times 2 - (2 - 1) + 1] + 1 = 4 \times (6 - 1) + 1 = 21\text{段}$

4列×8行： $\frac{4\text{列}}{2} \times [(2 \times 3 - 1) \times 3 - (3 - 1) + 1] + 1 = 4 \times (8 - 1) + 1 = 29\text{段}$

4列×10行： $\frac{4\text{列}}{2} \times [(2 \times 3 - 1) \times 4 - (4 - 1) + 1] + 1 = 4 \times (10 - 1) + 1 = 37\text{段}$

式子中紅色+1則是在中間兩列連接最右邊兩行的紅色線段，最後+1的部分，則是代表最右邊連接上下對稱圖形的1段咖啡色線段。此時，與偶數列×奇數行化簡後的計算方法：列數A×(行數B-1)+1是一致的。

將奇數列A=3及偶數列A=4再細分成奇數列×偶數行、奇數列×奇數行、偶數列×奇數行以及偶數列×偶數行計算最多段數方式討論的結果，再把其他列數的圖型以相同方式計算，可以得到其他奇數列與偶數列的最多折線段數算法，整理如下表：

表(五)：最多折線段數算法

A	$A \times (A + 1)$	$A \times (A + 2)$	$A \times (A + 3)$	$A \times (A + 4)$	$A \times (A + 5)$
3	$9=3 \times (4-1) - 0$	$11=3 \times (5-1) - 1$	$13=3 \times (6-1) - 2$	$15=3 \times (7-1) - 3$	$17=3 \times (8-1) - 4$
4	$17=4 \times (5-1) + 1$	$21=4 \times (6-1) + 1$	$25=4 \times (7-1) + 1$	$29=4 \times (8-1) + 1$	$33=4 \times (9-1) + 1$
5	$25=5 \times (6-1) - 0$	$29=5 \times (7-1) - 1$	$33=5 \times (8-1) - 2$	$37=5 \times (9-1) - 3$	$41=5 \times (10-1) - 4$
6	$37=6 \times (7-1) + 1$	$43=6 \times (8-1) + 1$	$49=6 \times (9-1) + 1$	$55=6 \times (10-1) + 1$	$61=6 \times (11-1) + 1$
7	$49=7 \times (8-1) - 0$	$55=7 \times (9-1) - 1$	$61=7 \times (10-1) - 2$	$67=7 \times (11-1) - 3$	$73=7 \times (12-1) - 4$
8	$65=8 \times (9-1) + 1$	$73=8 \times (10-1) + 1$	$81=8 \times (11-1) + 1$	$89=8 \times (12-1) + 1$	$97=8 \times (13-1) + 1$

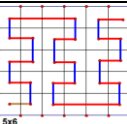
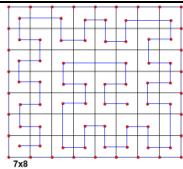
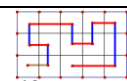
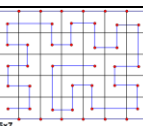
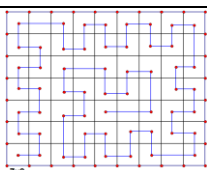
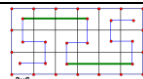
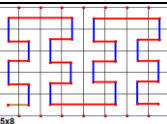
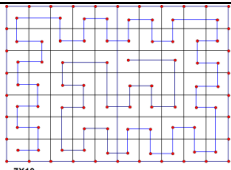
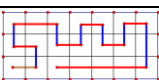
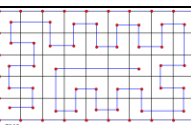
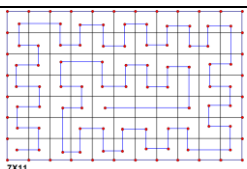
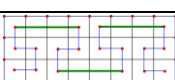
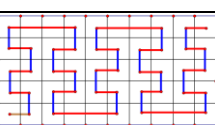
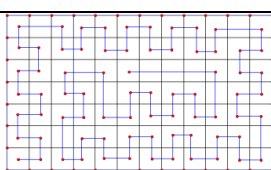
表中計算偶數列最多折線段數方法是一致的，但奇數列計算最多折線段數的方法看似有規律，卻無一致行，因此再將奇數列的算法加以調整。

以列數A = 3為例說明如下：

3 × 4	3 × 5	3 × 6	3 × 7	3 × 8
$9=3 \times (4-1) - 0$ $=3 \times (4-1) + 1$ $-(4-3)$	$11=3 \times (5-1) - 1$ $=3 \times (5-1) + 1$ $-(5-3)$	$13=3 \times (6-1) - 2$ $=3 \times (6-1) + 1$ $-(6-3)$	$15=3 \times (7-1) - 3$ $=3 \times (7-1) + 1$ $-(7-3)$	$17=3 \times (8-1) - 4$ $=3 \times (8-1) + 1$ $-(8-3)$

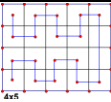
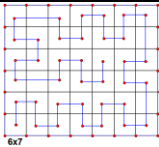
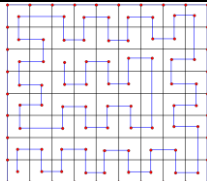
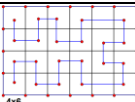
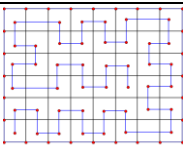
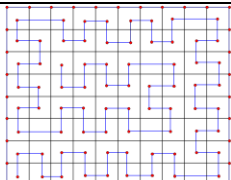
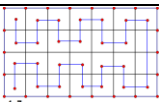
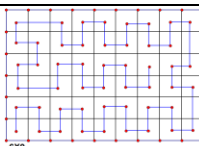
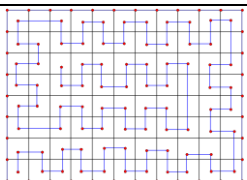
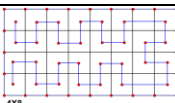
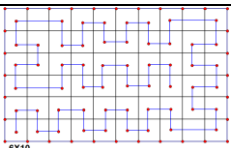
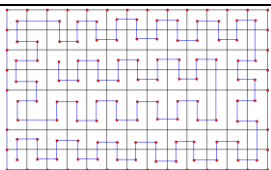
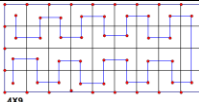
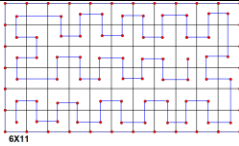
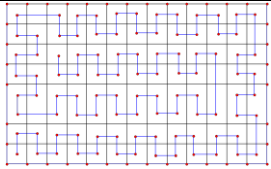
將計算方式配合偶數列，調整成：列數 $A \times (\text{行數}B - 1) + 1 - (\text{行數}B - \text{列數}A)$ ，而其他偶數列也用相同方式調整，得到一樣的結果，因此能將奇數列的計算法一致。

表(六)：列數 A 為奇數的最多折線段數

$A \times B$	$A = 3$ (段數)	$A = 5$ (段數)	$A = 7$ (段數)
$A \times (A + 1)$	 $3 \times (4 - 1) + 1 - (4 - 3) = 9$	 $5 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 5) = 25$	 $7 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 7) = 49$
$A \times (A + 2)$	 $3 \times (5 - 1) + 1 - (5 - 3) = 11$	 $5 \times (7 - 1) + 1 - (7 - 5) = 29$	 $7 \times (9 - 1) + 1 - (9 - 7) = 55$
$A \times (A + 3)$	 $3 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 3) = 13$	 $5 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 5) = 33$	 $7 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 7) = 61$
$A \times (A + 4)$	 $3 \times (7 - 1) + 1 - (7 - 3) = 15$	 $5 \times (9 - 1) + 1 - (9 - 5) = 37$	 $7 \times (11 - 1) + 1 - (11 - 7) = 67$
$A \times (A + 5)$	 $3 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 3) = 17$	 $5 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 5) = 41$	 $7 \times (12 - 1) + 1 - (12 - 7) = 73$
段數所成數列	公差 $3 - 1 = 2$	公差 $5 - 1 = 4$	公差 $7 - 1 = 6$
折線最多段數	$\text{列數}A \times (\text{行數}B - 1) + 1 - (\text{行數}B - \text{列數}A)$ $\text{化簡後} = (\text{列數}A - 1) \times B \text{行數} + 1$		

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

表(七)：列數A為偶數的最多折線段數

$A \times B$	$A = 4$ (段數)	$A = 6$ (段數)	$A = 8$ (段數)
$A \times (A + 1)$	 $4 \times (5 - 1) + 1 = 17$	 $6 \times (7 - 1) + 1 = 37$	 $8 \times (9 - 1) + 1 = 65$
$A \times (A + 2)$	 $4 \times (6 - 1) + 1 = 21$	 $6 \times (8 - 1) + 1 = 43$	 $8 \times (10 - 1) + 1 = 73$
$A \times (A + 3)$	 $4 \times (7 - 1) + 1 = 25$	 $6 \times (9 - 1) + 1 = 49$	 $8 \times (11 - 1) + 1 = 81$
$A \times (A + 4)$	 $4 \times (8 - 1) + 1 = 29$	 $6 \times (10 - 1) + 1 = 55$	 $8 \times (12 - 1) + 1 = 89$
$A \times (A + 5)$	 $4 \times (9 - 1) + 1 = 33$	 $6 \times (11 - 1) + 1 = 61$	 $8 \times (13 - 1) + 1 = 97$
段數所成數列	公差 4	公差 6	公差 8
折線最多段數	$\text{列數}A \times (\text{行數}B - 1) + 1$		

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

研究發現二：

(一) A為奇數，起點在角落，以逆時針S型⁵走法完成兩直行一組的路線，完成通過所有小正方形中心，折線段數最多為：

$$\text{列數}A \times (\text{行數}B - 1) + 1 - (\text{行數}B - \text{列數}A) \text{段} = (\text{列數}A - 1) \times \text{行數}B + 1。$$

(二) A為偶數，起點在角落，以順時針S型 $\square$ 走法完成兩橫列一組的路線，完成通過所有小正方形中心，折線段數最多為：列數A × (行數B - 1) + 1段。

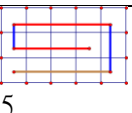
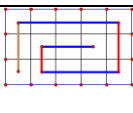
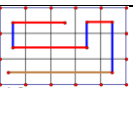
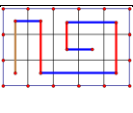
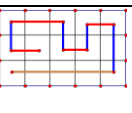
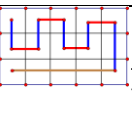
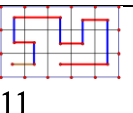
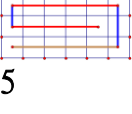
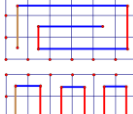
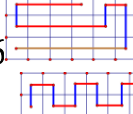
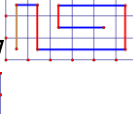
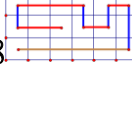
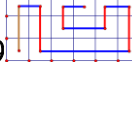
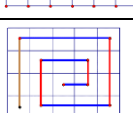
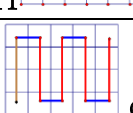
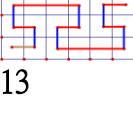
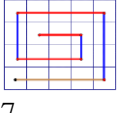
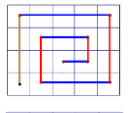
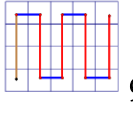
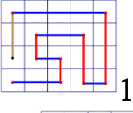
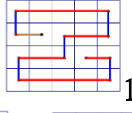
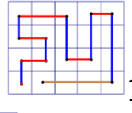
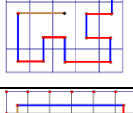
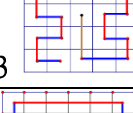
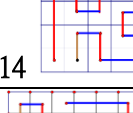
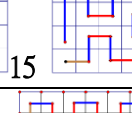
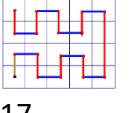
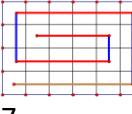
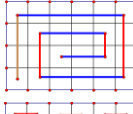
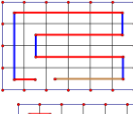
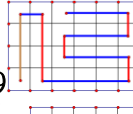
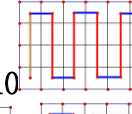
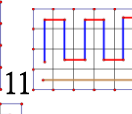
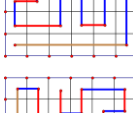
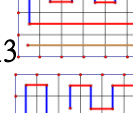
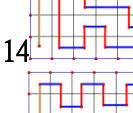
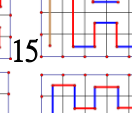
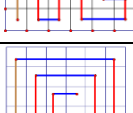
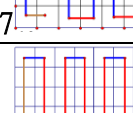
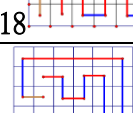
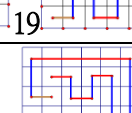
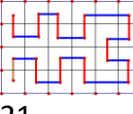
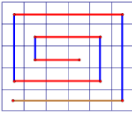
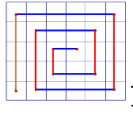
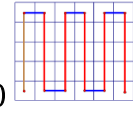
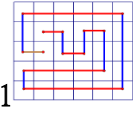
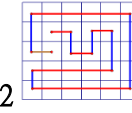
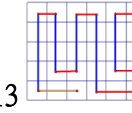
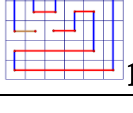
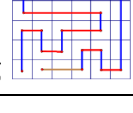
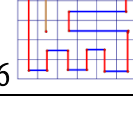
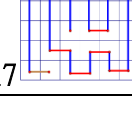
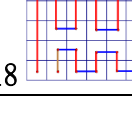
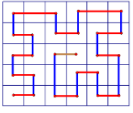
三、 探討共有幾種可能的折線段數

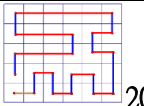
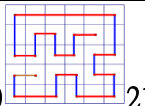
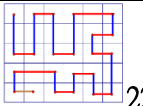
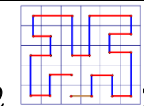
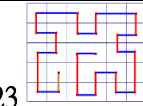
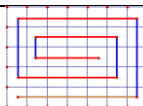
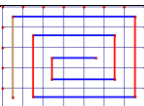
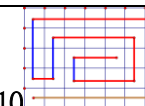
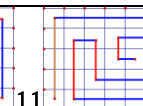
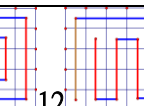
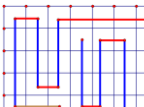
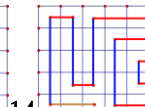
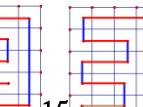
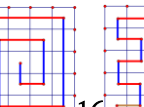
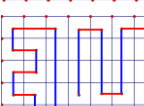
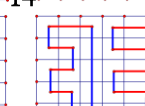
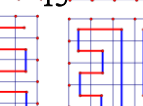
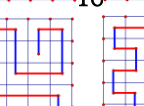
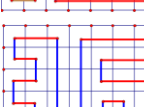
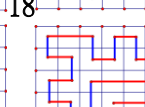
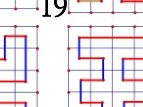
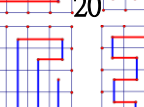
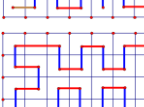
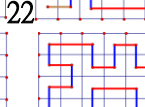
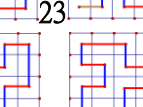
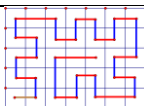
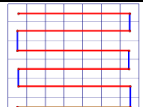
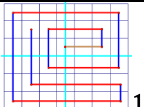
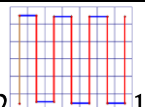
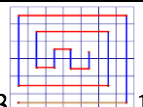
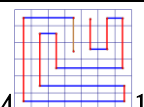
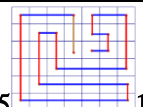
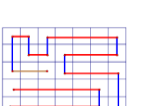
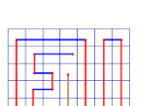
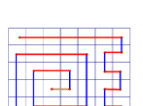
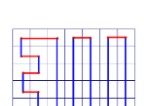
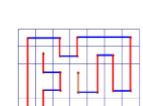
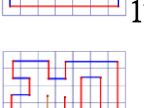
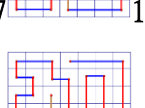
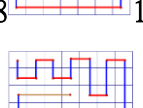
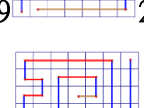
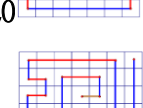
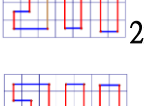
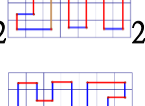
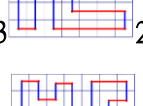
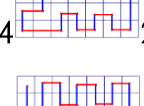
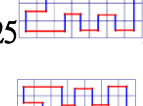
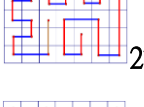
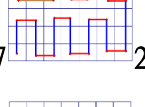
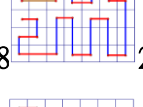
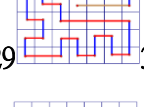
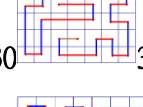
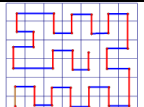
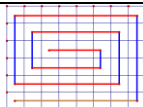
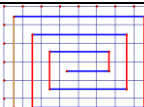
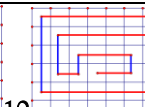
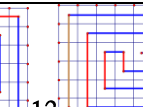
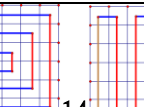
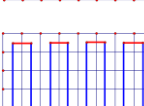
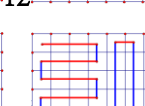
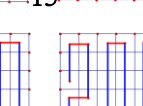
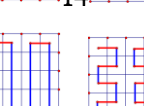
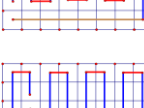
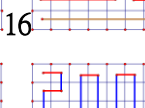
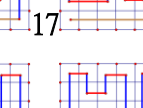
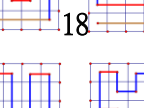
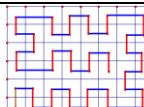
在表(一)中我們得知，對於3列×4行的小正方形方格紙，通過其中每個小方格中心點一次的折線，得到最少有5段，最多9段，而且可能的折線段數分別有5、6、7、8、9段，也就是**最少段數 5 ≤ 折線可能的段數 ≤ 最多段數 9**。

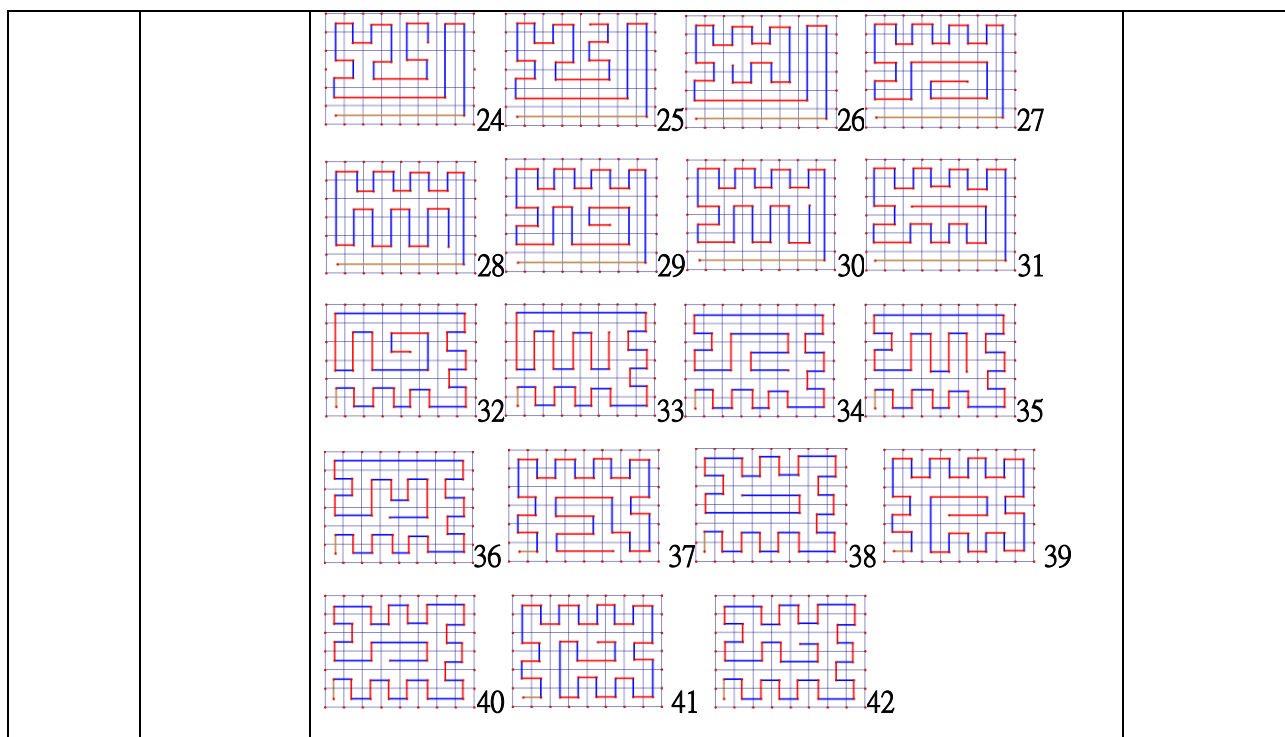
接著討論其他列數×行數的方格紙，但因數量龐大，僅列出部分A列 × B行實作圖形的結果進行說明如下：

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

表(八)：可能的折線段數

$A \times B$	最少段	其 他 段 數	最多段
3×5	 5	 6  7  8  9  10	 11
3×6	 5	 6  7  8  9  10  11  12	 13
4×5	 7	 8  9  10  11  12  13  14  15  16	 17
4×6	 7	 8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20	 21
5×6	 9	 10  11  12  13  14  15  16  17  18  19	 25

		 20  21  22  23  24	
5 × 7	 9	 10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28	 29
6 × 7	 11	 12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36	 37
6 × 8	 11	 12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23	 43



註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

研究發現三：

由所得實作圖形發現與3列x4行的情況一樣，因此我們推論A列×B行($3 \leq A < B$)的小正方形方格紙，其折線可能的段數，包含從最少的段數一直到最多的段數之間所有的正整數值都是可能的結果，即 **最少段數 ≤ 折線可能的段數 ≤ 最多段數**。

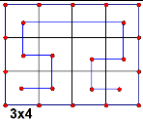
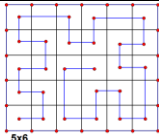
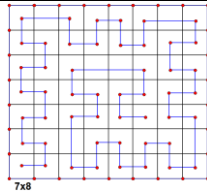
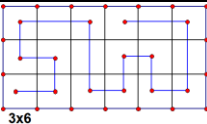
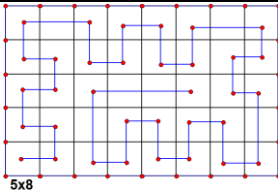
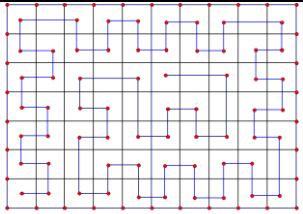
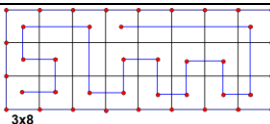
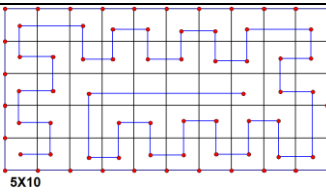
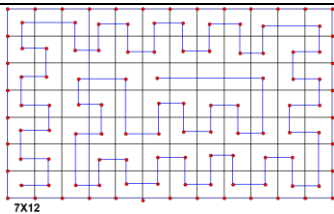
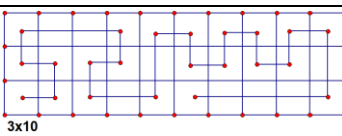
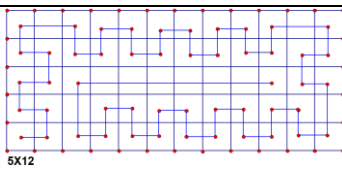
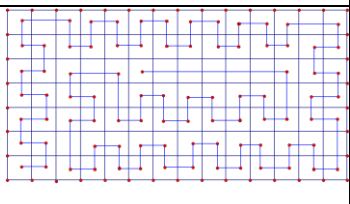
四、折線段數是否具有規律性

觀察表(六)與表(七)中所列各個圖形，我們發現折線的最多段數，(1)若A為偶數，對於列數A相同，且行數B為連續正整數(公差d=1)的所有正方形方格紙，最多折線段數恰為公差A的等差數列。(2)若A為奇數，對於列數A相同，且行數B為連續正整數(公差d=1)的所有正方形方格紙，最多折線段數恰為公差A-1的等差數列。

接著討論A列×B行($3 \leq A < B$)小正方形方格紙，若A值相同且B的公差是正整數d=2時，折線最多段數所形成的數列，將其結果整理如下表(九)：

表(九)：A為奇數，B的公差 d=2

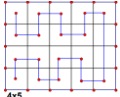
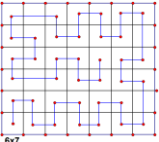
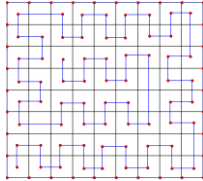
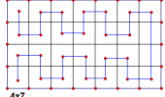
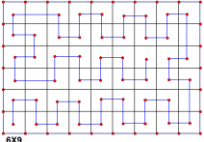
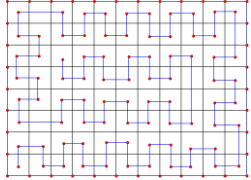
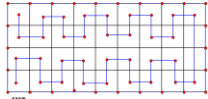
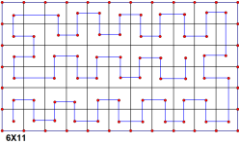
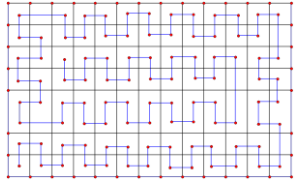
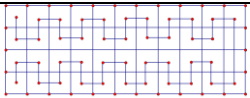
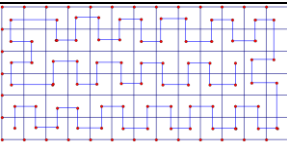
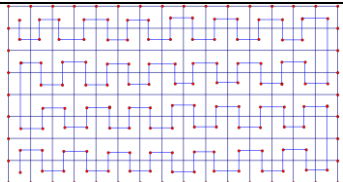
A × B	A = 3 (段數)	A = 5 (段數)	A = 7 (段數)
-------	------------	------------	------------

$A \times (A + 1)$	 $3 \times (4 - 1) + 1 - (4 - 3) = 9$	 $5 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 5) = 25$	 $7 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 7) = 49$
$A \times (A + 3)$	 $3 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 3) = 13$	 $5 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 5) = 33$	 $7 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 7) = 61$
$A \times (A + 5)$	 $3 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 3) = 17$	 $5 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 5) = 41$	 $7 \times (12 - 1) + 1 - (12 - 7) = 73$
$A \times (A + 7)$	 $3 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 3) = 21$	 $5 \times (12 - 1) + 1 - (12 - 5) = 49$	 $7 \times (14 - 1) + 1 - (14 - 7) = 85$
最多段數 所成數列	公差 $(3 - 1) \times (10 - 8)$ $= (3 - 1) \times 2 = 4$ $= (A - 1) \times d$	公差 $(5 - 1) \times (12 - 10)$ $= (5 - 1) \times 2 = 8$ $= (A - 1) \times d$	公差 $(7 - 1) \times (14 - 12)$ $= (7 - 1) \times 2 = 12$ $= (A - 1) \times d$

在表(九)中，當列數 A 為奇數時，方格紙 3×4 、 3×6 、 3×8 、 3×10 ，折線最多段數分別為9、13、17、21，恰為公差 $(3 - 1) \times 2 = 4$ 的等差數列，當 $A = 5$ 、 $A = 7$ 時，數列也是公差各為 $(5 - 1) \times 2 = 8$ 、 $(7 - 1) \times 2 = 12$ ，即都是列數 $(A - 1) \times (B \text{的公差} 2)$ 。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

表(十)： A 為偶數， B 的公差 $d=2$

$A \times B$	$A = 4$ (段數)	$A = 6$ (段數)	$A = 8$ (段數)
$A \times (A + 1)$	 $4 \times (5 - 1) + 1 = 17$	 $6 \times (7 - 1) + 1 = 37$	 $8 \times (9 - 1) + 1 = 65$
$A \times (A + 3)$	 $4 \times (7 - 1) + 1 = 25$	 $6 \times (9 - 1) + 1 = 49$	 $8 \times (11 - 1) + 1 = 81$
$A \times (A + 5)$	 $4 \times (9 - 1) + 1 = 33$	 $6 \times (11 - 1) + 1 = 61$	 $8 \times (13 - 1) + 1 = 97$
$A \times (A + 7)$	 $4 \times (11 - 1) + 1 = 41$	 $6 \times (13 - 1) + 1 = 73$	 $8 \times (15 - 1) + 1 = 113$
等差 數列	公差 $4 \times (11 - 9)$ $= 4 \times 2 = 8$ $= A \times d$	公差 $6 \times (13 - 11)$ $= 6 \times 2 = 12$ $= A \times d$	公差 $8 \times (15 - 13)$ $= 8 \times 2 = 16$ $= A \times d$

上表中，對於方格紙 4×5 、 4×7 、 4×9 、 4×11 ，折線最多段數分別為17、25、33、41，恰為公差 $4 \times 2 = 8$ 的等差數列，亦即列數 $A \times (B \text{的公差} 2) = 8$ ，當 $A = 6$ 、 $A = 8$ 時，數列的公差也各為 $6 \times 2 = 12$ 、 $8 \times 2 = 16$ ，折線最多段數所成的數列都是 $A \times (B \text{的公差} 2)$ 。
 (列數 $A = 2$ 時也有相同規律，請參考P. 27表(十六)中的最少段數與最多段數的說明)

研究發現四：

對於 A 值相同且 B 的公差為 d 時，折線最多段數所成的數列：

- (1) 若 A 為奇數，則折線最多段數會是公差為 $(A - 1) \times d$ ，的等差數列。
- (2) 若 A 為偶數，則折線最多段數會是公差為 $A \times d$ 的等差數列。

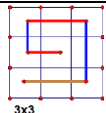
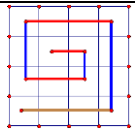
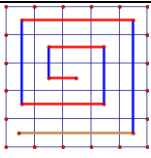
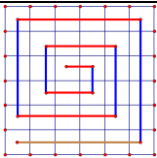
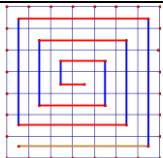
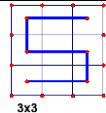
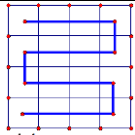
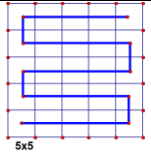
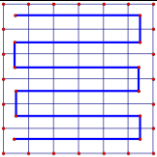
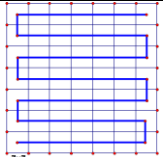
註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

伍、討論

一、關於 A 列 $\times A$ 行(即 $B = A \geq 3$ 時)折線的最少段數、最多段數以及可能的段數，與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)的結果是否相同？

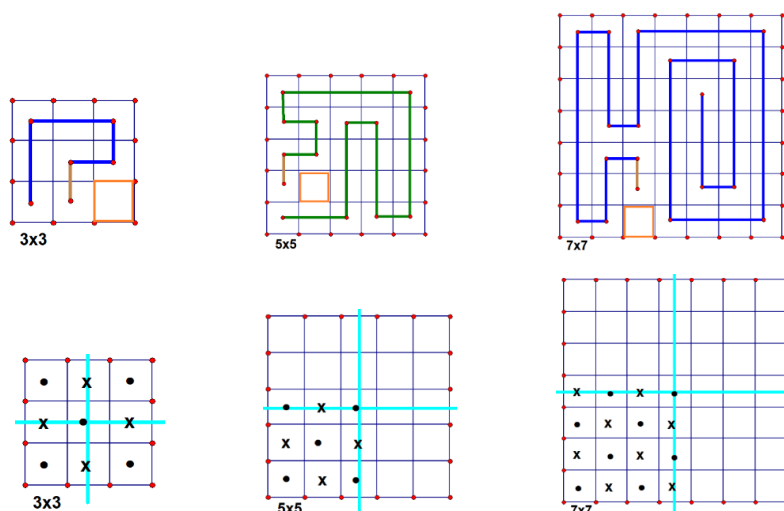
(一)、折線最少段數的走法：

表(十一)： A 列 $\times A$ 行的折線段數

走 法	3列 $\times$ 3行	4列 $\times$ 4行	5列 $\times$ 5行	6列 $\times$ 6行	7列 $\times$ 7行
起點在角落 逆時針螺旋					
起點在角落 逆時針S型					
最少段數	$2 \times 3\text{列} - 1$ $= 5$	$2 \times 4\text{列} - 1$ $= 7$	$2 \times 5\text{列} - 1$ $= 9$	$2 \times 6\text{列} - 1$ $= 11$	$2 \times 7\text{列} - 1$ $= 13$

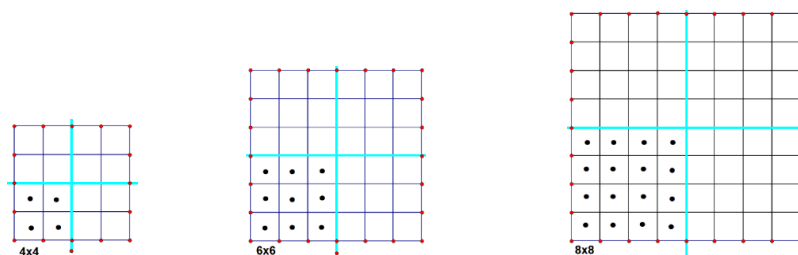
由上表可以發現，對於 A 列 $\times A$ 行(即 $B = A$)的方格紙，折線最少段數的走法及最少折線段數都是與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)情況相同，最少折線段數都是：列數 $A \times 2 - 1$ 段。

此外，由實作的結果發現，若 A 、 B 為奇數， A 列 $\times A$ 行($B = A$)會與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)有相同的情況，起點位置若選擇在「列數+行數=奇數」的方格中，則折線無法完成通過每個小方格中心一次。



若 A 為偶數， A 列 $\times A$ 行($B = A$)會與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)有相同的情況，起點在任意一個位置，折線可以完成通過每個小方格中心一次。

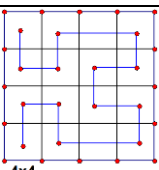
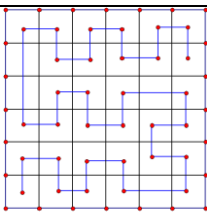
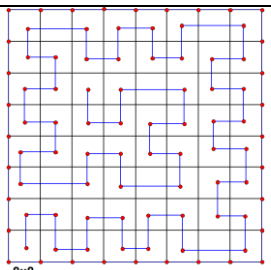
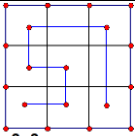
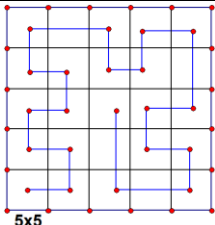
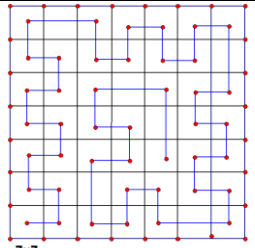
註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明



標示●表示起點在此，折線可以完成通過每個小正方形方格中心一次。

(二)、折線最多段數及其走法

表(十二)：A列×A行 ($B = A \geq 3$)最多折線段數及走法

A為偶數	A = 4 (段數)	A = 6 (段數)	A = 8 (段數)
A × A	 $4 \times (4 - 1) + 1 = 13$	 $6 \times (6 - 1) + 1 = 31$	 $8 \times (8 - 1) + 1 = 57$
最多折線段數	$A \times (A - 1) + 1$ $= A \times (B - 1) + 1$ 段		
A為奇數	A = 3 (段數)	A = 5 (段數)	A = 7 (段數)
A × A	 $3 \times (3 - 1) = 6$	 $5 \times (5 - 1) = 20$	 $7 \times (7 - 1) = 42$
最多段數	$A \times (A - 1) = A \times (B - 1)$ 段		

比較表(十二)、表(六)與表(七)，A列×A行($B = A \geq 3$)的方格紙，折線最多段數的走法與 A列×B行($B > A \geq 3$)相同，最多折線段數可分成以下兩種情況：

- (1) 當A為偶數時，於A列×A行是與A列×B行($B > A$)情況有相同的結果，折線最多的段數一樣為列數 $A \times (B - 1) + 1$ 段。
- (2) 當A為奇數時，A列×A行($B = A$)的最多折線段數是列數 $A \times (B - 1)$ 段，與A列×B行($B > A$)為列數 $A \times (B - 1) + 1 - (B - A)$ 段的情況不同。

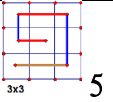
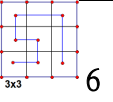
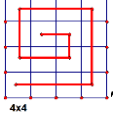
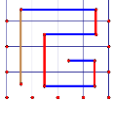
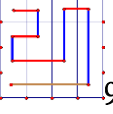
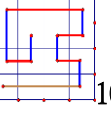
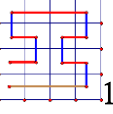
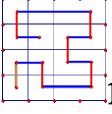
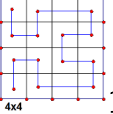
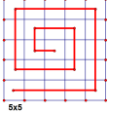
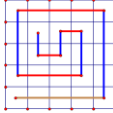
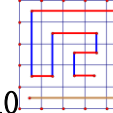
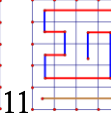
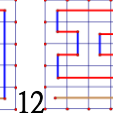
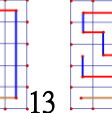
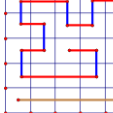
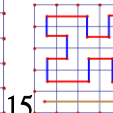
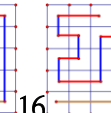
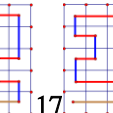
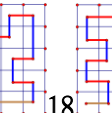
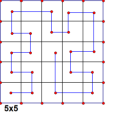
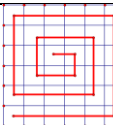
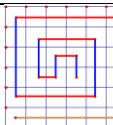
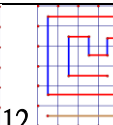
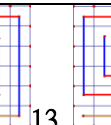
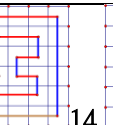
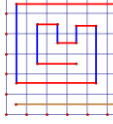
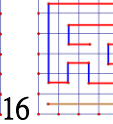
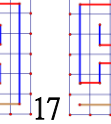
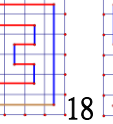
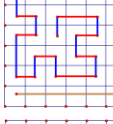
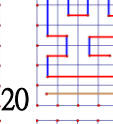
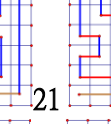
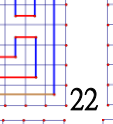
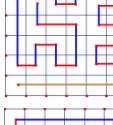
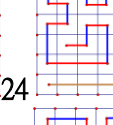
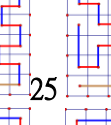
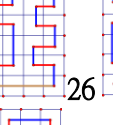
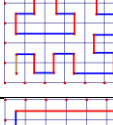
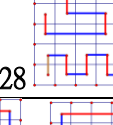
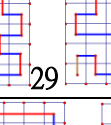
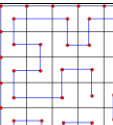
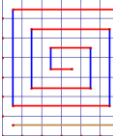
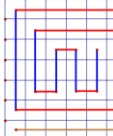
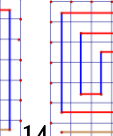
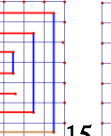
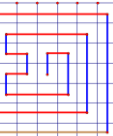
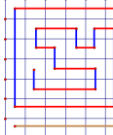
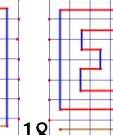
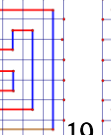
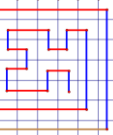
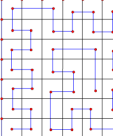
註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

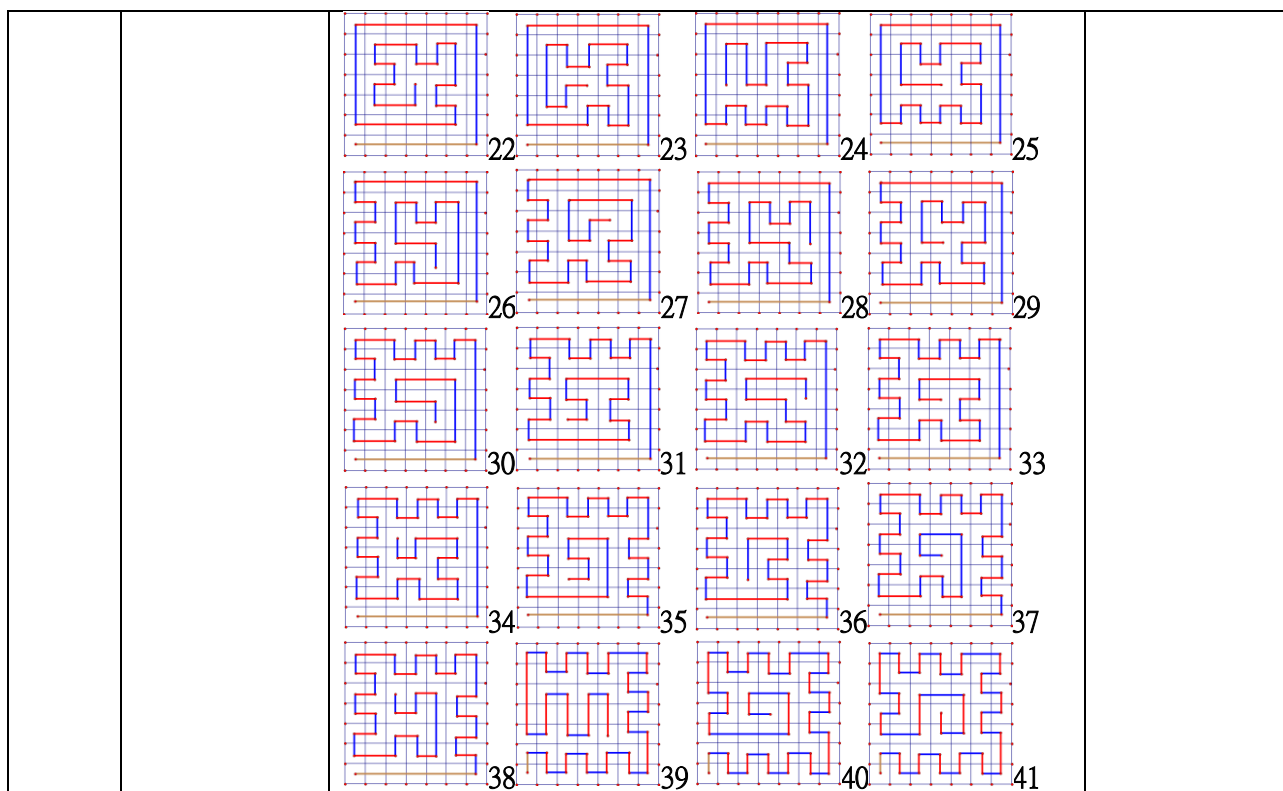
(三)、所有可能的折線段數

利用實作將A列 × A行所有可能的折線段數圖形整理如下：

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

表(十三)：A列 × A行所有可能的折線段數

	最少段	其 他	最多段
3 × 3	 5		 6
4 × 4	 7	 8  9  10  11  12	 13
5 × 5	 9	 10  11  12  13  14  15  16  17  18  19	 20
6 × 6	 11	 12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30	 31
7 × 7	 13	 14  15  16  17  18  19  20  21	 42



從上表可以得知， A 列 $\times A$ 行($B = A \geq 3$)可能的折線段數，與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)一樣，最少段數 $2A - 1 \leq$ 折線可能的段數 $\leq$ 最多段數。

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

(四) A 列 $\times A$ 行($B = A \geq 3$) 與 A 列 $\times B$ 行($B > A \geq 3$)折線段數是否具有規律

從表(三)、(四)與(十一)中可以確認，折線最少段數等於列數 $A \times 2 - 1$ 段，因此若列數 A 為公差 d 的等差數列時，折線最少段數則為公差 $2d$ 的等差數列。

當列數 $A = 3$ 時， 3×4 、 3×5 、 3×6 ...折線的最多段數分別為9、11、13...，為公差 $(3 - 1) \times 2 = 2$ 的等差數列，但 3×3 折線的最多段數為6，與 3×4 、 3×5 、 3×6 ...的折線段數不會成等差數列。此外，列數 $A = 5$ 與 $A = 7$ 的奇數列，也都有相同情況。亦即列數 A 為奇數時， A 列 $\times A$ 行($B = A$) 與 A 列 $\times B$ 行($B > A$)折線段數之間是不具有規律性，如下：

表(十四)： A 為奇數時， A 列 $\times B$ 行($B \geq A$) 最多折線段數比較

$A \times B$	$A \times A$	$A \times (A + 1)$	$A \times (A + 2)$	$A \times (A + 3)$	$A \times (A + 4)$
$A = 3$	$3 \times (3 - 1)$ $= 6$	$3 \times (4 - 1) + 1$ $- (4 - 3) = 9$	$3 \times (5 - 1) + 1$ $- (5 - 3) = 11$	$3 \times (6 - 1) + 1$ $- (6 - 3) = 13$	$3 \times (7 - 1) + 1$ $- (7 - 3) = 15$
$A = 5$	$5 \times (5 - 1)$ $= 20$	$5 \times (6 - 1) + 1$ $- (6 - 5) = 25$	$5 \times (7 - 1) + 1$ $- (7 - 5) = 29$	$5 \times (8 - 1) + 1$ $- (8 - 5) = 33$	$5 \times (9 - 1) + 1$ $- (9 - 5) = 37$

$A = 7$	$7 \times (7 - 1)$ $= 42$	$7 \times (8 - 1) + 1$ $- (8 - 7) = 49$	$7 \times (9 - 1) + 1$ $- (9 - 7) = 55$	$7 \times (10 - 1) + 1$ $- (10 - 7) = 61$	$7 \times (11 - 1) + 1$ $- (11 - 7) = 67$
---------	------------------------------	--	--	--	--

列數 $A = 4$ ，方格紙如 4×4 、 4×5 、 4×6 、 4×7 、 4×8 、 4×9 ，折線的最多段數分別為 13、17、21、25、29、33，會成公差為 4 的等差數列，列數 $A = 6$ 與 $A = 8$ 時，也各成為公差 6、8 的等差數列。因此，列數 A 為偶數時， A 列 $\times$ B 行 ($A \leq B$) 的最多折線段數之間是成等差數列。由下表可知，當 A 為固定值且 B 為公差 d 的等差數列時， A 列 $\times$ B 行 ($3 \leq A \leq B$) 的最多折線段數為公差 $A \times d$ 的等差數列。

表(十五)： A 為偶數時， A 列 $\times$ B 行 ($B \geq A$) 最多折線段數比較

$A \times B$	$A \times A$	$A \times (A + 1)$	$A \times (A + 2)$	$A \times (A + 3)$	$A \times (A + 4)$
$A = 4$	$4 \times (4 - 1) + 1$ $= 13$	$4 \times (5 - 1) + 1$ $= 17$	$4 \times (6 - 1) + 1$ $= 21$	$4 \times (7 - 1) + 1$ $= 25$	$4 \times (8 - 1) + 1$ $= 29$
$A = 6$	$6 \times (6 - 1) + 1$ $= 31$	$6 \times (7 - 1) + 1$ $= 37$	$6 \times (8 - 1) + 1$ $= 43$	$6 \times (9 - 1) + 1$ $= 49$	$6 \times (10 - 1) + 1$ $= 55$
$A = 8$	$8 \times (8 - 1) + 1$ $= 57$	$8 \times (9 - 1) + 1$ $= 65$	$8 \times (10 - 1) + 1$ $= 73$	$8 \times (11 - 1) + 1$ $= 81$	$8 \times (12 - 1) + 1$ $= 89$

研究發現五：

對於 A 列 $\times$ A 行 ($B = A \geq 3$) 的小正方形方格紙：

- (1) 折線最少段數共有列數 $A \times 2 - 1$ 段，當 A 為公差 d 的等差數列，最少折線段數之間會成公差為 $2 \times d$ 的等差數列。
- (2) 當 A 為奇數時，最多折線段數共有 $A \times (B - 1)$ 段；當 A 為偶數時，最多折線段數共有 $A \times (B - 1) + 1$ 段。
- (3) 最少段數 $2A - 1 \leq$ 折線可能的段數 $\leq$ 最多段數。
- (4) 列數 A 為偶數，當 A 為定值且 B 為公差 d 的等差數列， A 列 $\times$ B 行 ($3 \leq A \leq B$) 的最多折線段數為公差 $A \times d$ 的等差數列。但 A 為奇數，當 A 為定值且 B 為公差 d 的等差數列， A 列 $\times$ B 行 ($3 \leq A \leq B$) 的最多折線段數之間不成等差數列。

二、列數 $A=2$ 的折線段數

將列數 $A = 2$ 的圖形整理於下表(十六)，得知折線的最少段數都是： $2 \times 2 - 1 = 3$ 段，能以亦即能以：列數 $\times A - 1$ 段表示，而最多段數 $2 \times (B - 1) + 1$ 段，與其他偶數列一樣都是：列數 $A \times (B - 1) + 1$ 段，且最多段數所成的等差數列公差也是 $A \times d$ ，但是，折

線可能的段數與其他偶數列的情況有所不同，只包括最少段數、最多段數以及這兩者之間的連續偶數段數。

表(十六)：列數A=2的折線段數

	最少段數	其 他	最多段數
2×2	 $2 \times 2 - 1 = 3$		 $2 \times (2 - 1) + 1 = 3$
2×3	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4	 $2 \times (3 - 1) + 1 = 5$
2×4	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4  6	 $2 \times (4 - 1) + 1 = 7$
2×5	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4  6  8	 $2 \times (5 - 1) + 1 = 9$
2×6	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4  6  8  10	 $2 \times (6 - 1) + 1 = 11$
2×7	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4  6  8  10  12	 $2 \times (7 - 1) + 1 = 13$
2×8	 $2 \times 2 - 1 = 3$	 4  6  8  10  12  14	 $2 \times (8 - 1) + 1 = 15$

註：本頁所有圖片均為作者透過GSP軟體繪製，再貼至小畫家處理後，複製貼到本處做說明

三、居家環境、人流密集的百貨商場，須維持地面清潔；工人數量與素質，影響商品大量生產的效率與成本，掃地機器人是好幫手。機器人透過導航、偵測系統掃描清掃區域的環境地圖，利用先進科技及數學運算程式，選擇最少轉折段數的路徑減少清掃時間，遇到

障礙物後也能重新計算分析地圖，快速完成清掃工作。

政府提倡綠能，廣植太陽能板，但易因灰塵、鳥糞阻礙光線穿透，降低發電效率；高樓大廈，外牆帷幕需清潔維持美觀，保持室內光線明亮；農業種植工作最怕缺工、農民老化，無人機與機器人功能相仿，提昇無人機設計，或許能提供相關工作的支援。

陸、結論

由 $A \times B$ 個單位小正方形組成 A 列 $\times B$ 行($A \leq B$)方格紙，若畫一條折線通過每個小正方形中心各一次，會有如下的結果：

一、若方格紙為「奇數列 $\times$ 奇數行」，起點在「列數 $+$ 行數 $=$ 奇數」的位置，折線無法通過所有的小正方形方格。起點在角落，先走橫列再走直行的逆時針螺旋型或S型行進，折線段數會最少，共有 $2A - 1$ 段。

二、(一) 當 A 為奇數時，起點在角落，利用兩直行一組的逆時針S型與兩橫列一組的順時針S型交替順依序完成通過所有小正方形中心，折線的段數會最多：

若(1) $B = A$ ，共 $A \times (B - 1)$ 段；

(2) $B > A$ ，共 $A \times (B - 1) + 1 - (B - A) = (A - 1) \times B + 1$ 段。

(二) 當 A 為偶數時，起點在角落，則以兩橫列一組的順時針S型路線完成折線通過所有小正方形中心，折線的段數最多：

$B \geq A$ ，共 $A \times (B - 1) + 1$ 段。

三、當 $A \geq 3$ ，最少段數 $2A - 1 \leq$ 折線可能的段數 $\leq$ 最多段數；若 $A = 2$ ，可能的段數只包括最少段數、最多段數以及兩者之間的連續偶數。

四、(一) 當列數 A 為公差 d 的整數時，最少折線段數為公差 $2d$ 的等差數列。

(二) 當 A 為偶數，列數 A 相同且行數 B 為公差 d 的正整數時，則最多折線段數為公差 $A \times d$ 的等差數列。

(三) 當 A 為奇數，列數 A 相同且行數 B 為公差 d 的正整數， $A < B$ 時，最多折線段數為公 $(A - 1) \times d$ 的等差數列；若 $B = A$ ，則與 $A < B$ 的最多折線段數之間不會成等差數列。

柒、參考文獻及資料

一、游森棚 (2023)。蜿蜒曲折。科學研習月刊，第62卷第3期。

二、康軒出版社 國中數學第四冊課本

【評語】 030401

本作品起源於《科學研習雙月刊》第 62 卷第 3 期中游森棚教授提出的問題；作者首先分析 4×5 、 5×6 、 6×7 等矩形，並進一步推廣至一般 A 列 $\times (A+1)$ 、 $(A+2) \cdots A$ 行的情形，系統歸納折線段數的最小值、最大值與所有可能值。接著發現：矩形折線最少段數可統一表示為「列數 $A \times 2 - 1$ 段」，並透過走法圖示及實作驗證此規律。針對不同奇偶列數的矩形，歸納出最多段數的計算方法，例如偶數列 $A \times (B - 1) + 1$ ，並調整奇數列的算法使其一致，展現了規律的泛用。文中亦詳細探討起點位置對折線路徑可行性的影響，特別指出奇數列 $\times$ 奇數行在特定起點會留下無法通過的方格，而偶數列則無此限制，具有細緻的觀察。

所有結果皆以 GSP 軟體繪製對應圖示，呈現清晰。

幾個建設性建議：1. 若能進一步探討在最少段數或最多段數情況下，是否存在多種不同的路徑圖形並分析，定能加強成果的深入性；2. 關於 $A=2$ 特殊情形的討論與結論，若能更緊密地整合進摘要或主要結果中，相信可增添研究脈絡的連貫完整性；3. 部分推導若能提供進一步嚴謹的數學證明，相信將提升作品的學術探究。

整體而言，此作品在矩形折線問題上，嘗試去提供全面與具體的解答，尤其在歸納公式方面，值得肯定與鼓勵。

作品海報

「折折」稱奇

壹、研究動機

台師大數學系游森棚教授在科學研習月刊第62卷第3期中提出「探討畫一條折線通過3列× 4行方格紙中每個小正方形中心各一次，轉折次數最少幾次？最多幾次？有哪些可能的轉折次數？」，而第四冊課本探討數列與圖形規律問題，我們便思考若圖形是4列×5行、5列×6行、6列×7行…呢？將問題改變成探討「折線段數」，並擴大到A列× (A + 1)行、A列× (A + 2)行、A列× (A + 3)行、A列× (A + 4)行、A列× (A + 5)行…，折線的最少段數、最多段數與可能的段數各是多少？是否有規律性？是否能一般化？

貳、研究目的

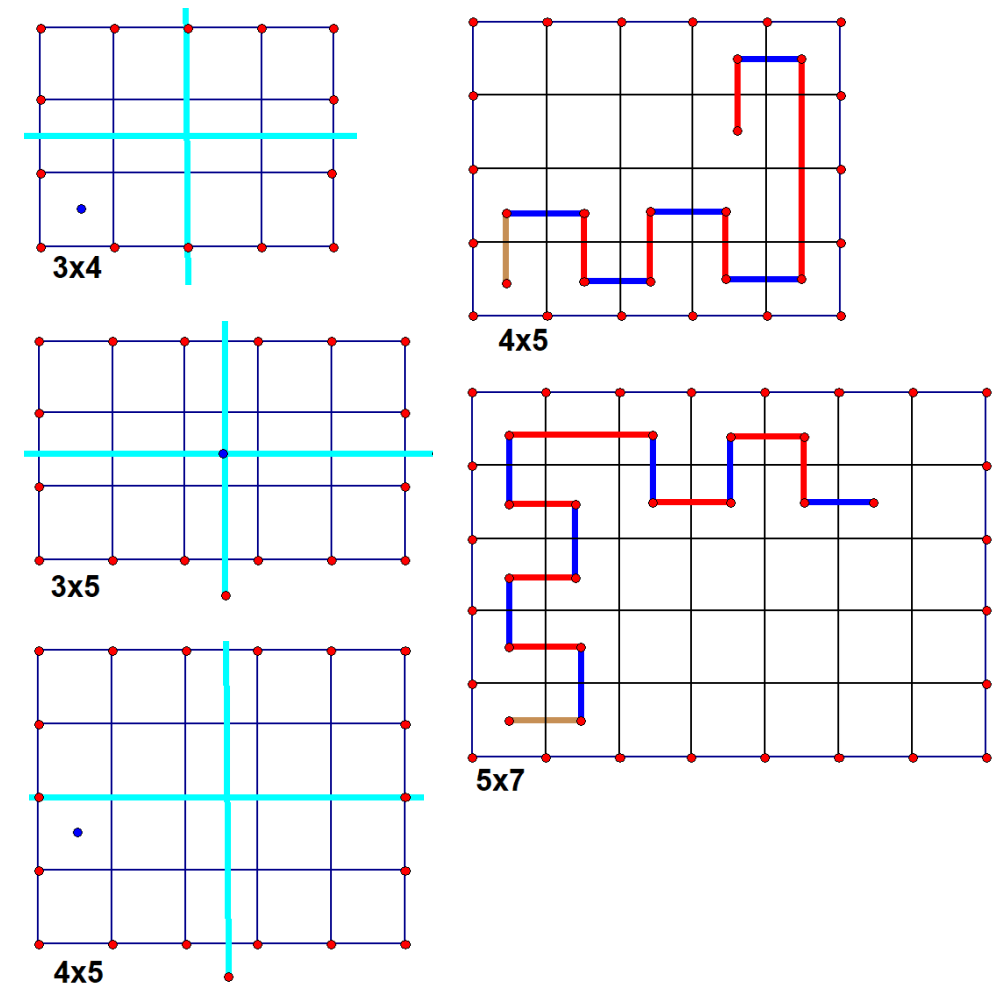
探討何種走法折線段數最少有幾段？最多有幾段？有哪些可能的段數？折線段數是否有規律性？能一般化嗎？

參、研究設備及器材

A列×B行(A ≤ B)小正方形組成的方格紙、GSP繪圖軟體、小畫家、紀錄表

肆、研究過程與方法

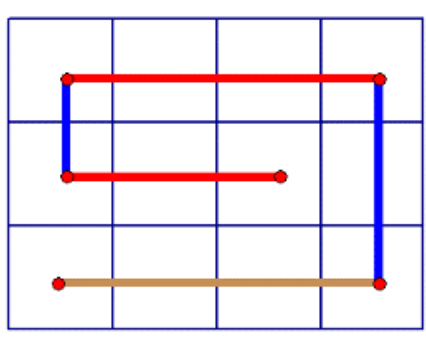
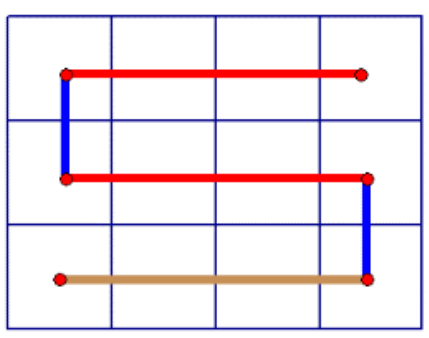
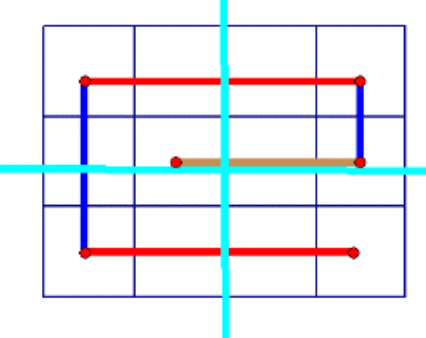
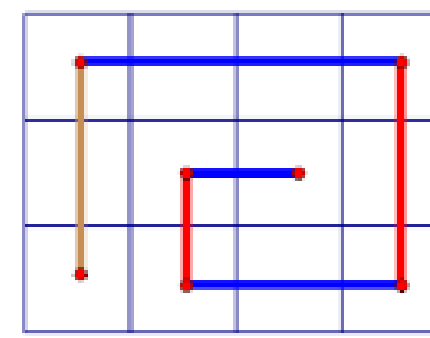
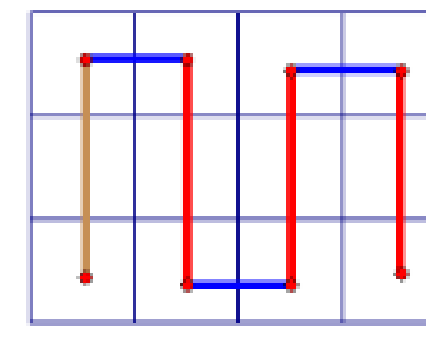
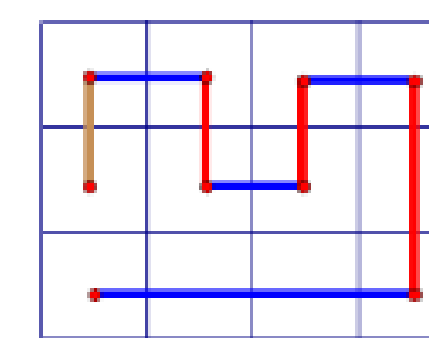
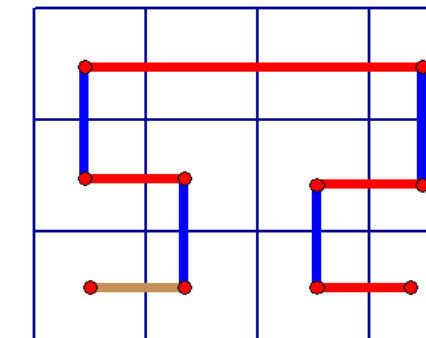
兩條對稱軸將方格紙分成四等分，在左下區進行研究避免重複。折線起點分成在方格紙角落、非角落及對稱軸交點，行進路線有五種(1)先橫列再直行逆時針螺旋型、(2)先直行再橫列順時針螺旋型、(3)先橫列再直行逆時針S型、(4)先直行再橫列順時針S型、(5)混合。尋找最多折線段數，偶數列以S型上下對稱、偶數行則以S型左右對稱完成折線；奇數列×奇數行，先逆時針再順時針S型交替，螺旋狀完成折線。



伍、研究結果

一、折線最少段數的走法及最少段數

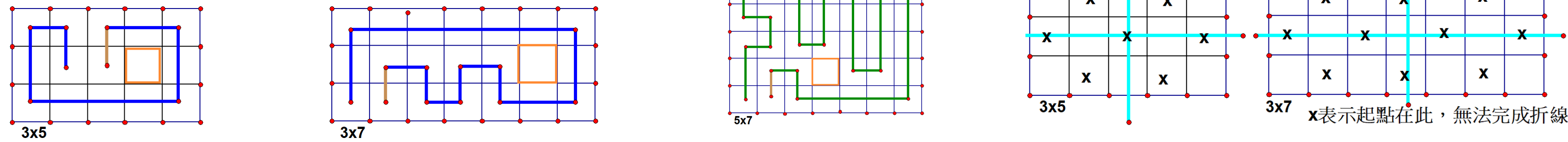
(一) 3列× 4行圖形折線的走法及段數 (起點：咖啡色)：表(1)

行進方式	逆時針螺旋	逆時針 S 型	對稱螺旋	順時針螺旋	順時針 S 型	混合	混合
							
段數	5 段	5 段	5 段	6 段	7 段	8 段	9 段

以逆時針螺旋型、逆時針S型與對稱螺旋的走法，折線段數都會有最少段，共2 × 3 – 1 = 5段。

(二) A列 × B行(3 ≤ A < B)最少段數的走法及段數

1、當A、B均為奇數，折線起點位置的「列數+行數=奇數」時，折線無法通過方格紙中每個小正方形的中心，會餘下一格無法走完。



2、A列 × B行(3 ≤ A < B)方格紙，以逆時針螺旋型與逆時針S型走法，折線都有最少段數共A × 2 – 1段。

逆時針螺旋型走法折線最少段數求法：

3列×4行：橫列3段+(直行4–2)段=橫列3段+[(橫列3+1) –2]段= 列數3 × 2 – 1 = 5段

4列×6行：橫列4段+(直行6–3)段=橫列4段+[(橫列4+2) –3]段= 列數4 × 2 – 1 = 7段

A列×B行：橫列A段+[直行B–(B-A+1)]段=橫列A段+(橫列A–1)=列數A × 2 – 1段

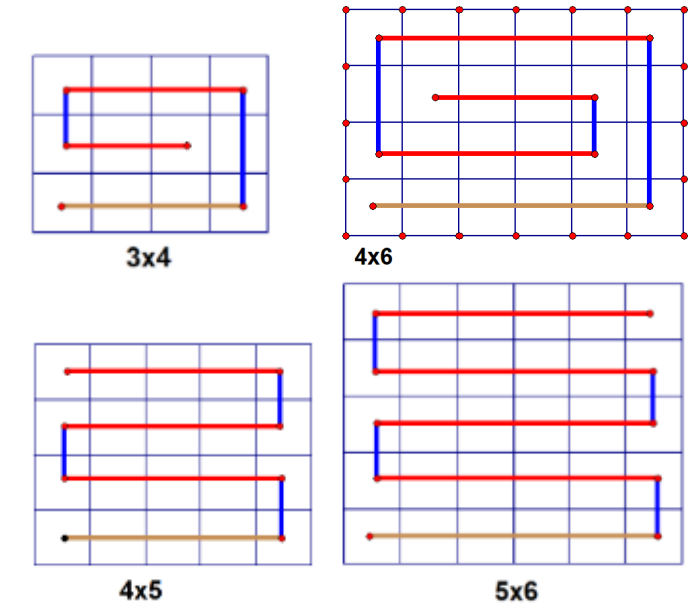
逆時針S型走法折線最少段數求法：

3列×5行：橫列3段+直行(3列–1)段=列數3×2–1=5 段

5列×6行：橫列5段+直行(5列–1)段=列數5×2–1=7 段

A列×B行：橫列A段+直行(A列–1)段=列數A×2–1 段

表(2)：逆時針螺旋型與S型最少折線段數 (列數A = 2於討論中說明)



A × B	A × (A + 1)	A × (A + 2)	A × (A + 3)	A × (A + 4)	A × (A + 5)
A = 3	3 × 2 – 1 = 5	3 × 2 – 1 = 5	3 × 2 – 1 = 5	3 × 2 – 1 = 5	3 × 2 – 1 = 5
A = 4	4 × 2 – 1 = 7	4 × 2 – 1 = 7	4 × 2 – 1 = 7	4 × 2 – 1 = 7	4 × 2 – 1 = 7
A = 5	5 × 2 – 1 = 9	5 × 2 – 1 = 9	5 × 2 – 1 = 9	5 × 2 – 1 = 9	5 × 2 – 1 = 9
A = 6	6 × 2 – 1 = 11	6 × 2 – 1 = 11	6 × 2 – 1 = 11	6 × 2 – 1 = 11	6 × 2 – 1 = 11

二、折線最多段數的走法及最多段數

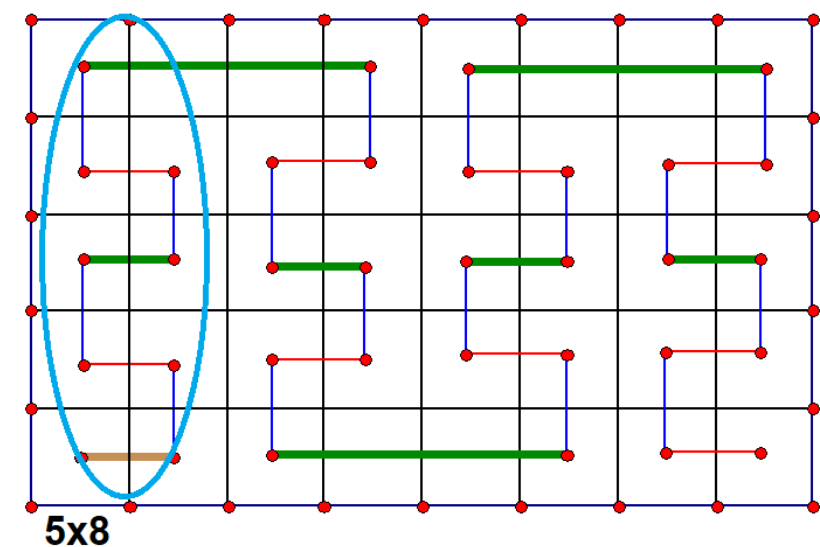
(一)最多折線段數的走法及段數計算

逆時針S型走法共3(列)×2(行)–1=5段，順時針S型有2(列)×3(行)–1=5段。

1、奇數列×偶數行(A為奇數)

A列×B行中，偶數行以兩行一組分成B/2組，每組中有(A-3)/2 + 1個S圖形相連，共用(A-3)/2段綠色線段(短)，相鄰兩組再共用一段綠色線段(長)。折線最多段數：

B/2 × [(A-3)/2 + 1) × 5 – (A-3)/2] – (B/2 – 1) = A × (B – 1) + 1 – (B – A) 段



2、奇數列×奇數行(A為奇數)

A列×B行折線最多段數走法如右圖，分區塊編號(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)...

(A)組順序，以等差數列計算各區塊中段數，直到最後一列的一段。垂直方向

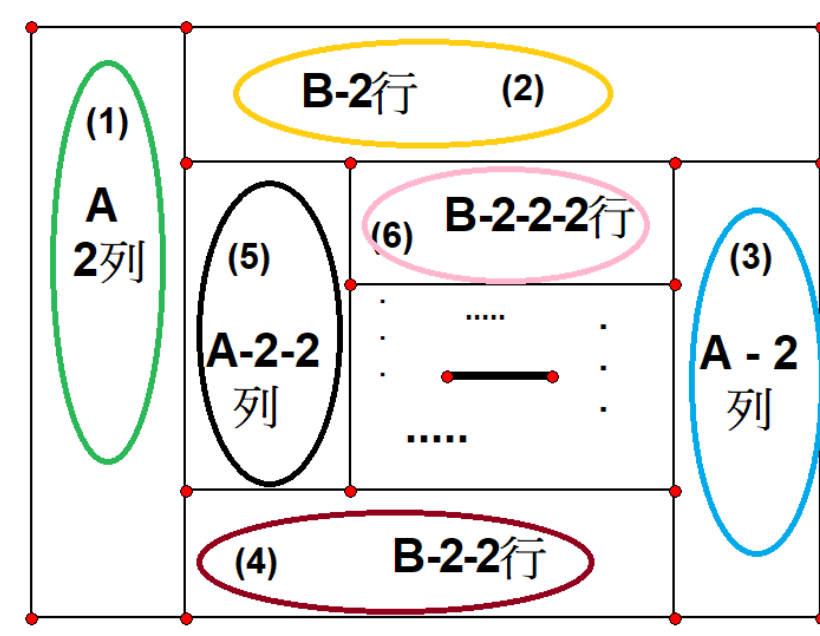
共有(A-1)/2組，水平方向共有(A-1)/2 + 1組，最後一組只有一段：

[(A-3)/2+1)×5–(A-3)/2] + [(B-3)/2+1–1)×5–(B-3)/2–1)]+[(A-3)/2+1–1)×5–(A-3)/2–1)]+[(B-3)/2+1–2) × 5 – (B-3)/2–2)]

+[(A-3)/2+1–2)×5–(A-3)/2–2)] +[(B-3)/2+1–3)×5–(B-3)/2–3)]+[(A-3)/2+1–3)×5–(A-3)/2–3)] + [(B-3)/2+1–4)×5–(B-3)/2–4)]

+⋯+[(A-3)/2+1)–(A-1)/2–1)] ×5–[(A-3)/2–(A-1)/2–1)]+[(B-3)/2+1)–(A-1)/2)] ×5–[(B-3)/2–(A-1)/2)] +1

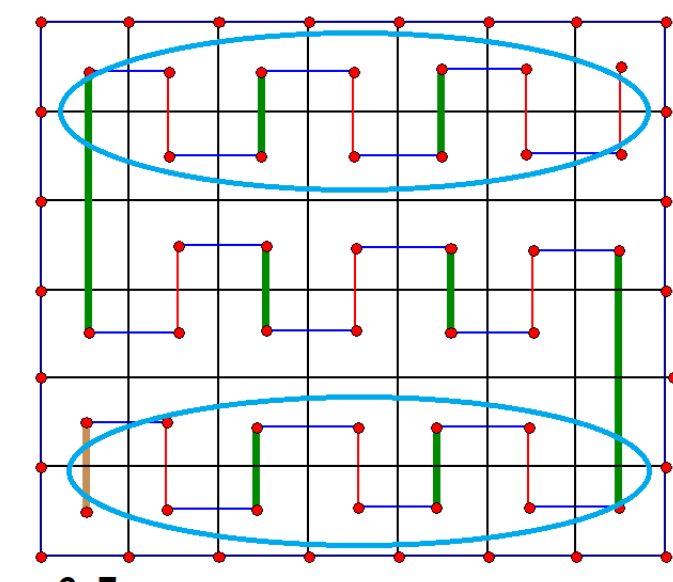
= A^2+A-2 / 2 + (A – 1) × (B – 1) – (A-2)(A+1) / 2 = (A – 1) × (B – 1) + A = A × (B – 1) + 1 – (B – A)



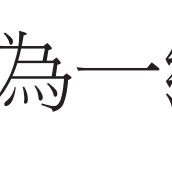
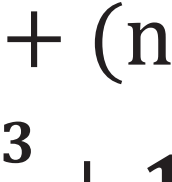
3、偶數列×奇數行(A為偶數)

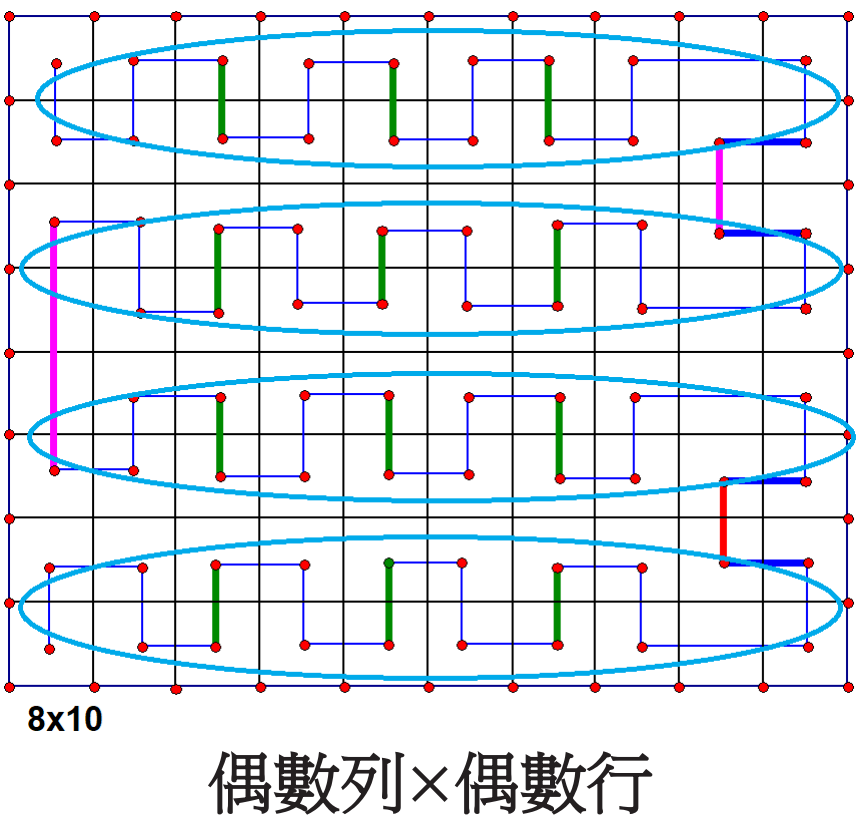
偶數列每兩列一組共可分成A/2組，各組以等差數列：a_n = a₁ + (n – 1) × d計算相鄰兩列中有n個相連的S圖，有n – 1段重複的綠色線段(短)，而相鄰的兩組再共用一段綠色線段(長)。每組最多折線段數的計算如a_n = B行，a₁ = 3行，公差d=2行，即B = 3 + (n – 1) × 2，得 n = (B-3)/2 + 1個S圖相連，有n – 1 = (B-3)/2段綠色共用線段，各組共有A/2 – 1段重複的線段。A列 × B行最多折線段數：

A/2 × [(B-3)/2 + 1) × 5 – (B-3)/2] – (A/2 – 1) = A × (B – 1) + 1 段。



4、偶數列×偶數行(A偶數)

偶數列以兩列為一組，分成 $\frac{A}{2}$ 組。原本 n 個圖相連共有奇數行，故有偶數行時，最右側會佔用4行，以 $a_n - 1 = a_1 + (n - 1) \times d$ 求得重複 $n - 1 = \frac{a_n - 1 - a_1}{2}$ 段綠色線段。8列×10行： $10 - 1 = 3 + (n - 1) \times 2$ ，得 $n = \frac{10 - 1 - 3}{2} + 1 = 4$ ，即第一二列中有4個相連的圖，共用 $n - 1 = 3$ 段綠色線段。即A列×B行折線最多段數： $\frac{A}{2} \times \left[\left(\frac{B - 1 - 3}{2} + 1 \right) \times 5 - \frac{B - 1 - 3}{2} + 1 \right] + 1 = A \times (B - 1) + 1$ 段，+1是每兩列一組多出1段橫藍色線段，+1是4列分成2組多出一段直紅色線段，多的短粉色線段與重複計算的長粉色線段互相抵銷。

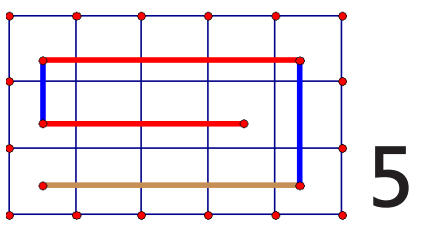
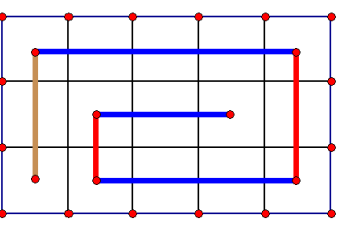
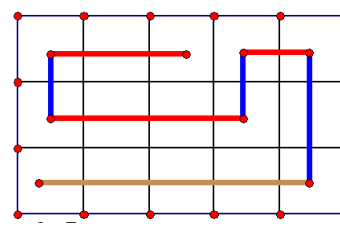
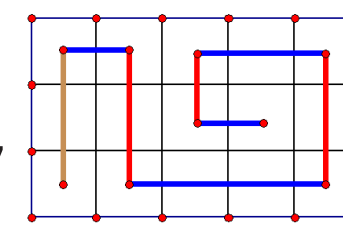
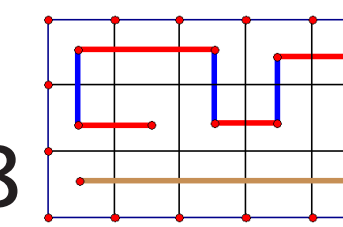
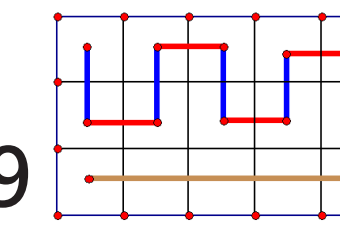
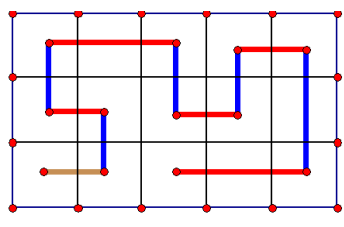
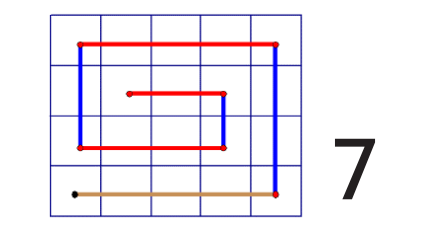
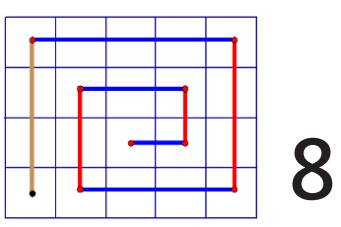
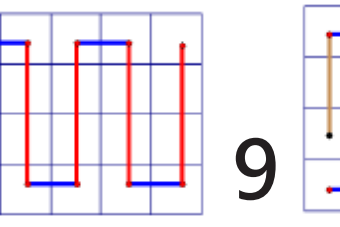
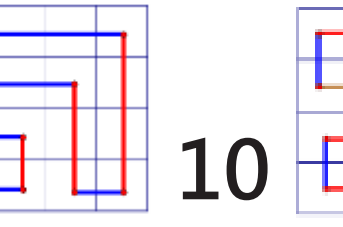
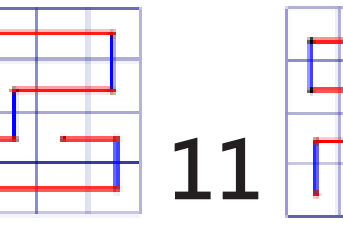
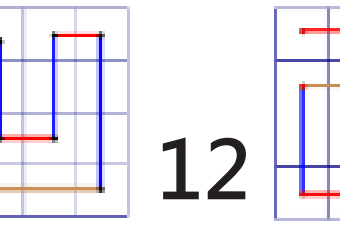
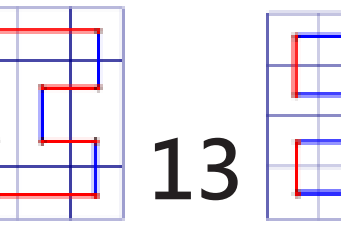
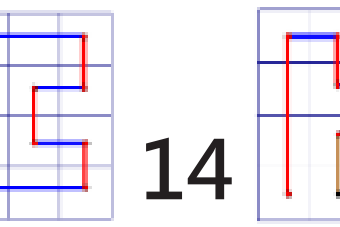
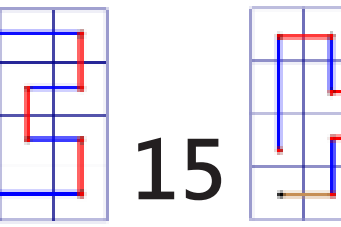
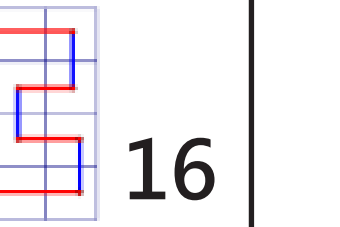
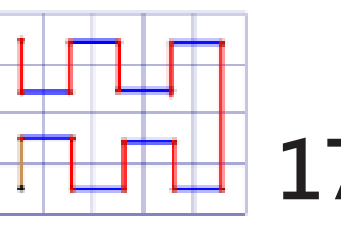
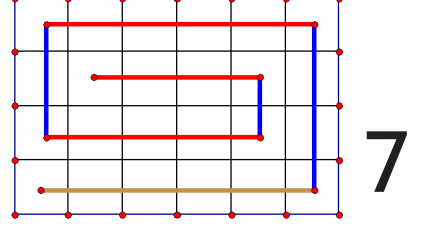
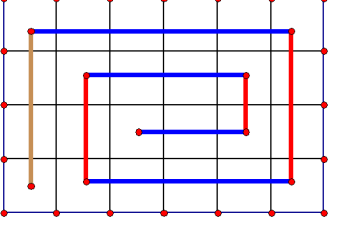
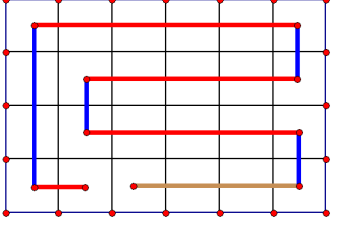
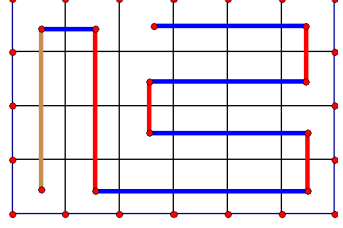
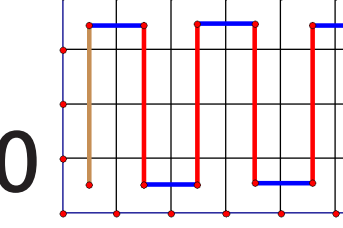
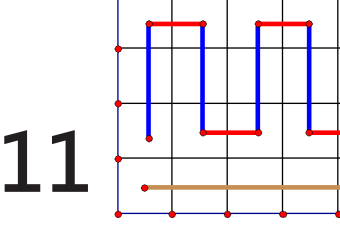
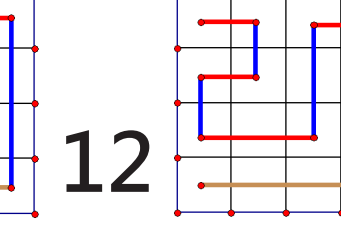
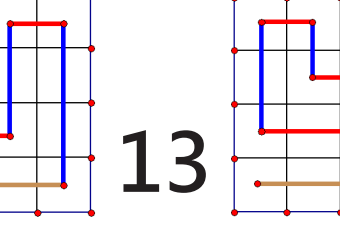
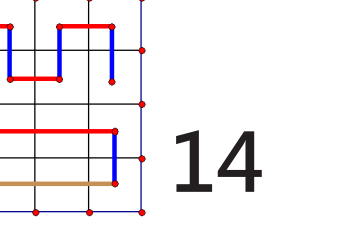
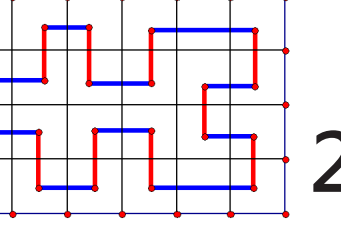
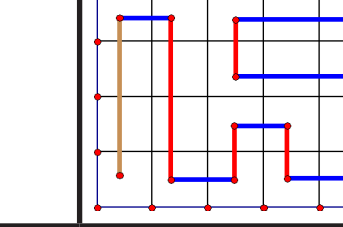
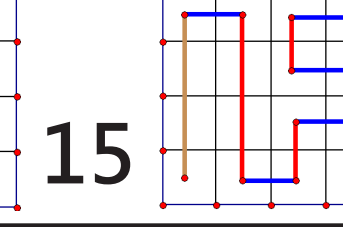
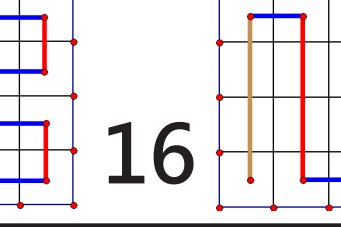
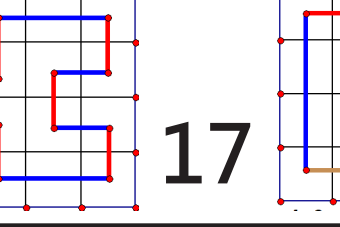
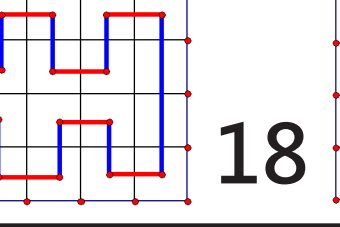
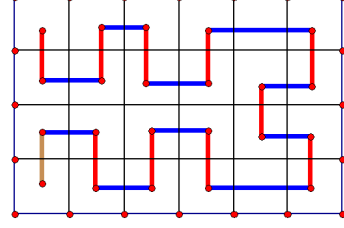
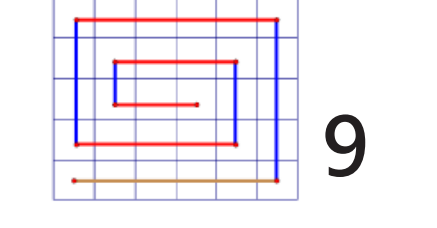
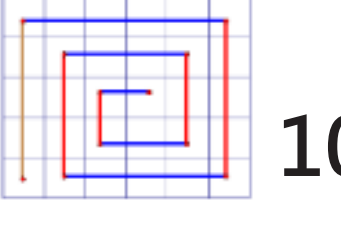
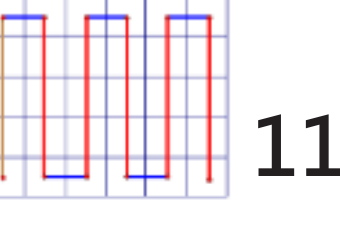
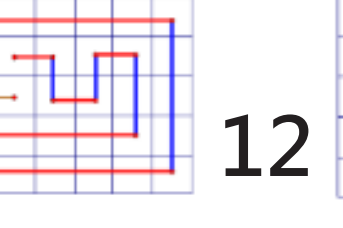
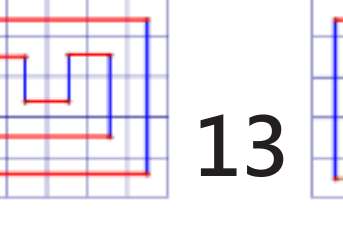
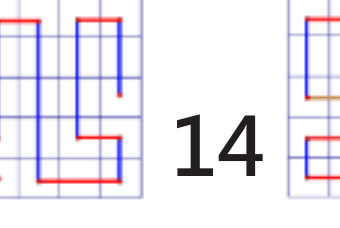
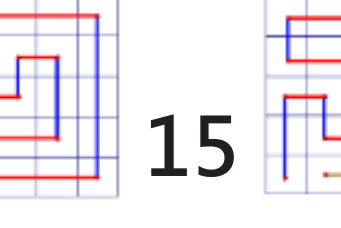
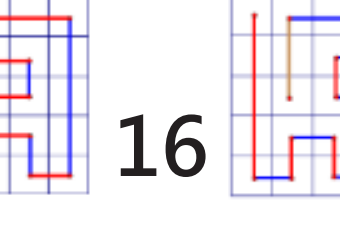
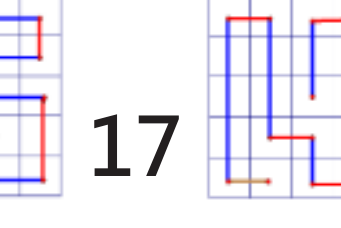
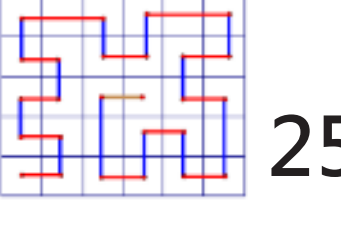
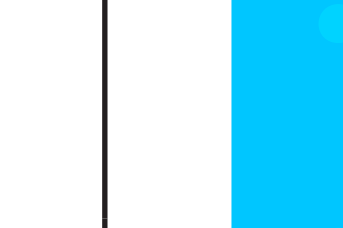
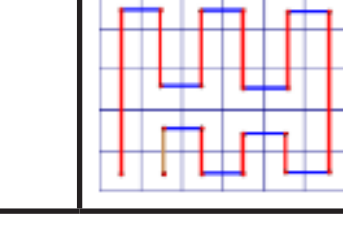
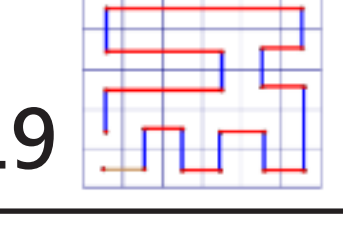
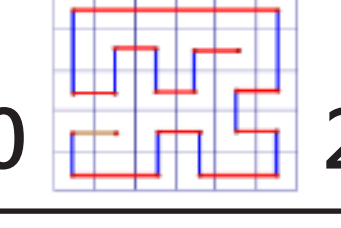
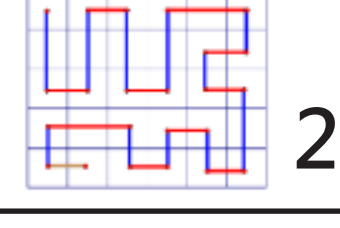
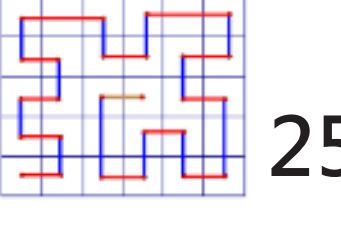


(二) A列×B行(A<B)折線的最多段數 表(3)

A × B	A × (A + 1)	A × (A + 2)	A × (A + 3)	A × (A + 4)	A × (A + 5)
A = 3	$3 \times (4 - 1) + 1 - (4 - 3) = 9$	$3 \times (5 - 1) + 1 - (5 - 3) = 11$	$3 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 3) = 13$	$3 \times (7 - 1) + 1 - (7 - 3) = 15$	$3 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 3) = 17$
A = 5	$5 \times (6 - 1) + 1 - (6 - 5) = 25$	$5 \times (7 - 1) + 1 - (7 - 5) = 29$	$5 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 5) = 33$	$5 \times (9 - 1) + 1 - (9 - 5) = 37$	$5 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 5) = 41$
A = 7	$7 \times (8 - 1) + 1 - (8 - 7) = 49$	$7 \times (9 - 1) + 1 - (9 - 7) = 55$	$7 \times (10 - 1) + 1 - (10 - 7) = 61$	$7 \times (11 - 1) + 1 - (11 - 7) = 67$	$7 \times (12 - 1) + 1 - (12 - 7) = 73$
A × B	A × (A + 1)	A × (A + 2)	A × (A + 3)	A × (A + 4)	A × (A + 5)
A = 4	$4 \times (5 - 1) + 1 = 17$	$4 \times (6 - 1) + 1 = 21$	$4 \times (7 - 1) + 1 = 25$	$4 \times (8 - 1) + 1 = 29$	$4 \times (9 - 1) + 1 = 33$
A = 6	$6 \times (7 - 1) + 1 = 37$	$6 \times (8 - 1) + 1 = 43$	$6 \times (9 - 1) + 1 = 49$	$6 \times (10 - 1) + 1 = 55$	$6 \times (11 - 1) + 1 = 61$
A = 8	$8 \times (9 - 1) + 1 = 65$	$8 \times (10 - 1) + 1 = 73$	$8 \times (11 - 1) + 1 = 81$	$8 \times (12 - 1) + 1 = 89$	$8 \times (13 - 1) + 1 = 97$

折線的最多段數：列數A為奇數，折線最多段數為 $A \times (B - 1) + 1 - (B - A)$ 段；
列數A為偶數，折線的最多段數為 $A \times (B - 1) + 1$ 段。

三、可能的折線段數：表(4) (只列出部份圖形，3列x4行請參考表(1))

A×B	最少段	其 他 段 數	最多段
3×5	 5	 6  7  8  9  10	 11
4×5	 7	 8  9  10  11  12  13  14  15  16	 17
4×6	 7	 8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24	 21
5×6	 9	 10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25	 25

由上表所得圖形可知，折線最少段數 $2A - 1 \leq$ 折線可能的段數 $\leq$ 折線最多段數。

四、折線段數是否具有規律性

- 1、從表(2)可知，當列數A是公差d的等差數列時，折線最少段數會成公差2d的等差數列。
- 2、B的公差d=1：奇數列A = 3、A = 5、A = 7時，折線最多段數各為公差 $3 - 1 = 2$ 、 $5 - 1 = 4$ 、 $7 - 1 = 6$ 的等差數列；
偶數列A = 4、A = 6、A = 8時，折線最多段數各為公差4、公差6、公差8的等差數列；
B的公差d=2：奇數列A = 3、A = 5、A = 7時，折線最多段數各為公差 $(3 - 1) \times 2 = 4$ 、 $(5 - 1) \times 2 = 8$ 、 $(7 - 1) \times 2 = 12$
偶數列A = 4、A = 6、A = 8時，折線最多段數各為公差 $4 \times 2 = 8$ 、 $6 \times 2 = 12$ 、 $8 \times 2 = 16$ 的等差數列；
由表(3)及下表(5)可推知：A為偶數，當A值相同且B公差d，最多折線段數為公差 $A \times d$ 的等差數列。
A為奇數，當A值相同且B公差d，最多折線段數為公差 $(A - 1) \times d$ 的等差數列。

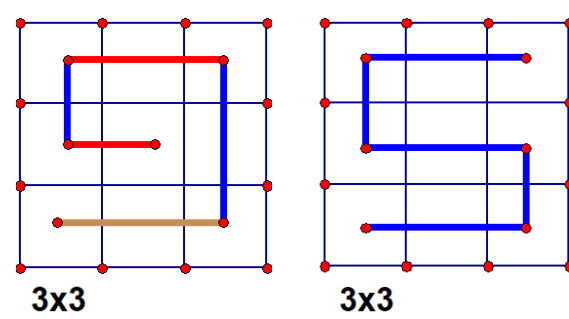
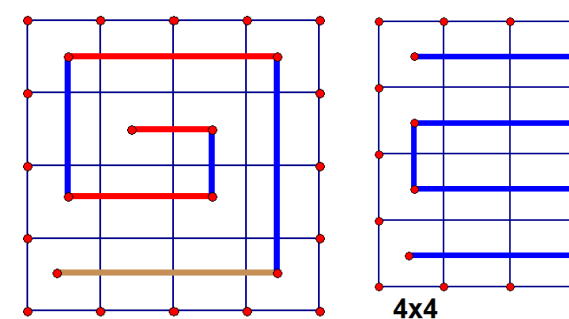
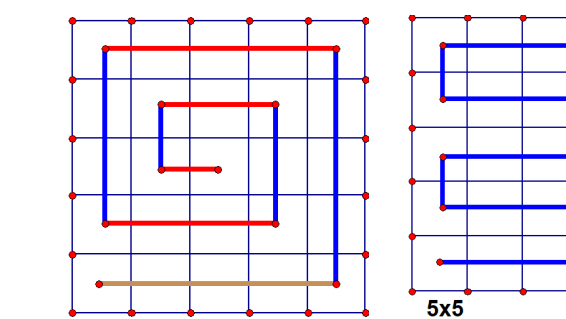
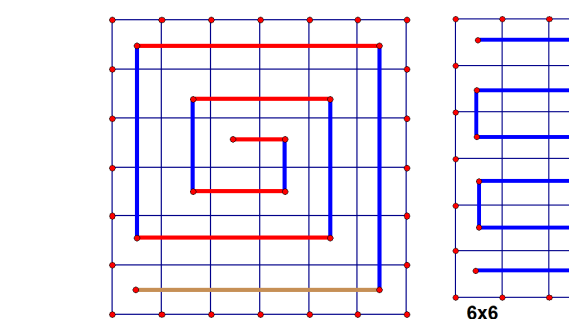
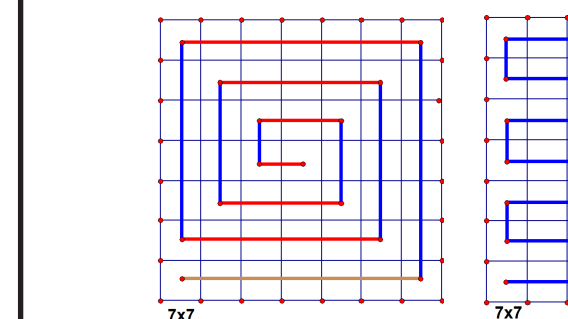
表(5)： 折線最多段數數列的規律性

奇數列	不同 B 值折線的最多段數						B 的公差		
							1	2	d
	A+1	A+2	A+3	A+4	A+5	A+6	段數的公差	段數的公差	最多段數的公差
A=3	9	11	13	15	17	19	3-1=2	(3-1)×2=4	(A-1)× d
A=5	25	29	33	37	41	45	5-1=4	(5-1)×2=8	
A=7	49	55	61	67	73	77	7-1=6	(7-1)×2=12	
偶數列	不同 B 值折線的最多段數						B 的公差		
							1	2	d
	A+1	A+2	A+3	A+4	A+5	A+6	段數的公差	段數的公差	最多段數的公差
A=4	17	21	25	29	33	37	4	4×2=8	A× d
A=6	37	43	49	55	61	67	6	6×2=12	
A=8	65	73	81	89	97	105	8	8×2=16	

陸、討論

一、A列×A行(B = A ≥ 3)折線的最少段數、最多段數以及可能的段數，與A列×B行(B > A)的結果是否相同

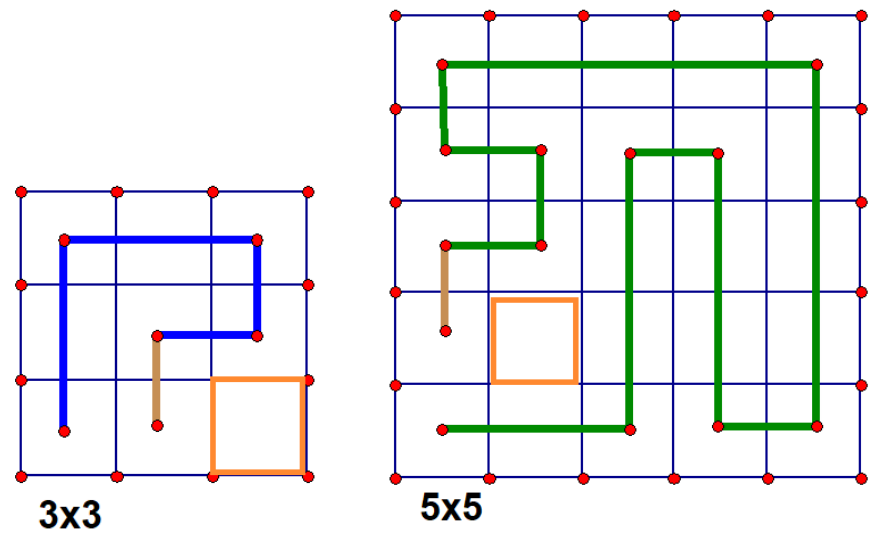
(一)、折線最少段數的走法及最少段數：表(6)

走 法	3 列 × 3 行	4 列 × 4 行	5 列 × 5 行	6 列 × 6 行	7 列 × 7 行
逆時針螺旋及逆時針 S 型					
最少段數	2×3-1=5	2×4-1=7	2×5-1=9	2×6-1=11	2×7-1=13

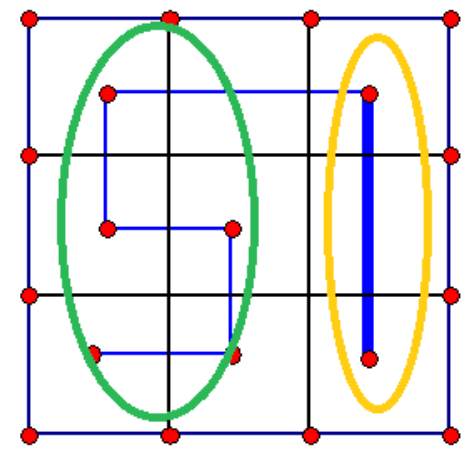
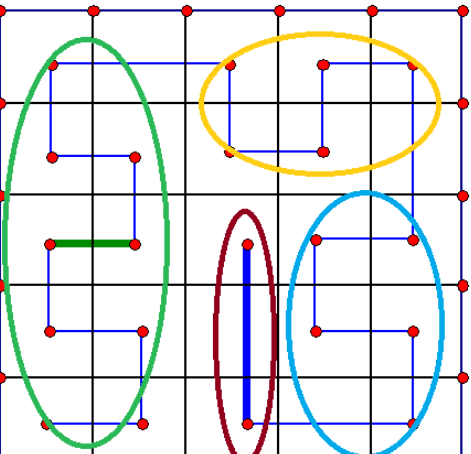
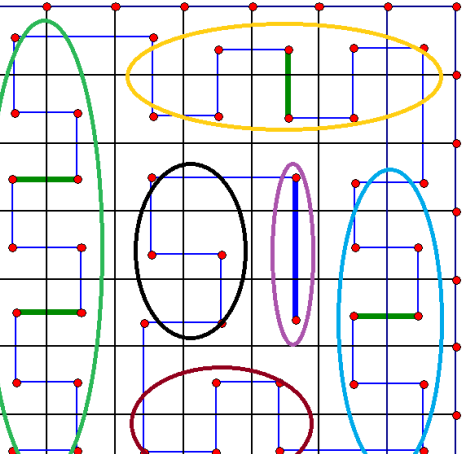
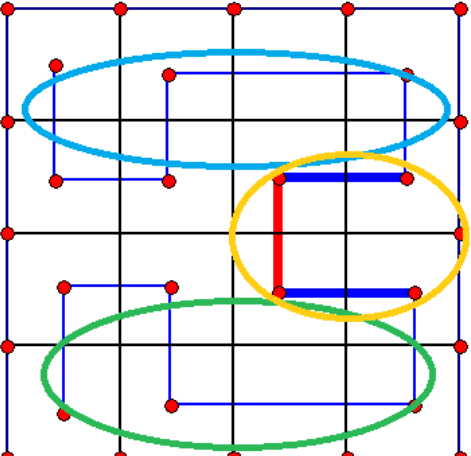
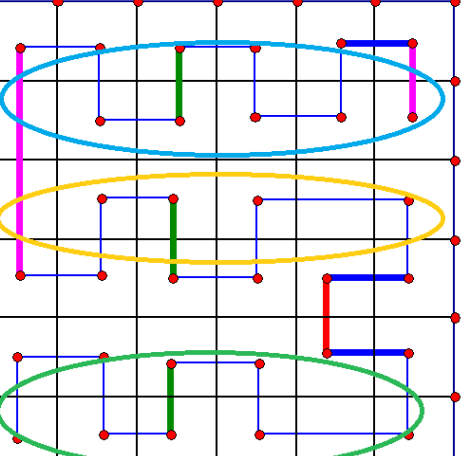
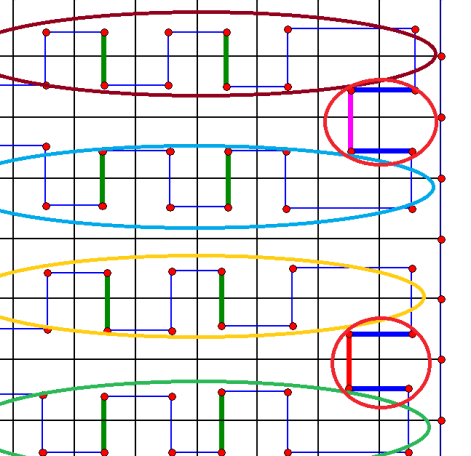
- 1、當A為奇數時，與A列×B行(B > A)的情況相同，折線起點位置的「列數+行數=奇數」時，折線無法通過方格紙中每個小正方形的中心，會餘下一格。
- 2、A列×A行(B = A)的正方形方格紙，折線最少段數的走法及折線最少段數都與A列×B行(B > A)的情況相同，以逆時針螺旋及逆時針S型走法，會有最少折線段數：列數 $A \times 2 - 1$ 段。

(二)、A×A折線最多段數的走法及段數：

對於A×A與A×B的折線最多段數走法、段數求法及規律性的比較，如表(7)所示：



表(7)：A×A走法與最多段數計算

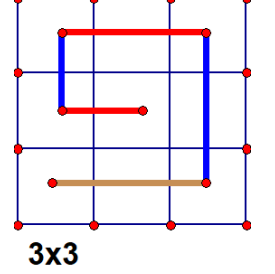
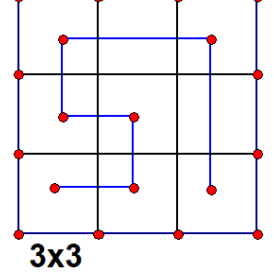
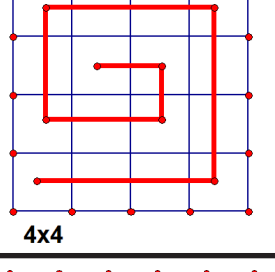
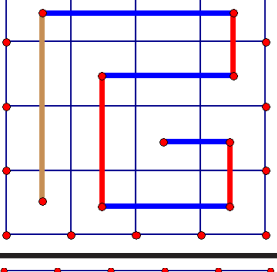
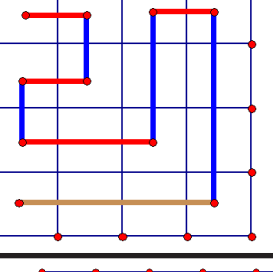
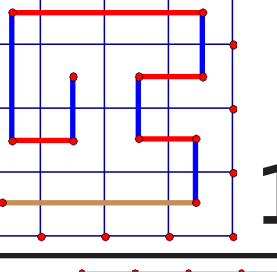
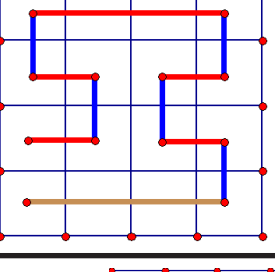
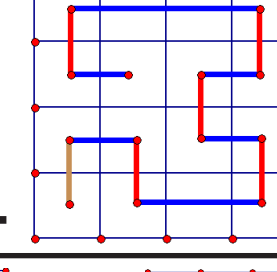
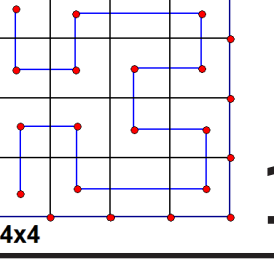
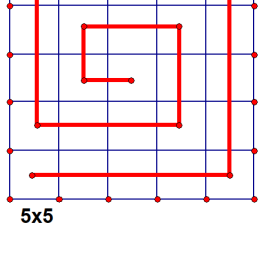
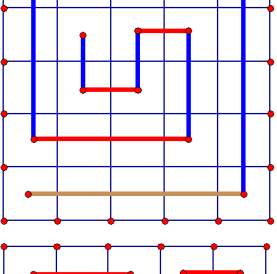
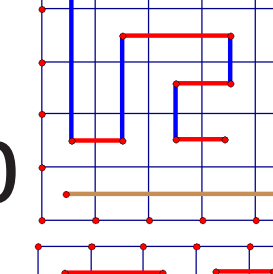
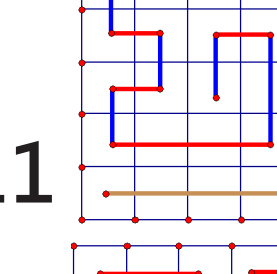
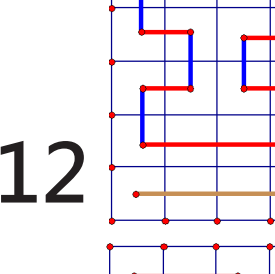
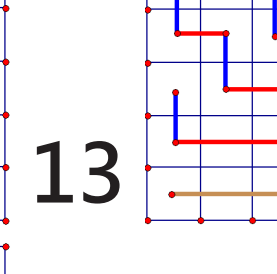
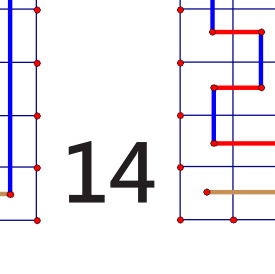
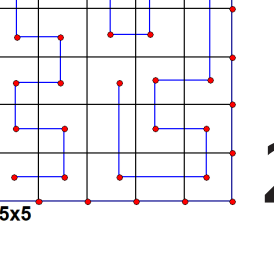
奇數列	A=3		A=5		A=7	
走法與算法	 3×3 分成 3-1=2 組 3×(3-1)=6 段		 5×5 分成 5-1=4 組 5×(5-1)=20 段		 7×7 分成 7-1=6 組 7×(7-1)=42 段	
偶數列	A=4		A=6		A=8	
走法與算法	 4×4 分成 4÷2=2 組 4×(4-1)+1=13 段		 6×6 分成 6÷2=3 組 6×(6-1)+1=31 段		 8×8 分成 8÷2=4 組 8×(8-1)+1=57 段	

A 列×A 行共分成 **A - 1** 組：依區塊編號分成(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)⋯**(A-1)**組順序，計算各區塊中段數，直到最後一行沒有出現 S 型圖形，折線只剩一段，將所有個區塊的段數加總。**垂直方向共有 $\frac{A-1}{2}$ 組，水平方向共有 $\frac{A-1}{2}$ 組，最後一組只有一段：**

$$[(\frac{A-3}{2}+1) \times 5 - \frac{A-3}{2}] + [(\frac{A-3}{2}+1-1) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-1)] + [(\frac{A-3}{2}+1-1) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-1)] + [(\frac{A-3}{2}+1-2) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-2)] + [(\frac{A-3}{2}+1-2) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-2)]$$
$$+ [(\frac{A-3}{2}+1-3) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-3)] + [(\frac{A-3}{2}+1-3) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-3)] + [(\frac{A-3}{2}+1-4) \times 5 - (\frac{A-3}{2}-4)] + \cdots + [(\frac{A-3}{2}+1) - (\frac{A-1}{2}-1)] \times 5 - [\frac{A-3}{2} - (\frac{A-1}{2}-1)]$$
$$+ [(\frac{A-3}{2}+1) - (\frac{A-1}{2}-1)] \times 5 - [\frac{A-3}{2} - (\frac{A-1}{2}-1)] \quad \textbf{+1}$$
$$= (A-1) \times (A-3) - \frac{(A-1)(A-3)}{2} + 5 \times \frac{A-1}{2} + (A-3)^2 - \frac{1}{2}(A-3)(A-1) + 5 \times \frac{A-3}{2} + 1 = \textbf{A}^2 - \textbf{A} = \textbf{A} \times (\textbf{A} - \textbf{1}) = \textbf{A} \times (\textbf{B} - \textbf{1})$$

A 列 × A 行折線有最多段數的走法與A 列 × B 行(A < B)相同；最多段數的算法，若A為偶數，也是A × (B - 1) + 1 段；但A為奇數，最多段數則為A × (B - 1) 段，與(A < B)時不同。

(三)、所有可能的折線段數：表(8)

A×B	最少段數	其他段數						最多段數
3×3	 3x3 5							 3x3 6
4×4	 4x4 7	 8	 9	 10	 11	 12	 4x4 13	
5×5	 5x5 9	 10	 11	 12	 13	 14	 15	 5x5 20

從表(8)可知B = A與B > A時一樣，折線最少段數2A - 1 ≤ 折線可能的段數≤ 折線最多段數。

(四)A 列 × A 行(A = B) 與A 列 × B 行(A < B)折線最多段數的比較表(9)：

列數A	A × A	A × (A + 1)	A × (A + 2)	A × (A + 3)	A × (A + 4)	A × (A + 5)	A × (A + 6)	折線段數列
2	3	5	7	9	11	13	15	公差2
3	6	9	11	13	15	17	19	不是等差
4	13	17	21	25	29	33	37	公差4
5	20	25	29	33	37	41	45	不是等差
6	31	37	43	49	55	61	67	公差6

若A為偶數，A × B(A ≤ B) 的最多折線段數為公差 A × d的等差數列；
若A為奇數，A × A與A × B(A < B) 的最多折線段數之間不成等差數列。

二、列數A = 2，折線最少段數A × 2 - 1段，最多段數A × (B - 1) + 1 段，折線最多段數之間與其他偶數列一樣，為公差A×d的等差數列，請參閱表(9)中A=2。

但**可能的段數則只包括最少段數、最多段數及兩者間的偶數段數。**

表(10)：列數A = 2可能的折線段數

A × B	最少段數	其 他	最多段數
2 × 2	2 × 2 - 1 = 3		2 × (2 - 1) + 1 = 3
2 × 3	2 × 2 - 1 = 3	4	2 × (3 - 1) + 1 = 5
2 × 4	2 × 2 - 1 = 3	4、6	2 × (4 - 1) + 1 = 7
2 × 5	2 × 2 - 1 = 3	4、6、8	2 × (5 - 1) + 1 = 9
2 × 6	2 × 2 - 1 = 3	4、6、8、10	2 × (6 - 1) + 1 = 11

三、室內地面清潔、商品大量生產，機器人是好幫手。透過偵測掃描工作區域及數學運算程式，最少轉折段數路徑能減少工作時間。太陽能板清潔增加發電效率、清洗大樓外牆、農業科技化，提昇無人機設計，提供工作支援。

柒、結論

- A 列 × B 行(A ≤ B)方格紙，畫一條折線通過每一個小正方形中心各一次，有如下的結果：
- 一、當A、B均為奇數，起點位置的「列數+行數=奇數」時，折線無法通過每一個小正方形；起點在角落，先由橫列再走直行的**螺旋型**或**S型**行進，折線的段數會最少，共有**2A - 1**段。
 - 二、(一) A為奇數且起點在角落，B為偶數，則以兩直行一組逆時針S型左右對稱完成折線；B為奇數，則以逆時針S型與兩橫列一組順時針S型交替完成折線，折線段數最多：若**(1) B > A**，共**A × (B - 1) + 1 - (B - A) 段**；**(2) B = A**，共**A × (B - 1) 段**；
(二) A為偶數，起點在角落，則以兩橫列一組的順時針S型路線完成折線通過所有小正方形中心，**折線段數最多，共有A × (B - 1) + 1 段。**
 - 三、A ≥ 3，最少段數2A - 1 ≤ 折線可能的段數≤ 最多段數；當列數**A = 2**，可能的段數只包括**最少段數、最多段數以及兩者之間的連續偶數。**
 - 四、(一)當列數A值為公差d，最少折線段數為公差2d的等差數列。
(二)當A為偶數，列數A相同且行數B為公差d的正整數時，最多折線段數為公差**A × d**的等差數列。
(三)當A為奇數，列數A相同且行數B為公差d的正整數時，若A < B，最多折線段數為公差**(A - 1) × d**的等差數列；當**B = A**(即A × A)時，**與A < B的最多折線段數之間不會成等差數列。**

捌、參考文獻及資料

- 一、游森棚 (2023)。蜿蜒曲折。科學研習月刊，第62卷第3期。
- 二、康軒出版社 國中數學第四冊課本