中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080415

貓鼠終極戰

學校名稱：　國立新竹科學園區實驗高級中等學校
(國小部)

作者：	指導老師：
小六　黃啓軒 小五　顏詠時	胡哲瑋

關鍵詞：　八皇后棋、貓捉老鼠、scratch

摘要

在這次的研究中，我們在書上看到了一個問題，是一道有關於在棋盤上，貓和老鼠不能看到對方的問題。我們先研究這個題目中棋盤大小、貓和老鼠數量的規律，我們從 1×1 一路研究到了 8×8，並且試著找出在不同棋盤大小的遊戲中，要有幾隻貓才能讓老鼠的平均數量接近 2 隻，之後我們將題目設計成對戰的遊戲。

我們首先設計了一個棋盤大小是 6×6 的桌上型遊戲，並且修改過幾次規則。後來學習了程式設計，把遊戲改到電腦裡遊玩，我們使用 scratch 寫程式來製作遊戲，並且把原本 6×6 的棋盤擴大改成了 8×8 的棋盤。我們在試玩的過程中，又再次把一些不公平的遊戲規則修改了一下，最後我們和同學一起試玩遊戲，製作出了屬於我們的「貓鼠終極戰」。

壹、 研究動機

我們在《2000 個邏輯考驗推理遊戲》這一本書所介紹的數學遊戲之中，選擇了其中我們特別感興趣的《貓鼠遊戲》當作科展主題進行研究。這是一個在棋盤上放置貓和老鼠，但貓和老鼠之間不能看到對方的一個問題，在玩了之後我們覺得，如果改編一下這個問題，增加一些遊戲規則，或許它能夠變成一個前所未見的雙人對戰棋類遊戲。之後，我們從家裡找出圍棋棋盤和圍棋，代替貓和老鼠，開始進行我們的研究。

在研究雙人遊戲之前，我們想要先研究 1×1 到 8×8 大小的棋盤下可以放幾隻貓跟老鼠。為了推測更大的棋盤，因此我們也想要找出不同的棋盤大小可以放的貓咪和老鼠數量，所以我們固定老鼠的數量，想找出貓咪數量的規律。我們也在學校的資訊課學習了 scratch 這款軟體，於是我們想到如果可以利用程式，應該能夠更好的協助我們完成這款遊戲。

貳、 研究目的

一、　研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量。

二、　找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數。

三、　找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律。

四、　發展成雙人遊戲。

五、　利用 scratch 將雙人對戰遊戲數位化。

參、研究設備及器材

圍棋棋子（貓跟老鼠）、棋盤（地圖）、紙膠帶（隔出不同大小地圖）、木材、木塊（當作障礙物）、電腦（進行文書作業、統計、寫 scratch 程式）。

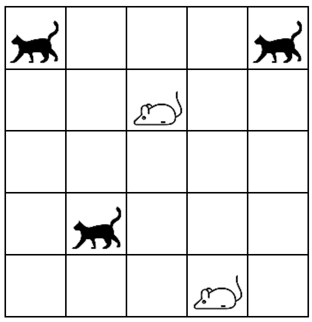
肆、研究過程與方法

一、確定遊戲規則

（一）書中原始問題：

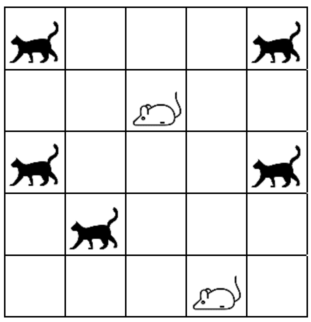
書中原始版本的問題是在一個 5×5 的棋盤上放了 3 隻貓和 2 隻老鼠，讓每隻貓都看不見老鼠，同樣老鼠也都看不見貓，在遊戲的規則裡，貓和老鼠都只能看見橫向、縱向和斜向直線上的物體。書中要求讀者在不能改變現有貓和老鼠位置的情況下，再放上 1 隻貓和 2 隻老鼠，詢問有沒有可能做到。

書中的圖案如下（圖片取自 https://www.flaticon.com/）：

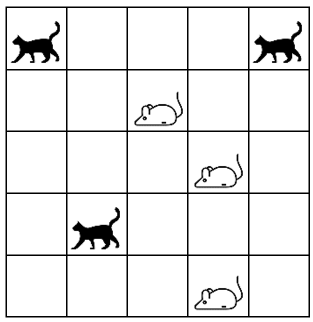


經過我們的實際擺放的研究後，發現只能多加 2 隻貓或多加 1 隻老鼠，不可能同時增加 1 隻貓和 2 隻老鼠，圖案如下：

增加 2 隻貓的情況：



增加 1 隻老鼠的情況：



因此，原書中要求的「放上 1 隻貓和 2 隻老鼠」是不可能做到的。

（二）與八皇后棋的比較：

在思考答案的過程中，我們發現這個問題跟八皇后棋有些類似，在這兩個遊戲，角色的視線都是一整行，而且彼此之間都不能互相看見。在中華民國第四十八屆中小學科學展覽會的參賽作品，黃品翰等(2008)的研究中提到：數學家高斯曾猜測此問題共有 96 個解，但在經過旋轉或反射後，會剩下 12 個答案。

跟八皇后棋不同的地方是，貓鼠遊戲將原本只有皇后一種角色分成了兩種角色：貓和老鼠，貓和貓、老鼠和老鼠之間是可以互相看見，但皇后跟皇后之間不行，我們覺得這樣這個問題會有不同的變化，或許可以改造成雙人遊戲。

（三）改造遊戲：

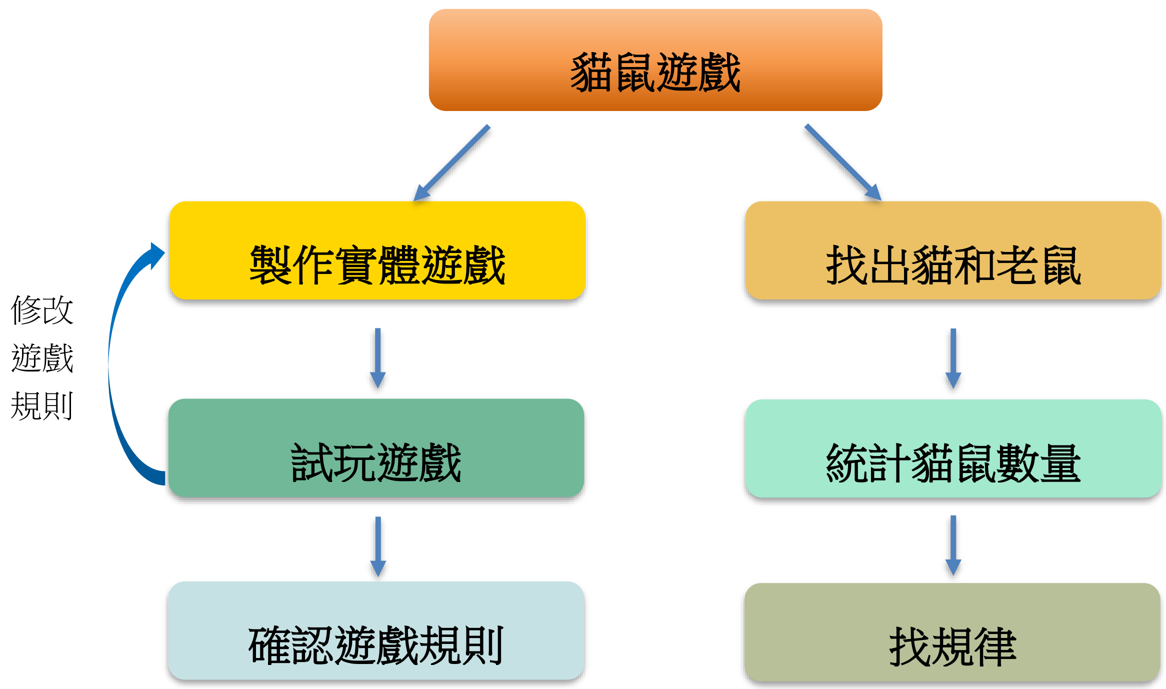
我們將黑色圍棋子當作貓，白色圍棋子當作老鼠，將書中規則改造如下：

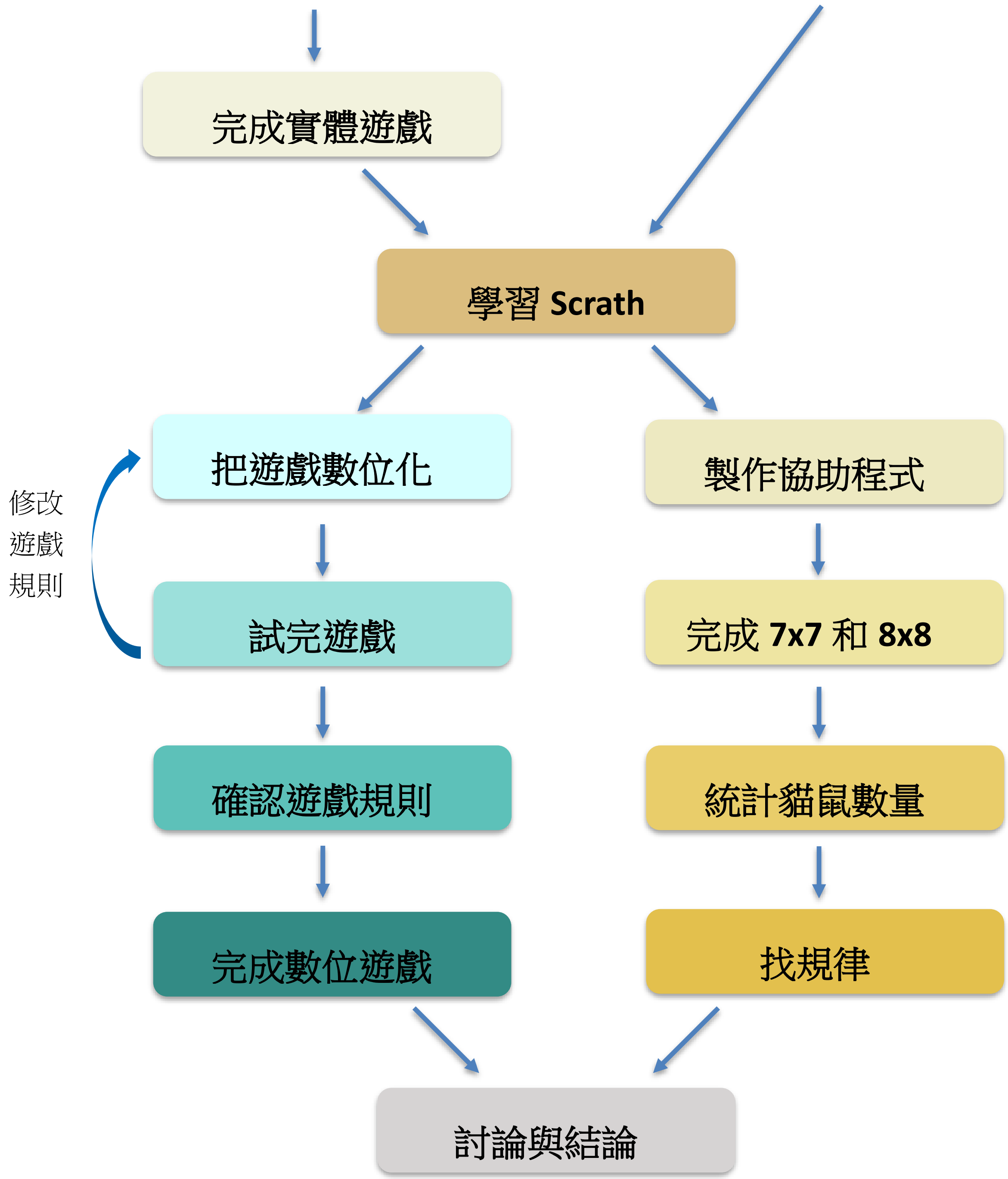
1. 先放上黑子當作貓。
2. 將每隻貓橫向、縱向和斜向直線上的格子當作「被封鎖」。
3. 將剩下沒有被封鎖的位置，放上白子，也就是老鼠可以放的位置。

我們會利用更改後的規則來進行研究、設計遊戲。

二、研究過程

我們分成兩個方向來進行研究，如下圖：





三、研究方法

如上圖，我們主要是採用實驗研究的方式，分成兩個方向進行研究：

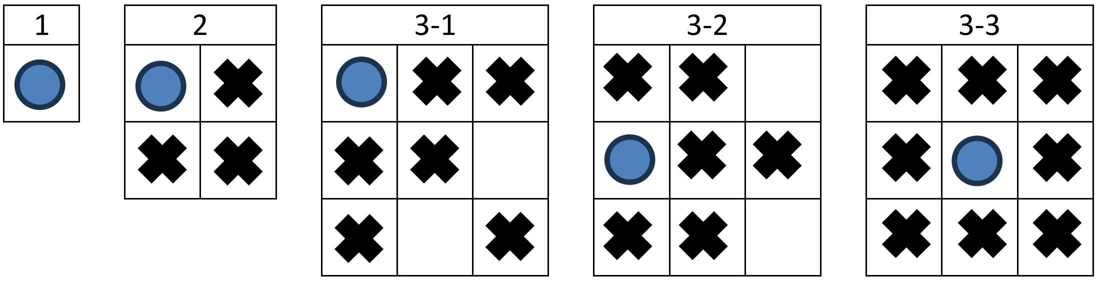
第一個方向是從 1×1 的棋盤大小，擴展到 8×8 的棋盤大小，我們的研究方法是先研究貓在棋盤中封鎖格子的規律之後，再到正式的棋盤上，擺出貓的位置，再找出老鼠可以擺的地方，找出所有的可能性之後，進行統整與歸納，最後再找出規律。在這之中我們會在適當的時機使用 scratch 設計程式，用來協助我們的研究，希望透過實際操作能夠產生我們的研究成果。

第二個方向是設計雙人對戰遊戲，我們決定一開始用實體 6×6 的木頭棋盤開始創建遊戲，經過不斷的試玩、調整，希望能找出公平的遊戲規則。之後我們再用 scratch 來設計數位遊戲，因為數位遊戲的不同，所以我們可以把棋盤擴大成8×8，同時也要調整遊戲規則。在每次調整規則之後，我們會輪流當貓和老鼠進行試玩，觀察貓和老鼠雙方哪一邊容易獲勝，再重複修改規則。除了我們自己的試玩之外，也會實際找同學來試玩，增加測試數量，讓我們可以根據測試結果來修改遊戲規則，希望能設計出公平的遊戲，最後發展出前所未有的遊戲。

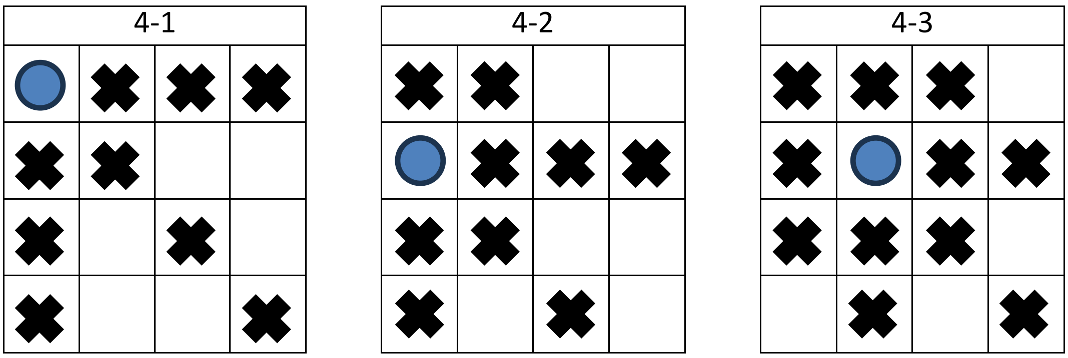
伍、研究結果

一、 研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量：

為了研究這個問題，我們首先先在各種大小的棋盤上各放一隻貓，找出因為放了貓，就不能放老鼠的格子，我們稱為「刪掉的格子」的數量。（用藍色的圓圈代表貓，黑色 X 代表貓刪掉的格子）

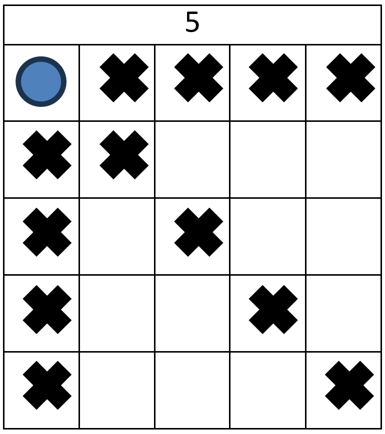


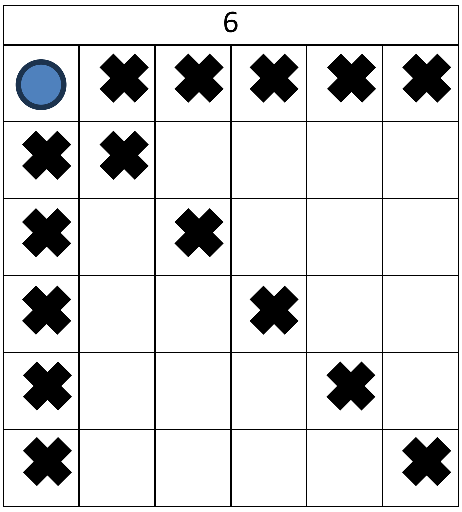
根據上圖 3-1～3-3，我們發現不管貓放在棋盤的角（3-1）或棋盤的邊上（3-2），刪掉的格子都是一樣多，都是 6 個 X。如果放在棋盤的內部（3-3），則會刪掉比較多的格子，共有 8 個 X。

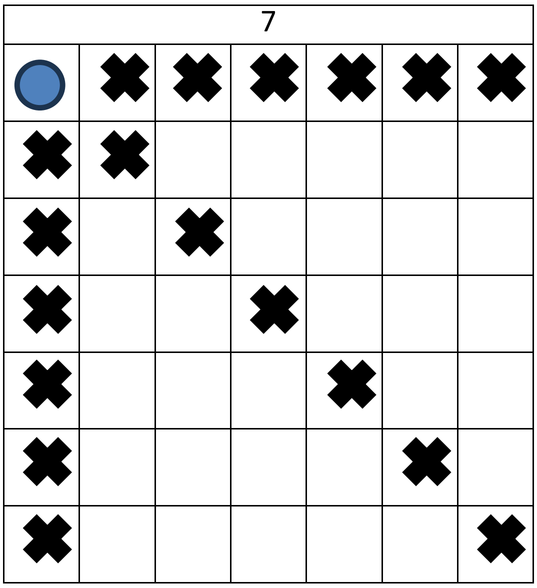


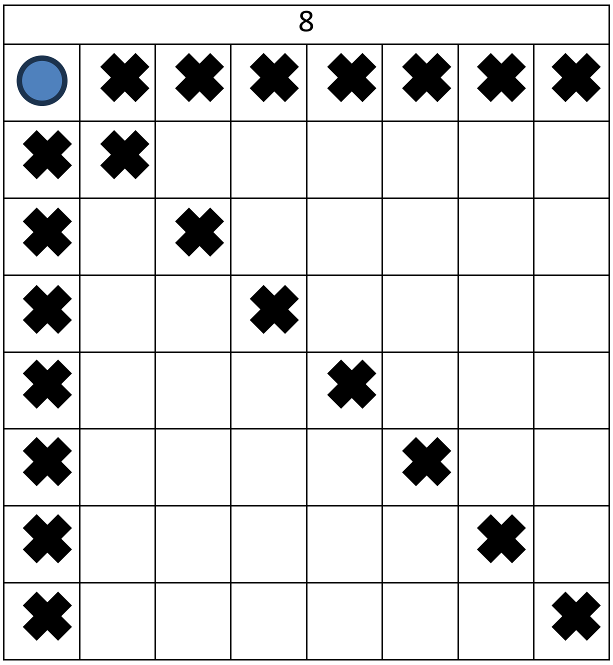
在上圖 4-1～4-3，也是一樣的狀況，貓放在角或邊時，都刪掉 9 個格子，在內部則刪掉 11 個格子，我們決定先研究把貓放角或邊上的情形。

我們接著將5 × 5 到 8 × 8 的棋盤也放完：









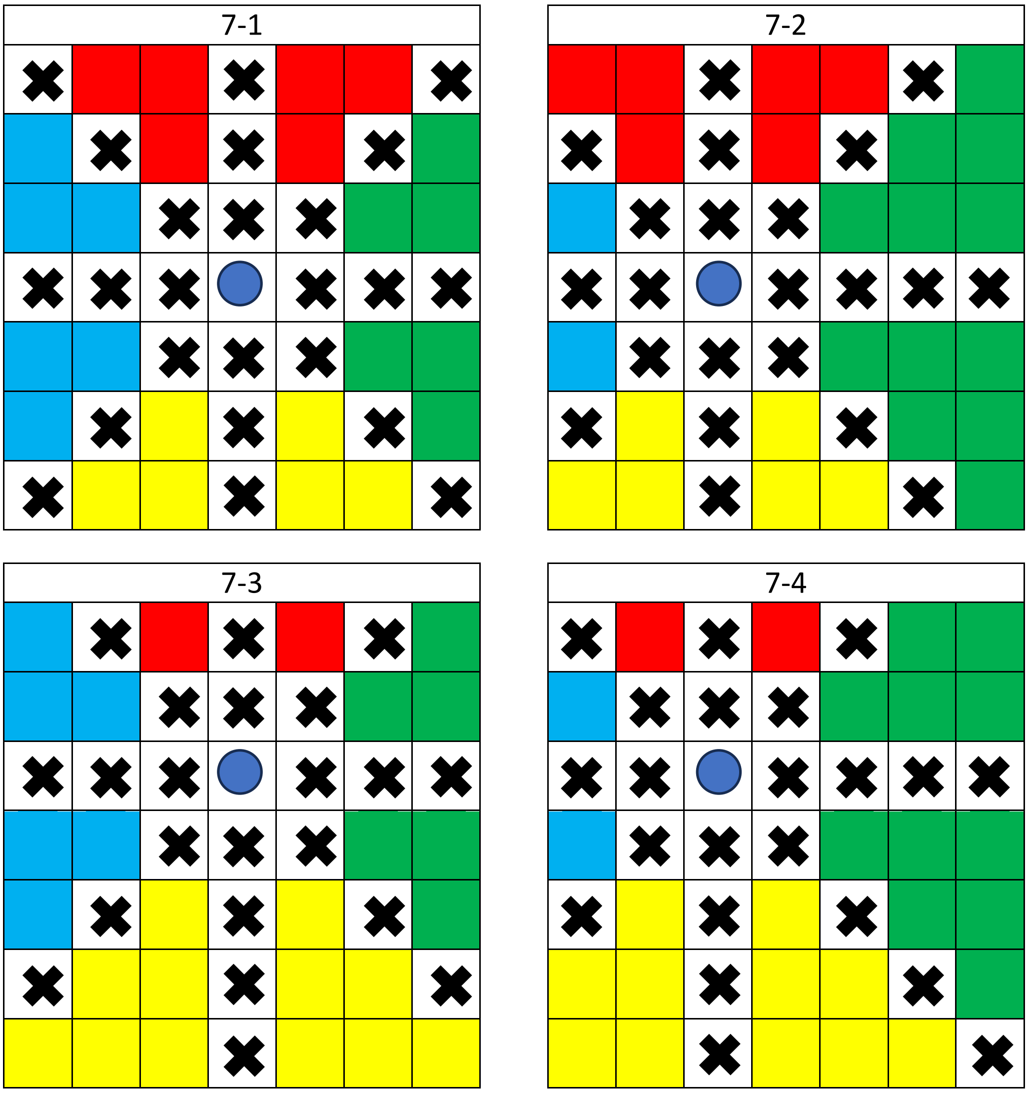
根據上圖，我們可以列出以下表格：

棋盤	1 × 1	2 × 2	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6	7 × 7	8 × 8
總格子	1	4	9	16	25	36	49	64
刪掉的格子	1	4	7	10	13	16	19	22
剩下的格子	0	0	2	6	12	20	30	42

我們發現，棋盤大小每多一格，刪掉的格子數都會+3。剩下的格子數則會是以「（1 + 2 + 3 + ⋯ + n）× 2」的方式呈現，n 是邊長−2。這是我們第一部分的發現。

接下來第二個部分，我們嘗試找出把貓放在其他位置可以刪掉幾格，我們從前面的圖 3-3、4-3 知道放在中間會刪掉比較多格，所以我們決定從正中間開始，研究不同位置的貓能夠刪去幾個方格，結果如下圖：（以7×7為例）

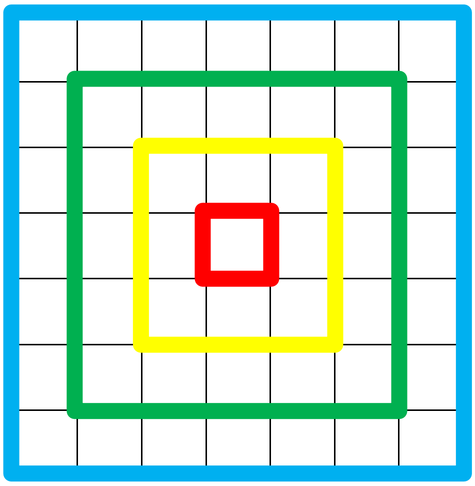
我們將棋盤分成四個部分，紅色是上部、綠色是右部、黃色是下部、藍色是左部、黑色 X 代表貓刪掉的格子。



從圖 7-1 到圖 7-2 是將貓往左邊移動一格，我們發現，藍色的格子少了 4 格，但是綠色的格子增加 6 格，最後反而多了 2 格。從圖 7-1 到 7-3 是將貓往上移動一格，紅色少了 4 格，黃色多了 6 格，也是多 2 格。但是從圖 7-3 到 7-4 將貓往左移動一格，藍色及黃色共少了 5 格，但綠色也同時多了 5 格，總格子數不多也不少。

我們覺得這樣的現象十分特別，7-1 到 7-2 和 7-3 到 7-4 都是往左移，為什麼有時候會多 2 格，有時候不多也不少呢？

在將每個格子都放過貓之後我們發現，會有這樣的結果不是貓往哪裡移動的問題，而是貓的位置在棋盤上第幾圈的影響，我們利用右方棋盤做說明。我們將棋盤最內圈的框塗上紅色、接著向外分別塗上黃、綠、藍色。我們發現：



貓如果放在紅色框內，會刪掉 25 格。

貓如果放在黃色框內，會刪掉 23 格。

貓如果放在綠色框內，會刪掉 21 格。

貓如果放在藍色框內，會刪掉 19 格。

另外在邊長為偶數的棋盤也有類似的結果，我們將棋盤依奇偶性分別列表如下：

棋盤	1×1	3×3		5×5			7×7			
總格子	1	9		25			49			
貓位置	內圈	外圈	內圈	外圈	二圈	內圈	外圈	二圈	三圈	內圈
刪掉的格子	1	7	9	13	15	17	19	21	23	25
剩下的格子	0	2	0	12	10	8	30	28	26	24

棋盤	2×2	4×4		6×6			8×8			
總格子	4	16		36			64			
貓位置	內圈	外圈	內圈	外圈	二圈	內圈	外圈	二圈	三圈	內圈
刪掉的格子	4	10	12	16	18	20	22	24	26	28
剩下的格子	0	6	4	20	18	16	42	40	38	36

從上面的表格，我們看到了以下兩種規律：

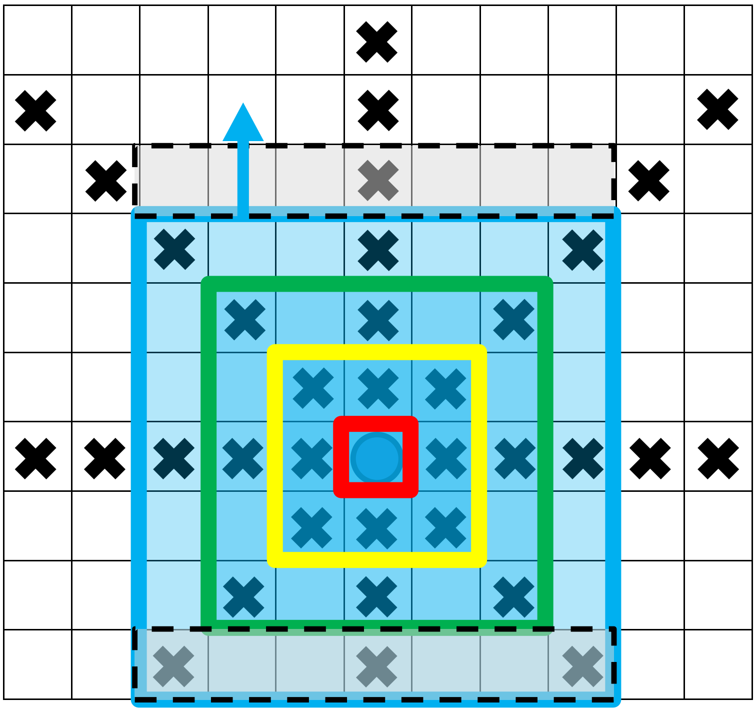
（一）同樣的棋盤大小內，「刪掉的格子數」從內圈到外圈每差一圈都會−2格，剩下的格子數會+2格。

（二）奇數棋盤「剩下的格子數」會相差8、16……偶數棋盤「剩下的格子數」會相差4格、12格、20格……。

我們很好奇會有這樣規律的原因，於是我們接著開始討論為什麼會有這些規律。

我們將我們的發現說明如下，以 7×7 的棋盤為例：

首先，我們先將棋盤向外延伸，超過原本的 7×7 大小，並用四種顏色的框代表各圈（藍色框框代表外圈、綠色框框是二圈、黃色框框是三圈、紅色框框是內圈）：

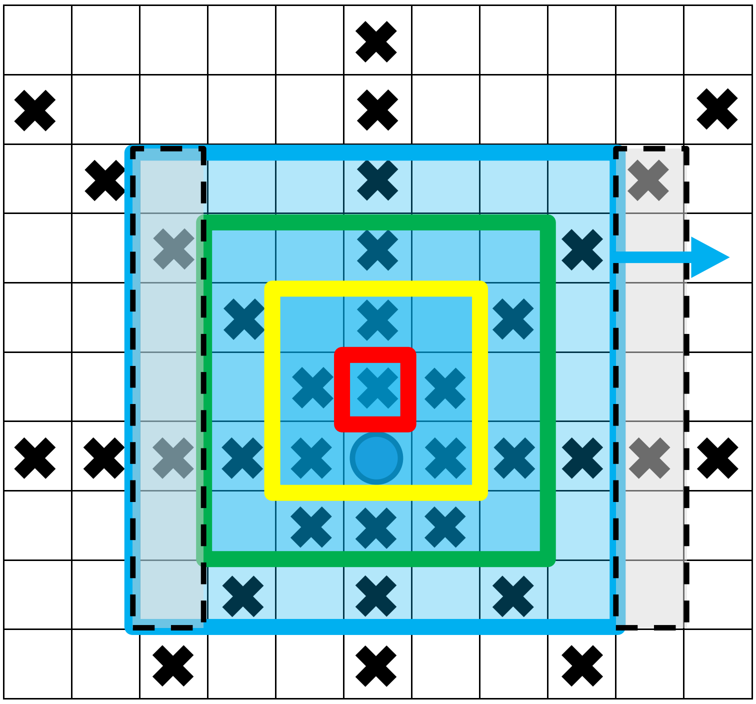


在左圖中我們可以看見，在原本 7×7 棋盤的最外圈的框框不論上、下、左、右，都有三個 X，這代表我們不管往哪個方向移動棋盤，都會減少 3 個刪掉的格子；同時，在最外圈框框外圍會多 1 個 X（灰色區域），代表會增加一個刪掉的格子。

所以經過$-3+1$之後，整體刪掉的格子數會減少 2。

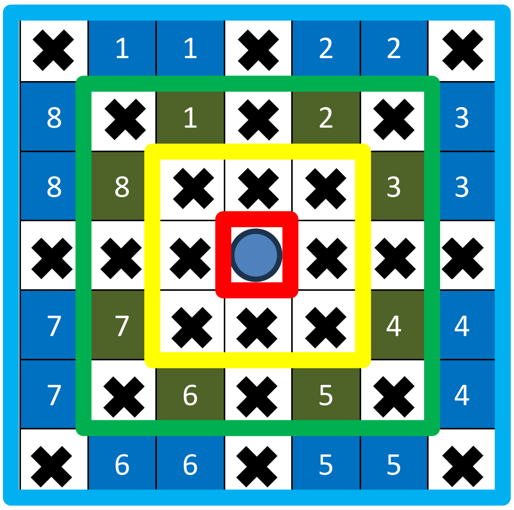
在上圖移動棋盤後，貓的位子跨圈了，是從內圈跨到三圈，刪掉的格子數會減少 2，跟我們之前的發現相符合。

右圖則是已經向上移動後，再向右移動棋盤，這個時候，貓沒有跨圈，都是在第三圈。這時不論是左、右的灰色區域，都是兩個 X，代表整體被刪掉的格子數不會增加也不會減少。



至此，我們證明了「同樣的棋盤大小內，『刪掉的格子數』從內圈到外圈每差一圈都會減 2 格，剩下的格子數會加 2 格。」的原因。

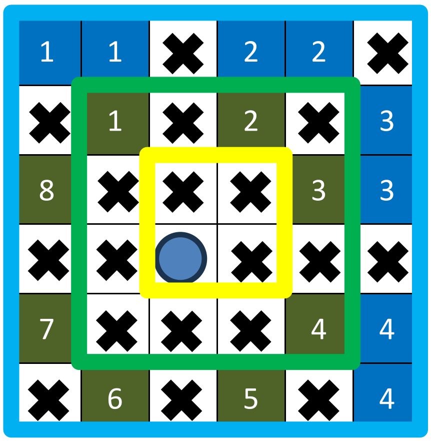
接下來我們討論為什麼「奇數棋盤『剩下的格子數』會相差8、16⋯⋯」，我們先將所有奇數棋盤疊在一起（如下圖，我們用藍色框代表 7×7 棋盤、綠色框代表 5×5 棋盤、黃色框代表 3×3 棋盤、紅色框代表 1×1 棋盤）。



我們先把棋盤分為 8 組（如左圖的數字，標示 1 為一組、2 為一組⋯⋯），可以看出從 3×3 的棋盤到 5×5 的棋盤多了 8 格，也就是 1×8 個格子（墨綠色的地方）， 5×5 到 7×7 的時候多了 16 格，也就是 2×8 個格子，所以我們可以推論出在奇數棋盤剩下的格子數會相差 1×8 、 2×8 ⋯ $n\times8$，也就是我們發現的 8、16⋯⋯

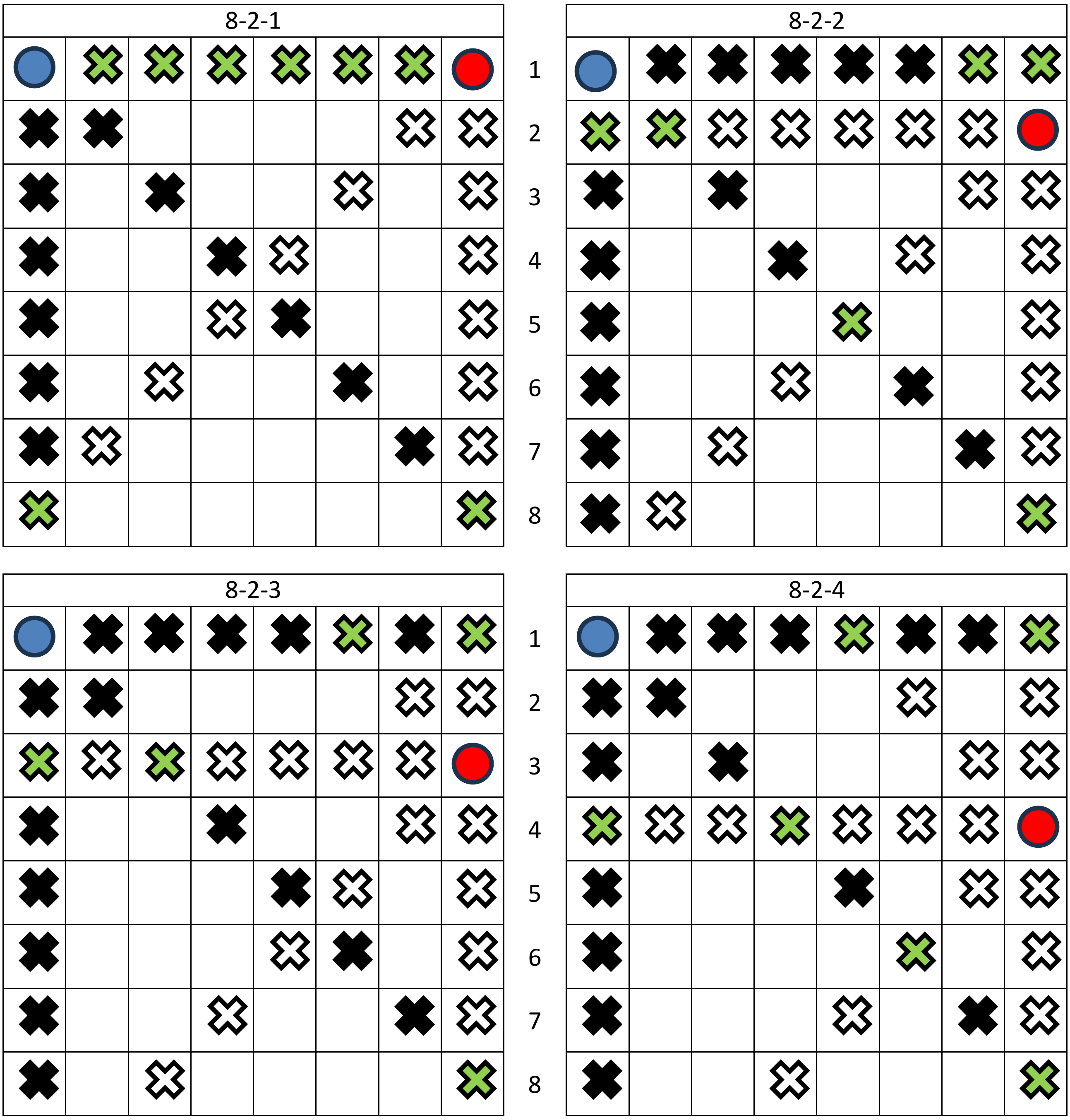
至於偶數棋盤「剩下的格子數」為什麼會相差4、12、20⋯⋯？，我們將偶數棋盤疊在一起（如下圖，我們用藍色框代表 6×6 棋盤、綠色框代表 4×4 棋盤、黃色框代表 2×2 棋盤。）

我們也將棋盤分為 8 組，可以看出從 2×2 的棋盤到 4×4 的棋盤多了 4 格，也就是 1×4 個格子（墨綠色的 1~4）， 4×4 到 6×6 的時候多了 12 格，也就是 2×4 個格子（藍色的 1~4），再加上 1×4 個格子（墨綠色的 5~8）所以我們可以推論出偶數棋盤剩下的格子數會相差 1×4 、$2\times4+1\times4$ 、$3\times4+2\times4\cdots$ $n\times4+(n-1)\times4$，也就是我們發現的 4、12、20⋯⋯



到這裡，我們將前兩個部分的發現整理如下：在第一部分我們發現，當棋盤的大小固定時，不論把一隻貓放在角落或者是邊上，刪掉的格子數都一樣。在第二部分的研究時，我們把棋盤分成好幾圈之後，我們更進一步的發現，貓只要在同一圈，刪掉的格子數都是一樣的，這部分說明了我們第一部分的發現其實是因為貓在同一圈所導致的，與貓在角落或在邊緣上無關。另外，貓放在最外圈刪掉的格子數最少。

接下來，我們試著研究兩隻貓的情形，為了讓遊戲雙方公平，不要讓老鼠完全沒有地方可以放。我們決定將貓都放在最外圈。首先，是把第二隻貓放在對邊的情形（以 8×8 棋盤為例，我們用藍色圓形代表貓 1，紅色圓形代表貓 2，黑色 X 代表貓 1 刪掉的格子，白色 X 代表貓 2 刪掉的格子，綠色 X 代表兩隻貓都刪掉的格子）：



根據上圖我們發現第二隻貓擺放的位置不同，會刪掉不同數量的格子。如果貓放在偶數格子（如 8-2-2、8-2-4），兩隻貓會重疊 6 個格子，所以會刪掉 38 個格子。貓放在奇數格子（如 8-2-3），兩隻貓重疊 5 個格子，所以刪掉了 39 個格子。至於角落格子時（8-2-1）因為重疊的格子最多，最後只會刪掉 34 個格子。

我們將上述情形做成下列表格：

第二貓位置	1	2	3	4	5	6	7	8
刪掉的格子	34	38	39	38	39	38	39	34
剩下的格子	30	26	25	26	25	26	25	30

原本一隻貓可以刪掉 22 格，現在 2 隻貓可以刪掉 34~39 格。為什麼第二隻貓放在偶數格子時會少刪掉一個呢？我們接著進行討論後，有以下發現：

我們用 8-2-3 和 8-2-4 來舉例，這兩個圖在兩隻貓所在的那兩個橫排都重疊 2 格、在第 8 橫排也有重疊 1 格；但是 8-2-4 在斜的方向多重疊 1 格，而 8-2-3 則沒有重疊，這個情形在 8-2-2 到 8-2-7 其他幾個圖也是一樣的。所以，最後我們得到貓 2 放在奇數格子時，剩下的格子數會比貓 2 放在偶數格子時剩下的格子數少 1 格的結論。

除了 8×8 的棋盤之外，我們也研究了其他的棋盤大小，在固定貓 1 所在的格子後，如果貓 2 的位置不同，斜的方向刪掉的格子有沒有重疊，並列出以下表格（1×1 位置太小不能放第 2 隻貓）：

（○的意思是斜的方向有重疊；╳的意思是斜的方向沒有重疊）

棋盤大小	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
貓 2 放在奇數位	╳	○	╳	○	╳	○	╳
貓 2 放在偶數位	○	╳	○	╳	○	╳	○

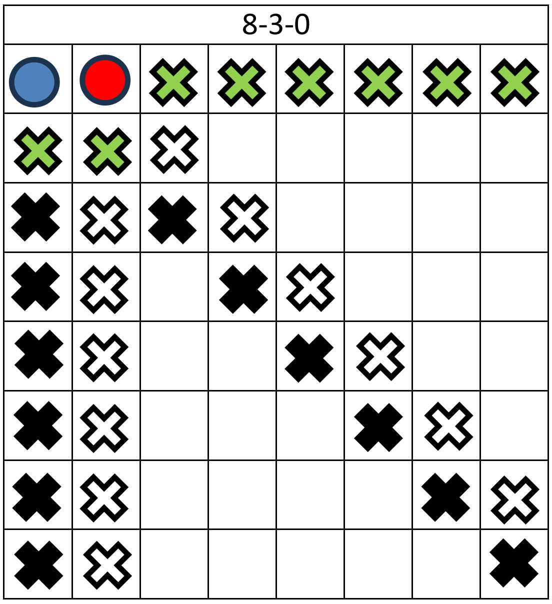
從上表中我們發現，在邊長為偶數的棋盤時，如果把貓 2 放在偶數位，就會有一個重疊的地方，但放在奇數位則不會；相反的，在奇數棋盤時，如果把貓 2 放在奇數位，就會有多一個重疊的地方，但放在偶數位則不會。

我們很好奇為什麼明明貓 2 的位置一樣，但是棋盤邊長不一樣（奇數或偶數）時，重疊的格子數會不一樣，所以接下來我們另外研究了在不同大小的棋盤，把貓 1 的位置放在不同橫排，再觀察貓 2 的位置會不會影響重疊的格子數量，最後我們發現：

> 不管棋盤邊長是奇數還是偶數，如果貓 1 跟貓 2 之間相差的格子數是奇數，貓 1 和貓 2 在斜的方向看到的格子就會重疊，讓牠們刪掉的格子少 1 格。

在研究兩隻貓的情形時，我們也觀察到另外一個特殊情形，那就是貓 1 跟貓 2 之間相差的格子數是 0 的時候（如右圖）。

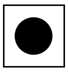
如果兩隻貓之間相差的格子數是 0（也就是相鄰）的話，老鼠能夠擺放的位置將會出現一大片的空白，我們認為在正式對戰的時候，是不會有人這樣放的，所以我們決定在接下來的研究先排除掉這樣的情形，以讓我們的研究更聚焦。



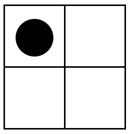
二、 找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數：

在研究完每隻貓封鎖的格子數之後，我們利用紙膠帶，將圍棋棋盤隔出大大小小的區域，從1×1的棋盤開始研究「在棋盤上先放上貓之後，能放幾隻老鼠？」。

（一）1×1的棋盤（只有一種情況）：



（二）2×2的棋盤（只有一種情況）：

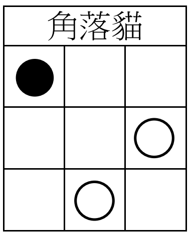


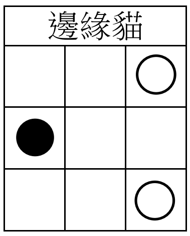
2×2的棋盤原本有左上、右上、左下、右下四種情況，但是我們發現其實只要將棋盤旋轉，這四種棋盤結果都是一樣的。也就是說，不論1×1還是2×2的棋盤，最多都只能放上 1 隻貓，沒有辦法放老鼠。

之後的研究我們也會將棋盤旋轉或翻轉後的情況都視為同一種。

（三）3×3的棋盤

從 3×3 的棋盤開始，有分內圈和外圈。根據 P5 的研究結果，我們知道如果先把貓放在棋盤內圈，會一次刪掉太多格子，導致完全不能放任何一隻老鼠。因此我們只把貓放在外圈，並且根據貓的位置在角落或是邊緣取名為角落貓、邊緣貓。結果發現，在 3×3 棋盤只能放 2 隻老鼠，如右圖：





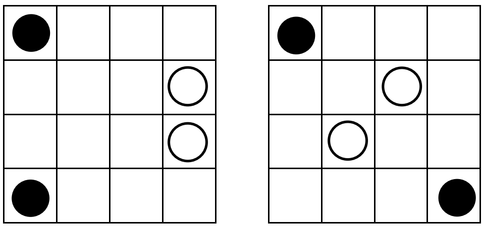
（四）4×4的棋盤：

根據 P6 的研究結果我們知道，4×4的棋盤一隻貓會刪掉 10 個格子，還剩下 6 個格子，這樣的結果就是棋盤上可以放 1 隻貓和 6 隻老鼠，我們認為這樣貓和老鼠的數量差距太大了，所以我們決定改放 2 隻貓。同時根據 P13 的討論，對兩隻貓之間相鄰的討論，實在不可能出現在未來的遊戲中，因此，我們決定要增加「兩貓之間不相鄰」的條件。至此我們的基本研究規則已經成型：

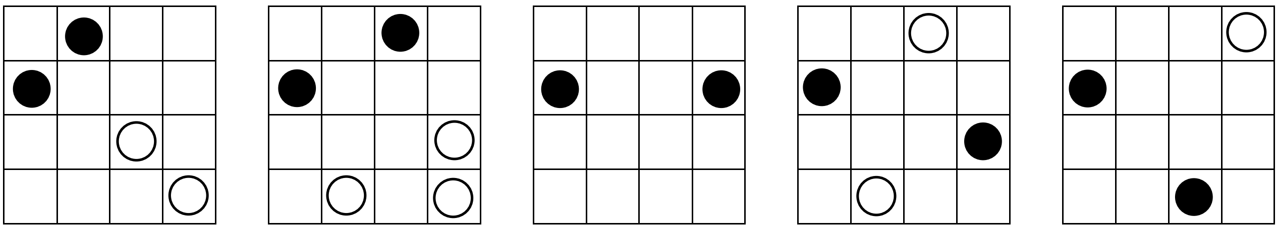
1. 不論旋轉、翻轉後的情況都算為同一種。
2. 將貓放在邊緣一圈，也就是角落貓跟邊緣貓兩種形式。
3. 兩貓之間不相鄰。

根據上方研究規則，在 4×4 的棋盤裡，2 隻貓的可能性可以分為下列三種情況：**1.** 2 隻角落貓、**2.** 2 隻邊緣貓、**3.** 1 隻角落貓加 1 隻邊緣貓。研究結果分別如下：

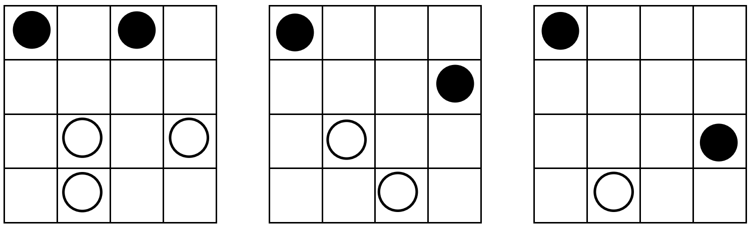
1. 2 隻角落貓：



2. 2 隻邊緣貓：



3. 1 隻角落貓加 1 隻邊緣貓：



我們發現在 2 隻都是角落貓時，只能放 2 隻老鼠；1 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，可以放 1-3 隻老鼠；2 隻都是邊緣貓時，可以放 0-3 隻老鼠。

在全部總共 10 個圖裡面，一共有 18 隻老鼠，平均為 1.8 隻老鼠。

（五）5×5的棋盤：

接下來，我們開始研究5×5的棋盤。根據 P6 的研究結果，棋盤變的更大的同時，如果只有一隻貓會讓棋盤上放到 12 隻老鼠。於是，我們根據 4×4 的棋盤放 2 隻貓的經驗，猜想貓數量的情形應該是「邊長$\div 2$」。而$5\div2=2.5$，所以，在這裡我們分別研究 2 隻貓和 3 隻貓的情形。

<table>
<tr><th>在 2 隻貓的情形</th><th>在 3 隻貓的情形</th></tr>
<tr><td>2 隻都是角落貓時，能放 6-7 隻老鼠</td><td>3 隻都是角落貓時，能放 4 隻老鼠</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，
可以放 4-7 隻老鼠</td><td>2 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，
可以放 1-5 隻老鼠</td></tr>
<tr><td>1 隻角落貓加 2 隻邊緣貓時，
可以放 0-4 隻老鼠</td></tr>
<tr><td>2 隻都是邊緣貓時，可以放 3-7 隻老鼠</td><td>3 隻都是邊緣貓時，可以放 0-4 隻老鼠</td></tr>
<tr><td>一共有 18 個圖，
平均老鼠隻數為 5.38 隻老鼠。</td><td>一共有 53 個圖，
平均老鼠隻數為 1.96 隻老鼠。</td></tr>
</table>

我們將之前的數字進行比較，覺得選用 3 隻貓是比較理想的，因為跟之前在 4×4 的棋盤 2 隻貓的平均老鼠隻數比較接近，分別是 1.96 隻老鼠以及 1.8 隻老鼠。我們這時決定將研究目的改成**【找出不同棋盤大小要放幾隻貓，老鼠的數量才會接近 2 隻】**。

（六）6×6的棋盤：

依據我們先前的猜想，貓的數量最合理的情形應該是「邊長$\div 2$」，而$6\div2=3$，所以，以下我們直接研究 3 隻貓的情形。跟5×5的棋盤一樣，共有下列四種情況：

1. 3 隻角落貓、
2. 2 隻角落貓加 1 隻邊緣貓、
3. 1 隻角落貓加 2 隻邊緣貓、
4. 3 隻邊緣貓。

研究過後我們發現：

3 隻都是角落貓時，能放 8 隻老鼠。2 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，可以放 4-7 隻老鼠。1 隻角落貓加 2 隻邊緣貓時，可以放 2-8 隻老鼠。3 隻都是邊緣貓時，可以放 3-8 隻老鼠。一共 117 個圖，平均老鼠隻數是 5 隻。

研究到這邊，我們嘗試用列表的方式來尋找貓的隻數規律：

棋盤大小		1×1	2×2	3×3	4×4	5×5		6×6
貓的數量		1	1	1	2	2	3	3
老鼠數量	最多	0	0	2	3	7	5	8
	最少	0	0	0	0	3	0	2
	平均	0	0	2	1.8	5.38	1.96	5

觀察上述表格，我們發現除了 1x1 跟 2x2 因為位置太小，所以沒有地方放老鼠外，3x3、4x4、以及 5x5 有 3 隻貓的時候，平均老鼠數量都會接近 2 隻；在 5x5 有 2 隻貓的時候、和 6x6 有 3 隻貓的時候，平均老鼠數量都是 5 以上。

綜合上述兩點，我們認為棋盤大小、貓、老鼠數量之間的規律應該調整為：

當棋盤邊長＞3，貓的數量＝棋盤邊長－2 的時候，老鼠數量會接近 2。

因此，我們追加研究6×6的棋盤，4 隻貓的以下五種情況：

1. 4 隻角落貓、
2. 3 隻角落貓加 1 隻邊緣貓、
3. 2 隻角落貓加 2 隻邊緣貓、
4. 1 隻角落貓加 3 隻邊緣貓、
5. 4 隻邊緣貓。

研究過後我們發現：

4 隻都是角落貓時，能放 8 隻老鼠。3 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，可以放 4 隻老鼠。2 隻角落貓加 2 隻邊緣貓時，可以放 1-7 隻老鼠。1 隻角落貓加 3 隻邊緣貓時，可以放 3-6 隻老鼠。4 隻都是邊緣貓時，可以放 0-6 隻老鼠。另外，平均老鼠數量上，在計算後得到的結果是 2.17 隻老鼠。

這與我們的研究目的：「平均老鼠數量接近 2 隻。」暫時相符，所以我們決定，在接下來 7×7 棋盤以及 8×8 的棋盤都用「貓數量＝棋盤邊長－2」的方式繼續研究。

（七）7×7 棋盤（設計「剩下老鼠」程式）：

依據推理的結果，在7×7的棋盤上貓的數量最合理情形應該是「棋盤邊長－2」，也就是$7-2=5$。5 隻貓的情況可以分為以下 5 種：

1. 4 隻角落貓加 1 隻邊緣貓、2. 3 隻角落貓加 2 隻邊緣貓、

3. 2 隻角落貓加 3 隻邊緣貓、4. 1 隻角落貓加 4 隻邊緣貓、5. 5 隻邊緣貓。

此時研究資料已經大幅增加，如果只用手工繪製，工作量實在難以負荷，於是我們決定利用 scratch 設計一個「剩下老鼠」程式，來簡化流程，協助我們找出貓和老鼠的數量。

在這個「剩下老鼠」程式中，我們設計了四個部分的程式，分別是：

第一部分：產生貓、視線、老鼠；

第二部分：準備發射貓的視線；

第三部分：發射視線後消失；

第四部份：老鼠碰到視線消失。四個部分的程式的功用分別是：

1. 第一部分：產生貓、視線、老鼠

我們利用變數和重複的次數來產生分身。

首先貓的分身會圍繞棋盤一整圈，再產生貓的視線分身；貓的視線分身一共會有八個方向，是為了讓被貓看到的老鼠消失。最後程式再產生老鼠的分身。

2. 第二部分：準備發射貓的視線

產生完分身之後，我們會用滑鼠的鼠標在棋盤周圍一圈滑動，碰到鼠標的貓和視線分身就會消失，這樣才能讓棋盤剩下我們想要的貓數量。

3. 第三部分：發射視線後消失

按下空白鍵後視線就會朝著八個方向前進，視線碰到邊緣就會消失。

4. 第四部份：老鼠碰到視線消失

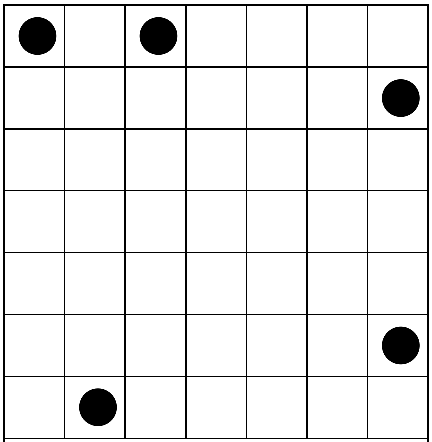
老鼠碰到時會消失不見。四個步驟的程式都完成後，螢幕是就會剩下沒被貓看到的老鼠，我們再把結果繪製起來。

5. 利用「剩下老鼠」程式找到的結果：

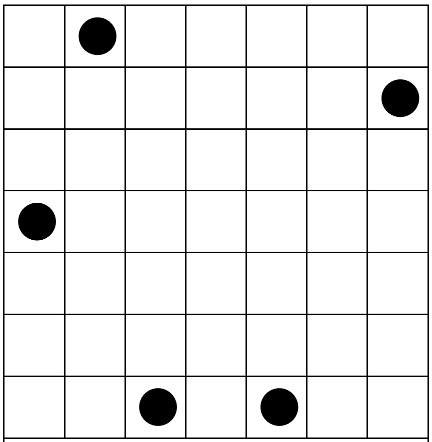
在利用我們設計的「剩下老鼠」程式進行研究後，在7×7的棋盤上我們發現：

4 隻角落貓加 1 隻邊緣貓時，可以放 8-11 隻老鼠。3 隻角落貓加 2 隻邊緣貓時，可以放 2-10 隻老鼠。2 隻角落貓加 3 隻邊緣貓，可以放 3-8 隻老鼠。1 隻角落貓加 4 隻邊緣貓，可以放 0-9 隻老鼠。5 隻邊緣貓，可以放 0-10 隻老鼠。

在這裡我們分別舉例「1 隻角落貓加 4 隻邊緣貓」以及「5 隻邊緣貓」的情況下，得到 0 隻老鼠的結果：



1 隻角落貓加 4 隻邊緣貓



5 隻邊緣貓

但是在7×7的棋盤一共 3625 個圖裡，平均老鼠的隻數達到 3.5 隻，有點超出我們的預期，到這裡我們的研究只剩下最後一個部份了。

（八） 8×8 的棋盤（使用「剩下老鼠」程式）：

我們研究的最後一個部分，是在8×8的棋盤上，用「棋盤邊長－2」，也就是$8 - 2 = 6$，共 6 隻貓來進行研究，一樣共有五種可能的組合，並利用我們設計的出現格率程式來幫助我們，最後我們發現：

4 隻角落貓加 2 隻邊緣貓時，可以放 8-14 隻老鼠。3 隻角落貓加 3 隻邊緣貓時，可以放 4-9 隻老鼠。2 隻角落貓加 4 隻邊緣貓，可以放 0-10 隻老鼠。1 隻角落貓加 5 隻邊緣貓，可以 0-12 隻老鼠。6 隻邊緣貓，可以放 0-12 隻老鼠。

但是在這邊8×8的棋盤一共 13661 個圖中，平均老鼠的隻數達到 4.11 隻，到這邊我們幾乎可以肯定，上次找到的「棋盤邊長－2」規律並不能正確反應在這個遊戲中。於是我們將從過去到現在所有的情況列表，希望能找到規律。

三、 找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律：

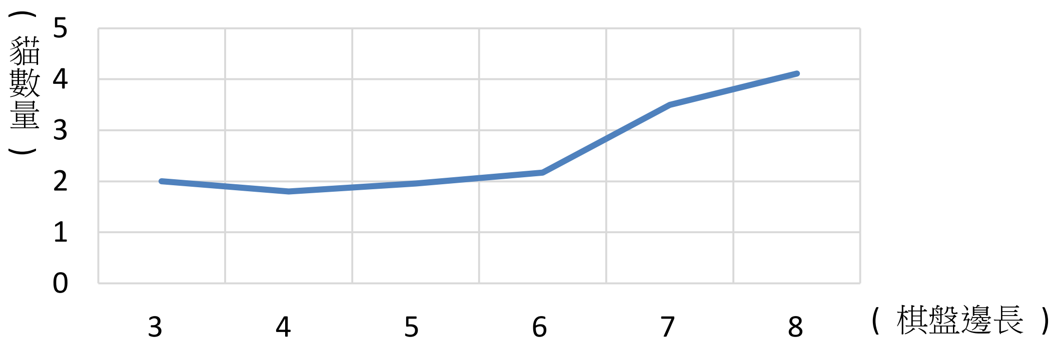
在找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數之後，我們用列表的方式找規律：

棋盤面積		1×1	2×2	3×3	4×4
貓的數量		1	1	1	2
圖面總數		1	1	3	10
老鼠數量	最多	0	0	2	3
	最少	0	0	0	0
	平均	0	0	2	1.8

棋盤面積		5×5		6×6		7×7	8×8
貓的數量		2	3	3	4	5	6
圖面總數		18	53	117	881	3625	13661
老鼠數量	最多	7	5	8	6	11	14
	最少	3	0	2	0	0	0
	平均	5.38	1.96	5	2.17	3.50	4.11

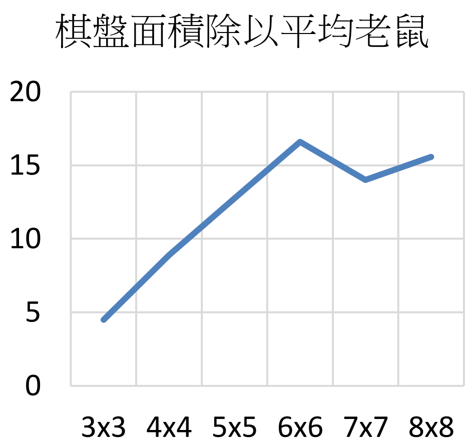
在第 8 頁我們已經做過一次這個表格前半部分（1×1～6×6 三隻貓）的分析，當時我們推測棋盤大小、貓、老鼠數量之間的規律應該是「貓數量＝棋盤邊長－2 時，老鼠數量會接近 2」。

所以我們做出了後面三組數據（6×6 四隻貓～8×8）來嘗試找出規律，發現在「貓數量＝棋盤邊長－2」的時候，5×5、6×6 的老鼠平均數量接近 2 隻老鼠，到了 7×7 和 8×8 的時候老鼠平均數量卻接近 3-4 隻老鼠，如下圖：

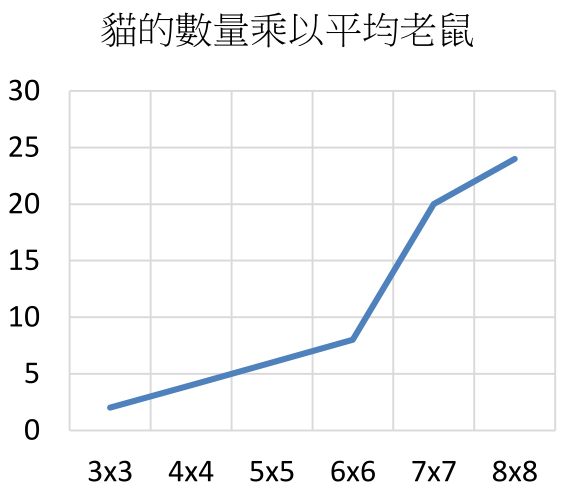


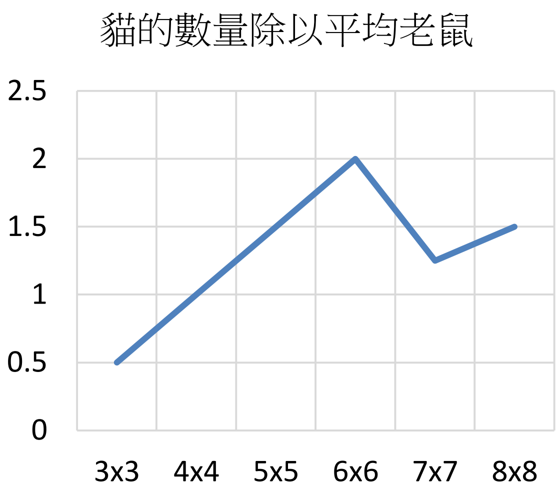
我們嘗試破解這些數字之間的規律，我們先把平均老鼠的隻數分別四捨五入，得到的數字分別為 2、2、2、2、4、4，在這幾個數字之間，我們看出從 6×6 到 7×7 之間的隻數差 2，其他 3×3 ～ 6×6 都差 0，這樣證明「邊長－2」的規律是錯誤的。

接著我們使用棋盤面積除以平均老鼠後，再用四捨五入取概數到小數點後二位來找規律，也就是拿 9、16、25、36、49、64 分別除以 2、1.8、1.96、2.17、3.5、4.11 最後的數字是 4.5、8.89、12.76、16.59、14、15.57。我們不論相減或相除都沒有明顯的規律，只能看出 3×3 ～ 6×6 的時候數值逐漸增加，但是到了 7×7 卻減少，如右圖：



之後我們使用貓的數量來和平均老鼠找規律，貓的數量分別是 1、2、3、4、5、6，我們將貓的數量和平均老鼠數項相乘後，分別得到 2、4、6、8、20、24；將貓的數量和平均老鼠數項相除後，分別得到 0.5、1、1.5、2、1.25、1.5。如下圖：





最後我們發現 1x1 到 6x6 都有固定的規律，但到了 7x7 和 8x8 規律就會跑掉，於是我們想，這八種邊長的棋盤或許可以分成三組來看：

棋盤面積	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
貓的數量	1	1	1	2	3	4	5	6
圖面總數	1	1	3	10	53	881	3625	13661
平均老鼠數量	0	0	2	1.8	1.96	2.17	3.50	4.11

我們的研究目的是**【找出不同棋盤大小要放幾隻貓，老鼠的數量才會接近 2 隻】**，這八種邊長的棋盤分成三組：

1x1、2x2 是一組，因為棋盤小，所以貓的數量固定＝1，不可能有任何一隻老鼠。

3x3、4x4、5x5、6x6 是第二組，貓的數量是「棋盤邊長－2」，老鼠數量接近 2。

7x7 和 8x8 是第三組，應該要用第三個規律，可能會是「貓數量＝棋盤邊長－1」，這樣或許可以讓老鼠的數量接近 2，但是我們的研究時間已經不足，7x7 及 8x8 的圖面已經達到 3625 以及 13661 個，就算用到 scratch 來輔助，仍然需要大量的時間，因此很可惜我們沒有辦法驗證這個猜想，只能就此停住這一部分的研究。

接著我們要研究第二個方向，嘗試將貓鼠問題設計成一款雙人對戰遊戲。

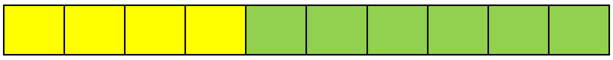
四、 發展成雙人對戰遊戲：

在玩過八皇后棋之後，我們先改編八皇后棋，在 6x6 大小的棋盤上，設計了第一個版本的規則，這個版本就只有比誰下的棋子比較多，沒有其他規則：

（一） 雙方輪流下棋，每次下一顆棋，下到不能下的時候結束。

（二） 結束時，棋子多的贏。

測試 10 次結果（黃色代表先手獲勝，紅色代表後手獲勝，綠色代表平手）：



我們發現先下的人不論怎麼下，就算亂下都一定會贏或平手，後手完全不可能贏，所以這個規則並不公平。於是，我們接著設計了第二版本的規則，這個版本增加了雙方獲勝的條件，也不可能平手：

（一） 雙方各有五顆棋，輪流下棋，每次下一顆棋。

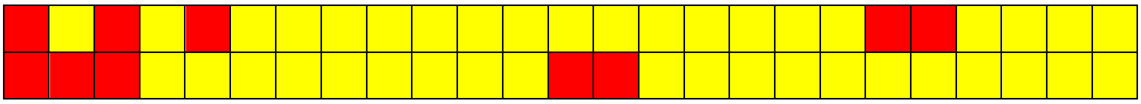
（二） 先下的人無法下棋，或下完棋後，後下的人還能下，先下的人輸；

先下的人下完棋後，後下的人沒辦法下，後下的人輸。

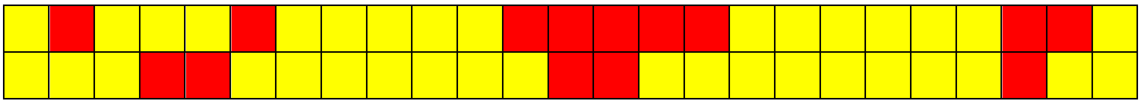
這次我們將測試次數增加，並且依據3×3棋盤的發現，將貓分三類來進行測試，

測試 150 次結果（黃色代表先手獲勝，紅色代表後手獲勝）：

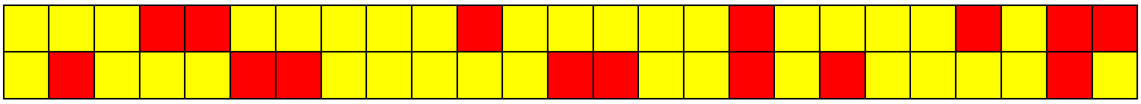
策略一：先下內部貓。先手獲勝次數為 39，後手獲勝次數為 11。



策略二：先下角落貓。先手獲勝次數為 36，後手獲勝次數為 14。



策略三：先下邊緣貓。先手獲勝次數為 35，後手獲勝次數為 15。



在經過共 150 次的測試後，我們發現先手還是容易贏，在這 150 次中，先手獲勝的比率約為 73%，遠大於後手獲勝的 27%。顯示出這樣仍然不是個公平的遊戲，所以我們這次做大幅度的遊戲規則修改，在（一）都是使用 6x6 棋盤，且（二）貓跟老鼠各只有一隻的條件之下，分別從 1. 移動步數、2. 移動方向、3. 障礙物等三個方向來調整遊戲規則。

我們先後一共改變 15 次規則，並都經過 50 次的試玩，將結果列表說明如下：

（一） 移動步數

更改的規則	碰到的困難
1. 一人一步	老鼠必死
2. 改成老鼠兩步、貓三步	老鼠容易死
3. 改成老鼠五步、貓四步	老鼠容易死
4. 改成老鼠五步、貓兩步	比較公平，保留到最終規則

（二） 移動方向

更改的規則	碰到的困難
1. 貓跟老鼠可以斜走	老鼠必死
2. 貓跟老鼠一回合只能斜走一次	比較公平，但是規則太多太複雜
3. 貓跟老鼠不能斜走	保留到最終規則

經過討論之後，我們發現老鼠容易失敗，或許是因為在現實生活中，老鼠是有地方可以躲藏的。於是我們加入了障礙物的設計：

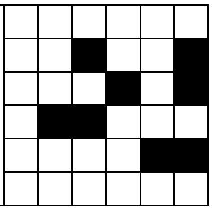
（三） 障礙物

更改的規則	碰到的困難
1. 加上四個櫃子	老鼠必死
2. 老鼠可以跳到櫃子上，貓看不到老鼠	老鼠一定贏
3. 貓可以推動櫃子	沒完沒了，沒有輸贏
4. 加厚（兩格）櫃子（要用兩倍的力量）	老鼠必死
5. 老鼠在櫃子後面時，貓不能推	沒完沒了，沒有輸贏
6. 不能把櫃子推出場外（減少老鼠能躲的地方）	老鼠容易贏
7. 老鼠可以跳到櫃子上，一回合只能兩次	比較公平，但是規則太多太複雜
8. 老鼠不能跳櫃子，貓不能推櫃子	保留到最終規則

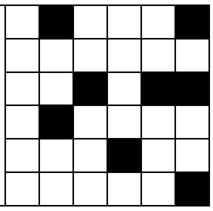
我們相當喜歡障礙物的設計，讓老鼠有更高獲勝機率的同時，也讓整個遊戲可以更貼近現實，於是現在的問題就在於：怎麼設定這些障礙物的位置。

之後我們先隨意設計了 36 種擺放方式，以下舉出其中 3 種（黑色為障礙物）：

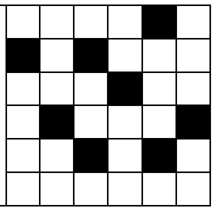
編號三



編號七



編號十七



我們的設計原則為：

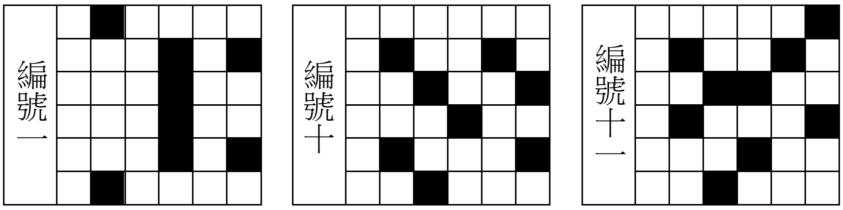
1. 障礙物不能放滿同一條線（包含直線、橫線、斜線）。
2. 棋盤的四周，至少要有 3 個空格，讓老鼠可以通過。
3. 不能有任何被關起來的格子。

用上面三條規則設計出 36 種擺放方式之後，我們再進行對戰，嘗試找出最公平的障礙物擺放方式（以下用編號及顏色呈現對戰結果，每一種方式各玩 4 次，紅色：老鼠四勝、黃色：老鼠三勝、綠色：老鼠兩勝、藍色：老鼠一勝。）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

我們選擇其中兩勝兩敗的 14 種障礙物擺放的方式，再次進行四場對戰，但是沒有辦法再達成兩勝兩敗，有的對貓有利，有的對老鼠有利。

以下是 3 個平手的障礙物排法。



所以我們最後決定改變規則，改成由貓來決定一開始擺放的障礙物位置，更改後的規則如下：

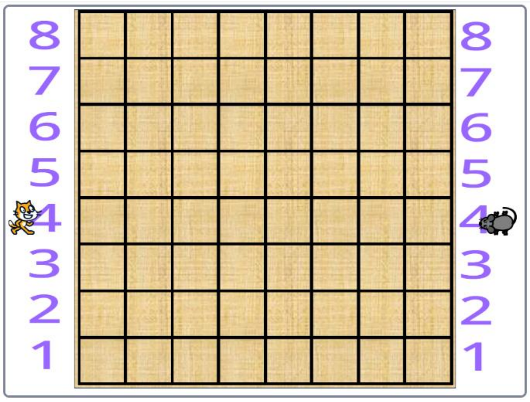
1. 在 6×6 的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。
2. 由貓先擺放八個障礙物。
3. 老鼠決定起點的位置（但不能選角落），貓放在老鼠的對面，貓的後面是老鼠的家。
4. 老鼠到牠自己的家就算贏；貓看到老鼠，則老鼠輸（包含斜看、直看、橫看，只要站在同一條線上就算）。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，可以經過但不能停留。
5. 老鼠先移動，老鼠可以走 1~5 步，貓可以走 1~2 步，不能斜的走。

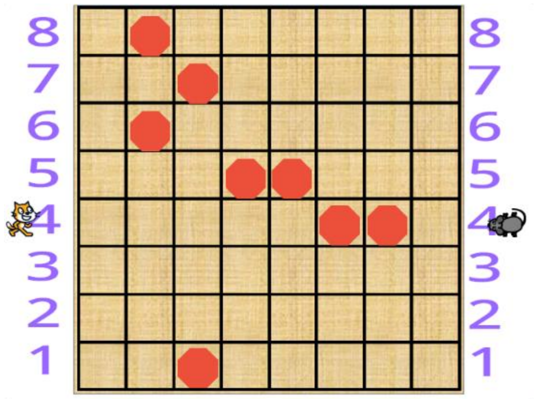
之後我們嘗試利用 scratch，將上述遊戲內容設計雙人對戰遊戲。

五、 利用 scratch 將雙人對戰遊戲數位化：

（一）設計主遊戲畫面（圖片擷取自 https://scratch.mit.edu/）：

在確認規則之後，我們設計了遊戲的畫面（如下圖左）：





遊戲左邊的 1～8 是貓可以選的位置，右邊的 1～8 則是老鼠可以選的位置，在點選綠旗開始遊戲後，會隨機產生 6～8 個障礙物（如上圖右）。

（二）設計貓鼠移動程式：

一開始，我們先寫老鼠的程式，因為老鼠的程式比較簡單，沒有視線的問題，主要就是利用鍵盤的上下左右鍵來控制老鼠的移動，另外利用了變數來偵測老鼠走幾步，當老鼠每走一步，變數就會加 1，當變數＝5 時就換貓移動，或者玩家可以按下空白鍵，直接讓變數＝5，也會換貓移動。

貓移動的程式則是改成用 wasd 四個按鍵移動，另外貓最多只能走兩步。接下來，我們要設計貓的視線程式。

（三）設計貓的視線程式：

貓每走一步就會廣播訊息「視線」，讓視線程式來偵測有沒有看到老鼠。視線程式會面朝指定度數（-135、-90、-45、0、45、90、135、180）來發射出八個方向的視線，成為「米」字形擴散，直到碰到邊緣或老鼠後消失。

（四）設計貓和老鼠選位置程式：

接下來我們來設計貓和老鼠選起點的程式，這個部分比較簡單，就是按到幾就移動到哪裡，原本規則是老鼠先從棋盤上最右排 2-7 選一個位置當起點，而貓會固定在老鼠正對面。但是經過試玩後我們發現，如果用這樣的規則，貓比較容易贏，所以我們修改原本的規則，改成貓先從 1-8 選一個位置，再換老鼠選。

（五）設計障礙物程式：

接下來我們來探討障礙物的擺設，一開始我們依據原本的遊戲規則，把障礙物設為可拖曳，並且在遊戲開始時由貓來移動滑鼠，利用變數設計倒數計時，讓貓在 10 秒鐘之內選擇 8 個障礙物的擺設位置。

後來我們發現這樣做障礙物不容易對齊，容易被放在格子線上，造成貓、老鼠的移動錯誤，或是貓的視線穿透等問題。為了讓障礙物能對齊，我們嘗試了好幾種方式，但都無法完全解決這些問題。所以最後我們決定更改遊戲規則，改成遊戲開始時會隨機擺設 6-8 個障礙物，我們利用「建立分身」來實現自動產生障礙物的程式。

（六）試玩、調整規則、再試玩：

在完成老鼠、貓、視線、障礙物等的程式之後，我們開始試玩，很快的我們發現，視線如果延伸到底，貓比較容易贏，於是我們將視線的距離改成 3 格。

最後我們 scratch 版貓鼠遊戲的遊戲規則如下：

1. 在 8×8 的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。
2. 每次開始遊戲時棋盤上會隨機產生 6-8 個不能動的障礙物，可以讓老鼠躲藏。
3. 貓在看到障礙物的位置後，可以先決定貓的起點位置，接著換老鼠決定起點的位置。
4. 貓先移動，貓可以走 1~2 步，老鼠可以走 1~5 步，不能斜的走。如果不想再走可以按空白鍵放棄步數。
5. 老鼠只要能順利走到最左邊的格子外就算贏；貓則是視線範圍三格內看到老鼠（包含斜看、直看、橫看，但看不到障礙物後面的老鼠）就是貓贏。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不算被貓看到，也就是說，老鼠可以經過貓的視線但不能停留在貓的視線中。

我們利用這樣的規則試玩了 50 場，結果是 25 比 25，於是我們覺得這樣貓鼠雙方的勝率相同，可以算是一個公平的遊戲，於是我們開始接著請同學來幫忙測試。

（七）讓程式更精緻，並找同學試玩：

在這之後我們就利用午休時間請班上其他同學進行測試，最後貓與老鼠的勝負是 14 比 14，我們認為是相當平衡的遊戲。至此，我們的研究告一段落。

陸、討論

一、討論：

（一）、老鼠的平均數如果設為其他數字的可能性？

我們一開始因為3×3一隻貓和4×4兩隻貓的平均老鼠數是 2，所以我們想把5×5 ~ 8×8棋盤平均老鼠數設為 2，我們也有想過要不要把平均老鼠數設定為 0 隻，但是如果設定為 0 隻，就會變成只有貓沒有老鼠的遊戲，整個遊戲就會太像八皇后棋，所以最後我們還是決定設為 2 隻。

（二）、運用程式設計幫我們省了多少時間？

運用程式設計的我們，減少了「畫貓的視線」和「標出老鼠」的時間，只需要在 excel 上紀錄老鼠的數量，所以在 7×7 和 8×8 每張圖可以省大約 1-2 分鐘，省下 50 %的畫圖時間。但是在檢查每張圖有沒有重複時，都還要自己一一比對，每種類的圖（例如 7×7 的 1 隻角落貓加 4 隻邊緣貓共有 1514 個圖）還要再花上 1-2 小時，如果這問題也能用程式來幫助我們，應該可以省下更多時間。

（三）、貓鼠遊戲有比較容易贏的方式嗎？

經過我們多次修改遊戲規則，我們認為貓鼠雙方沒有必勝方式。但是有「比較容易獲勝的策略」：

1. 老鼠比較容易獲勝的策略：

   一開始要確認障礙物的擺放，如果障礙物平均分散，老鼠可以利用步數優勢（老鼠最多一次走 5 步，貓最多走 2 步），進行迂迴戰術，對貓聲東擊西，引誘貓靠近後，再次讓老鼠走最多步數，從貓身邊逃走獲勝。如果障礙物都集中一邊，則要找離貓比較遠的位置，以步數的優勢快速到家。

2. 貓比較容易獲勝的策略：

   貓在擺障礙物時，要擺放成一條橫線，盡量不要集中成一塊密集區域，比較能夠能減少老鼠的通路，但要記得保留三格，避免違規。在移動位置時，要盡量讓貓的位置跟障礙物在同一條線上，讓老鼠只能夠在起點的附近遊走，無法跨越貓和障礙物形成的屏障，讓貓獲勝。

（四）、把實體的遊戲變成數位遊戲有什麼優點？

我們認為，數位化的遊戲有以下幾個優點：

1. 更方便攜帶到其他地方（如：寒暑假時，可以帶出國把遊戲分享給更多人，事實上我們有在大陸旅遊時分享給大陸人玩）。

2. 增加遊戲的趣味性（如：在 scratch 中可以增加音效、角色動畫等）。

3. 讓人更容易懂規則（因為一開始有出現規則說明）。

4. 能讓更多人玩到這款遊戲（如：分享到 scratch 官網，讓不認識的人玩）。

（五）、數位遊戲中貓和老鼠要怎麼選位置？

在障礙物隨機產生的時候，有可能是平均分散，或是集中在一邊。

1. 如果是平均分散的情況，貓應該選擇中間當作一開始的位置。

2. 如果是集中在一邊的情況，貓應該選擇障礙物較少的一邊當作開始位置。

3. 不論是哪一種情況，老鼠都應該選擇離貓最遠的位置，或者障礙物較多的那一邊當作開始位置，才比較不容易被貓抓到。

二、未來展望：

我們的未來展望有兩個部分，第一個是關於棋盤、貓、老鼠數量之間的規律，如果未來還有時間可以繼續找出規律的話，我們希望可以進行以下的驗證：

（一）、驗證貓的數量是不是棋盤邊長－１：

1. 嘗試 ７×７ 的 6 隻貓和 ８×８ 的 7 隻貓來證明棋盤邊長－１，看看是不是可以讓老鼠的數量接近 2。

2. 嘗試 ４×４ ～ ６×６ 貓的數量是不是也可以使用棋盤邊長－１的方法來讓老鼠數量接近 2。

當然貓的數量也有可能完全不屬於我們先前找到的規律，有其他的可能讓老鼠的數量接近 2。

（二）、嘗試不同形狀的棋盤：

在正多邊形之中，除了正方形外，三角形、六邊形也能做成棋盤。或者不一定要正多邊形，也可以設計長方形的棋盤。

第二部份是如果未來還有時間可以繼續設計這個遊戲的話，我們希望這個遊戲在程式設計方面可以有以下的變化：

（三）、轉化單人遊玩和增加電腦提示：

1. 就算只有一個人，也可以跟電腦對戰。
2. 在想超過 20 秒時，讓電腦自動給提示。

以上這兩種做法，不論哪一種都需要去學習如何寫一個 AI，這是超過 scratch 能執行的，未來的我們如果有機會可以再去學習。

（四）、發展成更多趣味性的版本

1. 把它變成闖關型的遊戲。 2. 可以讓玩家選擇棋盤的大小。
3. 除了在電腦玩以外，還可以在手機和平版上遊玩。

以上這些，第一個可以使用 scratch 裡面的「變數」，根據不同變數，會產生數量不一樣的障礙物、或者會動的障礙物等等。第二個可以用「詢問」以及「廣播訊息」來實現不同的大小的棋盤。至於在手機和平版上遊玩比較複雜，因為手機和平板沒有鍵盤，所有的程式都要重新寫。

柒、結論

一、研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量：

在一隻貓的時候我們發現不管棋盤大小是多少，都可以由外到內分成好幾圈，只要貓站在同一個圈內，不管貓在哪裡，刪掉格子的數量都是固定的。而且如果貓的位置從內圈跨到外圈，刪掉的格子都會減少 2，貓站在最外圈時，刪掉的格子最少。

另外在兩隻貓的時候我們發現，不管棋盤的邊長是奇數還是偶數，如果兩隻貓之間相差的格子數是奇數，牠們刪掉的格子就會重疊，因此會減少 1 格。

二、找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數：

經過這段時間玩貓鼠遊戲後，我們統計出：

（一）、1x1 跟 2x2 因為位置太小無法放老鼠。

（二）、3x3、4x4、5x5、6x6，在「貓數量＝棋盤邊長－2」的時候，平均老鼠的數量都會接近 2 隻。

接著我們利用 scratch 設計了一個「剩下老鼠」程式，用來協助我們找出貓和老鼠的數量。程式分別有四個部分，第一部分是產生貓、視線、老鼠；第二部分是準備發射貓的視線；第三部分是發射視線後消失；第四部份是老鼠碰到視線消失。

接著我們就能夠把剩餘的老鼠記錄到 excel 裡進行結算，得到第三個結論：

（三）、在 7×7、8×8 的棋盤，如果貓的數量是「棋盤邊長－2」時，老鼠的數量會是 3-4 隻。

三、找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律：

我們利用了棋盤面積除以平均老鼠數量、貓的數量乘或除平均老鼠數量等各種方式來找規律，最後綜合上述幾點推論棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律應該分為三組：

當棋盤邊長為 1、2 的時候，貓的數量＝1，老鼠數量為 0。 當棋盤邊長為 3～6 的時候，貓的數量＝棋盤邊長－2 時，老鼠數量接近 2。 當棋盤邊長為 7、8，貓的數量＝棋盤邊長－2 的時候，老鼠數量會接近 4， ，貓的數量＝棋盤邊長－1，老鼠數量才不會太多。

四、發展成雙人遊戲：

在我們經過多次的試玩、調整之後，我們產出最後的實體遊戲規則是：

（一） 在 6×6 的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。

（二） 先由貓來選擇障礙物的位置，但擺放的原則要依據以下幾點：

1. 障礙物不能放滿同一條線（包含直線、橫線、斜線）。
2. 棋盤的四周，必須保留 3 個空格，讓老鼠可以通過。
3. 障礙物的擺設不能圍成封閉型。

（三） 老鼠先移動，老鼠可以走 1~5 步，貓可以走 1~2 步，不能斜的走。

（四） 貓先選位置，再換老鼠。

（五） 老鼠到牠自己的家就算贏；貓看到老鼠，則老鼠輸（包含了斜看、直看、橫看，只要站在同一條線上就算）。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，可以經過但不能停留。

五、利用 scratch 將雙人對戰遊戲數位化：

我們透過 scratch 將原本的貓鼠遊戲數位化後，進行了多次的測試，最後調整之前的遊戲規則，產生新的遊戲規則如下：

（一） 在 8×8 的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。

（二） 開始遊戲時棋盤上會自動產生 6-8 個不能動的障礙物，可以讓老鼠躲藏。

（三） 在看到障礙物的位置後，貓先決定起點位置，再換老鼠決定起點的位置。

（四） 貓先移動，貓可以走 1~2 步，老鼠可以走 1~5 步，不能斜的走。如果不想再走可以按空白鍵放棄步數。

（五） 老鼠只要能順利走到最左邊的格子外就算贏；貓則是視線範圍三格內看到老鼠（包含斜看、直看、橫看，但看不到障礙物後面的老鼠）則貓贏。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，也就是說老鼠可以經過貓的視線但不能停留在貓的視線中。

捌、參考資料及其他

一、黎娜（2016）。**2000 個邏輯考驗推理遊戲：門薩會員及世界頂尖名校都想破解！**（初版）。新北市：漢宇國際文化。

二、黃品翰、陳毓筌、林政勛、洪翊倫、王柏鈞（2008）。**當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」**，未出版，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會說明書（未出版）。國小組數學科。

三、李信昌（無日期）。八皇后。民 113 年 6 月 1 日，取自 http://www.mathland.idv.tw/。

四、本報告中所使用的圖表，除了取自 https://www.flaticon.com/ 、 https://scratch.mit.edu/ 特別說明外，皆為作者自製。

【評語】080415

本研究從書中所介紹的《貓鼠遊戲》出發，針對問題以及遊戲規則進行推廣，對於 1×1 至 8×8 棋盤上，擺放一隻貓在任意位置及擺放二隻貓在最外圈邊界所產生的方格數變化給予了詳細的說明；並在不同規格的棋盤上，探討多少貓的數量才能控制老鼠的平均數量為 2；作者做了大膽的猜測，但很遺憾結果並不如預期，也導致在數學結構上的論證較少、內容不足。

建議在 n×n 棋盤擺放 1~2 隻貓所產生的方格數變化，若可做出系統性探討，並推導出一般化公式，將可以增加作品參考的價值。

作品簡報

貓鼠終極戰

壹、研究動機

我們在《2000個邏輯考驗推理遊戲》這一本書中，選擇了其中的《貓鼠遊戲》當作科展主題進行研究。這是一個在棋盤上放置貓和老鼠，但貓和老鼠之間不能看到對方的一道題目。

我們想要先研究1×1到8×8大小的棋盤下可以放幾隻貓跟老鼠。為了推測更大的棋盤，因此我們也想要找出不同的棋盤大小貓咪數量的規律。最後想到可以利用在學校資訊課學習到的scratch軟體，來把這個問題設計成遊戲。

貳、研究目的

一、 研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量。

二、 找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數。

三、 找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律。

四、 發展成雙人遊戲。

五、 利用scratch將雙人對戰遊戲數位化。

參、研究設備及器材

圍棋棋子（貓跟老鼠）、棋盤（地圖）、紙膠帶（隔出不同大小地圖）、木材、木塊（當作障礙物）、電腦（進行文書作業、統計、寫scratch程式）。

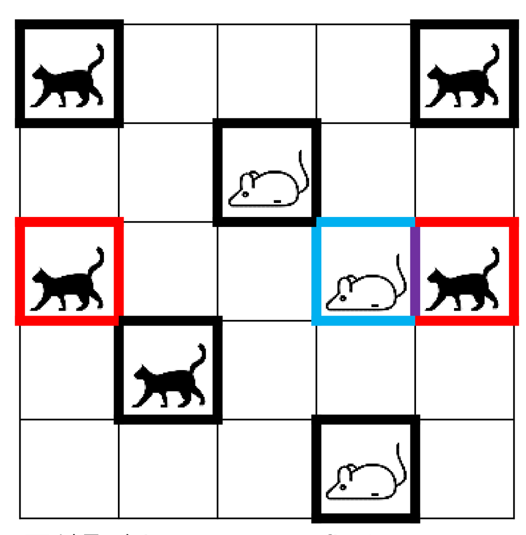
肆、研究過程與方法

一、確定遊戲規則

（一）書中原始問題：

書中原始的問題是在一個 5×5 的棋盤上放了3隻貓和2隻老鼠（如右圖黑色框處），貓和老鼠都能看見橫向、縱向和斜向直線上的物體，但是貓不能看到老鼠，老鼠不能看到貓。

書中要求讀者在不能改變現有貓和老鼠位置的情況下，再放上1隻貓和2隻老鼠，詢問有沒有可能做到。



（圖片取自https://www.flaticon.com/）

經過我們的實際擺放的研究後，發現只能多加2隻貓或多加1隻老鼠，不可能同時增加1隻貓和2隻老鼠（如右圖紅色框是加2隻貓、藍色框是加1隻老鼠），因此，原書中要求的「放上1隻貓和2隻老鼠」是不可能做到的。

（二）與八皇后棋的比較：

在思考答案的過程中，我們發現這個問題跟八皇后棋有些類似，角色的視線都是一整行，而且彼此之間都不能互相看見。

跟八皇后棋不同的地方是，貓鼠遊戲裡面有兩種角色：貓和老鼠。貓和貓、老鼠和老鼠之間可以互相看見，但八皇后棋裡的皇后跟皇后之間不行。

（三）改造遊戲：

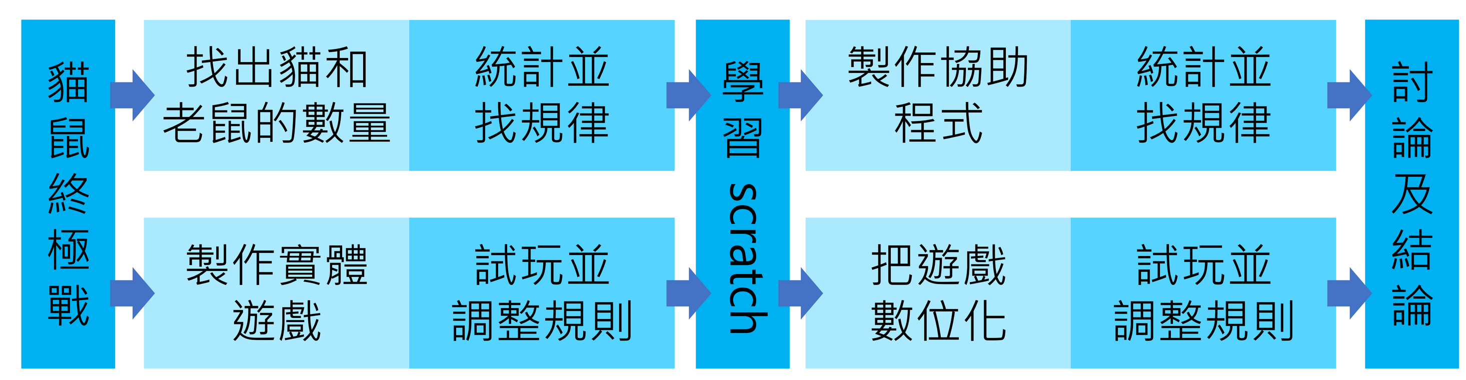
我們將黑色圍棋子當作貓，白色圍棋子當作老鼠，將書中規則改造如下：

1. 先放上黑子當作貓。
2. 將每隻貓橫向、縱向和斜向直線上的格子當作「被封鎖」。
3. 將剩下沒有被封鎖的位置，放上白子，也就是老鼠可以放的位置。

我們會利用更改後的規則來進行研究、設計遊戲。

二、研究過程

我們分成兩個方向來進行研究，如下圖：



三、研究方法

如上圖，我們主要是採用**實驗研究**的方式，分成兩個方向進行研究：

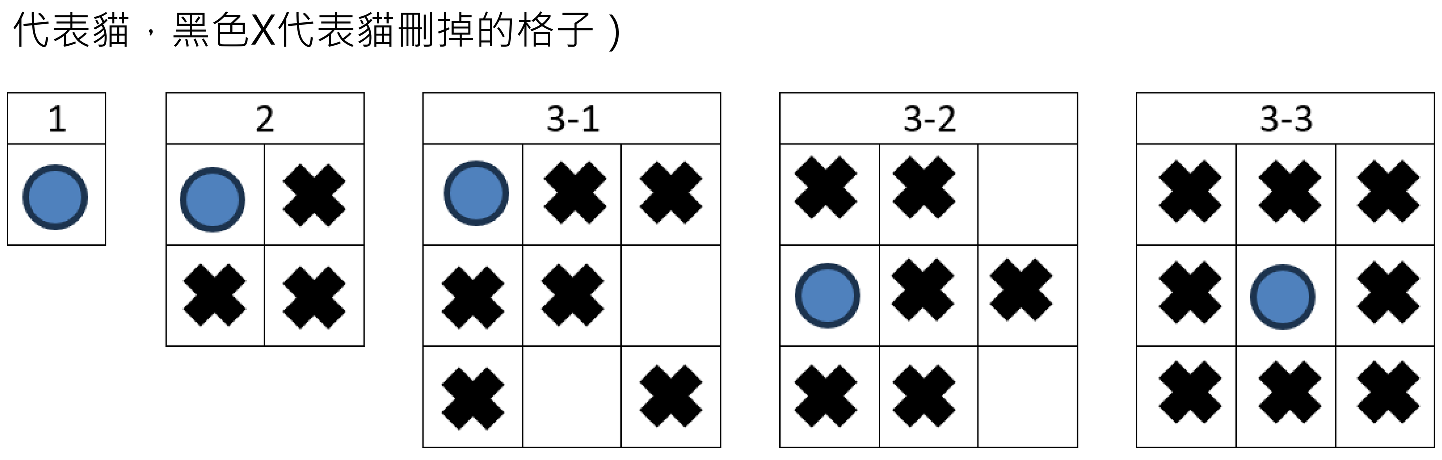
第一個方向是研究 1×1 到 8×8 的棋盤大小，貓和老鼠的數量。我們的研究方法是先研究貓在棋盤中封鎖格子的規律之後，再到棋盤上，擺出貓的位置，再找出老鼠可以擺的地方，找出所有的可能性之後，進行統整與歸納，最後再找出規律。我們會在適當的時候使用scratch設計用來協助我們研究的程式，希望能夠產生我們的研究成果。

第二個方向是設計雙人對戰遊戲，一開始先用實體 6×6 的木頭棋盤開始創建遊戲，經過多次試玩、調整，希望能找出公平的遊戲規則。之後我們再用scratch來設計數位遊戲，因為數位遊戲的不同，所以我們可以把棋盤擴大成8×8，同時也要再次調整遊戲規則。在每次調整規則之後，我們會輪流試玩、也會找同學來試玩，增加測試數量，讓我們可以根據測試結果來修改遊戲規則，希望能設計出公平的、前所未有的遊戲。

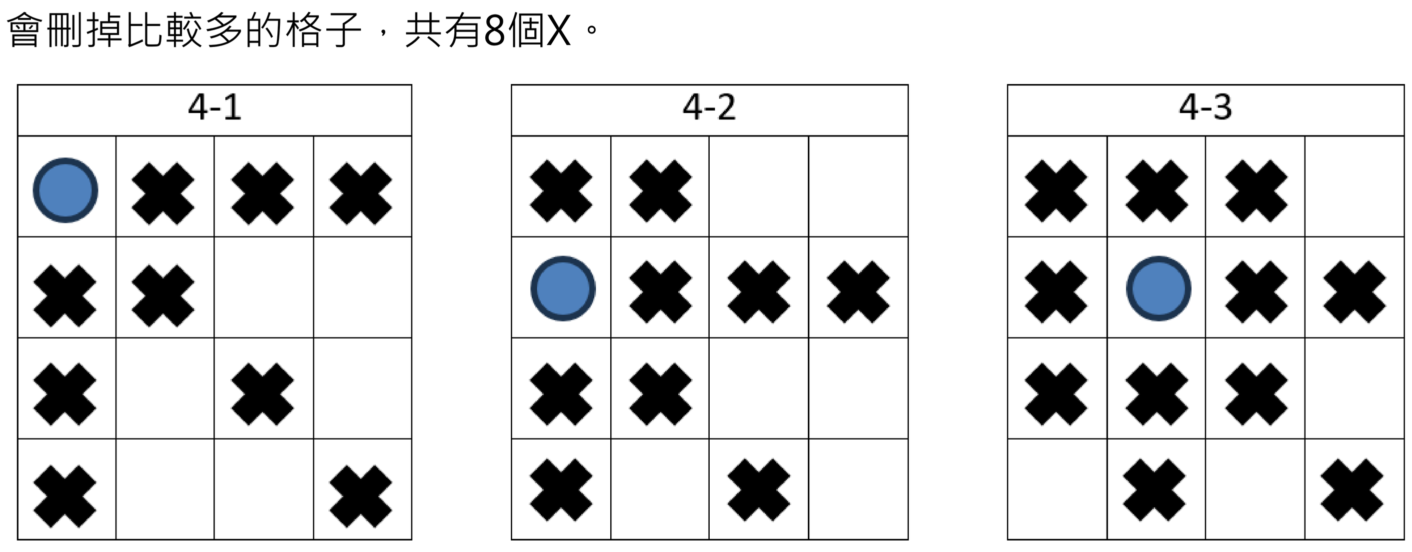
伍、研究結果

一、研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量

為了研究這個問題，我們首先先在各種大小的棋盤上各放一隻貓，找出因為放了貓，就不能放老鼠的格子，我們稱為「刪掉的格子」數量。（用藍色的圓圈代表貓，黑色X代表貓刪掉的格子）



根據上圖3-1～3-3，我們發現不管貓放在棋盤的角（3-1）或棋盤的邊上（3-2），刪掉的格子都是一樣多，都是6個X。如果放在棋盤的內部（3-3），則會刪掉比較多的格子，共有8個X。



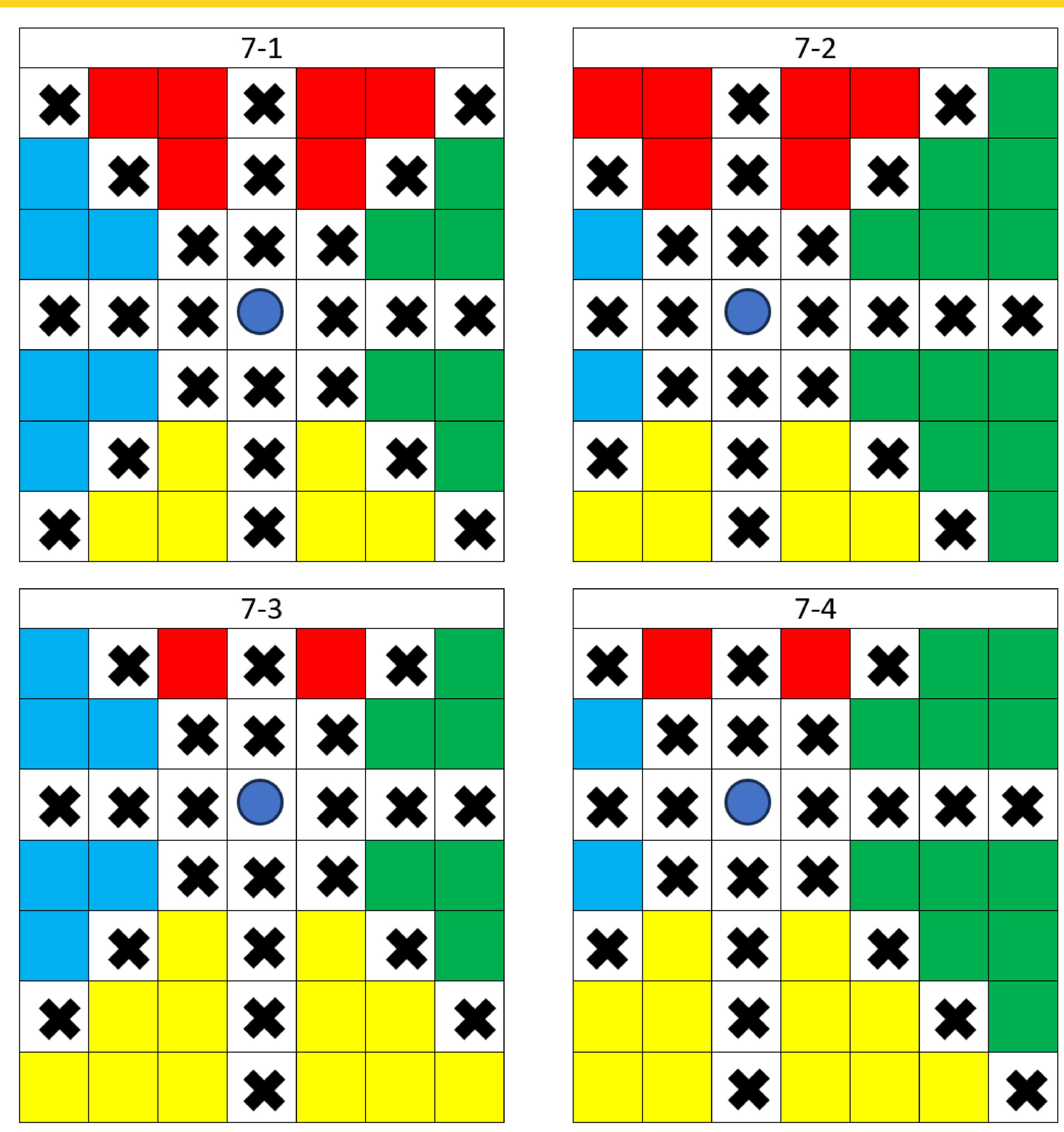
在上圖4-1～4-3，也是一樣的狀況，貓放在角或邊時，都刪掉9個格子，在內部則刪掉11個格子，我們決定先研究把貓放角或邊上的情形。我們接著將5×5到 8×8 的棋盤也放完，將結果列成以下表格：

棋盤	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
總格子	1	4	9	16	25	36	49	64
刪掉的格子	1	4	7	10	13	16	19	22
剩下的格子	0	0	2	6	12	20	30	42

我們發現，棋盤大小每多一格，刪掉的格子數都會+3。剩下的格子數則會是以「$(1+2+3+\cdots+n)\times 2$」的方式呈現，n是邊長-2。這是我們第一部分的發現。

接下來第二個部分，我們嘗試找出把貓放在其他位置可以刪掉幾格，我們從前面的圖3-3、4-3知道放在中間會刪掉比較多格，所以我們決定從正中間開始，研究不同位置的貓能夠刪去幾個方格，結果如下圖：（以7×7為例）

我們將棋盤分成四個部分，紅色是上部、綠色是右部、黃色是下部、藍色是左部、黑色X代表貓刪掉的格子。



從圖7-1到圖7-2是將貓往左邊移動一格，我們發現，藍色的格子少了4格，但是綠色的格子增加6格，最後反而多了2格。從圖7-1到7-3是將貓往上移動一格，紅色少了4格，黃色多了6格，也是多2格。但是從圖7-3到7-4將貓往左移動一格，藍色及黃色共少了5格，但綠色也同時多了5格，總格子數不多也不少。

我們覺得這樣的現象十分特別，7-1到7-2和7-3到7-4都是往左移，為什麼有時候會多2格，有時候不多也不少呢？

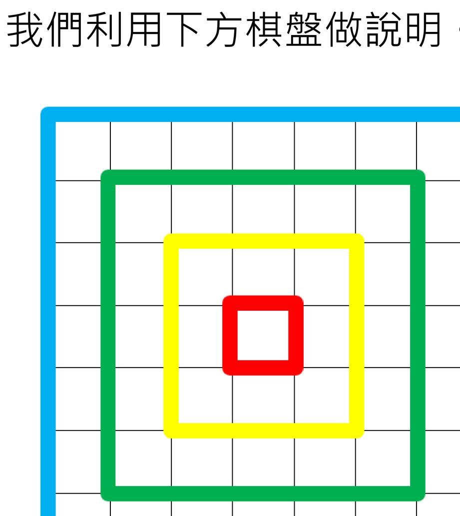
在將每個格子都放過貓之後我們發現，會有這樣的結果不是貓往哪裡移動的問題，而是貓的位置在棋盤上**第幾圈**的影響，我們利用下方棋盤做說明。我們將棋盤最內圈的框塗上紅色、接著向外分別塗上黃、綠、藍色。我們發現：

貓如果放在紅色框內，會刪掉25格。

貓如果放在黃色框內，會刪掉23格。

貓如果放在綠色框內，會刪掉21格。

貓如果放在藍色框內，會刪掉19格。



另外在邊長為偶數的棋盤也有類似的結果，我們將棋盤依奇偶性分別列表如下：

棋盤	1×1	3×3		5×5			7×7			
總格子	1	9		25			49			
貓位置	內圈	外圈	內圈	外圈	二圈	內圈	外圈	二圈	三圈	內圈
刪掉的格子	1	7	9	13	15	17	19	21	23	25
剩下的格子	0	2	0	12	10	8	30	28	26	24

棋盤	2×2	4×4		6×6			8×8			
總格子	4	16		36			64			
貓位置	內圈	外圈	內圈	外圈	二圈	內圈	外圈	二圈	三圈	內圈
刪掉的格子	4	10	12	16	18	20	22	24	26	28
剩下的格子	0	6	4	20	18	16	42	40	38	36

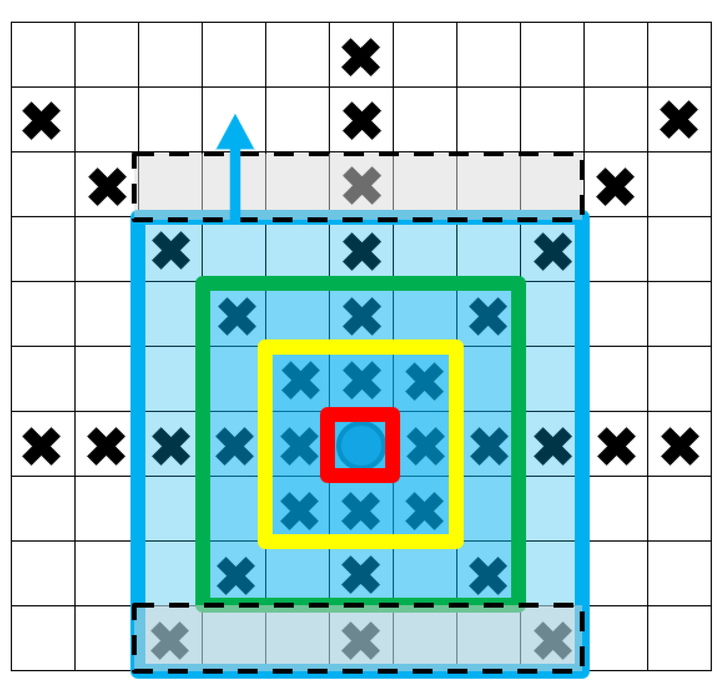
從上面的表格，我們看到了以下兩種規律：

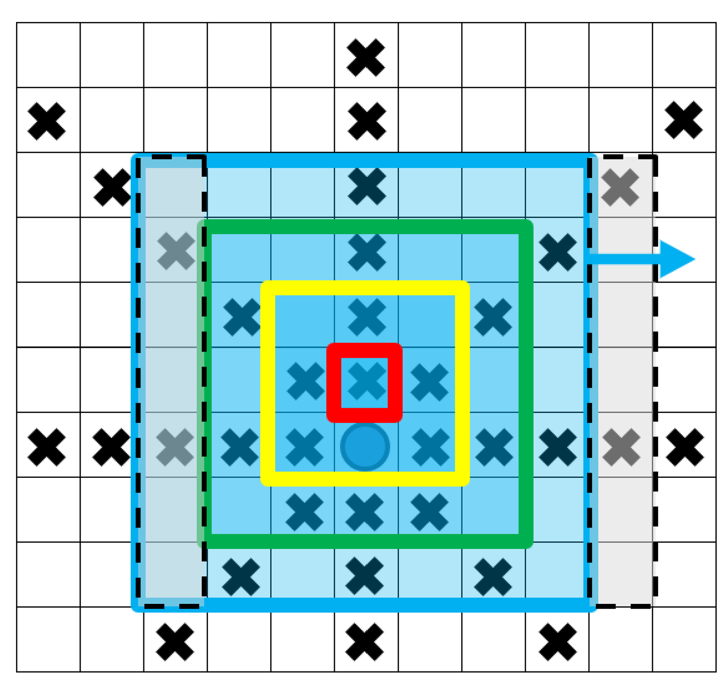
（一）同樣的棋盤大小內，「刪掉的格子數」從內圈到外圈每差一圈都會-2格，剩下的格子數會+2格。

（二）奇數棋盤「剩下的格子數」會相差8、16......偶數棋盤「剩下的格子數」會相差4格、12格、20格......。

我們很好奇會有這樣規律的原因，於是我們接著開始討論為什麼會有這些規律。我們將我們的發現說明如下，以 7×7 的棋盤為例：

首先，我們先將棋盤向外延伸，超過原本的 7×7 大小，並用四種顏色的框代表各圈（藍色框框代表外圈、綠色框框是二圈、黃色框框是三圈、紅色框框是內圈）：





在左圖中我們可以看見，在原本 7×7 棋盤的最外圈的框框不論上、下、左、右，都有三個X，這代表我們不管往哪個方向移動棋盤，都會減少3個刪掉的格子；同時，在最外圈框框外圍會多1個X（灰色區域），代表會增加一個刪掉的格子。所以經過–3+1之後，整體刪掉的格子數會減少2。而此時貓的位子跨圈了，是從內圈跨到三圈，刪掉的格子數會減少2，跟我們之前的發現相符合。

右圖則是已經向上移動後，再向右移動棋盤，這個時候，貓沒有跨圈，都是在第三圈。這時不論是左、右的灰色區域，都是兩個X，代表整體被刪掉的格子數不會增加也不會減少。至此，我們證明了「同樣的棋盤大小內，『刪掉的格子數』從內圈到外圈每差一圈都會減2格，剩下的格子數會加2格。」的原因。

接下來，我們試著研究兩隻貓的情形。並發現第二隻貓擺放的位置不同，會刪掉不同數量的格子。我們將這些結果做成表格：

第二貓位置	1	2	3	4	5	6	7	8
刪掉的格子	34	38	39	38	39	38	39	34
剩下的格子	30	26	25	26	25	26	25	30

原本一隻貓可以刪掉22格，現在2隻貓可以刪掉34~39格。為什麼第二隻貓放在偶數格子時會少刪掉一格（表格紅框處）呢？

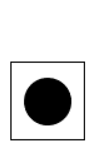
我們接著進行討論後，發現這跟棋盤邊長的奇偶性有關聯。最後我們歸納出的結論是：

不管棋盤邊長是奇數還是偶數，如果貓1跟貓2之間相差的格子數是奇數，貓1和貓2在斜的方向看到的格子就會重疊，讓牠們刪掉的格子少1格。

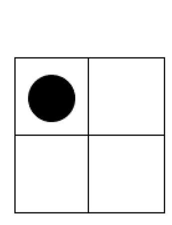
二、找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數：

在研究完每隻貓封鎖的格子數之後，我們利用紙膠帶，將圍棋棋盤隔出大大小小的區域，從1×1的棋盤開始研究「在棋盤上先放上貓之後，能放幾隻老鼠？」。

（一）1x1的棋盤

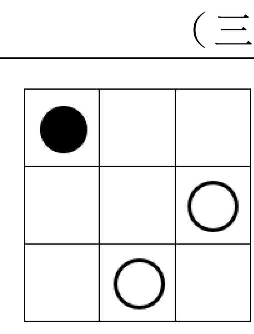


（二）2x2的棋盤

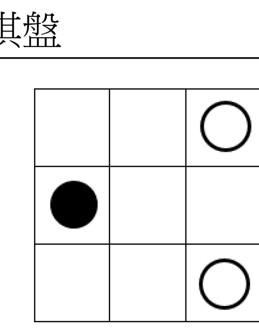


（三）3x3的棋盤

角落貓



邊緣貓



2×2的棋盤原本有左上、右上、左下、右下四種情況，但是我們發現其實只要將棋盤旋轉，這四種棋盤結果都是一樣的。也就是說，不論1×1還是2×2的棋盤，最多都只能放上1隻貓，沒有辦法放老鼠。之後的研究我們也會將棋盤旋轉或翻轉後的情況都視為同一種。

從 3×3 的棋盤開始，有分內圈和外圈。根據先前的研究結果，我們知道如果先把貓放在棋盤內圈，會一次刪掉太多格子，導致完全不能放任何一隻老鼠。因此我們只把貓放在外圈，並且根據貓的位置在角落或是邊緣取名為角落貓、邊緣貓。

（四）4×4的棋盤：

根據先前研究結果我們知道，4×4的棋盤一隻貓會刪掉10個格子，還剩下6個格子，這樣的結果就是棋盤上可以放1隻貓和6隻老鼠，我們認為這樣貓和老鼠的數量差距太大了，所以我們決定改放2隻貓。另外我們決定要增加「兩貓之間不相鄰」的條件。至此我們的基本研究規則已經成型：

1. 不論旋轉、翻轉後的情況都算為同一種。
2. 將貓放在邊緣一圈，也就是角落貓跟邊緣貓兩種形式。
3. 兩貓之間不相鄰。

根據上方研究規則，在 4×4 的棋盤裡，2隻貓的研究結果，在2隻都是角落貓時，只能放2隻老鼠；1隻角落貓加1隻邊緣貓時，可以放1-3隻老鼠；2隻都是邊緣貓時，則可以放0-3隻老鼠。在全部總共10個圖裡面，一共有18隻老鼠，平均為1.8隻老鼠。

（五）5×5的棋盤：

接下來，我們開始研究5×5的棋盤。我們根據 4×4 的棋盤放2隻貓的經驗，猜想貓數量的情形應該是「邊長÷2」。而5÷2=2.5，所以在這裡我們分別研究2隻貓和3隻貓的情形：

在2隻貓的情形	在3隻貓的情形
共18個圖，平均老鼠隻數為5.38隻老鼠。	共有53個圖，平均老鼠隻數為1.96隻老鼠。

我們將之前的數字進行比較，覺得選用3隻貓是比較理想的，因為跟之前在 4×4 的棋盤，2隻貓的平均老鼠隻數比較接近，分別是1.96隻老鼠以及1.8隻老鼠。我們這時決定將研究目的改成**【找出不同棋盤大小要放幾隻貓，老鼠的數量才會接近2隻】**。

（六）6×6的棋盤：

依據我們先前的猜想，貓的數量最合理的情形應該是「邊長÷2」，而6÷2=3，所以我們直接研究3隻貓的情形。研究過後我們發現：一共有117個圖，平均老鼠隻數是5隻。數量遠大於2隻，因此追加研究4隻貓的情況，終於得到平均老鼠是2.17隻老鼠的結果。決定，在接下來7×7 棋盤以及 8×8 的棋盤都用「貓數量＝棋盤邊長 - 2」的方式繼續研究。

（七）7×7 棋盤和8×8 的棋盤（使用「剩下老鼠」程式）：

我們利用scratch設計一個「剩下老鼠」程式來簡化流程，協助我們找出貓和老鼠的數量。在這個「剩下老鼠」程式中，我們設計了四個部分的程式，分別是：

第一部分：產生貓、視線、老鼠；　第二部分：準備發射貓的視線；

第三部分：發射視線後消失；　第四部份：老鼠碰到視線消失。

在使用「剩下老鼠」程式之後，我們找到的結果是：

1. 在7×7的棋盤一共3625個圖裡，平均老鼠的隻數為3.5隻，
2. 在8×8的棋盤一共13661個圖中，平均老鼠的隻數達到4.11隻。

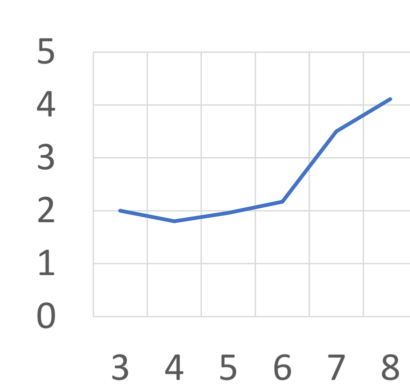
我們幾乎可以肯定，前面所說的「棋盤邊長 - 2」規律並不能正確反應在這個遊戲中。於是我們將從過去到現在所有的情況列表，希望能找到規律。

三、找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律：

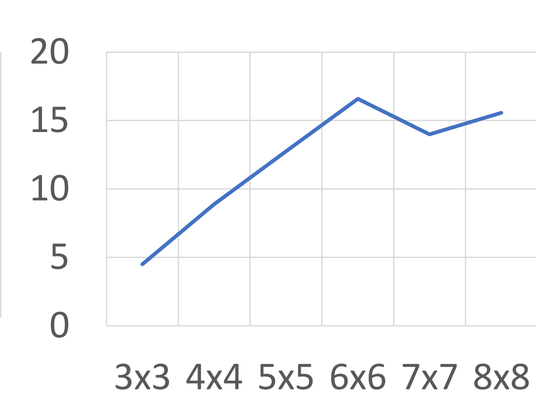
在找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數之後，我們用列表的方式找規律：

棋盤面積		1x1	2x2	3x3	4x4	5x5		6x6		7x7	8x8
貓的數量		1	1	1	2	2	3	3	4	5	6
圖面總數		1	1	3	10	18	53	117	881	3625	13661
老鼠數量	最多	0	0	2	3	7	5	8	6	11	14
	最少	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0
	平均	0	0	2	1.8	5.38	1.96	5	2.17	3.50	4.11

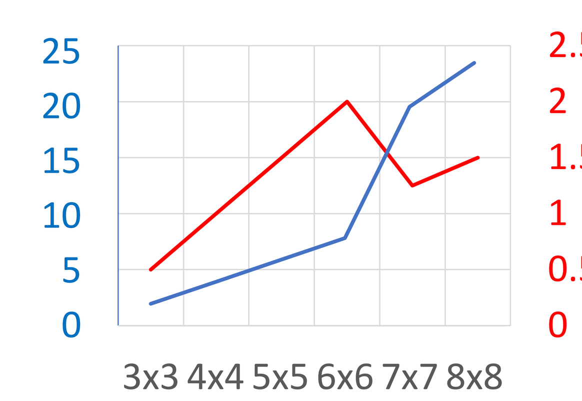
我們發現1×1到6×6都有固定的規律，但到了7×7和8×8規律就會跑掉。我們嘗試的方式有：



貓數量與棋盤邊長關係圖



棋盤面積除以平均老鼠數量關係圖



貓的數量乘（藍）除（紅）平均老鼠數量關係圖

但這些方式都沒有一個一體適用的規律，於是我們想，這八種邊長的棋盤或許能分成三組來看：

棋盤面積	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
貓的數量	1	1	1	2	3	4	5	6
圖面總數	1	1	3	10	53	881	3625	13661
平均老鼠數量	0	0	2	1.8	1.96	2.17	3.50	4.11

1×1、2×2是一組，因為棋盤小，所以貓的數量固定＝1，不可能有任何一隻老鼠。

3×3、4×4、5×5、6×6是第二組，貓的數量是「棋盤邊長 - 2」，老鼠數量接近2。

7×7和8×8是第三組，應該要用第三個規律，可能會是「貓數量＝棋盤邊長 - 1」，這樣或許可以讓老鼠的數量接近2，但是我們的研究時間已經不足，只能就此停住這部分研究。

四、發展成雙人對戰遊戲：

我們先改編八皇后棋，設計了以下遊戲規則：

（一）　雙方輪流下棋，每次下一顆棋，下到不能下的時候結束。

（二）　結束時，棋子多的贏。

測試10次結果發現先下的人不論怎麼下都一定贏或平手，後手完全不可能贏，所以這個規則並不公平。於是，我們接著設計了第二版本的規則：

（一）雙方各有五顆棋，輪流下棋，每次下一顆棋。

（二）先下的人無法下棋，或下完棋後，後下的人還能下，先下的人輸；

先下的人下完棋後，後下的人沒辦法下，後下的人輸。

測試150次結果發現先手還是容易贏，在這150次中，先手獲勝的比率約為73%，遠大於後手獲勝的27%。所以我們接著做了大幅度的遊戲規則修改，分別從1. 移動步數、2. 移動方向、3. 障礙物等三個方向來調整遊戲規則。其中，障礙物的設計原則為：

1. 障礙物不能放滿同一條線（包含直線、橫線、斜線）。
2. 棋盤的四周，至少要有3個空格，讓老鼠可以通過。
3. 不能有任何被關起來的格子。

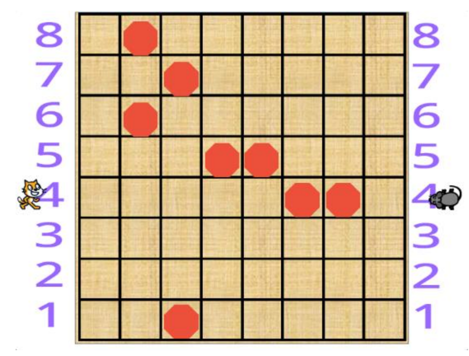
用上面三條規則設計出36種擺放方式之後，我們再進行對戰，嘗試找出最公平的障礙物擺放方式，但是進行多次對戰之後發現，有的對貓有利，有的對老鼠有利。所以我們最後決定改變規則，改成由貓來決定一開始擺放的障礙物位置，最後決定的遊戲規則如下：

1. 在6×6的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。
2. 由貓先擺放八個障礙物。
3. 老鼠決定起點的位置（但不能選角落），貓放在老鼠的對面，貓的後面是老鼠的家。
4. 老鼠到牠自己的家就算贏；貓看到老鼠，則老鼠輸（包含斜看、直看、橫看，只要站在同一條線上就算）。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，可以經過但不能停留。
5. 老鼠先移動，老鼠可以走1~5步，貓可以走1~2步，不能斜的走。

之後我們嘗試利用scratch，將上述遊戲內容設計雙人對戰遊戲。

五、 利用scratch將雙人對戰遊戲數位化：

設計主遊戲畫面（圖片擷取自https://scratch.mit.edu/）：



在確認規則之後，我們設計了遊戲的畫面（如右圖），遊戲的左邊1～8是貓可以選的位置，右邊的1～8則是老鼠可以選的位置，在點綠旗開始遊戲後，會隨機產生6～8個障礙物（紅色八角形）。接著我們透過以下步驟完成我們的程式：

第一部分：設計貓鼠移動程式。　第二部分：設計貓的視線程式。

第三部分：設計貓和老鼠選位置程式。　第四部分：設計障礙物程式。

最後我們scratch版貓鼠遊戲的遊戲規則如下：

1. 在8×8的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。
2. 每次開始遊戲時棋盤上會隨機產生6-8個不能動的障礙物。
3. 貓在看到障礙物的位置後，可以先決定貓的起點位置，接著換老鼠決定起點的位置。
4. 貓先移動，貓可以走1~2步，老鼠可以走1~5步，不能斜的走。如果不想再走，可以按空白鍵放棄步數。
5. 老鼠只要能順利走到最左邊的格子外就算贏；貓則是視線範圍三格內看到老鼠就是貓贏。

陸、討論

一、討論

（一）、老鼠的平均數如果設為其他數字的可能性？

我們一開始因為3×3一隻貓和4×4兩隻貓的平均老鼠數是2，所以我們把平均老鼠數的目標設為2隻，我們也有想過要不要把平均老鼠數設定為0隻，但是如果設定為0隻，整個遊戲可能會太像八皇后棋，所以最後我們還是決定設為2隻。

（二）、運用程式設計幫我們省了多少時間？

運用程式設計的我們，減少了「畫貓的視線」和「標出老鼠」的時間，只需要在excel上紀錄老鼠的數量，所以每張圖可以省大約1-2分鐘，省下50％的畫圖時間。但是在檢查每張圖有沒有重複時，都還要自己一一比對，每種類的圖還要再花上1-2小時，如果這問題也能用程式來幫助我們，應該可以省下更多時間。

（三）、貓鼠遊戲有比較容易贏的方式嗎？

我們認為貓鼠雙方沒有必勝方式。但是可以有「比較容易獲勝的策略」：

1. 老鼠比較容易獲勝的策略：

先確認障礙物的擺放，如果障礙物平均分散，老鼠可以利.用步數優勢進行迂迴戰術，引誘貓靠近後，老鼠再從貓身邊逃走獲勝。如果障礙物都集中一邊，則要找離貓比較遠的位置，以步數的優勢快速到家。

2. 貓比較容易獲勝的策略：

貓在擺障礙物時，要擺放成一條橫線，盡量不要集中成一塊密集區域，比較能夠減少老鼠的通路。在移動時，要盡量讓貓的位置跟障礙物在同一條線上，讓老鼠無法跨越貓和障礙物形成的屏障，讓貓獲勝。

（四）、把實體的遊戲變成數位遊戲有什麼優點？

我們認為，數位化的遊戲有以下幾個優點：

1. 更方便攜帶到其他地方（如：寒暑假時，可以帶出國把遊戲分享給更多人，事實上我們有在大陸旅遊時分享給大陸人玩）。
2. 增加遊戲的趣味性（如：在scratch中可以增加音效、角色動畫等）。
3. 讓人更容易懂規則（因為一開始有出現規則說明）。
4. 能讓更多人玩到這款遊戲（如：分享到scratch官網，讓不認識的人玩）。

（五）、數位遊戲中貓和老鼠要怎麼選位置？

在障礙物隨機產生的時候，有可能是平均分散，或是集中在一邊。

1. 如果是平均分散的情況，貓應該選擇中間當作一開始的位置。
2. 如果是集中在一邊的情況，貓應該選擇障礙物較少的一邊當作開始位置。
3. 不論是哪一種情況，老鼠都應該選擇離貓最遠的位置，或者障礙物較多的那一邊當作開始位置，才比較不容易被貓抓到。

二、未來展望

我們的未來展望有以下兩個部分：

第一個是關於棋盤、貓、老鼠數量之間的規律，如果未來還有時間可以繼續找出規律的話，我們希望還可以進行以下的驗證：

（一）、驗證貓的數量是不是「棋盤邊長－1」：

1. 嘗試 7×7 的 6 隻貓和 8×8 的7隻貓來證明棋盤邊長－1，能不能讓老鼠的數量接近2。
2. 嘗試 4×4～6×6 貓的數量是不是也可以使用棋盤邊長－1的方法來讓老鼠數量接近2。

當然貓的數量也有可能完全不屬於我們先前找到的規律，有其他的可能讓老鼠的數量接近2。

（二）、嘗試不同形狀的棋盤：

在正多邊形之中，除了正方形外，三角形、六邊形也都能做成棋盤。或者不一定要正多邊形，也可以設計長方形的棋盤。

第二部份是如果未來還有時間可以繼續設計這個遊戲的話，我們希望這個遊戲在程式設計方面可以有以下的變化：

（三）、轉化單人遊玩和增加電腦提示：

1. 就算只有一個人，也可以跟電腦對戰。
2. 在想超過20秒時，讓電腦自動給提示。

以上這兩種做法，不論哪一種都需要去學習如何寫一個AI，這是超過scratch能執行的，未來的我們如果有機會可以再去學習。

（四）、發展成更多趣味性的版本

1. 把它變成闖關型的遊戲。
2. 可以讓玩家選擇棋盤的大小。
3. 除了在電腦玩以外，還可以在手機和平版上遊玩。

以上這些，第一個可以使用scratch裡面的「變數」，根據不同變數，會產生數量不一樣的障礙物、或者會動的障礙物等等。第二個可以用「詢問」以及「廣播訊息」來實現不同的大小的棋盤。至於在手機和平版上遊玩比較複雜，因為手機和平板沒有鍵盤，所有的程式都要重新寫。

柒、結論

一、研究貓在不同棋盤大小可以刪掉和剩下的格子數量：

在一隻貓的時候我們發現不管棋盤大小是多少，都可以由外到內分成好幾圈，只要貓站在同一個圈內，不管在哪裡，刪掉格子的數量都是固定的。而且如果貓的位置從內圈跨到外圈，刪掉的格子都會減少2，貓站在最外圈時，刪掉的格子最少。

另外在兩隻貓的時候我們發現，不管棋盤的邊長是奇數還是偶數，如果兩隻貓之間相差的格子數是奇數，牠們刪掉的格子就會重疊，因此會減少1格。

二、找出不同棋盤大小可以放的老鼠隻數：

經過這段時間玩貓鼠遊戲後，我們統計出：

（一）、1×1跟2×2因為位置太小無法放老鼠。

（二）、3×3、4×4、5×5、6×6，在「貓數量＝棋盤邊長－2」的時候，平均老鼠的數量都會接近2隻。

接著我們利用scratch設計了一個「剩下老鼠」程式，用來協助我們找出貓和老鼠的數量。程式分別有四個部分，第一部分是產生貓、視線、老鼠；第二部分是準備發射貓的視線；第三部分是發射視線後消失；第四部份是老鼠碰到視線消失。接著我們就能夠把剩餘的老鼠記錄到excel裡進行結算，得到第三個結論：

（三）、在7×7、8×8的棋盤，如果貓的數量是「棋盤邊長－2」時，老鼠的數量會是3-4隻。

三、找出棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律：

我們利用了棋盤面積除以平均老鼠數量、貓的數量乘或除平均老鼠數量等各種方式來找規律，最後綜合上述幾點推論棋盤面積、貓、老鼠數量之間的規律應該分為三組：

當棋盤邊長為1、2的時候，貓的數量＝1，老鼠數量為0。

當棋盤邊長為3～6的時候，貓的數量＝棋盤邊長－2時，老鼠數量接近2。

當棋盤邊長為7、8，貓的數量＝棋盤邊長－2的時候，老鼠數量會接近4，

，貓的數量＝棋盤邊長－1，老鼠數量才不會太多。

四、發展成雙人遊戲：

在我們經過多次的試玩、調整之後，我們產出最後的實體遊戲規則是：

（一）在6×6的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。

（二）先由貓來選擇障礙物的位置，但擺放的原則要依據以下幾點：

1. 障礙物不能放滿同一條線（包含直線、橫線、斜線）。
2. 棋盤的四周，必須保留3個空格，讓老鼠可以通過。
3. 障礙物的擺設不能圍成封閉型。

（三）老鼠先移動，老鼠可以走1~5步，貓可以走1~2步，不能斜的走。

（四）貓先選位置，再換老鼠。

（五）老鼠到牠自己的家就算贏；貓看到老鼠，則老鼠輸（包含了斜看、直看、 橫看，只要站在同一條線上就算）。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，可以經過但不能停留。

五、利用scratch將雙人對戰遊戲數位化：

我們透過scratch將原本的貓鼠遊戲數位化後，進行了多次的測試，最後調整之前的遊戲規則，產生新的遊戲規則如下：

（一）在8×8的棋盤上，有一隻老鼠、一隻貓。

（二）開始遊戲時棋盤上會自動產生6-8個不能動的障礙物，可以讓老鼠躲藏。

（三）在看到障礙物的位置後，貓先決定起點位置，再換老鼠決定起點的位置。

（四）貓先移動，貓可以走1~2步，老鼠可以走1~5步，不能斜的走。如果不想 再走可以按空白鍵放棄步數。

（五）老鼠只要能順利走到最左邊的格子外就算贏；貓則是視線範圍三格內看到 老鼠（包含斜看、直看、橫看，但看不到障礙物後面的老鼠）則貓贏。在老鼠的回合如果跟貓站在同一條線上，不會被貓看到，也就是說老鼠可以經過貓的視線但不能停留在貓的視線中。

捌、參考資料及其他

一、參考資料

一、黎娜（2016）。2000個邏輯考驗推理遊戲：門薩會員及世界頂尖名校都想破解！（初版）。新北市：漢宇國際文化。

二、黃品翰、陳毓笙、林政勛、洪翊倫、王柏鈞（2008）。當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」，未出版，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會說明書（未出版）。國小組數學科。

三、李信昌（無日期）。八皇后。民113年6月1日，取自http://www.mathland.idv.tw/。

二、版權聲明

三、遊戲網址

https://scratch.mit.edu/projects/1042123442/fullscreen/