中華民國第64屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080414

角格織網-探討角格矩形中對角封閉區的角格數變化

學校名稱：　臺中市私立華盛頓國民小學

作者：	指導老師：
小六　卓均祐	郭怡蘭
小六　張哲綸	許廷遠
小六　黃皓平	

關鍵詞：　等腰直角三角形、最大公因數、對角線

摘要

本研究目的為在相同的等腰直角三角形密鋪而成的矩形中，若從右上角頂點分別往左與往下移動數格，及左下角頂點分別往右與往上移動數格，再分別從左下往右上連接 2 條直線，並將這 2 條直線拓寬成一個封閉區域，則此對角封閉區域 T 會經過幾個三角格呢？先從左下角至右上角的對角線會經過的三角格開始觀察，發現經過的三角格數量與矩形長邊、矩形長、寬邊的最大公因數有關。接著將對角線有規律的拓寬成不同的封閉區域，並將經過的三角格用相異的顏色區分，用逆向思考的方式，把矩形中的三角格總數減去 2 直線經過的三角格數量，順利找出計算公式。最後我們也用相似的概念順利找出另一方向對角封閉區域 H 的計算公式，讓整個研究更為完整。

壹、前言

一、研究動機

從小我們對數學思考就很有興趣，每次把數學難題想通解決後，總有滿滿的成就感。有一天老師突然問我們，想不想參加數學科展？一聽到有機會參加這屆的科展比賽，我們心中那股對數學的熱情被喚醒，大家躍躍欲試。一開始我們和老師討論要研究哪個主題，為了更瞭解科展，我們閱讀了歷屆得獎作品，想從中提取一些靈感。後來我們看到第五十六屆的得獎作品《因緣際繪》，覺得非常特別，於是我們向老師提議：「能否將他們的作品繼續延伸討論？」老師覺得想法不錯，可以繼續延伸探究。於是我們開始構思，經過一番絞盡腦汁的思考與討論，最後決定由形狀的改變開始研究。我們先用矩形和等腰直角三角形代替原本的方格，觀察會有哪些改變與規律，這樣的想法也開啟了我們這次科展的研究契機。

二、研究目的

(一) 當 m、n 為整數，且 $m≧n$ 時，探討 $m×n$ 三角格子圖，起點 A 往右移 mr_1 格，往上移 nr_2 格，終點 B 往左移 mr_2 格、往下移 nr_1 格，得 4 個新點 C、D、E、F，連接 $\overline{CE}$和$\overline{DF}$後，此 4 點與 A、B，所形成的 T 區塊會包含幾個三角格子？（如圖 1）。

(二) 當 m、n 為整數，且 $m≧n$ 時，探討 $m×n$ 三角格子圖，起點 S 往右移 mr_3 格，往下上移 nr_4 格，終點 P 往左移 mr_4 格、往上移 nr_3 格，得 4 個新點 W、X、Y、Z，連接 $\overline{WY}$和$\overline{XZ}$後，此 4 點與 S、P，所形成的 H 區塊會包含幾個三角格子？（如圖 2）。

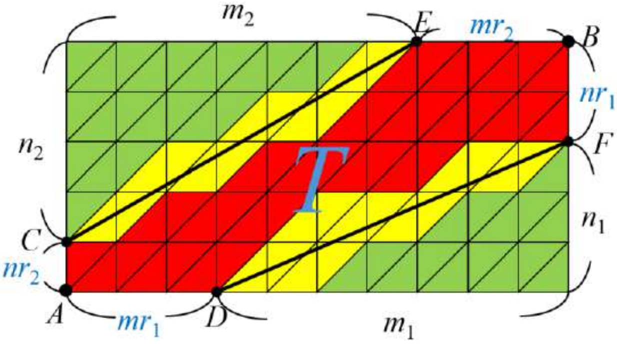


圖 1（由第 1 作者繪製）

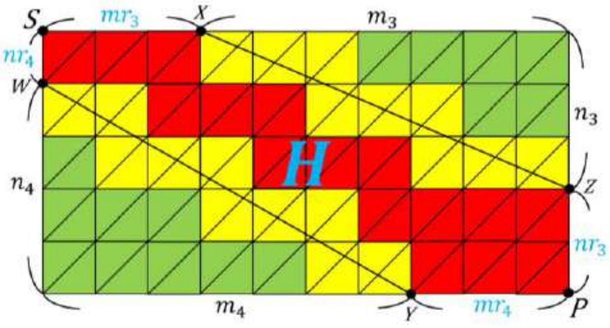


圖 2（由第 2 作者繪製）

貳、研究設備與器材

三角格子圖、直尺、鉛筆、色鉛筆、電腦、*PowerPoint*、*Scratch*。

參、研究過程或方法

在討論問題前我們先定義何謂 $\boxed{m \times n \text{ 三角格子圖}}$。

***m*×*n* 三角格子圖：**

以相同大小的等腰直角三角形密鋪成矩形，再以一格子點 *A* 當起點，往右取 *m* 格為長邊，往上取 *n* 格為寬邊，所形成的矩形我們稱為 *m*×*n* 的三角格子圖，此矩形內部恰被分割成（*m*×*n*）×2 個等腰直角三角形，且 *m* 和 *n* 為正整數。

例：6×4 的三角格子圖

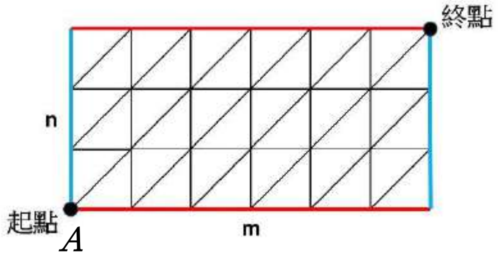


圖 3（由第 1 作者繪製）

一、討論一：T_0

探討 *m*×*n* 三角格子圖中，對角線所經過的三角格子數。

（一）一開始我們為了找出規律性，便先將目標簡化，從對角線 T_0 會經過幾個三角格子觀察。我們畫出 1×1、1×2、……、10×9 至 20×20 三角格子圖的對角線 T_0，觀察對角線 T_0 經過的三角格子數，發現 5×2 的三角格子圖只要經過 90 度旋轉，再水平翻轉就可以變成 2×5 三角格子圖，所以 5×2 和 2×5 三角格子圖中，對角線

T_0 經過的三角格子數會相同。同理可知，6×3 和 3×6 三角格子圖中，對角線 T_0 經過的三角格子數也會相同。為了避免重複探討，我們決定專注探討 $m \geq n$ 的情形，如圖 4、圖 5。

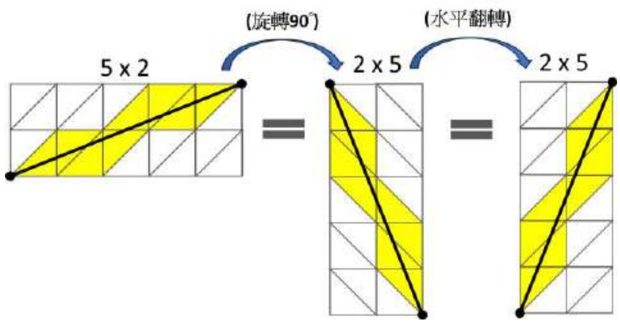


圖 4（由第 3 作者繪製）

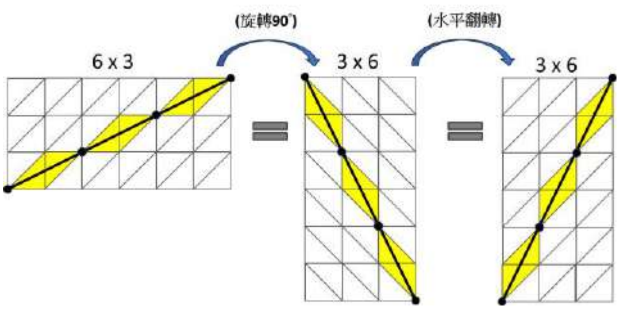


圖 5（由第 3 作者繪製）

（二）我們又考慮到每個 $m \times n$ 三角格子圖的對角線有兩種畫法（如圖 6、圖 7），但發現兩種相異對角線所經過的三角格子數量不同，故這次我們就先探討對角線是由左下角到右上角的情形。

例：6×4 的三角格子圖(經過格子點)

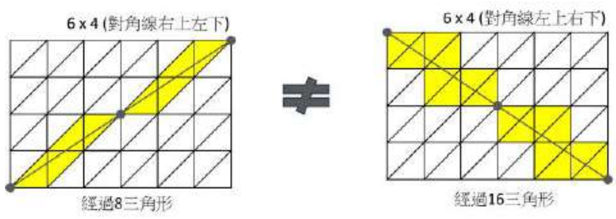


圖 6（由第 3 作者繪製）

例：5×3 的三角格子圖(無經過格子點)

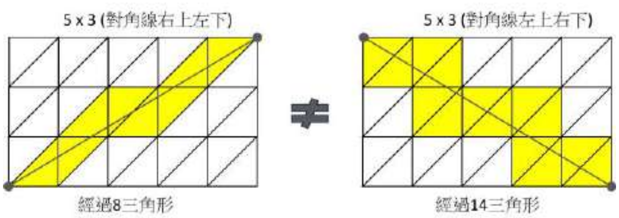


圖 7（由第 3 作者繪製）

（三）接著，我們發現 $m \times n$ 的三角格子圖扣除四條邊界，內部會有 $(m-1)$ 條縱線，$(n-1)$ 條橫線，若從左下角的格子點 A 當起點，右上角格子點 B 為終點，畫出的對角線必定會經過 $(m-1)$ 條縱線，$(n-1)$ 條橫線，有時也會經過斜邊。而每經過一條線就會進入一個新的三角格（沒通過線時，就不會進入新的三角格）。同時我們也發現，對角線有時會經過「格子點」（縱線與橫線的交點），每經過一個格子點，就會少經過一條縱線或橫線，對角線 T_0 經過的三角格就會少 2 個。由上述觀察之結果，我們分成二種類型來分析討論：①對角線 T_0 不經過格子點；②對角線 T_0 經過格子點。嘗試用三角格子圖的長邊 m 和寬邊 n 來推測其對角線 T_0 會經過幾個三角格，並找出適用的公式，說明如下：

4×3 三角格子圖(無格子點)

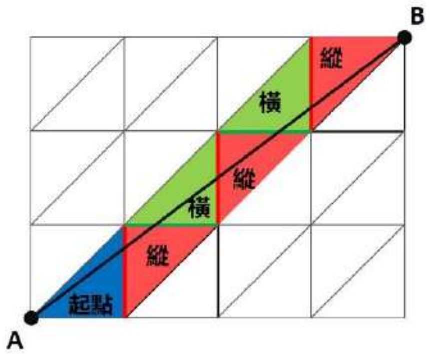


圖 8（由第 1 作者繪製）

以圖 8 為例，對角線 T_0 從起點 A 到終點 B，

會通過：4－1 條縱線，3－1 條橫線

我們發現 T_0 每經過 1 條縱線，可視為經過 2 個三角格

此時經過的橫線可以不用考慮

◈對角線經過的三角格子數:

$$\Big(\underbrace{\mathbf{4-1}}_{T_0\text{經過的縱線}}\Big)\times 2=\ \mathbf{6}\ \textbf{格}$$

◈對角線 T_0 經過的三角格子數 ＝ 2× $(m-1)$

7×5 三角格子圖(無格子點)

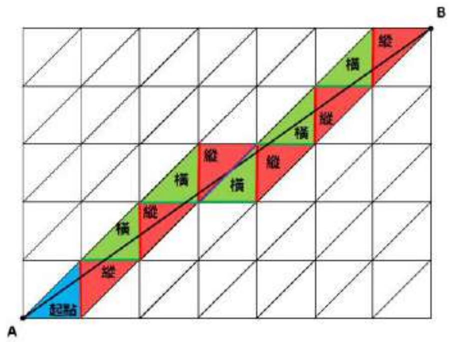


圖 9（由第 1 作者繪製）

再舉圖 9 觀察，對角線 T_0 從起點 A 到終點 B，

會通過：7－1 條縱線，5－1 條橫線

◈對角線經過的三角格子數:

$$\Big(\underbrace{\mathbf{7-1}}_{T_0\text{經過的縱線}}\Big)\times 2=\mathbf{12}\ \textbf{格}$$

◈對角線 T_0 經過的三角格子數 ＝ 2× $(m-1)$

9×6 三角格子圖(有格子點)

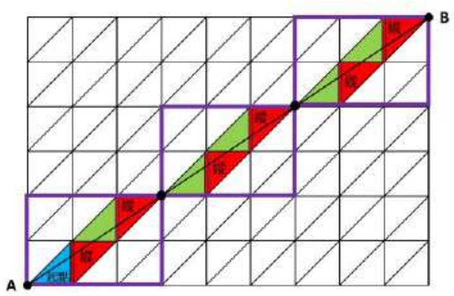


圖 10（由第 1 作者繪製）

再舉圖 10 觀察，對角線 T_0 會經過 2 個格子點，

格子點把對角線 T_0 平分成 3 段 T_0'，

T_0' 為 $\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}$ 三角格子圖的對角線。

◈對角線 T_0 經過的三角格子數 2x$[m-GCD(m,n)]$

＝ T_0' 經過的三角格子數×3 倍

$$=2\times\Big(\underbrace{\frac{9}{3}-\mathbf{1}}_{T_0'\text{ 經過的縱線}}\Big)\times\mathbf{3}\ =\ 2\times\Big(\underbrace{\mathbf{9}}_{m}-\underbrace{\mathbf{3}}_{GCD(m,n)}\Big)=\ \mathbf{12}\ \textbf{格}$$

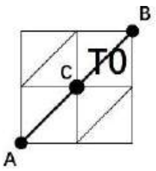
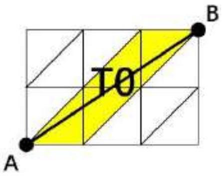
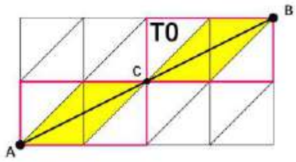
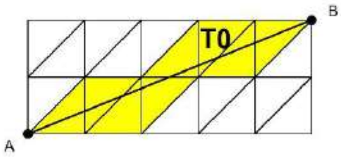
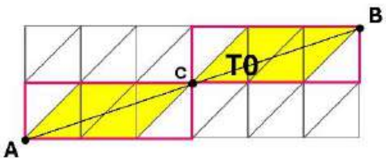
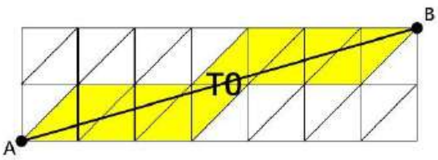
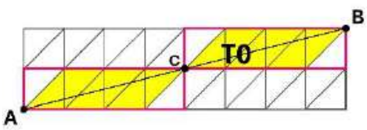
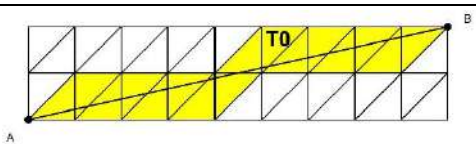
◈推測對角線 T_0 經過的三角格子數公式

= 2×$[m-GCD(m,n)]$

（四）為驗證 T_0 公式推論是否為真，我們繼續畫更多的圖來觀察不同的 m、n 值下，m 和 n 的最大公因數與 T_0 通過的黃色三角格子數之間的關係，整理如表 2：

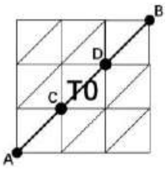
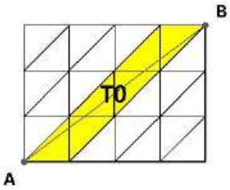
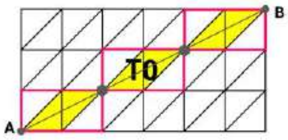
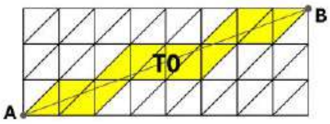
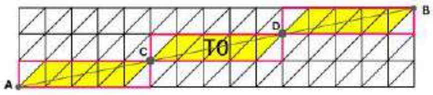
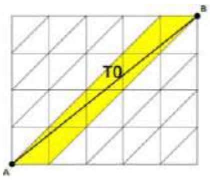
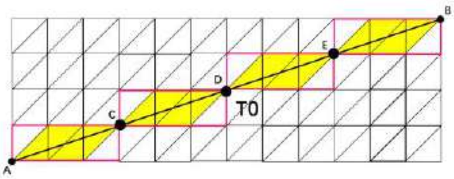
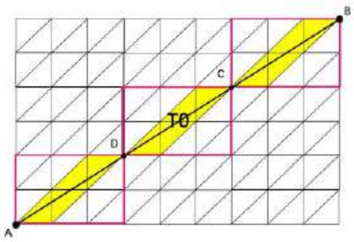
先取 n=2 且 m≧2 的三角格子圖數張，觀察之發現整理如表 1：

表 1（由第 2 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m \times n$	格子點(個)	$GCD(m,n)$	經過的三角形(個)
	2×2	1	2	0
	3×2	0	1	4
	4×2	1	2	4
	5×2	0	1	8
	6×2	1	2	8
	7×2	0	1	12
	8×2	1	2	12
	9×2	0	1	16

（續下頁）

表 2（由第 1 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m \times n$	格子點(個)	$GCD(m,n)$	經過的三角形(個)
	3×3	2	3	0
	4×3	0	1	6
	6×3	2	3	6
	8×3	0	1	14
	15×3	2	3	24
	5×4	0	1	8
	12×4	3	4	16
	9×6	2	3	12

（五）我們由表 2 整理出以下結論：

1. 當 m、n 互質時，$GCD(m,n)=1$，且 $m\geqq n$，T_0 必不經過格子點，但是會經過 $(m-1)$ 條縱線。每經過一條縱線就會經過 2 個三角格，所以 T_0 經過的三角格子數為 $2\times(m-1)$。

2. 當 m、n 不互質時，$GCD(m,n)=k>1$，且 $m\geqq n$，此時 $GCD(\frac{m}{k},\frac{n}{k})=1$。

   T_0 被分為 k 段，有 $k-1$ 個格子點，每 1 段的對角線為 T_0'，

   可將 $m\times n$ 的三角格視為 k 個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖，

   由 1 可知，每個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖中的 T_0' 經過的三角格子數 $=2\times(\frac{m}{k}-1)$。

3. 由 1、2 知，$T_0=T_0'\times k=2\times(\frac{m}{k}-1)\times k=2\times(m-k)=2\times[m-GCD(m,n)]$

【結論一】經過公式與圖形的驗證，我們得到當 m、n 為整數，且 $m\geqq n$ 時，在 $m\times n$ 的三角格子圖中 T_0 經過的黃色的三角格子數的計算公式為：

$$\boxed{T_0=2\times[m-GCD(m,n)]}$$

二、討論二：T_1 區塊

探討 $m×n$ 三角格子圖，沿對角線方向形成的 T 區塊會涵蓋幾個三角形。

（一）首先，我們先探討起點 A 往右、往上，終點 B 往左、往下各移 1 格時的情形。

在探討問題前，我們先定義 T_1 區塊和直線 U_1、L_1。

1. T_1 區塊：在 $m×n$ 三角格子圖中，起點 A 往上、往右各移 1 格，終點 B 往左、往下各移 1 格，得 4 個新點 C_1、D_1、E_1、F_1，連接此 4 點與 A、B，所形成的區塊稱為 T_1。
2. 直線 U_1、L_1：連接 C_1、E_1 兩點成直線 U_1，連接 D_1、F_1 兩點成直線 L_1。

以圖 11 例：5×4 的三角格子圖（T_0 為原來對角線）

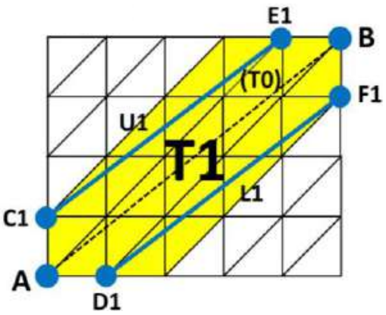


圖 11（由第 2 作者繪製）

（二）由【結論一】知，在 $m×n$ 三角格子圖中，T_0 *經過*的三角格子數為 $\boxed{2×[m-GCD(m,n)]}$。我們認為 T_1 區塊中的 U_1、L_1 也可以視為 m 和 n 各減去 1 的特殊 T_0 表現形式，因此推論 U_1、L_1 經過的三角格子數可以套用【結論一】的公式，只是必須將公式中的 m、n 分別以 $m-1$ 和 $n-1$ 代入計算，也就是將紅色矩形中的對角線 U_1 視為 $(m-1)×(n-1)$ 的三角格子圖中的 T_0，L_1 亦同，如圖 12 所示：

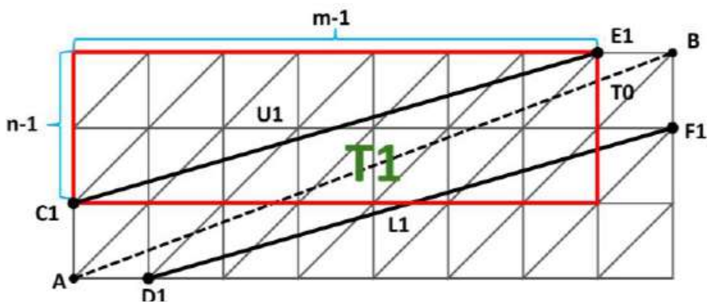


圖 12（由第 3 作者繪製）

（三）按此想法，我們畫出 $m≧3$ 與 $n≧3$ 的三角格子圖中的 T_1 區塊數張，發現每個 T_1 區塊都呈現點對稱，且 T_1 區塊內的三角形可分成 4 類，為了方便討論，我們以顏色區分 T_1 區塊中，不同線段經過與未經過的三角形，以 5x3 為例，如圖 13

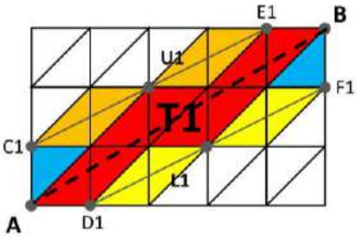
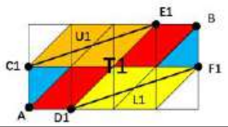
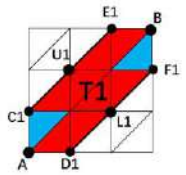
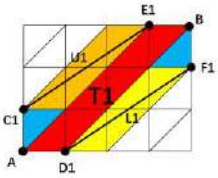
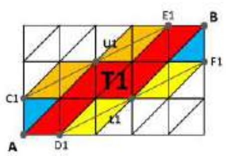
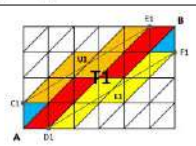
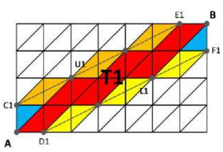


圖 13（由第 2 作者繪製）

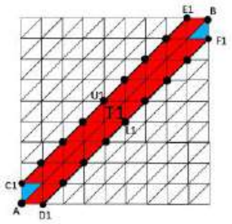
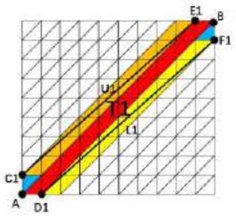
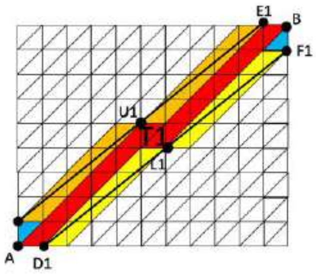
1. U_1 經過的三角形為橘色。
2. L_1 經過的三角形為黃色。
3. T_1 區塊內僅有 A、B 兩點連線（虛線）經過的三角形為紅色。
4. 完全沒有線段經過的三角形為藍色。

（四）接下來，我們延續討論一的模式，將觀察的結果整理如表 3：

表 3（由第 2 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m×n$	$(m-1)×(n-1)$	格子點 (個)	$GCD(m-1,n-1)$	橘色 ⊿	黃色 ⊿	紅色 ⊿	藍色 ⊿
	4×2	3×1	0	1	4	4	4	2
	3×3	2×2	2	2	0	0	8	2
	4×3	3×2	0	1	4	4	6	2
	5×3	4×2	2	2	4	4	8	2
	6×4	5×3	0	1	8	8	8	2
	7×4	6×3	4	3	6	6	12	2

（續下頁）

三角格子圖	$m\times n$	$(m-1)\times(n-1)$	格子點(個)	$GCD(m-1,n-1)$	橘色⊿	黃色⊿	紅色⊿	藍色⊿
	9×9	8×8	14	8	0	0	32	2
	10×9	9×8	0	1	16	16	18	2
	11×9	10×8	2	2	16	16	20	2

（五）由表 3 可知，U_1、L_1 經過的三角格子數確實可以套用【結論一】的公式計算出來，只要將原來 m、n 的值改為 $m-1$ 與 $n-1$ 即可，公式如下：

$$\boxed{2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]}$$

以圖 14 中，7×4 的三角格子圖為例：

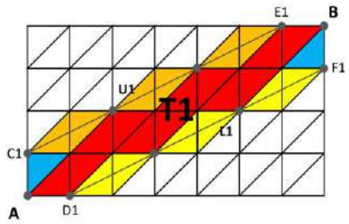


圖 14（由第 2 作者繪製）

U_1 經過的橘色三角格子數為

$2\times[(7-1)-GCD(7-1,4-1)]$

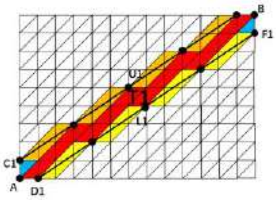
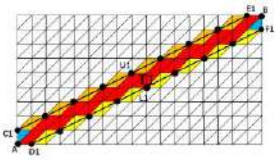
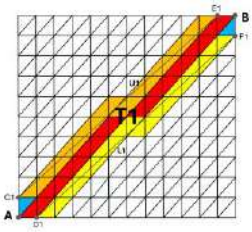
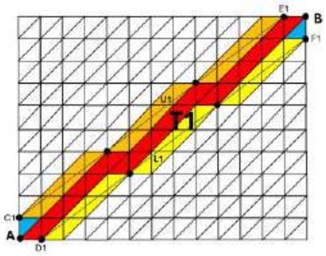
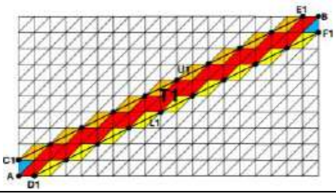
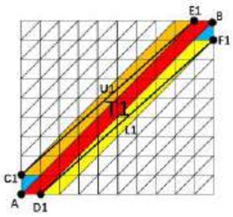
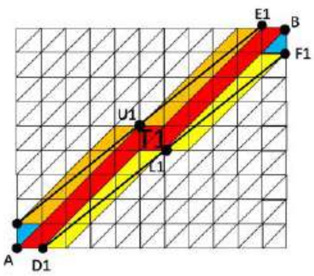
$=2\times[6-GCD(6,3)]$

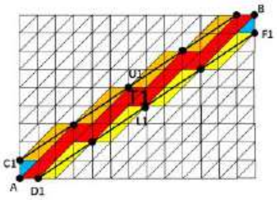
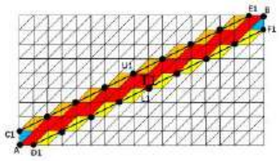
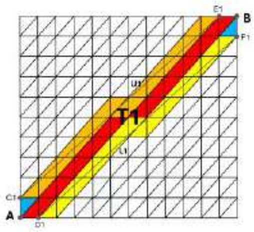
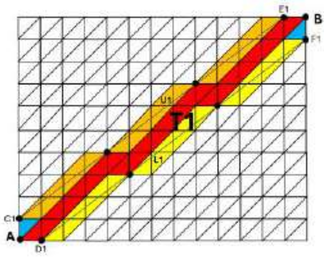
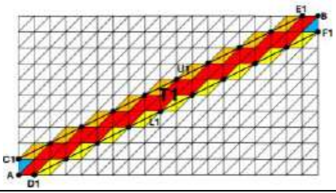
$=2\times[6-4]$

$=6$

（六）同時，我們也發現完全沒有直線通過的三角形，也就是藍色三角形的個數固定有 2 個。如此一來，我們便可計算出橘色、黃色和藍色三角形的個數。但是唯獨紅色三角形，也就原來 T_0 經過的三角格子數還觀察不出規律，於是我們便繼續畫圖觀察 m、n 值更大的三角格子圖，並將觀察結果整理如表 4：

表 4（由第 2 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m \times n$	$(m-1)\times(n-1)$	格子點 (個)	GCD $(m-1,n-1)$	橘色⊿	黃色⊿	紅色⊿	藍色⊿
	13×9	12×8	6	4	16	16	24	2
	17×9	16×8	14	8	16	16	32	2
	12×10	11×9	0	1	20	20	20	2
	13×10	12×9	4	3	18	18	24	2
	19×10	18×9	16	9	18	18	36	2
	10×9	9×8	0	1	16	16	18	2
	11×9	10×8	2	2	16	16	20	2

三角格子圖	$m \times n$	$(m-1)\times(n-1)$	格子點(個)	GCD $(m-1,n-1)$	橘色⊿	黃色⊿	紅色⊿	藍色⊿
	13×9	12×8	6	4	16	16	24	2
	17×9	16×8	14	8	16	16	32	2
	12×10	11×9	0	1	20	20	20	2
	13×10	12×9	4	3	18	18	24	2
	19×10	18×9	16	9	18	18	36	2

（七）在說明觀察表 4 的發現之前，為了方便點數紅色三角形的個數，我們會先點數 2 個紅色三角形合併形成的平行四邊形個數後（如圖 15、圖 16 中綠色框線），再將結果乘以 2，便可得到紅色三角形的個數。同時，我們也觀察到以下結果：

1. 在沒有格子點的三角格子圖中，紅色平行四邊形的個數，恰好等於 n 值，也就是每一個橫列可以找到一個紅色平行四邊形。
2. 有格子點的三角格子圖中，在橫列之中若有出現格子點，該列會多一個紅色平行四邊形，也就是每 2 個格子點，會多一個紅色平行四邊形。例如該格子圖共有 4 個格子點，則會多 4÷2=2 個紅色平行四邊形。以下分別舉例說明：

5×4

無格子點

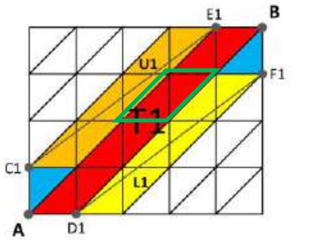


圖 15（由第 3 作者繪製）

n=4，格子點=0

紅色平行四邊形=4

紅色三角形=4×2=8

7×4

有格子點

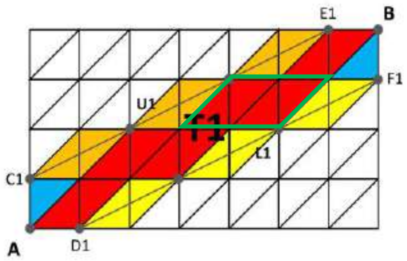


圖 16（由第 3 作者繪製）

n=4，格子點=4

紅色平行四邊形=n+格子點÷2

=4+4÷2

=6

紅色三角形=6×2=12

（八）由（七）可知，紅色三角形數量算法為：$\boxed{2\times(n+\text{格子點}\div 2)}$

而格子點的算法為：$\boxed{2\times[GCD(m-1,n-1)-1]}$。

因此，紅色三角形數量的計算公式整理如下：

$2\times\{n+2\times[GCD(m-1,n-1)-1]\div 2\}=2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}$

（九）綜上所述，我們將 4 種顏色的三角形計算公式條列如下：

橘色三角形=黃色三角形=$2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]$

紅色三角形=$2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}$

藍色三角形=2

將以上結果合併後，可得到 T_1 區塊的三角格子數之計算為：

$2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]\times 2+2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}+2$

$=4(m-1)-4GCD(m-1,n-1)+2n+2\times GCD(m-1,n-1)-2+2$

$=4m-4+2n-2\times GCD(m-1,n-1)$

$=2\times[2m+n-2-GCD(m-1,n-1)]$

【結論二】經過公式與圖形的驗證，我們確定 T_1 區塊三角格子數的計算公式為：

$$\boxed{T_1=2\times[2m+n-2-GCD(m-1,n-1)]}$$

三、討論三：T_2 區塊

探討 $m \times n$ 三角格子圖，沿對角線方向形成的 T_2 區塊會經過幾個三角格子。

（一）在探討問題前，我們先定義 T_2 區塊和直線 U_2、L_2。

1. T_2 區塊：在 $m \times n$ 三角格子圖中，起點 A 往上、往右各移 2 格，終點 B 往左、往下各移 2 格，得 4 個新點 C_2、D_2、E_2、F_2，連接此 4 點與 A、B，所形成的區塊稱為 T_2。
2. 直線 U_2、L_2：連接 C_2、E_2 兩點成直線 U_2，連接 D_2、F_2 兩點成直線 L_2。

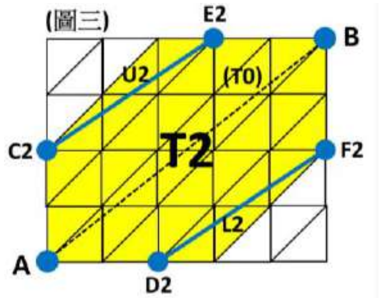


圖 17（由第 1 作者繪製）

（二）一開始我們想延續前面找 T_1 區塊公式的方法，來嘗試推導 T_2 區塊經過的三角格子數公式，我們同前面方法先畫圖取樣 3×3、4×3、……、20×19 至 20×20 三角格子圖中的 T_2 區塊來觀察，發現每個 T_2 區塊均呈現點對稱。但經過許多嘗試，發現不易觀察出規則。後來我們討論後又有了新想法，改朝向逆向思考的方式來推論與研究。

逆向推論：先找出 T_2 區塊未經過的三角格子數，再用 $m \times n$ 三角格子圖的全部三角格子數扣掉 T_2 區塊未經過的三角格子數，即可得 T_2 區塊經過的三角格子數。

（三）**【推導 T_2 公式過程】** $m \times n$ 三角格子圖（如圖 18）中：

1. 可將直線 L_2 視為 $(m-2)\times(n-2)$ 三角格子圖（以下稱紫色矩形）的對角線 T_0，再用 T_0 公式算出直線 L_2 經過的黃色三角格子數：
$2[(m-2)-GCD(m-2,n-2)]$。
2. 右下紫色矩形中，排除直線 L_2 經過的黃色三角格，發現左側紅色三角格（編號 1 至 8）和右側綠色三角格（編號 1 至 8）的三角格子數相同且對稱，皆 8 個三角格子。

3. 同理，在左上紫色矩形中，左側綠色三角格（編號①至⑧）和右側紅色三角格（編號①至⑧）的三角格子數也相同且對稱，皆 8 個三角格子。

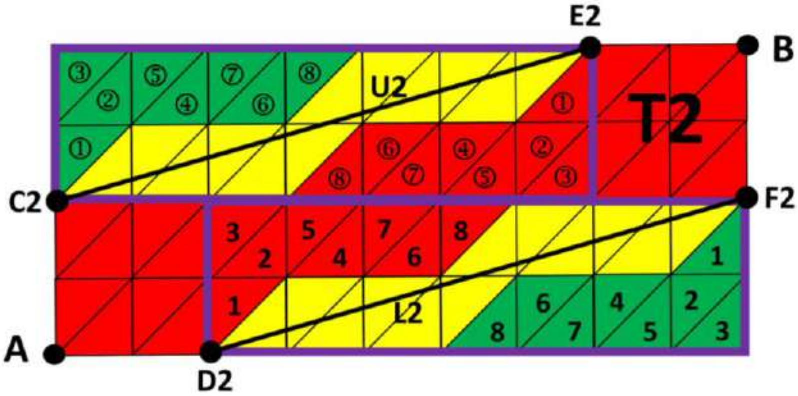


圖 18（由第 1 作者繪製）

4. T_2 區塊未經過的三角格子數（綠色三角格）

=編號①至⑧的綠色三角格子 + 編號 1 至 8 的綠色三角格子

=編號 1 至 8 的紅色三角格子 + 編號 1 至 8 的綠色三角格子

=右下紫色矩形的完整三角格子數－L_2 經過的三角格子

$=\{(m-2)\times(n-2)\times2-2[(m-2)-GCD(m-2,n-2)]\}\div2\times2$

$=2[m\times n-4m-2n+6+GCD(m-2,n-2)]$

5. T_2 區塊經過的三角格子數(紅色三角格子+黃色三角格子)

=$m\times n$ 三角格子圖的全部三角格子－T_2 區塊未經過的三角格子(綠色三角格子)

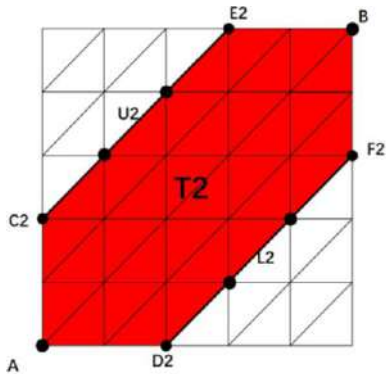
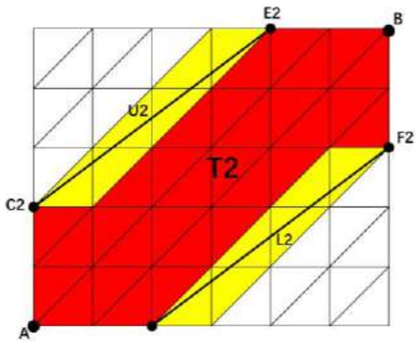
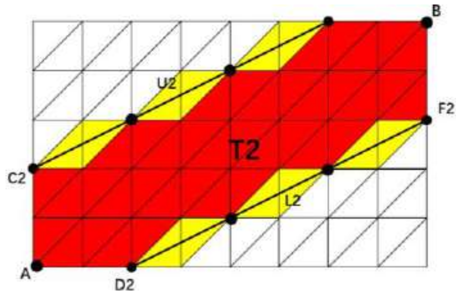
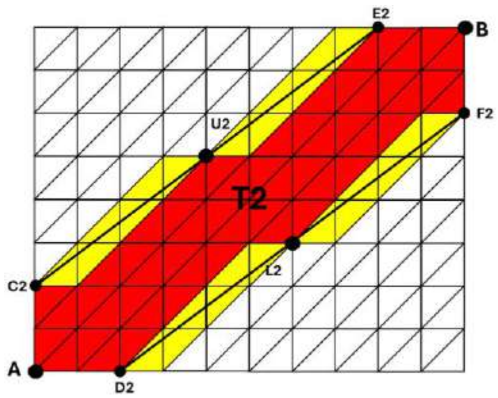
$=2m\times n-2[m\times n-4m-2n+6+GCD(m-2,n-2)]$

$=2[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]$

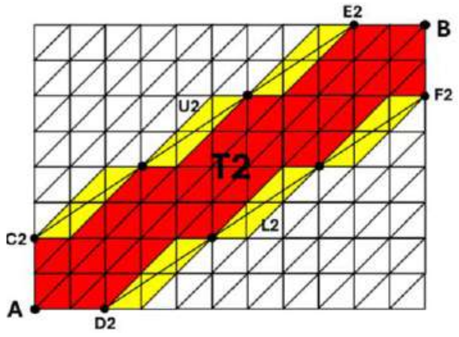
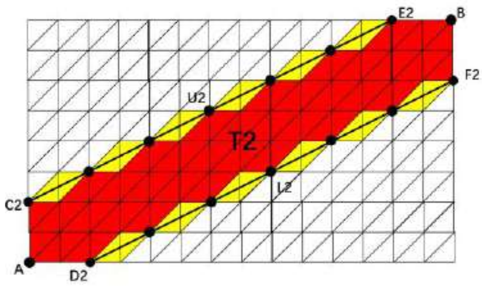
（四）為驗證公式，我們繪製許多的 T_2 三角格子圖，利用點數與代入公式二種方法來算經過的三角格子數，再交互觀察答案是否一致。驗證圖例眾多，下表 5 僅列舉幾個圖例來分析說明。

【驗證公式是否正確】:

表 5（由第 1 作者繪製、整理）

$m\times n$ 的三角格子圖	$m\times n$	$GCD(m-2,n-2)$	T_2 區塊經過的三角格子數
	5×5	3	點數 黃+紅 =0+32 =32 格 代入公式 T_2=2[3m+2n−6− $GCD(m-2,n-2)$] =2×(3×5+2×5−6−3) =32 格
	6×5	1	點數 黃+紅 ＝6×2+30 ＝42 格 代入公式 T_2=2[3m+2n−6− $GCD(m-2,n-2)$] =2×(3×6+2×5−6−1) =42 格
	8×5	3	點數 黃+紅 ＝6×2+38 ＝50 格 代入公式 T_2＝2[3m+2n−6− $GCD(m-2,n-2)$] ＝2×(3×8+2×5 −6−3) ＝50 格
	10×8	2	點數 黃+紅 ＝12×2+52 ＝76 格 代入公式 T_2＝2[3m+2n−6− $GCD(m-2,n-2)$] ＝2×(3×10+2×8 −6−2) ＝76 格

（續下頁）

$m\times n$ 的三角格子圖	$m\times n$	GCD $(m-2,n-2)$		T_2 區塊經過的三角格子數
	11×8	3	點數	黃+紅 $=12\times2+56$ $=$80 格
			代入公式	$T_2=2[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]$ $=2\times(3\times11+2\times8-6-3)$ $=$80 格
	14×8	6	點數	黃+紅 $=12\times2+68$ $=$92 格
			代入公式	$T_2=2[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]$ $=2\times(3\times14+2\times8-6-6)$ $=$92 格

【結論三】經過公式與點數的驗證，確定 T_2 區塊經過的三角格子數的計算公式為：

$$\boxed{2\times[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]}$$

（五）此時我們注意到，之後起點 A 與終點 B 同時平移 3 格、4 格、5 格、……、r 格後，形成的 T_3、T_4、T_5、……、T_r 區塊，甚至平移的格子數皆不相同時，應該都能透過 T_0 公式，以逆向思考的方式來推導出公式，過程會更加精簡。

四、討論四：*T* 區塊

探討 $m\times n$ 三角格子圖，當起點 A 與終點 B 平移的格子數皆不相同時，所形成的 T 區塊會包含幾個三角格子。

（一）在探討問題前，我們先定義 T 區塊與 $m\times n$ 三角格子圖中的各個代號。

1. T 區塊：

   在 $m\times n$ 三角格子圖，起點 A 往右移 mr_1 格，往上移 nr_2 格，終點 B 往左移 mr_2 格、往下移 nr_1 格，得 4 個新點 C、D、E、F，連接$\overline{CE}$、$\overline{DF}$後與 A、B，所形成的封閉區域，即圖 20 中的黃色與紅色三角格子。

2. $m_1=m-mr_1$；$m_2=m-mr_2$；$n_1=n-nr_1$；$n_2=n-nr_2$。

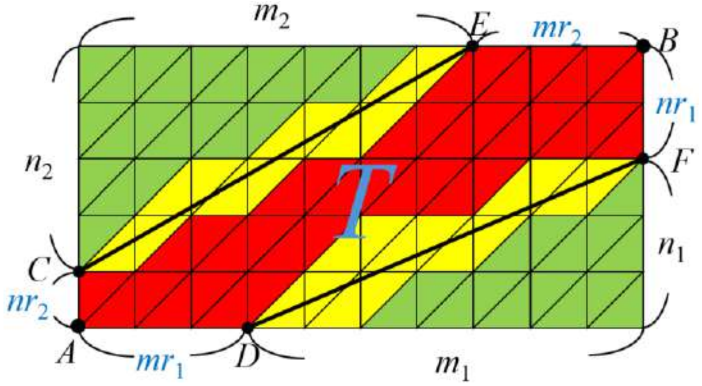


圖 20（由第 1 作者繪製）

（二）我們從【結論三】已經知道如何求出 m×n 三角格子圖中，對角線 T_0 經過的三角格子數，同時也觀察到，對角線 T_0 未經過的綠色三角格子呈現點對稱，只要將 m×n 全部的三角格子減去對角線 T_0 經過的三角格子，便能得到對角線 T_0 未經過的綠色三角格子數，如圖 19。

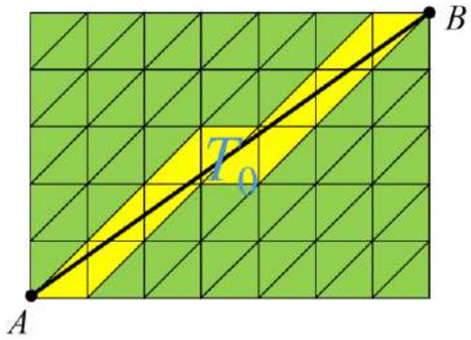


圖 19（由第 1 作者繪製）

（三）按此想法，我們便利用 T_0 公式分別求出圖 20 中，$\overline{CE}$、$\overline{DF}$經過的黃色三角格子數，再利用其點對稱的特性，分別求出左上角與右下角的綠色三角格子數，再用 m×n 矩形中全部的三角格子減出綠色三角格子數，便能得到 T 區塊中的三角格子數。接下來說明公式之推導過程。

（四）首先，我們先利用【結論一】中的 T_0 公式，求出圖 21 中紫色矩形中的黃色三角格數，再求出紫色矩形的內的三角格子數，減去黃色三角形後再除以 2，便能得到紫色矩形內的綠色三角格子數，過程如下：

1.紫色矩形內的三角格子數＝$2\times m_1\times n_1$……①

2.黃色三角格子數＝$2\times[m_1-GCD(m_1, n_1)]$……②

3.由①－②得 $2\times m_1\times n_1-2\times[m_1-GCD(m_1, n_1)]$……③

4.由③÷2 得 $m_1\times n_1-[m_1-GCD(m_1, n_1)]$

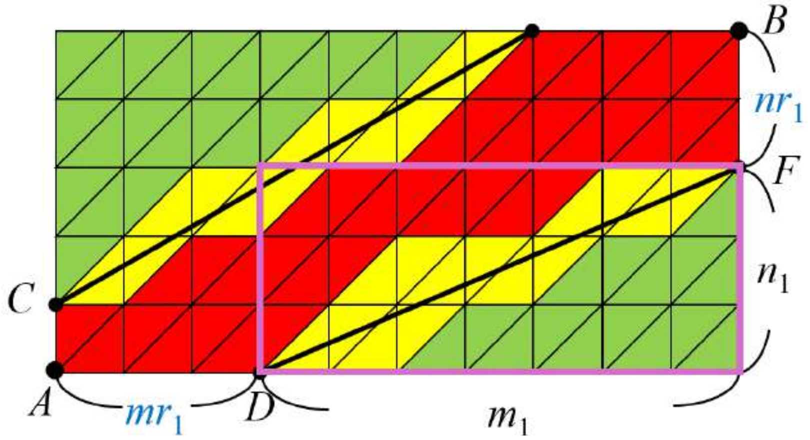


圖 21（由第 1 作者繪製）

（五）接著我們利用相同的方法，求出中藍色矩形中的綠色三角格子數為

$m_2 \times n_2 - [m_2 - GCD(m_2, n_2)]$。

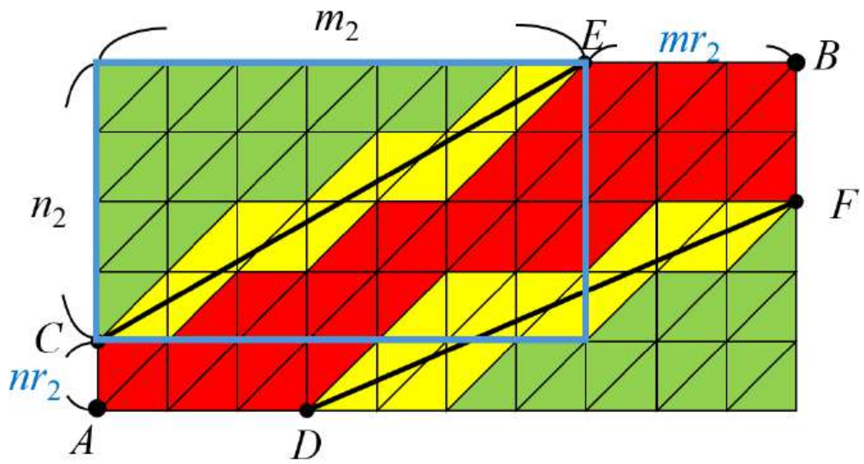


圖 22（由第 1 作者繪製）

（六）最後，我們再用全部的三角格子總數減去紫色和藍色矩形中的綠色三角格，過程如下：

$2 \times m \times n - \{m_1 \times n_1 - [m_1 - GCD(m_1, n_1)] + m_2 \times n_2 - [m_2 - GCD(m_2, n_2)]\}$

$= 2mn - \{m_1n_1 - m_1 + GCD(m_1, n_1) + m_2n_2 - m_2 + GCD(m_2, n_2)\}$

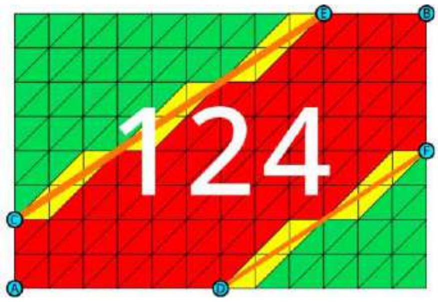
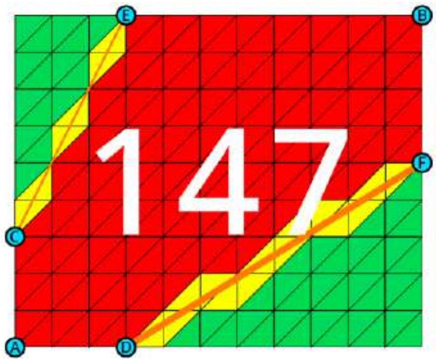
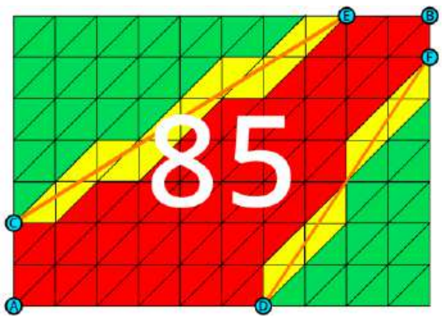
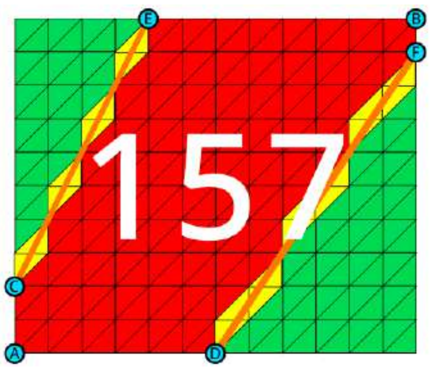
$= 2mn - \{m_1(n_1 - 1) + m_2(n_2 - 1) + GCD(m_1, n_1) + GCD(m_2, n_2)\}$

$= 2mn - m_1(n_1 - 1) - m_2(n_2 - 1) - GCD(m_1, n_1) - GCD(m_2, n_2)$

（七）其中，當 n_1 或 n_2 的值大於 m_1 或 m_2 時，公式中的 m_1 或 m_2 就要與 n_1 或 n_2 交換，也就是 m_1 或 m_2 的值代表較大的數。

（八）接下來，我們利用畫圖點數和代入公式的方式來交叉驗證，確定公式正確，表 6 即我們整理的幾個例子：

表 6（由第 3 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m \times n$	$m_1 \times n_1$	$m_2 \times n_2$	$GCD(m_1, n_1)$	$GCD(m_2, n_2)$
	12×8	6×4	9×6	2	3
	11×9	8×5	3×6	1	3
	10×7	4×6	8×5	2	1
	12×10	6×9	4×8	3	4

五、討論五：H_0

探討 m×n 三角格子圖中，另一方向對角線 H_0(左上角到右下角)所經過的三角格子數。

（一）在探究 T_0 到 T 區塊會經過幾個三角格子數的問題中，雖然為了避免重複討論，我們只專注探討 $m≧n$ 的情形，但過程中我們仍有幾個重要發現：

1.在 m×n 三角格子圖中，如果當 $m≧n$ 時，T_0 的公式只跟經過的**縱線**有關，

$T_0=2×[m-GCD（m,n）]$

2.在 m×n 三角格子圖中，如果當 $n≧m$ 時，T_0 的公式只跟經過的**橫線**有關，

$T_0=2×[n-GCD（m,n）]$

3.所以我們推測另一方向對角線 H_0 的公式是否和經過的**斜線**有關呢？

於是我們從這個推測開始觀察，繼續探討 H_0 經過三角格子數的變化與規律。

（二）從【討論一】的探究中可知，5×2 的三角格子圖只要經過 90 度旋轉，再水平翻轉就可以變成 2×5 三角格子圖，所以 5×2 和 2×5 三角格子圖中，對角線 H_0 經過的三角格子數會相同。為避免重複探討，我們依舊專注探討 $m≧n$ 的情形即可。

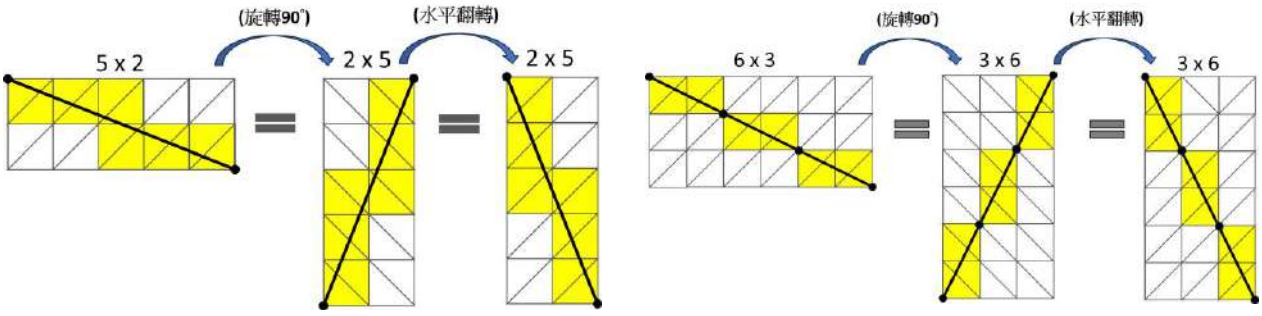


圖 23（由第 3 作者繪製） **圖 24（由第 3 作者繪製）**

（三）我們發現 m×n 三角格子圖中，H_0 每經過一條斜邊就會經過 2 個三角格，而每個方格都有一條斜邊，所以我們只要知道 H_0 經過幾個方格再乘 2 倍就是答案。

而 $m×n$ 的三角格子圖扣除四條邊界，內部會有$(m-1)$條縱線，$(n-1)$條橫線，若從左上角的格子點 S 當起點，右下角格子點 P 為終點，畫出的對角線必定會經過$(m-1)$條縱線，$(n-1)$條橫線，每經過一條線就會進入一個新的方格，每經過一個「格子點」，就會少經過一個方格。

由上述觀察之結果，我們分成二種類型來分析討論：

①對角線 H_0 不經過格子點；②對角線 H_0 經過格子點。說明如下：

4×3 三角格子圖(無格子點)

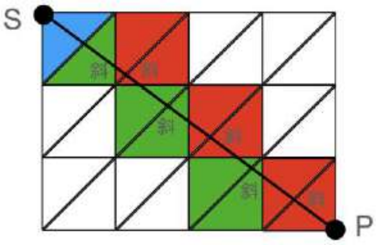


圖 25（由第 1 作者繪製）

以為圖 25 例，對角線 H_0 從起點 S 到終點 P，

通過 4－1 條縱線➔會經過 4－1 個方格

通過 3－1 條橫線➔會經過 3－1 個方格

H_0 經過 1 個方格，就會經過 1 條斜邊，也會經過 2 個三角格

◈對角線 H_0 經過的三角格子數:

$$〔(\underbrace{\mathbf{4-1}}_{\text{經過縱線產生的方格}})+(\underbrace{\mathbf{3-1}}_{\text{經過橫線產生的方格}})+\underbrace{1}_{\text{起點方格}}〕\times 2= \textbf{12 格}$$

◈對角線 H_0 經過的三角格數＝$2\times〔(m-1)+(n-1)+1〕$

$$=2\times(m+n-1)$$

9×6 三角格子圖(有格子點)

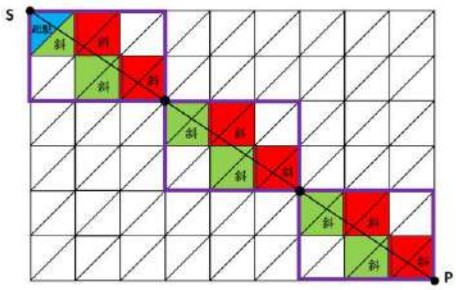


圖 26（由第 1 作者繪製）

再舉圖 26 觀察，對角線 H_0 會經過 2 個格子點，

格子點把對角線 H_0 平分成 3 段 H_0'，

H_0' 為 $\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}$ 三角格子圖的對角線。

◈對角線 H_0 經過的三角格子數

＝ H_0' 經過的三角格子數×3 倍

$$=\mathbf{2\times(\frac{9}{3}+\frac{6}{3}-1)\times 3}$$

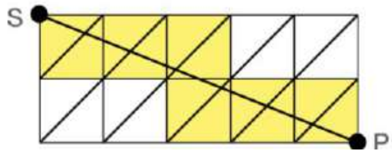
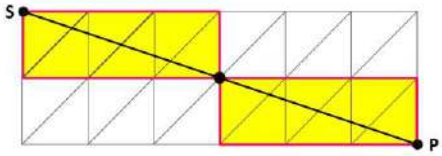
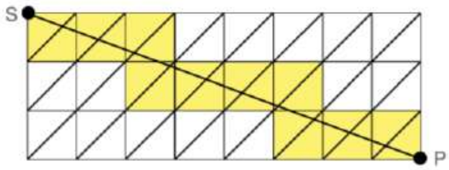
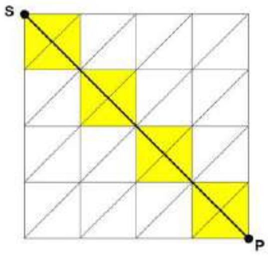
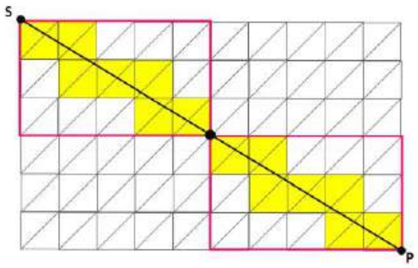
$$=\mathbf{2\times(\underbrace{9}_{m}+\underbrace{6}_{n}-\underbrace{3}_{GCD(m,n)})=24\text{ 格}}$$

◈推測對角線 H_0 經過的三角格子數公式

$= 2\times[m+n-GCD(m,n)]$

（四）驗證 H_0 公式推論是否為真，我們繼續畫更多的圖來觀察不同的 m、n 值下，m 和 n 的最大公因數與 H_0 通過的黃色三角格子數之間的關係，整理如下：

表 7（由第 1 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m \times n$	格子點(個)	$GCD(m,n)$	經過的三角形(個)
	5×2	0	1	12
	6×2	1	2	12
	8×3	0	1	20
	4×4	3	4	8
	10×6	1	2	28

（五）我們由表 7 整理出以下結論：

1. 當 m、n 互質時，$GCD（m,n）=1$，且 $m \geqq n$，H_0 必不經過格子點，但是會經過 $(m+n-1)$條斜邊。每經過一條斜邊會經過 2 個三角格，所以 H_0 經過的三角格子數為 $2\times(m+n-1)$ 。

2. 當 m、n 不互質時，$GCD（m,n）=k>1$，且 $m \geqq n$，此時 $GCD（\frac{m}{k}, \frac{n}{k}）=1$。$H_0$ 被分為 k 段，有 $k-1$ 個格子點，每 1 段的對角線為 H_0'，

   可將 $m \times n$ 的三角格視為 k 個 $\frac{m}{k} \times \frac{n}{k}$ 三角格子圖，

由 1 可知，每個 $\frac{m}{k}$ × $\frac{n}{k}$ 三角格子圖中的 H_0'經過的三角格子數＝$2\times(\frac{m}{k}+\frac{n}{k}-1)$。

3. 由 1、2 知，$H_0 = H_0' \times k = 2\times(\frac{m}{k}+\frac{n}{k}-1)\times k = 2\times(m+n-k) = 2\times[m+n-GCD(m,n)]$

【結論五】經過公式與圖形的驗證，我們得到當 m、n 為整數，且 $m \geqq n$ 時，在 $m\times n$ 的三角格子圖中 H_0 經過的黃色的三角格子數的計算公式為：

$$\boxed{H_0 = 2\times[m+n-GCD(m,n)]}$$

六、討論六：*H* 區塊

探討 $m\times n$ 三角格子圖，當起點 S 與終點 P 平移的格子數皆不相同時，所形成的 H 區塊會包含幾個三角格子。

（一）在探討問題前，我們先定義 H 區塊與 $m\times n$ 三角格子圖中的各個代號。

1. H 區塊：

在 $m\times n$ 三角格子圖，起點 S 往右移 mr_3 格，往下移 nr_4 格，終點 P 往左移 mr_4 格、往上移 nr_3 格，得 4 個新點 W、X、Y、Z，連接 $\overline{WY}$、$\overline{XZ}$ 後與 S、P，所形成的封閉區域，即圖 27 中的黃色與紅色三角格子。

2. $m_3 = m - mr_3$；$m_4 = m - mr_4$；$n_3 = n - nr_3$；$n_4 = n - nr_4$。

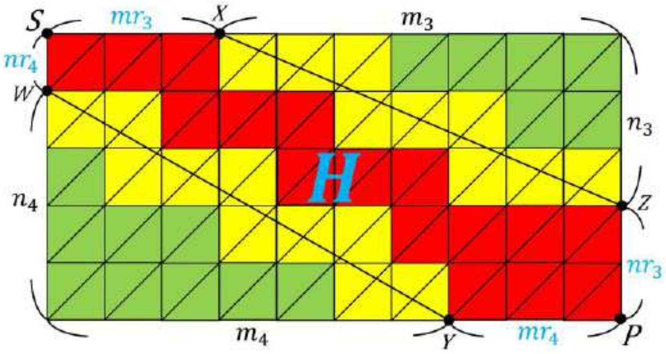


圖 27（由第 3 作者繪製）

（二）我們從【結論三】已經知道如何求出 $m\times n$ 三角格子圖中，對角線 H_0 經過的三角格子數，同時也觀察到，對角線 H_0 未經過的綠色三角格子呈現點對稱，只要將 $m\times n$ 全部的三角格子減去對角線 H_0 經過的三角格子，便能得到對角線 H_0 未經過的綠色三角格子數，如圖 28。

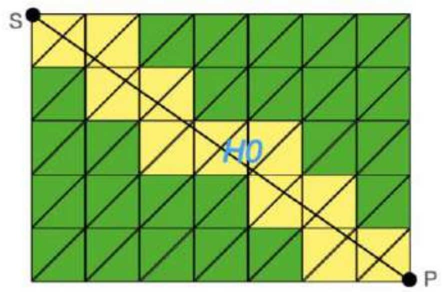


圖 28（由第 2 作者繪製）

（三）按此想法，我們便利用 H_0 公式分別求出圖 28 中，$\overline{WY}$、$\overline{XZ}$經過的黃色三角格子數，再利用其點對稱的特性，分別求出左下角與右上角的綠色三角格子數，再用 $m \times n$ 矩形中全部的三角格子減出綠色三角格子數，便能得到 H 區塊中的三角格子數。接下來說明公式之推導過程。

（四）首先，我們先利用【結論五】中的 H_0 公式，求出圖 29 中紫色矩形中的黃色三角格數，再求出紫色矩形的內的三角格子數，減去黃色三角形後再除以 2，便能得到紫色矩形內的綠色三角格子數，過程如下：

1.紫色矩形內的三角格子數＝$2 \times m_3 \times n_3$ ……①

2.黃色三角格子數＝$2 \times [m_3 + n_3 - GCD(m_3, n_3)]$……②

3.由①－②得 $2 \times m_3 \times n_3 - 2 \times [m_3 + n_3 - GCD(m_3, n_3)]$……③

4.由③÷2 得 $m_3 \times n_3 - [m_3 + n_3 - GCD(m_3, n_3)]$

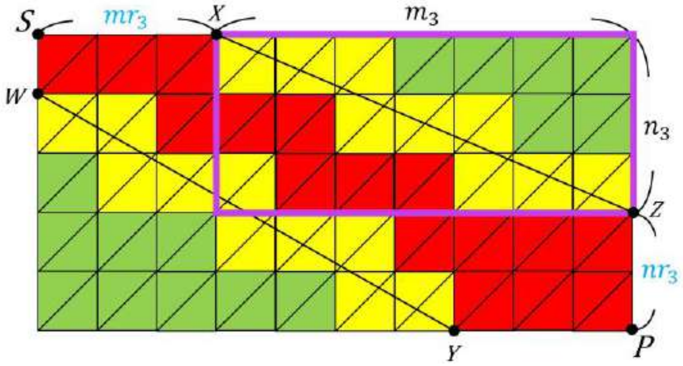


圖 29（由第 3 作者繪製）

（五）接著我們利用相同的方法，求出圖 30 中藍色矩形中的綠色三角格子數為 $m_4 \times n_4 - [m_4 + n_4 - GCD(m_4, n_4)]$。

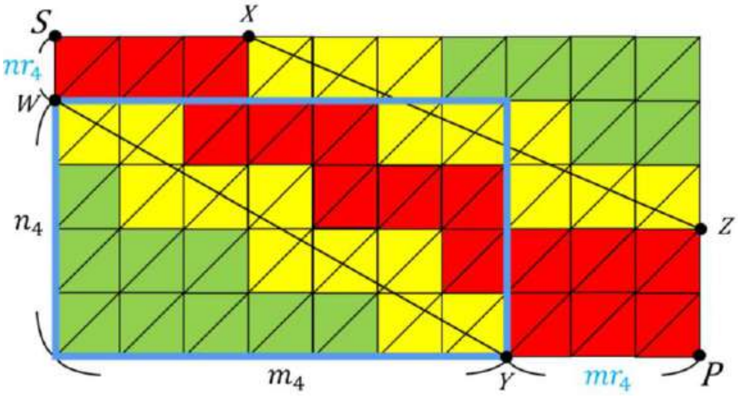


圖 30（由第 3 作者繪製）

（六）最後，我們再用全部的三角格子總數減去紫色和藍色矩形中的綠色三角格，過程如下：

$$2\times m\times n-\{m_3\times n_3-[m_3+n_3-GCD(m_3,n_3)]+m_4\times n_4-[m_4+n_4-GCD(m_4,n_4)]\}$$

$$=2mn-\{m_3n_3-m_3-n_3+GCD(m_3,n_3)+m_4n_4-m_4-n_4+GCD(m_4,n_4)\}$$

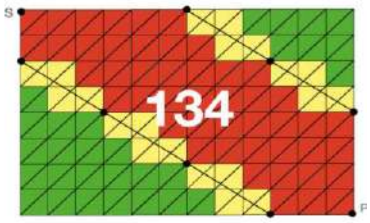
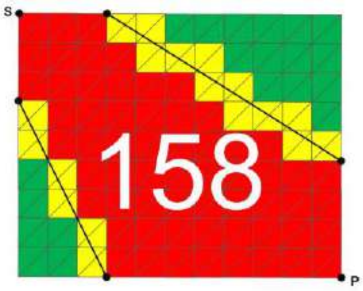
$$=2mn-\{m_3(n_3-1)-n_3+m_4(n_4-1)-n_4+GCD(m_3,n_3)+GCD(m_4,n_4)\}$$

$$=2mn-m_3(n_3-1)-m_4(n_4-1)+n_3+n_4-GCD(m_3,n_3)-GCD(m_4,n_4)$$

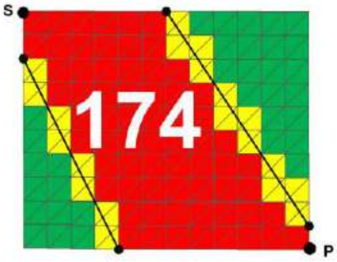
（七）與 T 區塊不同的是，不論 n_3 或 n_4 的值大於、小於或等於 m_3 或 m_4 時，H 區塊的公式皆可成立，不受影響。

（八）接下來，我們利用畫圖點數和代入公式的方式來交叉驗證，確定公式正確，表 8 即我們整理的幾個例子：

表 8（由第 2 作者繪製、整理）

三角格子圖	$m\times n$	$m_3\times n_3$	$m_4\times n_4$	$GCD(m_3, n_3)$	$GCD(m_4, n_4)$
	12×8	4×3	9×6	1	3
	11×9	8×5	3×6	1	3
	10×7	4×6	8×5	2	1

（續下頁）

三角格子圖	$m\times n$	$m_3\times n_3$	$m_4\times n_4$	$GCD(m_3, n_3)$	$GCD(m_4, n_4)$
	12×10	6×9	4×8	3	4

肆、研究結果

當 m、n 為整數，且 $m\geqq n$ 時，在 $m\times n$ 的三角格子圖中：

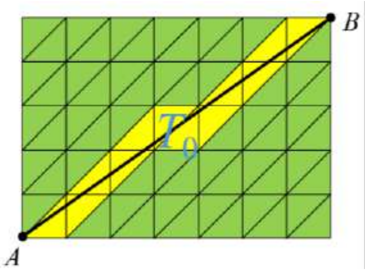


圖 32（由第 2 作者繪製）

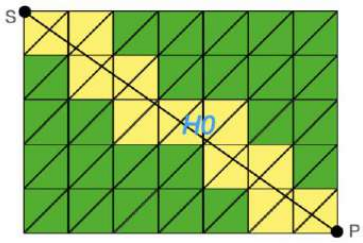


圖 31（由第 1 作者繪製）

一、對角線 T_0 經過的三角格子數＝$2\times[m-GCD(m,n)]$（如圖 32）

二、T 區塊經過的三角格子數有以下四種情形：

（一）當 $m_1>n_1$，且 $m_2>n_2$ 時，

$$2mn-m_1(n_1-1)-m_2(n_2-1)-GCD(m_1, n_1)-GCD(m_2, n_2)$$

（二）當 $m_1>n_1$，且 $m_2<n_2$ 時，

$$2mn-m_1(n_1-1)-n_2(m_2-1)-GCD(m_1, n_1)-GCD(m_2, n_2)$$

（三）當 $m_1<n_1$，且 $m_2>n_2$ 時，

$$2mn-n_1(m_1-1)-m_2(n_2-1)-GCD(m_1, n_1)-GCD(m_2, n_2)$$

（四）當 $m_1<n_1$，且 $m_2<n_2$ 時，

$$2mn-n_1(m_1-1)-n_2(m_2-1)-GCD(m_1, n_1)-GCD(m_2, n_2)$$

三、對角線 H_0 經過的三角格子數＝$2\times[m+n-GCD(m,n)]$（如圖 32）

四、H 區塊經過的三角格子數只有一種情形（如圖 31）：

n_3、n_4、m_3、m_4 之間的大小關係不會影響公式的寫法

$$2mn-m_3(n_3-1)-m_4(n_4-1)+n_3+n_4-GCD(m_3, n_3)-GCD(m_4, n_4)$$

伍、討論

除了對角線區塊方向的不同，我們亦可往不同邊長比的直角三角形為基本單位所組成的矩形中，其對角線區塊經過的三角格子數，是否也存在某種規律，並推導出公式。

陸、結論

努力好幾個月後，我們終於完成了科展研究。一開始我們的研究先以長、寬比不同的矩形為基本單位來組成矩形，卻發現對角線 T_0、T_1、T_2 所經過的矩形格子數之規律與第 56 屆作品《因緣際繪》以方格為基本單位所做的研究結果相同，所以我們修正了研究的方向，改以探討等腰直角三角形為基本單位。其實在市賽時，我們先用窮舉法在三角格子圖上繪製許多圖來觀察矩形的對角線，以及對角線平移固定格子後，所形成之封閉區域所經過的三角格子數量是否存在某種規則？除了 T_0 之外，另外尚有 T_1、T_2、……、T_r 等圖例。

研究 T_0 時很順利，將數據表格化很快就觀察出經過的三角格子數不但與矩形的長邊有關，也與矩形長、寬邊的最大公因數有關，並順利找出公式。但研究 T_1 時，卻不易從繪製的圖形中觀察出規則。後來我們簡化圖形將兩個三角形看成一個平行四邊形來計數，讓研究有所突破，也順利整理出公式。接著，研究 T_2 時因圖形更為複雜，我們改朝向逆向思考的方式來研究，也成功推導出 T_2 的公式。再比較 T_0、T_1、T_2 的公式時，發現公式間也存在著規律，我們用這規律假設出 T_3、T_4、……、T_r 的公式並繪圖點數驗證，發現結果都吻合，也順利整合出 T_r 的公式。

進入全國賽後，我們繼續探討不規則平移後的 T 區域所涵蓋的三角格子數，結果發現推導出來的公式竟然可以套用在市賽時的研究內容，而且公式更加精簡，更易於觀察。

最後我們又有重要發現：在 $m\times n$ 三角格子圖中，(1)當 $m\geqq n$ 時，T_0 的公式只跟經過的**縱線**有關；(1)當 $n\geqq m$ 時，T_0 的公式只跟經過的**橫線**有關；(3)另一方向對角線 H_0 的公式只跟經過的**斜線**有關。於是我們決定繼續往下研究，果然成功找出計算另一方向對角線 H_0 經過三角格數量的公式，再用推導 T 區域的逆向思考模式，也順利找出不規則平移後的 H 區域所涵蓋的三角格子數，讓整個科展研究更為完整。

我們因為參與這次科展研究，學到了如何思考、聚焦、統整與解決問題的方法，也學習到了如何運用表格分析、數據歸納、公式推導與電腦軟體繪製圖形來尋找答案。這次科展的

研究歷程對我們來說是很難能可貴的經驗，我們也會好好運用本次科展學習的研究方法，繼續在學習之路上努力。

柒、參考資料及其他

林文祺、林大博、張詠晴、郭翊軒、李兆軒（2016）。因緣際繪。**中華民國第 56 屆中小學科學展覽會。**

【評語】080414

本研究主要利用第五十六屆科展的得獎作品《因緣際繪》繼續延伸討論，將前人研究的網格系統做了些變化，探討等腰直角三角形密鋪而成的矩形中，在特定條件下的封閉區域會經過的三角格數量。研究的內容方向以及問題的處理手法大致與前人相同，在創意性部分較為不足，數學符號的表達運用部分也還有進步空間，在講解過程中團隊合作表現不錯！

作品簡報

角格織網

摘要

本研究旨在相同的等腰直角三角形密鋪而成的矩形中，若從右上角頂點各往左與下，及從左下角頂點各往右與上移動數格，再連接2條直線，並拓寬成一個封閉區域，則此對角封閉區域T會經過幾個三角格呢？從左下角至右上角的對角線經過的三角格開始觀察，發現經過的三角格數量與矩形長邊、矩形長、寬邊的最大公因數有關。接著將對角線有規律的拓寬成不同的封閉區域，並將經過的三角格用相異的顏色區分，用逆向思考的方式，把矩形中的三角格總數減去2直線經過的三角格數量，順利找出計算公式。並用相似的概念順利找出另一方向對角封閉區域H的計算公式，讓整個研究更為完整。

壹、前言

一、研究動機

從小我們對數學思考就很有興趣，每次解決數學難題後，總有滿滿的成就感。有一天老師問我們，想不想參加數學科展？一聽到有機會參加科展比賽，心中那股對數學的熱情被喚醒，大家躍躍欲試。一開始我們和老師討論要研究哪個主題，為了更瞭解科展，我們讀了歷屆得獎作品，想從中獲得靈感。後來我們看到第五十六屆的得獎作品《因緣際繪》，覺得非常特別，於是我們向老師提議將此作品繼續延伸討論。老師覺得確實有延伸探究的價值。於是我們開始構思，最後決定由形狀的改變開始研究。我們先用矩形和等腰直角三角形代替原本的方格，觀察會有哪些改變與規律，這樣的想法也開啟了我們這次科展的研究契機。

二、研究目的

(一)當m、n為整數，且m≧n時，探討m×n三角格子圖，起點A往右移mr1格，往上移nr2格，終點B往左移mr2格、往下移nr1格，得4個新點C、D、E、F，連接$\overline{CE}$和$\overline{DF}$後，此4點與A、B，所形成的T區塊會包含幾個三角格子？（如圖1）。

(二)當m、n為整數，且m≧n時，探討m×n三角格子圖，起點S往右移mr3格，往下移nr4格，終點P往左移mr4格、往上移nr3格，得4個新點W、X、Y、Z，連接WY和XZ後，此4點與S、P，所形成的H區塊會包含幾個三角格子？（如圖2）。

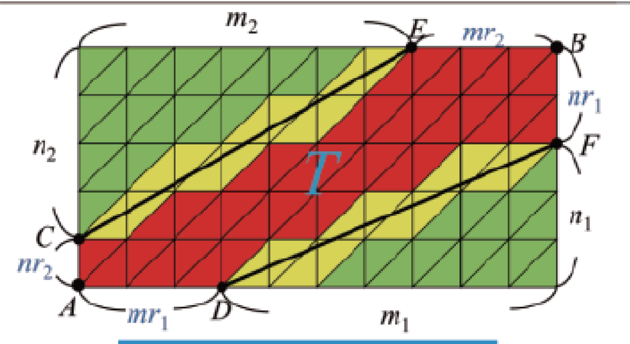


圖 1（由第1作者繪製）

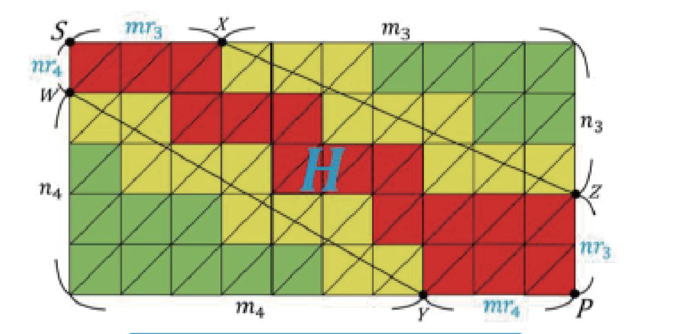


圖 2（由第2作者繪製）

貳、研究設備與器材

三角格子圖、直尺、鉛筆、色鉛筆、電腦、PowerPoint、Scratch。

參、研究過程或方法

在討論問題前我們先定義何謂 m×n三角格子圖 。

m×n三角格子圖：

以相同大小的等腰直角三角形密鋪成矩形，再以一格子點A當起點，往右取m格為長邊，往上取n格為寬邊，所形成的矩形我們稱為m×n的三角格子圖，此矩形內部恰被分割成（m×n）×2個等腰直角三角形，且m和n為正整數。

例：6×4的三角格子圖

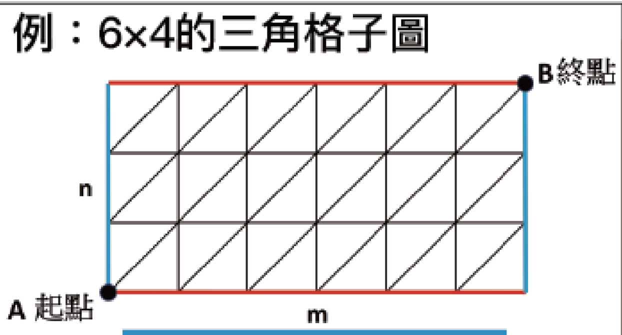


圖 3（由第1作者繪製）

一、討論一：T0

探討m×n三角格子圖中，對角線所經過的三角格子數。

(一)為了找出規律性，便先將目標簡化，從對角線T0會經過幾個三角格子觀察。我們畫出1×1、1×2、……、20×19至20×20三角格子圖的對角線T0，觀察對角線T0經過的三角格子數，發現5×2的三角格子圖只要經過90度旋轉，再水平翻轉就可以變成2×5三角格子圖，所以5×2和2×5三角格子圖中，對角線T0經過的三角格子數會相同。為了避免重複探討，我們決定專注探討m≧n的情形，如圖4。

(二)我們又考慮到每個m×n三角格子圖的對角線有兩種畫法（如圖5），但發現兩種相異對角線所經過的三角格子數量不同，故我們先探討對角線是由左下角到右上角的情形。

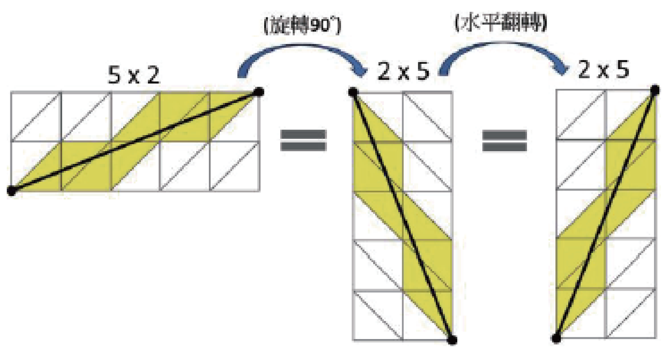


圖 4（由第3作者繪製）

例：5×3的三角格子圖(無經過格子點)

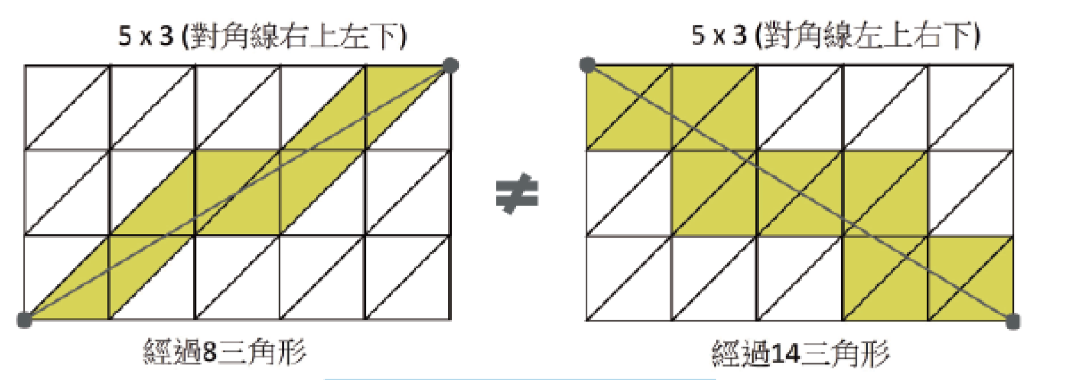


圖 5（由第3作者繪製）

(三)我們發現m×n的三角格子圖扣除四條邊界，內部會有(m－1)條縱線，(n－1)條橫線，若從左下角的格子點A當起點，右上角格子點B為終點，畫出的對角線必定會經過(m－1)條縱線，(n－1)條橫線，有時也會經過斜邊。而每經過一條線就會進入一個新的三角格。同時我們也發現，對角線有時會經過「格子點」(縱線與橫線的交點)，每經過一個格子點，就會少經過一條縱線或橫線，對角線T0經過的三角格就會少2個。由上述觀察之結果，我們分成二種類型來分析討論：①對角線T0不經過格子點；②對角線T0經過格子點。

說明如下：

4×3三角格子圖(無格子點)

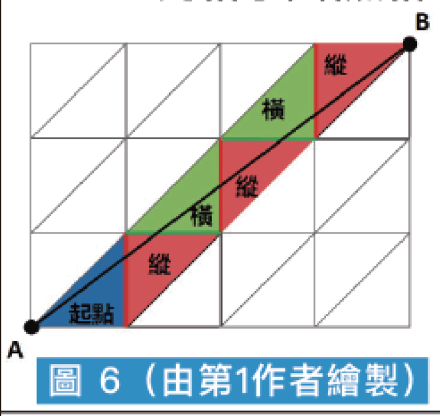


圖 6（由第1作者繪製）

以圖6為例，對角線T0從起點A到終點B，會通過：4－1條縱線，3－1條橫線。

我們發現T0每經過1條縱線，可視為經過2個三角格，此時經過的橫線可以不用考慮。

▲**對角線經過的三角格子數：**

$(\ 4-1\ )\times 2 = 6$格

T0 經過的縱線

▲**對角線T0經過的三角格子數 ＝ 2×（m－1）**

9×6三角格子圖(有格子點)

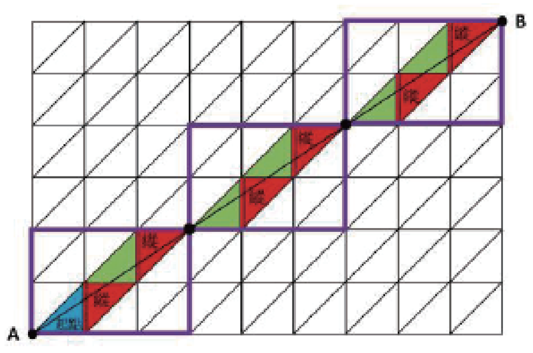


圖 7（由第1作者繪製）

對角線T0會經過2個格子點

格子點把對角線T0平分成3段T0'

T0' 為 $\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}$ 三角格子圖的對角線。

▲**對角線T0經過的三角格子數2×[m－GCD (m,n)]**

＝ T0' 經過的三角格子數×3倍

$=2\times\left(\frac{9}{3}-1\right)\times 3 = 2\times(9-3) = 12$格

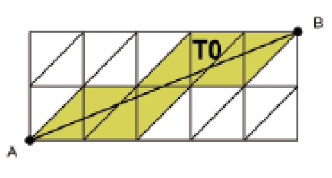
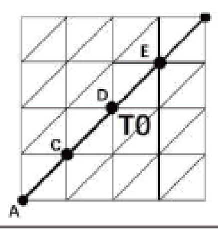
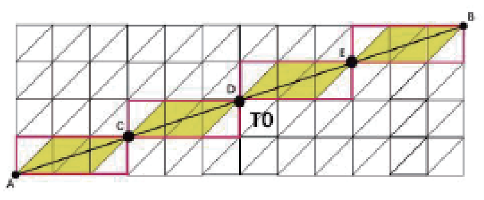
T0 經過的縱線　m　GCD (m,n)

▲**推測對角線T0經過的三角格子數公式**

＝ 2×［m－GCD（m,n）］

(四)為驗證T0公式推論是否為真，我們繼續畫更多的圖來觀察。先取m≧n的三角格子圖數張，觀察之發現整理如表1：

表 1（由第2作者繪製、整理）

三角格子圖			
m×n	5×2	4×4	12×4
格子點(個)	0	3	3
GCD(m,n)	1	4	4
經過的三角形(個)	8	0	16

(五)我們由表1整理出以下結論：

1. 當m、n互質時，GCD(m,n)＝1，且m≧n，T0必不經過格子點，但是會經過(m－1)條縱線。每經過一條縱線就會經過2個三角格，所以T0經過的三角格子數為2×(m－1)。
2. 當m、n不互質時，GCD(m,n)＝k＞1，且m≧n，此時GCD($\frac{m}{k}$，$\frac{n}{k}$)＝1。T0被分為k段，有k－1個格子點，每1段的對角線為T0'，可將m×n的三角格視為k個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖，由1可知，每個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖中的T0'經過的三角格子數＝2×($\frac{m}{k}$－1)。
3. 由1、2知，T0＝T0'×k＝2×($\frac{m}{k}$－1)×k＝2×(m－k)＝2×[m－GCD(m,n)]。

【結論一】經過公式與圖形的驗證，我們得到當m、n為整數，且m≧n時，在m×n的三角格子圖中T0經過的黃色的三角格子數的計算公式為：

T0＝2×[m－GCD(m,n)]

二、討論二：T1 區塊

探討m×n三角格子圖，沿對角線方向形成的T1區塊會涵蓋幾個三角形。

(一)首先，我們先探討起點A往右、往上，終點B往左、往下各移1格時的情形。在探討問題前，我們先定義T1區塊和直線U1、L1。

1. T1區塊：在m×n三角格子圖中，起點A往上、往右各移1格，終點B往左、往下各移1格，得4個新點C1、D1、E1、F1，連接此4點與A、B，所形成的區塊稱為T1。

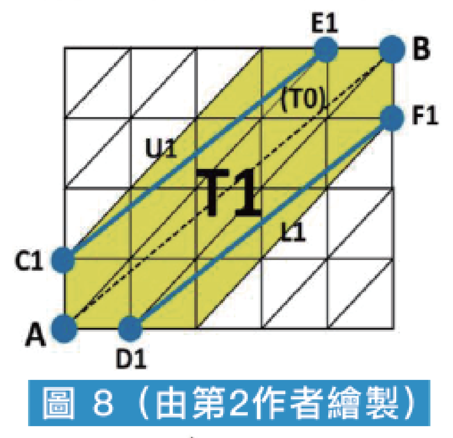


圖 8（由第2作者繪製）

2. 直線U1、L1：連接C1、E1兩點成直線U1，連接D1、F1兩點成直線L1。以圖8例：5×4的三角格子圖（T0為原來對角線）

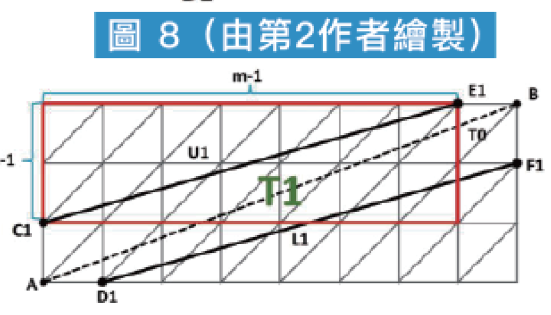


圖 9（由第3作者繪製）

(二)由【結論一】知，在m×n三角格子圖中，T0經過的三角格子數為 2×[m－GCD(m,n)] 。我們認為T1區塊中的U1、L1也可以視為m和n各減去1的特殊T0表現形式，因此推論U1、L1經過的三角格子數可以套用【結論一】的公式，只是必須將公式中的m、n分別以m－1和n－1代入計算，也就是將紅色矩形中的對角線U1視為(m－1)×(n－1)的三角格子圖中的T0，L1亦同，如圖9所示：

(三)按此想法，我們畫出m≧n≧3的三角格子圖中的T1區塊數張，發現每個T1區塊都呈現點對稱，且T1區塊內的三角形可分成4類，為了方便討論，我們以顏色區分T1區塊中，不同線段經過與未經過的三角形，以5×3為例，如圖10。

1. U1經過的三角形為橘色。
2. L1經過的三角形為黃色。
3. T1區塊內僅有A、B兩點連線(虛線)經過的三角形為紅色。
4. 完全沒有線段經過的三角形為藍色。

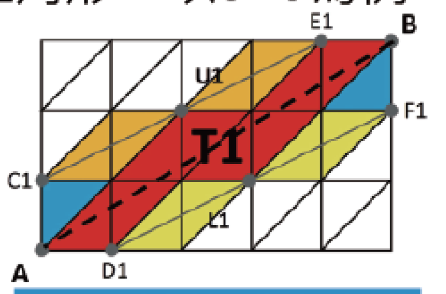
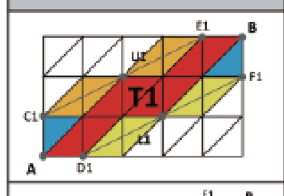
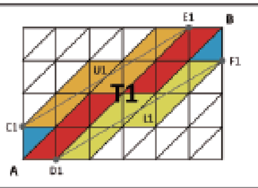


圖 10（由第2作者繪製）

(四)接下來，我們延續討論一的模式，將觀察的結果整理如表2：

表 2（由第2作者繪製、整理）

三角格子圖	m×n	(m−1)×(n−1)	格子點(個)	GCD(m−1,n−1)	橘色	黃色	紅色	藍色
	5×3	4×2	2	2	4	4	8	2
	6×4	5×3	0	1	8	8	8	2

(五)由表2可知，U1、L1經過的三角格子數確實可以套用【結論一】的公式計算出來，只要將原來m、n的值改為m－1與n－1即可，公式如下：$\boxed{2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]}$

以圖11中，7×4的三角格子圖為例：

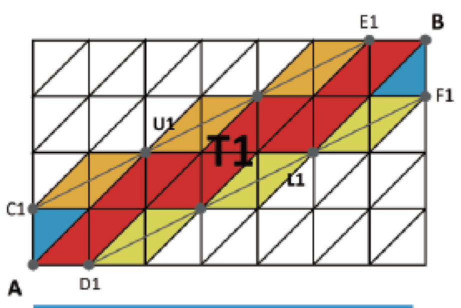


圖 11（由第2作者繪製）

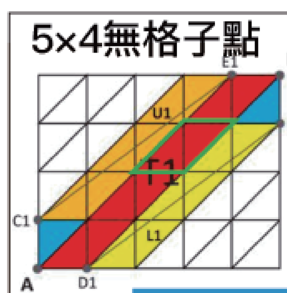
U1經過的橘色三角格子數為
2×[(7−1)−GCD(7−1,4−1)]
=2×[6−GCD(6,3)]
=2×[6−4]
=6

(六)同時，我們也發現完全沒有直線通過的三角形，也就是藍色三角形的個數固定有2個。如此一來，我們便可計算出橘色、黃色和藍色三角形的個數。但是唯獨紅色三角形，也就原來T0經過的三角格子數還觀察不出規律，於是我們便繼續畫圖觀察m、n值更大的三角格子圖。

(七)為了方便點數紅色三角形的個數，我們會先點數2個紅色三角形合併形成的平行四邊形個數後（如圖12、圖13中綠色框線），再將結果乘以2，便可得到紅色三角形的個數。同時，我們也觀察到：

1. 在沒有格子點的三角格子圖中，紅色平行四邊形的個數，恰好等於n值，也就是每一個橫列可以找到一個紅色平行四邊形。
2. 有格子點的三角格子圖中，在橫列之中若有出現格子點，該列會多一個紅色平行四邊形。例如該格子圖共有4個格子點，則會多4÷2=2個紅色平行四邊形。以下分別舉例說明：

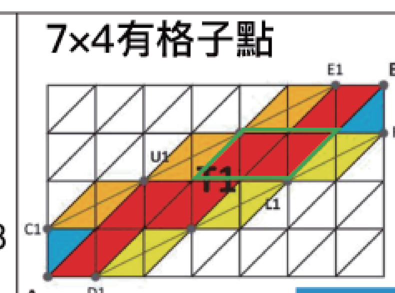
5×4無格子點



n=4，格子點=0
紅色平行四邊形=4
紅色三角形=4×2=8

圖 12（由第3作者繪製）

7×4有格子點



n=4，格子點=4
紅色平行四邊形=n+格子點÷2
=4+4÷2
=6
紅色三角形=6×2=12

圖 13（由第3作者繪製）

(八)由(七)可知，紅色三角數量算法為：$\boxed{2\times(n+格子點\div 2)}$ 而格子點的算法為：$\boxed{2\times[GCD(m-1,n-1)-1]}$。因此，紅色三角形數量的計算公式整理如下：

$2\times\{n+2\times[GCD(m-1,n-1)-1]\div 2\}=2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}$

(九)綜上所述，我們將 4 種顏色的三角形計算公式條列如下:

橘色三角形=黃色三角形=$2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]$
紅色三角形=$2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}$
藍色三角形=2
將以上結果合併後，可得到T1區塊的三角格子數之計算為:
$2\times[(m-1)-GCD(m-1,n-1)]\times 2+2\times\{n+[GCD(m-1,n-1)-1]\}+2$
$=2\times[2m+n-2-GCD(m-1,n-1)]$

【結論二】經過公式與圖形的驗證，我們確定T1區塊三角格子數的計算公式為：

$\boxed{T1=2\times[2m+n-2-GCD(m-1,n-1)]}$

三、討論三：T2區塊

探討m×n三角格子圖，沿對角線方向形成的T2區塊會涵蓋幾個三角格子。

(一)在探討問題前，我們先定義T2區塊和直線U2、L2。

1. T2區塊：在m×n三角格子圖中，起點A往上、往右各移2格，終點B往左、往下各移2格，得4個新點C2、D2、E2、F2，連接此4點與A、B，所形成的區塊稱為T2。
2. 直線U2、L2：連接C2、E2兩點成直線U2，連接D2、F2兩點成直線L2。

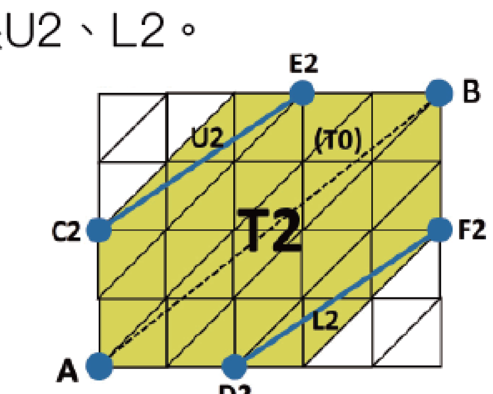


圖 14（由第1作者繪製）

(二)一開始我們想延續前面找T1區塊公式的方法，來嘗試推導T2區塊經過的三角格子數公式，我們同前面方法先畫圖取樣3×3、4×3、......、20×19至20×20三角格子圖中的T2區塊來觀察，發現每個T2區塊均呈現點對稱。但經過許多嘗試，發現不易觀察出規則。後來我們討論後又有了新想法，改朝向逆向思考的方式來推論與研究。

逆向推論：先找出T2區塊未經過的三角格子數，再用m×n三角格子圖的全部三角格子數扣掉T2區塊未經過的三角格子數，即可得T2區塊經過的三角格子數。

(三)【推導T2公式過程】m×n三角格子圖 (如圖15) 中:

1. 可將直線L2視為(m－2)×(n－2)三角格子圖（以下稱紫色矩形）的對角線T0，再用T0公式算出直線L2經過的黃色三角格子數：$2[(m-2)-GCD(m-2,n-2)]$。

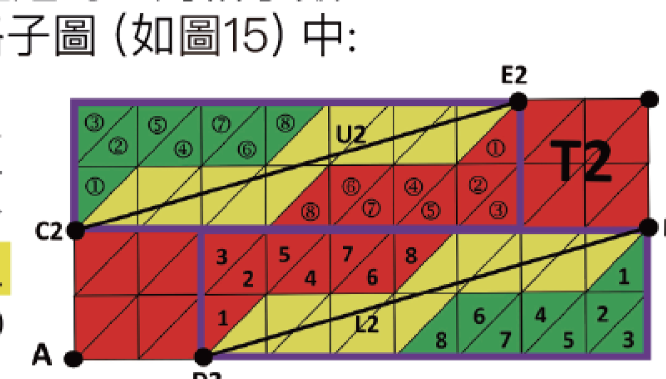
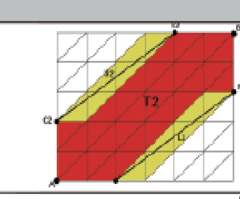
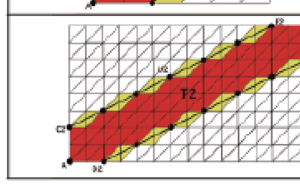


圖 15（由第1作者繪製）

2. 右下紫色矩形中，排除直線L2經過的黃色三角格，發現左側紅色三角格（編號1至8）和右側綠色三角格（編號1至8）的三角格子數相同且對稱。
3. 同理，在左上紫色矩形中，左側綠色三角格（編號①至⑧）和右側紅色三角格（編號編號①至⑧）的三角格子數也相同且對稱。
4. T2區塊未經過的三角格子數（綠色三角格）
=編號①至⑧的綠色三角格子 + 編號1至8的綠色三角格子
=編號1至8的紅色三角格子 + 編號1至8的綠色三角格子
=右下紫色矩形的完整三角格子數－L2經過的三角格子
$=2[m\times n-4m-2n+6+GCD(m-2,n-2)]$
5. T2區塊經過的三角格子數(紅色三角格子+黃色三角格子)
=m×n三角格子圖的全部三角格子－T2區塊未經過的三角格子(綠色三角格子)
$=2m\times n-2[m\times n-4m-2n+6+GCD(m-2,n-2)]$
$=2[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]$

(四)為驗證公式，我們繪製許多的T2三角格子圖，利用點數與代入公式二種方法來交互觀察答案是否一致。以下表3舉例說明：

表 3（由第1作者繪製、整理）

m×n 的三角格子圖	m×n	GCD (m−2,n−2)	T2 區塊經過的三角格子數	
	6 × 5	1	點數 黃+紅 =6×2+30 =42格	代入公式 T2=2[3m+2n−6−GCD(m−2,n−2)] =2×(3×6+2×5−6−1) =42格
	14×8	6	點數 黃+紅 =12×2+68 =92格	代入公式 T2=2[3m+2n−6−GCD(m−2,n−2)] =2×(3×14+2×8−6−6) =92格

(五)此時我們注意到，之後起點A與終點B同時平移3格、4格、5格、......、r格後，形成的T3、T4、T5、......、Tr區塊，甚至平移的格子數皆不相同時， 應該都能透過T0公式， 以逆向思考的方式來推導出公式，過程會更加精簡。

【結論三】經過公式與點數的驗證，確定T2區塊經過的三角格子數的計算公式為：

$\boxed{2\times[3m+2n-6-GCD(m-2,n-2)]}$

四、討論四：T區塊

探討m×n三角格子圖，沿對角線方向形成的T2區塊會經過幾個三角格子。

(一)在探討問題前，我們先定義T區塊與m×n三角格子圖中的各個代號。

1. T區塊：在m×n三角格子圖，起點A往右移mr1格，往上移nr2格，終點B往左移mr2格、往下移nr1格，得4個新點C、D、E、F，連接$\overline{CE}$、$\overline{DF}$後與A、B，所形成的封閉區域，即圖16中的黃色與紅色三角格子。

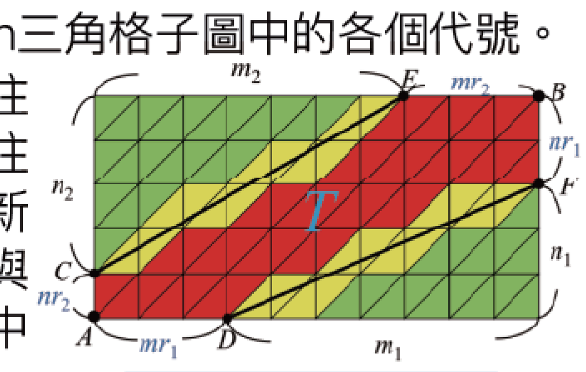


圖 16（由第1作者繪製）

2. $m1=m-mr1$；$m2=m-mr2$；$n1=n-nr1$；$n2=n-nr2$。

(二)從【結論三】已經知道如何求出m×n三角格子圖中，對角線T0經過的三角格子數，同時也觀察到，對角線T0未經過的綠色三角格子呈現點對稱，只要將m×n全部的三角格子減去T0經過的三角格子，便能得到T0未經過的綠色三角格子數，如圖17。

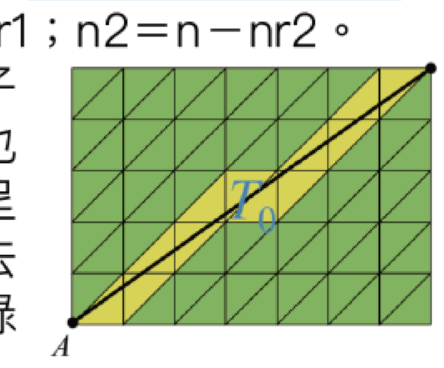


圖 17（由第1作者繪製）

(三)按此想法，我們便利用T0公式分別求出圖18中，$\overline{CE}$、$\overline{DF}$經過的黃色三角格子數，再利用其點對稱的特性，分別求出左上角與右下角的綠色三角格子數，再用m×n矩形中全部的三角格子減去綠色三角格子數，便能得到T區塊中的三角格子數。接下來說明公式之推導過程。

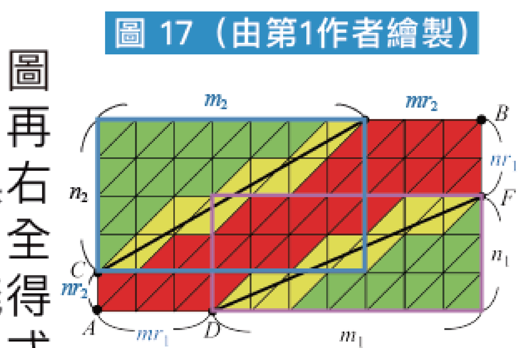


圖 18（由第1作者繪製）

(四)首先，我們先利用【結論一】中的T0公式，求出圖18中紫色矩形中的黃色三角格數，再求出紫色矩形內的三角格子數，減去黃色三角形後再除以2，便能得到紫色矩形內的綠色三角格子數，過程如下：

1. 紫色矩形內的三角格子數＝2×m1×n1......①
2. 黃色三角格子數＝2×[m1－GCD(m1, n1)]......②
3. 由①－②得2×m1×n1－2×[m1－GCD(m1, n1)]......③
4. 由③÷2得m1×n1－[m1－GCD(m1, n1)]

(五)接著我們利用相同的方法，求出圖18中藍色矩形中的綠色三角格子數為m2×n2－[m2－GCD(m2, n2)]。

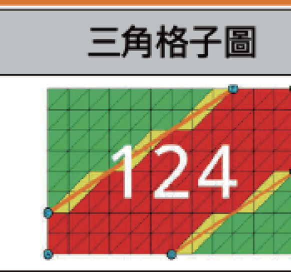
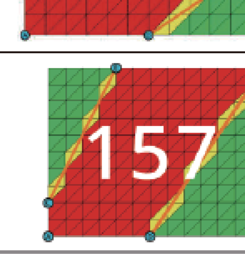
(六)最後，我們再用全部的三角格子總數減去紫色和藍色矩形中的綠色三角格，過程如下：

$2\times m\times n-\{m1\times n1-[m1-GCD(m1,n1)]+m2\times n2-[m2-GCD(m2,n2)]\}$
$=2mn-m1(n1-1)-m2(n2-1)-GCD(m1,n1)-GCD(m2,n2)$

(七)其中，當n1或n2的值大於m1或m2時，公式中的m1或m2就要與n1或n2交換，也就是m1或m2的值代表較大的數。

(八)接下來，我們利用畫圖點數和代入公式的方式來交叉驗證，確定公式正確，表4即我們整理的幾個例子：

表 4（由第3作者繪製、整理）

三角格子圖	mxn	m1xn1	m2xn2	GCD(m1,n1)	GCD(m2,n2)
 124	12x8	6x4	9x6	2	3
 157	12x10	6x9	4x8	3	4

五、討論五：H0

探討m×n三角格子圖中，另一方向對角線H0(左上角到右下角)所經過的三角格子數。

(一)在探究T0到T區塊會經過幾個三角格子數的問題中，雖然為了避免重複討論，我們只專注探討m≧n的情形，但過程中我們仍有幾個重要發現：

1. 在m×n三角格子圖中，如果當m≧n時，T0的公式只跟經過的**縱**線有關，T0＝2×[m－GCD(m,n)]。
2. 在m×n三角格子圖中，如果當n≧m時，T0的公式只跟經過的**橫**線有關，T0＝2×[n－GCD(m,n)]。
3. 所以我們推測另一方向對角線H0的公式是否和經過的**斜線**有關呢？於是我們從這個推測開始觀察，繼續探討H0經過三角格子數的變化和規律。

(二)從【討論一】的探究中可知，5×2的三角格子圖只要經過90度旋轉，再水平翻轉就可以變成2×5三角格子圖，所以5×2和2×5三角格子圖中，對角線H0經過的三角格子數會相同 。 為避免重複探討，我們探討m≧n的情形即可。

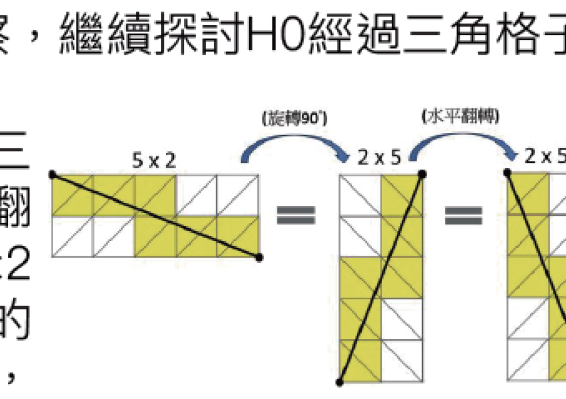


圖 19（由第3作者繪製）

(三)我們發現m×n三角格子圖中，H0每經過一條斜邊就會經過一個方格，也就會經過2個三角格，所以我們只要知道H0經過幾個方格再乘2倍就是經過的三角格。從左上角的格子點S當起點，右下角格子點P為終點，畫出的對角線必定會經過(m－1)條縱線，(n－1)條橫線，每經過一條線就會進入一個新的方格，每經過一個「格子點」，就會少經過一個方格。

由上述觀察之結果，我們分成二種類型來分析討論：①對角線H0不經過格子點；②對角線H0經過格子點。說明如下：

4×3三角格子圖(無格子點)

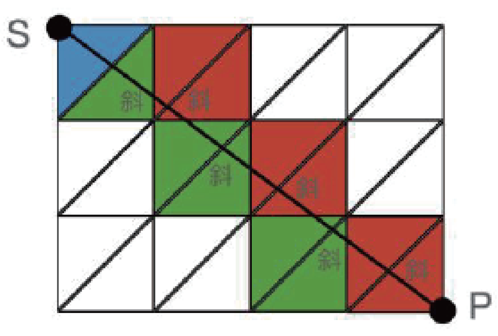


圖 20（由第1作者繪製）

以為圖20例，對角線H0從起點S到終點P，
通過4－1條縱線➡會經過4－1個方格
通過3－1條橫線➡會經過3－1個方格
H0經過1個方格，就會經過1條斜邊，也會經過2個三角格。

▲對角線H 0經過的三角格子數：

〔(4－1)+(3－1) + 1〕×2＝ 12格

經過縱線產生的方格 | 經過橫線產生的方格 | 起點方格

▲對角線H0經過的三角格數

＝2×〔(m－1)+(n－1)+1〕

＝2× (m+ n－1)

9×6三角格子圖(有格子點)

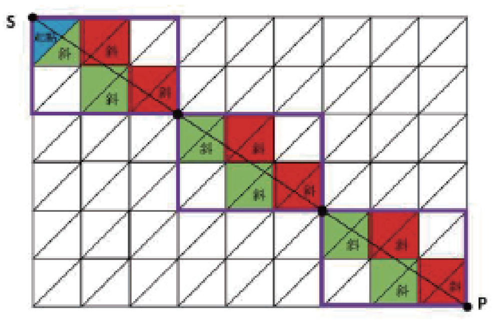


圖 21（由第1作者繪製）

再舉圖21觀察，對角線H0會經過2個格子點，格子點把對角線H0平分成3段H0'，

H0' 為 $\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}$ 三角格子圖的對角線。

▲對角線H0經過的三角格子數

＝ H0' 經過的三角格子數×3倍

$=2\times(\frac{9}{3}-1)\times3=2\times(9-3)$

＝ 2×（9 ＋ 6 － 3）＝ 24格

m | n | GCD (m,n)

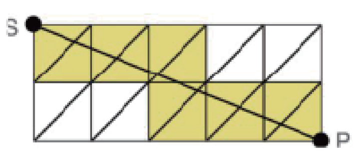
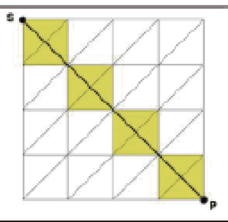
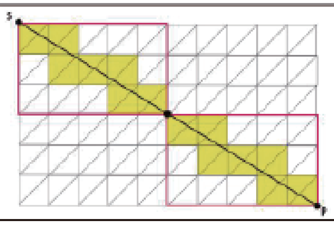
▲推測對角線H0經過的三角格子數公式

＝ 2×[m+ n－GCD(m,n)]

(四)驗證H0公式推論是否為真，我們繼續畫更多的圖來觀察不同的m、n值下，m和n的最大公因數與H0通過的黃色三角格子數之間的關係，整理如下：

(五)我們由表5整理出以下結論：

表 5（由第1作者繪製、整理）

三角格子圖			
mxn	5×2	4×4	10×6
格子點(個)	0	3	1
GCD(m,n)	1	4	2
經過的三角形(個)	12	8	28

1. 當m、n互質時，GCD(m,n)＝1，且m≧n，H0必不經過格子點，但是會經過(m+n－1)條斜邊。每經過一條斜邊會經過2個三角格，所以H0經過的三角格子數為2×(m+n－1)。
2. 當m、n不互質時，GCD(m,n)＝k＞1，且m≧n，此時 $GCD(\frac{m}{k},\frac{n}{k})=1$。H0被分為k段，有k－1個格子點，每1段的對角線為H0'，可將m×n的三角格視為k個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖，由1可知，每個 $\frac{m}{k}\times\frac{n}{k}$ 三角格子圖中的H0'經過的三角格子數＝$2\times(\frac{m}{k}-1)$。
3. 由1、2知，$H0=H0'\times k=2\times(\frac{m}{k}-1)\times k=2\times(m-k)$
   ＝2×[m－GCD(m,n)]。

【結論五】經過公式與圖形的驗證，我們得到當m、n為整數，且m≧n時，在m×n的三角格子圖中H0經過的黃色的三角格子數的計算公式為：

T0＝2×[m－GCD(m,n)]

六、討論六：H區塊

探討m×n三角格子圖，當起點S與終點P平移的格子數皆不相同時，所形成的H區塊會包含幾個三角格子。

(一)在探討問題前，我們先定義H區塊與m×n三角格子圖中的各個代號。

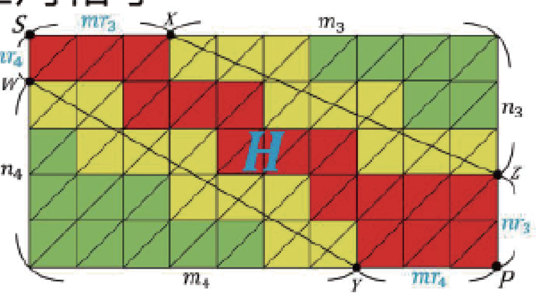


圖 22（由第3作者繪製）

1. H區塊：在m×n三角格子圖，起點S往右移mr3格，往下移nr4格，終點P往左移mr4格、往上移nr3格，得4個新點W、X、Y、Z，連接WY、XZ後與S、P，所形成的封閉區域，即圖22中的黃色與紅色三角格子。
2. m3＝m－mr3；m4＝m－mr4；n3＝n－nr3；n4＝n－nr4。

(二)我們從【結論三】已經知道如何求出m×n三角格子圖中，對角線H0經過的三角格子數，同時也觀察到，對角線H0未經過的綠色三角格子呈現點對稱，只要將m×n全部的三角格子減去對角線H0經過的三角格子，便能得到對角線H0未經過的綠色三角格子數，如圖22。

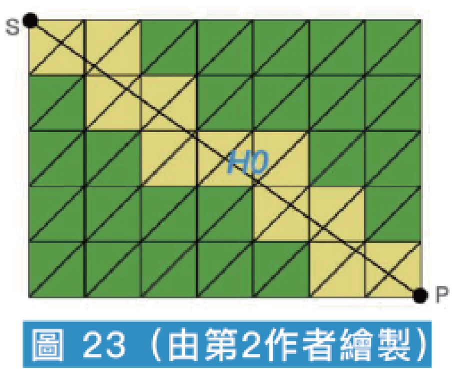


圖 23（由第2作者繪製）

(三)按此想法，我們便利用H0公式分別求出圖23中，$\overline{WY}$、XZ經過的黃色三角格子數，再利用其點對稱的特性，分別求出左下角與右上角的綠色三角格子數，再用m×n矩形中全部的三角格子減出綠色三角格子數，便能得到H區塊中的三角格子數。接下來說明公式之推導過程。

(四)首先，我們先利用【結論五】中的H0公式，求出圖24中紫色矩形中的黃色三角格數，再求出紫色矩形的內的三角格子數，減去黃色三角形後再除以2，便能得到紫色矩形內的綠色三角格子數，過程如下：

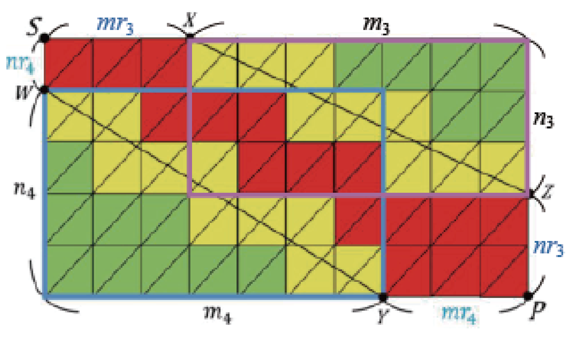


圖 24（由第3作者繪製）

1. 紫色矩形內的三角格子數＝2×m3×n3 ……①
2. 黃色三角格子數＝2×[m3 + n3－GCD(m3, n3)]……②
3. 由①－②得2×m3×n3－2×[m3 ＋ n3－GCD(m3, n3)]……③
4. 由③÷2得m3×n3－[m3 + n3－GCD(m3, n3)]

(五)接著我們利用相同的方法，求出圖24中藍色矩形中的綠色三角格子數為m4×n4－[m4+n4－GCD(m4, n4)]。

(六)最後，我們再用全部的三角格子總數減去紫色和藍色矩形中的綠色三角格，過程如下：

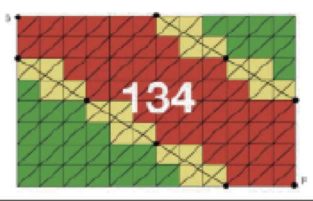
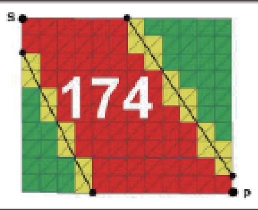
2×m×n－{m3×n3－[m3+n3－GCD(m3, n3)]+m4×n4－[m4+ n4－GCD(m4, n4)]}

＝2mn－m3(n3－1)－m4(n4－1)+n3+n4－GCD(m3, n3)－GCD(m4, n4)

(七)與T區塊不同的是，不論n3或n4的值大於、小於或等於m3或m4時，H區塊的公式皆可成立，不受影響。

(八)接下來，我們利用畫圖點數和代入公式的方式來交驗證，確定公式正確，表6即我們整理的幾個例子：

表 6（由第3作者繪製、整理）

三角格子圖	mxn	m3xn3	m4xn4	GCD(m3,n3)	GCD(m4,n4)
	12×8	6×4	9×6	2	3
	12×10	6×9	4×8	3	4

肆、研究結果

當m、n為整數，在m×n的三角格子圖中：

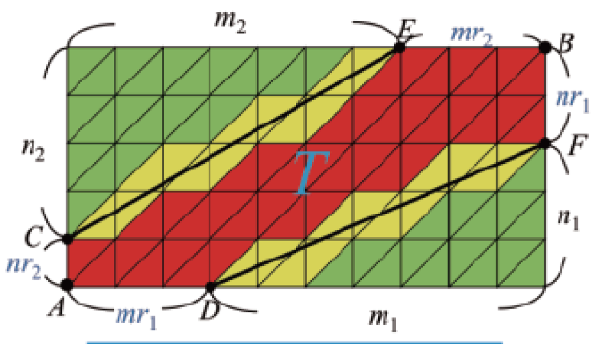


圖 25（由第1作者繪製）

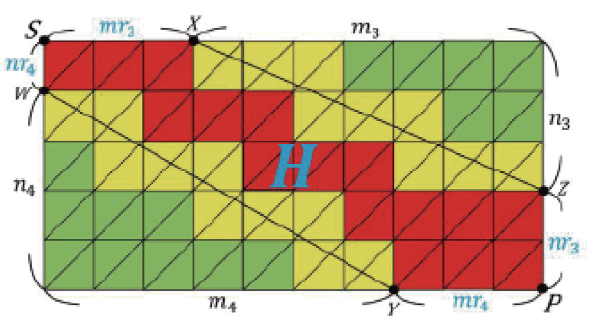


圖 26（由第3作者繪製）

一、對角線T0經過的三角格子數＝2×[m－GCD(m,n)] (m≧n時)。

二、T區塊經過的三角格子數有以下四種情形（如圖25）：

(一)當m1＞n1，且m2＞n2時，
2mn－m1(n1－1)－m2(n2－1)－GCD(m1,n1)－GCD(m2, n2)

(二)當m1＞n1，且m2＜n2時，
2mn－m1(n1－1)－n2(m2－1)－GCD(m1,n1)－GCD(m2, n2)

(三)當m1＜n1，且m2＞n2時，
2mn－n1(m1－1)－m2(n2－1)－GCD(m1,n1)－GCD(m2, n2)

(四)當m1＜n1，且m2＜n2時，
2mn－n1(m1－1)－n2(m2－1)－GCD(m1,n1)－GCD(m2, n2)

三、對角線H0經過的三角格子數＝2×[m+n－GCD(m,n)]。

四、H區塊經過的三角格子數只有一種情形（如圖26）：
n3、n4、m3、m4之間的大小關係不會影響公式的寫法
2mn－m3(n3－1)－m4(n4－1)+n3+n4－GCD(m3,n3)－GCD(m4,n4)

伍、討論

除了對角線區塊方向的不同，我們亦可往不同邊長比的直角三角形為基本單位所組成的矩形中，其對角線區塊經過的三角格子數，是否也存在某種規律，並推導出公式。

陸、結論

一開始我們的研究先以長、寬比不同的矩形為基本單位來組成矩形，卻發現對角線T0、T1、T2所經過的矩形格子數之規律與第56屆作品《因緣際繪》以方格為基本單位所做的研究結果相同，所以我們修正研究方向，改探討以等腰直角三角形為基本單位。市賽時，我們先用窮舉法在三角格子圖上繪製許多圖來觀察矩形的對角線，以及對角線平移固定格子後，所形成之封閉區域所經過的三角格數量是否存在某種規則？

研究T0時很順利，將數據表格化很快就觀察出：經過的三角格數與外圍矩形的長邊、及矩形長、寬邊的最大公因數有關，也順利找出公式。但研究T1時，卻不易從繪製的圖中觀察出規則。後來我們簡化圖形將兩個三角形看成一個平行四邊形來計數，讓研究有所突破，順利整理出公式。接著，因T2圖形更複雜，我們改用逆向思考模式來研究，也成功推導出T2的公式。在比較T0、T1、T2的公式時，發現公式間也存在著規律，我們用這規律假設出T3、T4、……、Tr的公式並繪圖點數驗證，發現結果都吻合，也順利整合出Tr的公式。

進入全國賽後，我們繼續探討不規則平移後的T區域所涵蓋的三角格子數，結果發現推導出來的公式竟然可以套用在市賽時的研究內容，而且公式更加精簡，更易於觀察。

最後我們又有重要發現：在m×n三角格子圖中，(1)當m≧n時，T0公式只跟經過的**縱線**有關；(1)當n≧m時，T0公式只跟經過的**橫線**有關；(3)另一方向對角線H0公式只跟經過的**斜線**有關。於是我們決定繼續往下研究，果然成功找出對角線H0經過三角格數的公式，再用逆向推導模式，也順利找出不規則平移後的H區域所涵蓋的三角格子數公式，讓整個科展研究更為完整。

柒、參考資料及其他

林文祺、林大博、張詠晴、郭翊軒、李兆軒（2016）。因緣際繪。**中華民國第56屆中小學科學展覽會**。