中華民國第64屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080404

來電不來電

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六 廖芊硯	林東岳
小六 黃可晴	楊錦花
小六 陳宥蓁	
小六 邱于榛	

關鍵詞：鴿籠原理、排列組合、最佳化

作品名稱：來電不來電

摘要

本作啟發自線上的影片「Can you solve the giant iron riddle?」，內容是在有外觀無法辨認的 4 顆有電與 4 個沒電的電池中，在一次只能取 2 顆電池測試的限制下，以最少的次數找到 2 顆有電電池的方法，結論是以分組的方式進行測試會有較佳的結果。本作先驗證影片的方法有效後再進行推廣，得到找出 2 顆有電電池較佳的方法為分組法或直接取法。再嘗試推廣至取 3 顆電池的情形，發現除了分組法與直接取法外，還可使用「X2Y1 循環檢查法」。最後改良「X2Y1 循環檢查法」後，不但可以有系統地測試所有可能的情形以外，能更有效地減少測試次數，提高尋找有電電池組的效率。

壹、前言

一、研究動機

前陣子，我們一起到朋友家玩，準備要開電視，發現電視遙控器裡的電池沒電了，電視打不開，我們便開始尋找有電的電池，發現櫃子中的電池有些有電有些沒電，需要一個一個試，這時我們想：有沒有一種方法，不用一個一個試就能找到兩顆有電的電池可以讓遙控器使用。所以我們這個情境做成數學題目，就得到了－來電不來電這個主題。

二、研究目的

(一) 驗證原始題目的情形：在 4 顆有電與 4 顆沒電電池中，找到 2 顆有電電池的測試次數上界。

(二) 在 4 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 2 顆有電電池的測試次數上界。

(三) 在 a 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 2 顆有電電池的測試次數上界。

(四) 在 a 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 3 顆有電電池的測試次數上界。

三、文獻探討

(一)原始題目

本題原自 TED-Ed 在 YouTube 上發佈的影片 (Gendler, 2018)：Can you solve the giant iron riddle? 內容如下：「你在為一個巨人家庭工作，他們打算要辦場很炫的晚餐派對，他們都希望能展現自己最好的樣子。但有一個問題——年長巨人最愛的襯衫是皺的！為了解決這個問題，你需要啟動巨型熨斗。熨斗需要兩個巨型電池才能運作。你有四個電池是能用的，四個已經沒電的，分別放在不同堆，但看來巨人寶寶把它們都混在一起了。你得要盡快讓熨斗能運作並把巨人的襯衫燙平——不然你可能就要變成今晚的主菜了！你要如何測試電池，才能確保不超過七次嘗試就找出一對可以用的電池？」

而該影片中有提出一個解決方法：若要一顆顆找的話，所需最多次數為 $C_2^8 - C_2^4 + 1 = 23$ 次。但是分成三組，分別是 3 顆、3 顆、2 顆。那前二組只要各測 3 次，若這 6 次都沒辦法讓熨斗啟動，代表這兩組中各只有 1 顆有電電池，所以最後一組的 2 顆電池皆必為有電電池。所以只要 7 次必可找出 2 顆有電的電池。

(二)鴿籠原理 (葉永南, 2015)

定理 1 （**鴿籠原理**）若有 n 個籠子卻有 $n+1$ 隻鴿子，則必至少有一個籠子中停了 2 隻或以上的鴿子。

此定理可延伸成以下命題：將 k 個物體分成 n 類，若 $k \geq nr - n + 1$，則必至少有一類的數目不小於 r。

我們利用此特性規畫電池分組情形。

(三)巴斯卡定理 (許介彥, 2024)

定理 2 （**巴斯卡定理**）所有的組合數 C_m^n，可以用巴斯卡三角形中列出。其中下層的值可由上層相鄰的兩個值相加而成，而得到 $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1}$

四、對題目完整命題

為了後續研究順利，我們要先對題目進行完整的命題，並規範各種細節。命題如下：

定義 1 （**本作完整命題**）有一個電器，它的電池匣中可以放 p 顆電池。該電器只有 2 種反應：能運作及不能運作。而能運作的唯一條件是放入剛好 p 顆有電電池。其餘情形如放入電池不足、放入的電池有部份沒電等皆無法使電器運作，且無法由外觀得知是因為何原因不能運作。

今天有一批外觀無法辨識的電池，只知道其中有 a 顆有電電池與 b 顆沒電電池，則最多需要測試 k 次才能使電器運作。問 k 值為何？

五、名詞解釋

1. 有電電池數(a)：在測試的電池中，已知有電的電池個數
2. 沒電電池數(b)：在測試的電池中，已知沒有電的電池個數
3. 總電池數(n)：有電電池數與沒電電池數的和，且 $n = a + b$
4. 測試次數(k)：可以在此測試次數時必能找出題目所求
5. 取電池的數量(p)：該電器一次要安裝的電池數量，在安裝的電池皆要有電的情形下，電器才能運作。同時也是本次研究中，一次檢查電池的數量。
6. 分組數(m)：為了找出較少次數時，需要將電池分的組數。
7. 高斯符號($[x]$)：在本作的數學式中，以方括號 $[x]$ 代表高斯符號，表示取不大於 x 的最大整數。例 $[3.5] = 3$、$[4] = 4$
8. 求餘符號(%)：在本作的數學式中，以 $a \% b$ 表示求 a 除以 b 之餘數。例：$5 \% 2 = 1$
9. 電池編號表示法(x_i)：我們使用 $x_1, x_2, \cdots$ 來為電池編號。以字母對如 (x_1, x_2, x_3) 表示該組有 x_1, x_2, x_3 三顆電池。
10. 分組編號表示法：以大寫英文字母（$A, B, C, \cdots$）表示電池組別的編號，以數對如 (3,3,2) 表示將電池分成 A 組 3 顆、B 組 3 顆、C 組 2 顆共三組電池。
11. 電池取法：我們以 $A1B2$ 表示從 A 組取 1 顆電池、B 組取 2 顆電池做測試。

六、研究架構

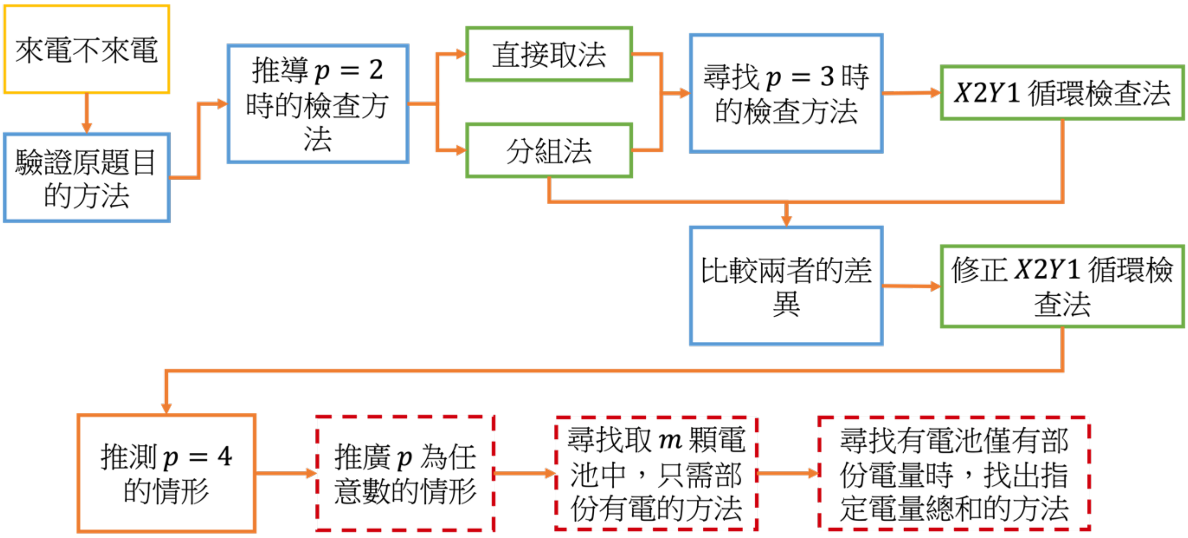

圖 1：研究架構圖

貳、研究設備及器材

文具用品、電腦軟體

參、研究過程或方法

（本研究所有圖片均由作者與指導老師使用 Microsoft PowerPoint 軟體繪製）

參考原題的做法，我們知道要減少檢查的次數，將電池分組是很關鍵的步驟。為了在尋找在較少次數下可保證找到所需要的有電電池數量，我們需要先解決兩個問題：

1. 分組數越多越好嗎？
2. 每組的數量越平均，所需的檢查次數會比較少嗎？

所以我們先整理出以下的定理，並證明其是正確的。

定理 3 **(分組數與組合數總和的關係)** 在電池總數 n 和欲取的電池數量 p 是固定的前題下，分組數越多組合數總和越少。

[證明] 圖 2 說明在一般的情形下，電池（以紅點表示）可以配對的部份由黑線連線。但當進行分組時，本來可以配對的連線將有部份無法連線（如圖 3 中虛線部份）。分越多組，可能的組合越少，如圖 4 中的實線部份，由此可說明此命題正確。■

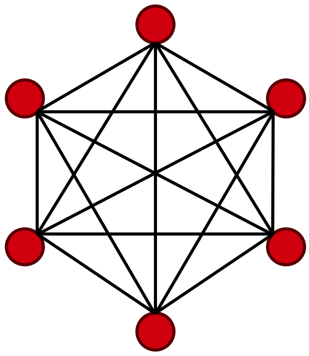

圖 2：一般配對關係

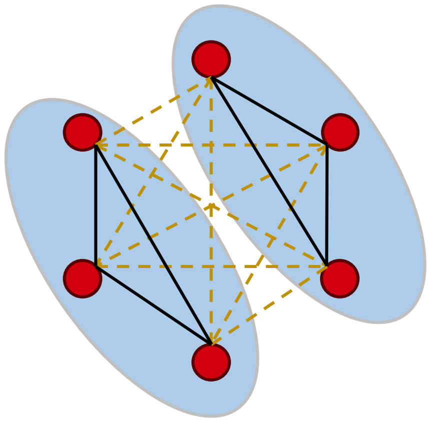

圖 3：分組時的配對關係

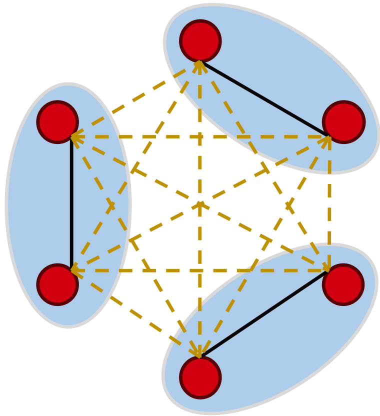

圖 4：分更多組時的關係

雖然 定理 3 說明分越多組可以獲得越少的組合總數，但有可能會發生每組都檢查完後仍無法找出所求的一組有電電池，所以也不能無限制地分組。

定理 4	**(平均分配定理)** 電池總數 n 與分組數 m 固定的情形下， 平均分組有最少的組合數

為了證明 定理 4 的結論正確，我們需要先說明組合數 C 的兩個引理。

引理 1	若 $p > q$ ，則 $C_n^p \geq C_n^q$

[證明] 我們可以利用公式直接比較兩者的大小，因為

$$C_n^p = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

$$C_n^q = \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \cdots (q-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

兩式中，分母相同且分子的項數相同，所以當 $p > q$ 時，$C_n^p > C_n^q$ 。■

引理 2	若 $x > y$ ，則 $C_n^{x+1} - C_n^x \geq C_n^y - C_n^{y-1}$

[證明] 由巴斯卡定理，$C_n^{x+1} - C_n^x = C_{n-1}^x$、$C_n^y - C_n^{y-1} = C_{n-1}^{y-1}$。因 $x > y > y-1$，由 引理 1 得 $C_{n-1}^x \geq C_{n-1}^{y-1}$。故原式 $C_n^{m+1} - C_n^m \geq C_n^m - C_n^{m-1}$ 成立。■

引理 2 讓我們可以知道數量多的組再加 1 所多出來的組合數比數量少的組再減 1 所減少的組合數還多。

由 引理 1 及 引理 2 ，我們就可以用以下方法證明 定理 4 是對的：

[證明 定理 4] 我們用以下方法比較平均分組與不平均分組的方法數：

1. 比較平均分組與不平均分組的差異，可以發現比平均多出來的電池數量總數必和比平均少掉的電池數量總數相同。如圖 5
2. 將平均分組中的某組增加 1 項，同時將另 1 組減少 1 項 (如圖 6)。由 引理 2 可以發現增加時所多出來的組合數必比減少時所少的組合數還多，所以此時的組合總數比平均時的組合總數多。
3. 重覆調整組中數量直到與不平均分組相同，可以發現在調整時，數量較多的組加 1 項與數量少的組少 1 項必同時發生，所以每次操作都會使組合數增加。

得到操作結束後，不平均分組的組合數必比平均分組的組合數多。■

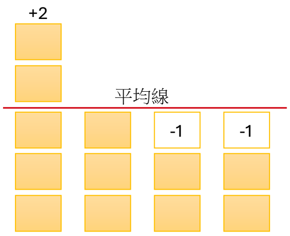

圖 5：各組數量與平均關係

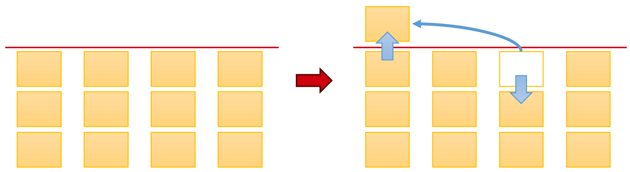
圖 6：平均組調整方法示例

肆、研究結果

一、取 2 顆電池（$p=2$）時的情形

(一)驗證原影片，在 4 顆有電與 4 顆沒電的電池中，找出 2 顆有電電池的較佳測試方案

我們嘗試改變分組的方法，看看原影片的說明是否為最佳方案。我們不考慮只有 1 顆的組，因為沒辦法從該組中取出 2 顆電池。測試結果如下：

1.不分組

從 8 顆電池中任取 2 顆總共有 $C_2^8=28$ 種組合，其中有電電池 4 顆中任取 2 顆有 $C_2^4=6$ 種組合。所以最糟的情形是，前面取的組合中都不是 2 顆有電電池，直到所有情形皆取完為止，最後才取出一組有電電池。總共 $(28-6)+1=23$ 次

2.分 2 組時

(1)分成 6 顆一組與 2 顆一組

可以先測試 2 顆的那組，若不能通電，則最差情形為裡面只有 1 顆有電。所以另外 6 顆中最少有 3 顆電池有電。最差情形下，需要測試 $C_2^6-C_2^3+1=13$ 次，共 14 次。

若直接先測 6 顆的那組，則最差情形下該組只有 2 顆有電。最多要測試 $C_2^6=15$ 次才能找到一對有電的電池。

(2)分成 5 顆一組與 3 顆一組

若先測 3 顆的那組且都無法找到一對有電的電池，此時已測試 $C_2^3=3$ 次，可知最差情形下該組最多有 1 顆有電電池。可知 5 顆電池中最少會有 3 顆有電電池，最差情形下需測 $C_2^5-C_2^3+1=8$ 次才能找到一對有電的電池。共需要 11 測試。

若先測 5 顆的那組都無法找到一對有電電池。表示 3 顆的那組全都是有電電池。也是需要 $C_2^5+1=11$ 次測試才能找到一對有電的電池。

(3)分成 4 顆二組

若第 1 組中都沒辦法找到一對有電的電池，表示裡面最多只有 1 顆有電電池。此時已經測試了 $C_2^4=6$ 次。另一組中，最少會有 3 顆有電電池。所以最多只要測試 $C_2^4-C_2^3+1=4$ 次就能找到一組有電電池，共需要 10 次即可。

3.分 3 組時

(1)分成 4 顆、 2 顆、 2 顆三組

先測 2 顆的二組，若皆無法找到一組有電的電池，最差的情形是該二組中各有一顆有電電池，此時剩下的一組中只會有 2 顆電池。所以最後一組最多需測試 $C_2^4=6$ 次，共需測 $1+1+6=8$ 次。

(2)分成 3 顆、 3 顆、 2 顆三組

先測 3 顆的兩組（每組皆測$C_2^3=3$次），若此兩組皆無法找到一對有電的電池，表示這兩組裡最多各只有一顆有電的電池。所以最後一組 2 顆必皆為有電電池。共需測 $2\times C_2^3+1=7$ 次。

4.分 4 組時

(1)分成 2 顆四組

每組皆測試 1 次後，若無法找到一對有電電池。表示每組各只有 1 顆有電電池，所以對前 2 組進行交叉測試後必可找出一對有電電池。共需測 $4\times C_2^2+2\times 2=8$ 次。

5.小結

我們將以上結果整合成表 1：

表 1：原始題目的其它分組方式結果

分組數	1	2	2	2	3	3	4
分組方法	(8)	(6,2)	(5,3)	(4,4)	(4,2,2)	(3,3,2)	(2,2,2,2)
測試次數	23	14	11	10	8	7	8

從這個表格中，我們有幾個結論：

1. 分組數越多，所需要測試的次數越少。但分組數太多時反而測試次數增加。
2. 分組數相同時，若每組的電池數量越平均，所需測試的次數越少。

又我們觀察分 4 組的情形時，我們還發現一個重要的特性：

定理 5　($p=2$時的交叉測試) 若已知有兩組皆只有一顆有電電池，則加上交叉測試後與兩組合併視為一組等價。

[證明] 假設 A 組及 B 組皆只有 1 顆有電電池，並進行 A 取 2 顆、B 取 2 顆、A,B 各取 1 顆三階段檢查。檢查的結果如圖 7 所示：綠線為 A 組內部檢查、藍線為 B 組內部檢查、而黃線為兩組交互檢查。可以發現分成兩組與合併成一組的結果是相同的。■

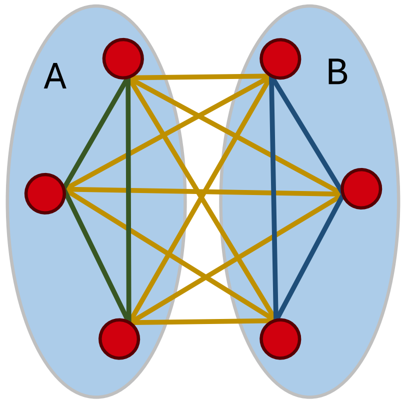

圖 7：兩組交互檢查示例

由上述結論，我們就可以以此延伸，找出不同情形下的測試次數上界為何。

(二)在 4 顆有電電池與 *b* 顆沒電電池時，找出 2 顆有電電池的較佳方法

我們想要了解，在有電電池數固定為 4 時，不同數量的沒電電池數 b 會有什麼影響。經測試，我們分成以下結論：

1.當沒電電池數 *b* 為 1 或是 2 時

因沒電電池數量較少，在這種情形下，只要一次取 2 顆電池測試，若無法使機器運作就捨棄這一組電池，並換另一組的 2 顆電池進行測試，直到取出一組皆為有電電池即可。以 $b=2$ 為例，總共有 6 顆電池（編號為 a 到 f），只要依序測試 (a,b)、(c,d)、(e,f) 共 3 次，必可以找到一組有電電池。

2.當沒電電池數 *b* 為 3 以上時

若將所有的電池分成 4 組或以上時，則在最差情形下可能會出現沒有任何一組中有 2 顆有電電池。又由 定理 3 可知要分越多組才會有越少的方法數。所以我們將所有電池分成 3 組。並利用 定理 4 的結論將所有電池數量平均分配，來討論較佳的測試次數，得到的結果節錄於下表 2：

表 2：當 $a=4$ 時，分組方法與測試次數比較表

電池 數量	分組方法 最差情形分析	測試次數 上界k
$b=3$ $n=7$	$(x_1,x_2)(x_3,x_4)(x_5,x_6,x_7)$ 有電電池編號為 x_2,x_4,x_6,x_7，最多需測試 $C_2^2+C_2^2+C_2^3$ =5 次	5

$b=4$ $n=8$	$(x_1,x_2)(x_3,x_4,x_5)(x_6,x_7,x_8)$ 有電電池編號為 x_2,x_5,x_7,x_8，最多需測試 $C_2^2+C_2^3+C_2^3=7$ 次	7
$b=5$ $n=9$	$(x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6)(x_7,x_8,x_9)$ 有電電池編號為 x_3,x_6,x_8,x_9，最多需測試 $C_2^3+C_2^3+C_2^3=9$ 次	9
$b=6$ $n=10$	$(x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6)(x_7,x_8,x_9,x_{10})$ 有電電池編號為 x_3,x_6,x_9,x_{10}，最多需測試 $C_2^3+C_2^3+C_2^4=12$ 次	12
$b=7$ $n=11$	$(x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6,x_7)(x_8,x_9,x_{10},x_{11})$ 有電電池編號為 x_3,x_7,x_{10},x_{11}，最多測試 $C_2^3+C_2^4+C_2^4=15$ 次	15

(三)總結尋找 2 顆有電電池的方法

由上述的測試可以知道，沒電電池數量會改變電池的取法。總共會有兩種不同的情形，我們如下定義：

定義 2 **(直接取法)** 從所有電池中取出所需電池數量 p 放入電器中測試，若無法使電器運作則捨棄並取出下一組，直到使電器運作為止。稱之為直接取法。

定義 3 **(分組法)** 將所有電池平均分成 m 組，並對各組中的所有 p 顆電池的組合進行測試，直到使電器運作為止，組與組之間不互相測試，稱此方法為分組法。

同樣以上述有 4 顆有電電池時為例，沒電電池數量 b 為 1 或 2 時，我們是使用直接取法，而當沒電電池數量 b 為 3 以上時，因有電電池數量不足以逐一測試，故需要進行交叉測試，此時會發生 定理 5 的現象反而會有比較多的測試次數，故採用分組法較佳。

(四)計算在不同數量的有電電池與沒電電池時，利用分組法與直接取法找出 2 顆有電電池的方法數

1.使用分組法時不同有電電池數量 a 與分組數 m 的關係

我們在測試 4 顆有電電池時知道，為了要保證至少有一組中有 2 顆以上的有電電池，最多只能分成 3 組進行測試。所以要先討論，在不同數量的有電電池 a 下，與分組數量 m 的關係。

定理 6	**($p=2$ 時分組法所需的分組數 m)** 取 2 顆電池時，以分組法測試時分組數 m 最多為有電電池數 a 少 1 。即 $m \le a-1$ 。

[證明] 由鴿籠原理可知，當 $m \le a-1$ 時可以保證必有一組有至少 2 顆有電電池，故必可在測試其中一組時找到一組有電電池。■

2.直接取法與分組法的選擇

我們在測試時發現，沒電電池數 b 很少的情形下，不需要使用分組法進行測試，只要使用直接取法即可。且可由以下的定理判斷需使用何種方法。

定理 7	**($p=2$ 時的分組法與直接取法判斷)** 當需要取 2 顆電池（$p=2$）時，若 $a \ge b+2$ 時，需使用直接取法，且測試次數 $k=b+1$ 。而 $a<b+2$ 時直接取法無效，需使用分組法。

[證明] 在最差情形下，每取 2 顆電池中會有 1 顆沒電電池。所以有 b 顆沒電電池時，至少需要做 b 次測試，同時會排除 b 顆有電電池，但最後仍需 2 顆有電電池才能確保可以在不回頭使用測試過的電池下取到有電電池。故只要 $b+2 \le a$，即可逐一排除沒電電池，且一共測試 $b+1$ 次即可找到一組有電電池。若 $a<b+2$ ，則每次取 2 顆測試時會將所有有電電池用盡，使得在最差情形下無法找到一組有電電池。

3.計算方法數

由上述的討論，我們可以知道在沒電電池數少時，需使用直接取法。而在沒電電池數多的情形下，需使用分組法。分組法的計算可參考表 3 當 $a=4$ 時的狀況，我們把 $a=2$ 至 8 時的計算結果摘錄如下表 3：

表 3：當 $a=2$ 至 8 時的分組數 m、與測試次數 k 的計算結果

a	m	b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	2	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
4	3	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26
5	4	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21

6	5	2	3	4	5	7	9	11	13	15	18
7	6	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16
8	7	2	3	4	5	6	7	9	11	13	15

其中，灰色底是使用直接取法得到的結果，而其它數據是使用分組法得到的結果。

(五)一般化分組法所需之測試次數

1.以有電電池數 $a=4$ 為例進行推導

我們希望推導出當 $a=4$ 時分組法的一般式。由 定理 7 可知在 $b\geq 3$ 時才適用分組法，且由 定理 6 可知要最多可以將所有電池分成 3 組（以 A,B,C 表示），與 定理 4 得到需將所有電池盡量平均分組才能得到較佳的測試次數上界 k 。所以分組的情形如下表 4 節錄：

表 4：$a=4$ 時，使用分組法時各組的數量表

b	n	A 組數量	B 組數量	C 組數量
3	7	2	2	3
4	8	2	3	3
5	9	3	3	3
6	10	3	3	4
7	11	3	4	4
8	12	4	4	4
9	13	4	4	5

由上表 4 中，我們可以知道：

1. 每組的電池數必為 $\left[\frac{n}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{n}{3}\right]+1$ 兩種可能，而且不論該組有多少顆電池，都是任取 2 顆做測試。
2. 兩種數量的組數呈現三個一循環，當 $n\,\%\,3=0$ 時，只有第一種數量。

由以上觀察到的兩個結果，我們可以推算出分組法測試次數上界 k 的一般化公式為：

$$k=\left(3-(n\,\%\,3)\right)C_2^{\left[\frac{n}{3}\right]}+(n\,\%\,3)C_2^{\left[\frac{n}{3}\right]+1},(n\geq 7)$$

2.不同的有電電池數 a 時的分組法一般化公式

不同數量的有電電池數推導與 $a=4$ 時相似，需先確認其分組數 $m=a-1$ 以及最少適用範圍（$b>a-2 \Rightarrow n>2a-2$）。得到不同的 a 值求得一般式如下表 5：

表 5：不同有電電池數時分組法的一般化公式

a	分組數 m	測試次數 k	適用範圍
2	1	C_2^n	$n>2$
3	2	$C_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$	$n>4$
4	3	$(3-n\,\%\,3)C_2^{\left[\frac{n}{3}\right]}+(n\,\%\,3)C_2^{\left[\frac{n}{3}\right]+1}$	$n>6$
5	4	$(4-n\,\%\,4)C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]}+(n\,\%\,4)C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}$	$n>8$
6	5	$(5-n\,\%\,5)C_2^{\left[\frac{n}{5}\right]}+(n\,\%\,5)C_2^{\left[\frac{n}{5}\right]+1}$	$n>10$
7	6	$(6-n\,\%\,6)C_2^{\left[\frac{n}{6}\right]}+(n\,\%\,6)C_2^{\left[\frac{n}{6}\right]+1}$	$n>12$
8	7	$(7-n\,\%\,7)C_2^{\left[\frac{n}{7}\right]}+(n\,\%\,7)C_2^{\left[\frac{n}{7}\right]+1}$	$n>14$

由上表可知，我們可以推出當 $p=2$ 時的測試次數上界 k 如以下結論：

結論 1 **($p=2$ 時的測試次數上界-1)** 當 $p=2$ 時，測試次數上界 k 與有電電池數 a 、總電池數 n 的關係如下：

$$k=\begin{cases} b+1 & ,n\le 2a-2 \\ (m-n\,\%\,m)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]}+(n\,\%\,m)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]+1} & ,n>2a-2 \end{cases}$$

其中，沒電電池數 $b=n-a$ 、分組數 $m=a-1$ 。

(六)分組法的另一種一般化公式

在使用分組法時，我們需要將總電池數 n 盡量平均分成 m 組，且無法平分的數量需放在後面的組中。所以我們嘗試用另一種方法將每組的個數表示出來。首先，我們需要使用以下的定理：

定理 8 **(整數平分方法)** 對於任意整數 n 盡量平均分成 m 組時，

可得 $n=\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{n+1}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$。

[證明] 設 n 除以 m 的商是 q 、餘數 r，我們可以得到 $n = m \cdot q + r$ 且 $0 \leq r < m$，並假設 $r' = m - r$，可知 $r + r' = m$。

若 i 為一個整數，且 $0 \leq i < m$，我們可以寫出 $\left[\frac{n+i}{m}\right] = \left[\frac{m \cdot q + r + i}{m}\right] = q + \left[\frac{r+i}{m}\right]$。

1. 當 $0 \leq i < r'$ 時，因 $r + i < r + r' = m$，所以 $\frac{r+i}{m} < 1$。

   得到 $\left[\frac{n+i}{m}\right] = q + \left[\frac{r+i}{m}\right] = q + 0 = q$。

2. 當 $r' \leq i < m$ 時，因 $r + i \geq r + r' = m$ 且 $r + i < r + m < 2m$，

   所以 $1 \leq \frac{r+i}{m} < 2$。得到 $\left[\frac{n+i}{m}\right] = q + \left[\frac{r+i}{m}\right] = q + 1$。

3. 定理中，$\left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n+1}{m}\right] + \cdots + \left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ 共 m 項。從 1. 和 2. 可知其中前 r' 項為 q、後 $m - r'$ 項為 $q + 1$ 。所以和為

$$r' \cdot q + (m - r') \cdot (q + 1) = r' \cdot q + (m - r') \cdot q + (m - r') = m \cdot q + r = n$$

   得證。■

由此定理，我們可以很容易地將分組法各組的一般式表達出來，所以可以得到以下結論：

結論 2 ($p = 2$ 時的測試次數上界-2) 以分組法計算測式次數上界 k 時的第二種計算公式為 $k = C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]} + C_2^{\left[\frac{n+1}{m}\right]} + \cdots + C_2^{\left[\frac{n+m-1}{m}\right]} = \sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}, (n > 2a - 2)$

這種表示法雖然在各項的計算上比較容易，但需各自將每項計算出來才能求出答案。在效率上會比原來我們找到的一般式較差。為了確保兩者間任何差異，我們得到以下定理：

定理 9 兩種計算分組法測試次數上界的公式等價。

[證明] 延續 定理 8 證明的符號，可以知道各組數量 $\left[\frac{n}{m}\right], \left[\frac{n+1}{m}\right], \cdots, \left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ 中有 $m - r$ 個值為 q、r 個值為 $q + 1$。所以第二種表示法可以進行如下改寫：

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]} = (m - r)C_2^q + rC_2^{q+1} = \big(m - (n \,\%\, m)\big)C_2^q + (n \,\%\, m)C_2^{q+1}$$

又分組數 $q=\left[\frac{n}{m}\right]$代入上式得到

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]} = \left(m-(n\,\%\,m)\right)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]} + (n\,\%\,m)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}$$

可知兩種表示法相等。■

二、取 3 顆電池（$p=3$）時的情形

(一)由 $p=2$ 時使用的分組法與直接取法進行延伸

1.原理

回顧取電池數 $p=2$ 時的分配方法，我們是利用鴿籠原理，調整分組數 $m=a-1$，來保證至少有一組電池中有 2 顆有電電池，使得分組法可以找出所求。所以在取電池數量 $p=3$ 時，我們也先嘗試在分組時，讓至少一組的有電電池數量不少於 3 顆。如此就能保證在檢查的過程中可以找到所求。

2.使用分組法時將電池分組的方法

要保證至少有一組中包含 3 顆以上的有電電池，則最差情形下其它組最多都只有 2 顆。依照有電電池數 a 的不同，分組數與最差情形時有電電池分配的方法節錄於下表 6。

表 6：有電電池數不同時最差情形分組

有電電池數 a	分組數 m	最差情形時 有電電池分組方法
3	1	(3)
4	1	(4)
5	2	(2,3)
6	2	(2,4)
7	3	(2,2,3)
8	3	(2,2,4)
9	4	(2,2,2,3)
10	4	(2,2,2,4)

依照上表結果，我們得到兩個結論：

1. 分組數兩個一循環，可以推論出分組數 m 與有電電池數 a 的關係式為 $m=\left[\frac{a-1}{2}\right]$。
2. 最後一組的有電電池數因為分配的問題，有時會有 3 顆電池或 4 顆電池。

3.計算結果

在計算測試次數之前，如同 $p=2$ 時的情形，要先確認什麼時候適用直接取法，又什麼時候要用分組法。所以我們給了如下的定理：

定理 10 ($p=3$ 時的分組法與直接取法判斷) 當需要取 3 顆電池（$p=3$）時，若 $a\geq 2b+3$ 時，需使用直接取法，且測試次數 $k=b+1$ 。而 $a<2b+3$ 時直接取法無效，需使用分組法。

[證明] 一次取 3 顆電池時，使用直接取法最壞情形是每次皆取到 1 顆沒電和 2 顆有電電池，導致每排除 1 顆沒電電池時皆會捨棄 2 顆有電電池。所以有 b 顆沒電電池就需要 $2b$ 顆有電電池，另外仍需多一組 3 顆有電電池才能保證取完後能得到一組有電電池。故有電電池數 $a\geq 2b+3$ 才能使用直接取法。■

進一步的說，使用分組法的時機可以改寫為 $3a<2(a+b)+3\Rightarrow 3a-3<2n$，即總電池數 $n>\frac{3a-3}{2}$ 時可適用分組法。

了解在什麼情形下要使用直接取法後，我們就能計算使用直接取法或分組法時的測試次數。結果節錄於下表 7：

表 7：使用分組法與直接取法計算測試次數表

a	m	b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4	1	7	17	32	53	81	117	162	217	283	361
5	2	2	5	8	14	20	30	40	55	70	91
6	2	2	5	11	17	27	37	52	67	88	109
7	3	2	3	6	9	12	18	24	30	40	50
8	3	2	3	6	9	15	21	27	37	47	57
9	4	2	3	4	7	10	13	16	22	28	34

10	4	2	3	4	7	10	13	19	23	31	37

上表 7 中灰底的部份表示使用直接取法時計算的測試次數。我們發現在分組數相同時（同底色區域）有電電池數變多會導致總電池數變多，導致測試次數變多。

4.一般式推導

與 $p=2$ 時相同，我們觀察分組數與每組的個數關係，可以將使用分組法的一般式推導如下表 8：

表 8：當 $p=3$ 時以分組法求測試次數一般化公式表

a	分組數 m	測試次數 k	適用範圍
3	1	C_3^n	$n \geq 1$
4	1	$C_3^n - C_3^4 + 1$	$n \geq 2$
5	2	$C_3^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$	$n \geq 4$
6	2	$C_3^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - C_3^4 + 1$	$n \geq 5$
7	3	$\big(3-(n\,\%\,3)\big)C_3^{\left[\frac{n}{3}\right]} + (n\,\%\,3)C_3^{\left[\frac{n}{3}\right]+1}$	$n \geq 7$
8	3	$\big(3-(n\,\%\,3)\big)C_3^{\left[\frac{n}{3}\right]} + (n\,\%\,3)C_3^{\left[\frac{n}{3}\right]+1} - C_3^4 + 1$	$n \geq 8$
9	4	$\big(4-(n\,\%\,4)\big)C_3^{\left[\frac{n}{4}\right]} + (n\,\%\,4)C_3^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}$	$n \geq 10$
10	4	$\big(4-(n\,\%\,4)\big)C_3^{\left[\frac{n}{4}\right]} + (n\,\%\,4)C_3^{\left[\frac{n}{4}\right]+1} - C_3^4 + 1$	$n \geq 11$

由以上表格，我們可以推得使用分組法到的測試次數一般式為

$$k = \big(m-(n\,\%\,m)\big)C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]} + (n\,\%\,m)C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]+1} - C_3^{4-(a\%2)} + 1\,, n > \frac{3a-3}{2}$$

又如同 $p=2$ 時的討論，將總電池數 n 平分 m 組可以表示成

$\left[\frac{n}{m}\right], \left[\frac{n+1}{m}\right], \cdots, \left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ ，得使用分組法時的測試次數一般式亦可表示成

$$k = C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]} + C_3^{\left[\frac{n+1}{m}\right]} + \cdots + C_3^{\left[\frac{n+m-1}{m}\right]} - C_3^{4-(a\%2)} + 1$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left[\frac{n+i}{m}\right]} - C_3^{4-(a\%2)} + 1$$

(二)另一種測試方法：$X2Y1$ 循環檢查法

在上述的測試方法中，我們使用鴿籠原理來保證至少有一組的有電電池數不少於 3 顆。但因為最差情形下其它組最多可以有 2 顆有電電池，造成分組的數量不多。所以我們再嘗試尋找其它方案，看看是否可以有更少的測試次數即可找出 3 顆有電電池。

1.測試方法流程

我們找到一個新的測試流程，步驟如下說明：

(1) 我們將分組數 m 設為有電電池數 a 少 1 將電池平均分組。利用鴿籠原理可知，我們可以保證至少有 1 組其有電電池數不少於 2 。

(2) 在每個不小於 3 顆電池組中，將所有 3 顆電池的組合進行測試，若皆無法使電器運作，我們就能確保沒有任何一組有多於 2 顆有電電池。

(3) 先從 A 組取 2 顆、 B 組取 1 顆電池進行測試（以 $A2B1$ 表示），再由 B 組取 2 顆、C 組取 1 顆電池測試（以 $B2C1$ 表示）以此類推。假設最後一組編號為 X，則最後從 X 組取 2 顆、 A 組取 1 顆電池做測試（如圖 8 說明）。我們得到在測試過程中必可找出 3 顆有電電池。

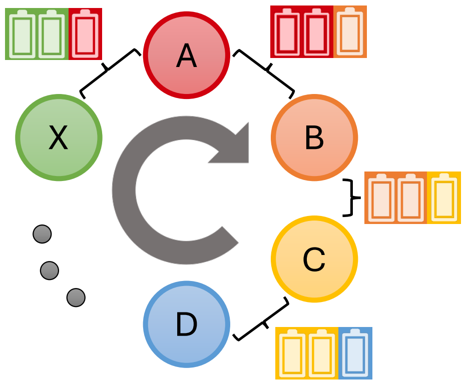

圖 8：$X2Y1$循環檢查法操作示例

定義 4	**($X2Y1$ 循環檢查法)** 依上述方式尋找一組 3 顆有電電池，稱為「$X2Y1$ 循環檢查法」

舉例而言：假設有電電池數 $a = 4$、沒電電池數 $b = 5$，我們分成 $m = 3$ 組，編號為 A, B, C ，每組各 3 顆電池。下表 9 說明測試流程與次數：

表 9：$X2Y1$循環檢查法測試流程

	測試方法	測試次數	說明
(1)	$A3$、$B3$、$C3$	$C_3^3+C_3^3+C_3^3=3$	測試各組沒有 3 顆有電電池，若皆無法找出 3 顆有電電池，則有電電池的分佈為以下 6 種： 1. (2,2,0)　2. (2,0,2)　3. (0,2,2) 4. (2,1,1)　5. (1,2,1)　6. (1,1,2)
(2)	$A2B1$	$C_2^3\times C_1^3=9$	測試 A 組有 2 顆、 B 組至少 1 顆的情形，即 (2,2,0) 和 (2,1,1) 二種情形。
(3)	$B2C1$	$C_2^3\times C_1^3=9$	測試 B 組有 2 顆、 C 組至少 1 顆的情形，即 (0,2,2) 和 (1,2,1) 二種情形。
(4)	$C2A1$	$C_2^3\times C_1^3=9$	測試 C 組有 2 顆、 A 組至少 1 顆的情形，即 (2,0,2) 和 (1,1,2) 二種情形。
總計		30 次	所有狀況皆有測試，必可找出 3 顆有電電池。

2.檢查流程完整性

我們為了確認，以 $X2Y1$ 循環檢查法是否確實能找到一組有電電池，我們做了以下的定理與證明：

定理 11　($X2Y1$循環檢查法的完整性) 以 $X2Y1$ 循環檢查法必可找出一組 3 顆有電電池。

[證明] 已知：在 a 顆有電電池時，我們會分成 $m=a-1$ 組，由鴿籠原理可知至少有一組含 2 顆有電電池，且已排除一組中有 3 顆以上的有電電池。

(1) 若有一組中有含 2 顆有電電池，則只要下一組中有 1 顆或 2 顆有電電池，則必可在進行 $X2Y1$ 循環檢查時找出 3 顆有電電池，只有在下一組中沒有有電電池時，才無法找出所求。所以若有一種分配無法找到所求時，可知有 2 顆有電電池的組後皆為沒有有電電池的組，故沒有有電電池的組數不能小於有 2 顆有電電池的組數。

(2) 令有 i 顆有電電池的組數為 k_i ，並假設 $k_0\geq k_2$ 。

(3) 則由分組數可知 $k_0+k_1+k_2=m=a-1$，由有電電池數可知 $k_1+2k_2=a$ 。

(4) 兩式相減，得到 $k_2-k_0=1$ ，可知有 2 顆有電電池的組數比沒有有電電池的組數多 1，與 (2) 的假設矛盾，假設不成立。

可知以此方式檢查時，必可找出 3 顆有電電池。■

3.一般式的推導

若有電電池數為 a 、沒電電池數為 b ，可知總電池數 $n=a+b$、分組數 $m=a-1$。以下是測試次數 k 的一般式推導：

(1) 與原公式相同，分組時越平均越好。可知每組的數量分別為 $\left[\frac{n}{m}\right],\left[\frac{n+1}{m}\right],\cdots,\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$

(2) 先檢查每組是否有多於 3 顆的有電電池，方法數為

$$C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]}+C_3^{\left[\frac{n+1}{m}\right]}+\cdots+C_3^{\left[\frac{n+m-1}{m}\right]}=\sum_{i=0}^{m-1}C_3^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}$$

（註：若 $x<y$ ，規定 $C_y^x=0$）

(3) 再利用循環檢查法，取前項的 2 顆與後項的 1 顆進行計算，方法數為

$$C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]}\times C_1^{\left[\frac{n+1}{m}\right]}+C_2^{\left[\frac{n+1}{m}\right]}\times C_1^{\left[\frac{n+2}{m}\right]}+\cdots+C_2^{\left[\frac{n+m-1}{m}\right]}\times C_1^{\left[\frac{n}{m}\right]}$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{m-2}C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}\times C_2^{\left[\frac{n+i+1}{m}\right]}\right)+C_2^{\left[\frac{n+m-1}{m}\right]}\times C_1^{\left[\frac{n}{m}\right]}=\sum_{i=0}^{m-1}C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}\times C_2^{\left[\frac{n+(i+1)\%m}{m}\right]}$$

(4) 綜合以上，可知

$$k=\sum_{i=0}^{m-1}C_3^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}+\sum_{i=0}^{m-1}C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}\times C_2^{\left[\frac{n+(i+1)\%m}{m}\right]}$$

4.以 $X2Y1$ 循環檢查法計算方法數

利用上述的分組方法，我們計算在不同有電電池與沒電電池時所需的測試次數，得到的結果節錄於下表 10：

表 10：以 $X2Y1$ 循環檢查法計算測試次數結果

a	m	b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286

4	3	3	6	12	20	30	45	63	84	112	144
5	4	2	5	8	14	22	30	40	55	73	91
6	5	2	5	7	10	16	24	32	40	50	65
7	6	2	3	7	9	12	18	26	34	42	50
8	7	2	3	7	9	11	14	20	28	36	44
9	8	2	3	4	9	11	13	16	22	30	38
10	9	2	3	4	9	11	13	15	18	24	32

由此表格中，我們發現了幾個性質：

(1) 在灰色區域中，同分組法 定理 10 的判斷，因沒電電池數過少，我們使用直接取法。

(2) 在粉色區域中，我們發現只要沒電電池數比有電電池數少 3 顆以上，則使用 $X2Y1$ 循環法時會有固定的方法數 k，且此時 $k=2b+1$ 。

定理 12 若沒電電池數 b 比有電電池數 a 少 3 以上（即 $b \leq a-3$），則以 $X2Y1$ 循環檢查法測試時，測試次數 $k=2b+1$

[證明] (1) 因分組數 $m=a-1$ 且總電池數 $n=a+b \leq 2a-3=2m-1$ ，可知在平均分配電池時，每組最多只有 2 顆電池。

(2) 又 $n=a+b=(a-1)+(b+1)=m+(b+1)$，且 $b+1 \leq a-2=m-1$ 。可知只有 $b+1$ 組有 2 顆電池，且至少 1 組只有 1 顆電池。

(3) 測試次數計算分 2 種情形：第一種為 2 顆 1 組的後面亦為 2 顆 1 組，則會需要測試 2 次；第二種為 2 顆 1 組的後面為 1 顆 1 組，會需要測試 1 次。其餘情形不需測試。

(4) 因只有 $b+1$ 組有 2 顆電池。所以第一種情形有 b 個，而第二種情形只有 1 個，故測試次數為 $k=2b+1$ 。■

5.與分組法的比較

我們將兩者所計算出的測試次數進行比較，如節錄於下表 11，每個格子中前面的數字表示使用 $X2Y1$ 循環法計算的測試次數，後面的數字為使用分組法計算的測試次數。底色

為綠色表示 $X2Y1$ 循環法較佳，紅色底表示分組法較佳，而灰色底為使用直接取法，在此不討論。

表 11：分組法和 $X2Y1$ 循環檢查法比較表

$a\backslash b$	2	3	4	5	6	7	8	9
4	**6**|17	**12**|32	**20**|53	**30**|81	**45**|117	**63**|162	**84**|217	**112**|283
5	5|5	8|8	14|14	22|**20**	30|30	40|40	55|55	73|**70**
6	5|5	**7**|11	**10**|17	**16**|27	**24**|37	**32**|52	**40**|67	**50**|88
7	3|3	7|**6**	9|9	12|12	18|18	26|**24**	34|**30**	42|**40**
8	3|3	7|**6**	9|9	**11**|15	**14**|21	**20**|27	**28**|37	**36**|47
9	3|3	4|4	9|**7**	11|**10**	13|13	16|16	22|22	30|**28**
10	3|3	4|4	9|**7**	11|**10**	13|13	**15**|19	**18**|25	**24**|31
11	3|3	4|4	5|5	11|**8**	13|**11**	15|**14**	17|17	20|20

我們由此表格中，觀察到幾個性質：

(1) 在 a 為偶數時，使用 $X2Y1$ 循環法比較好，在 a 為奇數時，使用分組法比較好。推測是因為使用分組法時，在 a 為奇數時測試數量會變多導致。

(2) 因為在 b 固定時，只要 a 大於一定的值， $X2Y1$ 循環檢查法所需次數就固定，而分組法測試次數仍會變小。故在左下部區域中，仍是以分組法有較佳的結果。

(三)修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法

1.原 $X2Y1$ 循環檢查法的問題與改良方法

雖然 $X2Y1$ 循環檢查法在某些情形下可以讓測試次數變得更少，但仍有例外。所以我們想了解可不可以將其做進一步地改良。

在原來的 $X2Y1$ 循環檢查法，我們採用的分組方式與分組法相同，是將數量少的放前面的組，多的放後面的組。但在進行交叉檢查時，數量多的組相鄰會造成測試次數增加。所以我們做如下的調整：

定義 5　(修正後的 $X2Y1$ 檢查法) 檢查方法與原 $X2Y1$ 檢查法相同，但分組方式不同：

假設第 i 組的電池個數為 M_i ，則 $M_i=\left[\frac{n+s_i}{m}\right]$ 。其中 $s_i=\begin{cases}\frac{i-1}{2} & ,i\text{為奇數}\\ \frac{2m-i}{2} & ,i\text{為偶數}\end{cases}$

若以原 $X2Y1$ 檢查法進行分組時， $s_i = i - 1$ 。

以 $m = 8$ 為例，兩者的排列如下表 12：

表 12：兩種 $X2Y1$ 檢查法的 s_i 差異

	原 $X2Y1$ 檢查法的分組順序								修正後 $X2Y1$ 檢查法的分組順序							
i	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
s_i	0	1	2	3	4	5	6	7	0	7	1	6	2	5	3	4

s_i 越大，該組的電池數量越多。修正後的分組會使數量多的組與少的組交錯，這可以讓測試次數進一步地減少。

2.以修正後的 $X2Y1$ 檢查法計算測試次數

首先，我們先討論修正後的 $X2Y1$ 檢查法計算測試次數的一般式：

定理 13 (修正後的 $X2Y1$ 檢查法計算測試次數一般式) 以修正後的 $X2Y1$ 檢查法計算測試次數一般式為 $k = \sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left\lceil \frac{n+s_i}{m} \right\rceil} + \sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left\lceil \frac{n+s_i}{m} \right\rceil} \times C_2^{\left\lceil \frac{n+s_{(i+1)\%m}}{m} \right\rceil}$

由 定理 13 我們就可以計算測試次數 k ，節錄於下表 13：

表 13：修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法計算測試次數結果

a	m	b									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	3	12	20	30	45	63	84	112	144	180	225
5	4	8	14	20	30	40	55	70	91	112	140
6	5	7	10	16	22	30	40	50	65	80	98
7	6	6	9	12	18	24	30	40	50	60	75
8	7	5	8	11	14	20	26	32	40	50	60
9	8	4	7	10	13	16	22	28	34	40	50
10	9	4	6	9	12	15	18	24	30	36	42

值得注意的是，修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法在 b 夠小的情形下，測試次數與直接取法相同。所以不用另外判斷是否需要改用其它方法來進行測試。

3.與分組法的比較

我們將分組法與修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法進行比較。得到下表 14 的結果：

表 14：修正後的 $X2Y1$ 檢查法與分組法比較表

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
6	△	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
8	△	△	○	○	○	○	○	○	○	○
9	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
10	△	△	△	○	○	○	○	○	○	○
11	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
12	△	△	△	△	○	○	○	○	○	○

表 14 中，「△」表示兩者相同，「○」表示修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法較佳。可以發現以修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法進行測試，皆可以有較少的測試次數。

結論 3 **($p = 3$ 時的測試方法)** 當取 3 顆電池時，以修正後的 $X2Y1$ 循環檢查法進行測試有較少的測試次數。

伍、討論

一、與真假幣問題之比較

在討論這個問題時，我們有發現一個類似的經典名題：真假幣問題。在我們尋找其相關的科展研究後，發現其與我們的研究有很大的差異。以下列出差異的部份如下表 15：

表 15：本作品與真假幣問題比較

	本作品 來電不來電	真假幣問題 (郭玥均,吳承軒,李承熹,郭家綺, 2024)
目的	在一堆電池中尋找指定數量的有電電池，不需找出所有有電電池。	在硬幣堆中找出所有假幣，可能需判別重量差異
測試方式	一次只能放入指定數量的電池進入電器中測試，不能多也不能少。	使用天秤進行測試，可調整左右秤盤中硬幣的數量。或有額外的硬幣/砝碼可供測試

分組原理	利用鴿籠原理將電池進行分組後再對各組進行測試。依順序找出符合條件的電池組合。	利用二分法或三分法將硬幣分組後再放入天秤中進行測試，找出不同重的組後再平分該組硬幣，直到可辨認出偽幣為止。

二、以分組法取電池時，電池分組數 $\boldsymbol{m}$ 的計算

以分組法取電池時，分組數 m 會隨著有電電池數 a 與欲取的電池數 p 有關，我們發現有以下關係：

> **定理 14 (以分組法測試時的分組數)** 以分組法測試時，分組數與有電電池數 a 和欲取的電池數 p 有關。且 $m=\left\lfloor\frac{a-1}{p-1}\right\rfloor$ 。

[證明] 為了要確保至少有一組中要有 p 顆有電電池，最差情形時其餘的 $m-1$ 組皆有 $p-1$ 顆電池。所以有電電總數 $a\geq(m-1)(p-1)+p$。整理後得到

$$\frac{a-p}{p-1}+1\geq m\Rightarrow\frac{a-1}{p-1}\geq m$$

故 m 取 $\left\lfloor\frac{a-1}{p-1}\right\rfloor$ 為最大符合需求之解。■

三、取 4 顆電池（$\boldsymbol{p=4}$）時的情形與推廣

(一)觀察 $\boldsymbol{p=2}$ 與 $\boldsymbol{p=3}$ 的取法並做延伸猜測

我們先前已討論取 2 顆電池與 3 顆電池時的情形，所以想進行延伸推廣，看看在取 4 顆電池時的結果如何。所以我們先針對先前使用的檢查方法嘗試進行推論，看是否可以有效減少取 4 顆電池時所需的測試次數。

1.直接取法的推廣

與 定理 7 和 定理 10 相似，在 $p=4$ 使用直接取法時，最差情形下每排除 1 顆沒電電池就需捨棄 3 顆有電電池，最後仍需有 4 顆有電電池才能找到一組有電的電池。可知當 $a\geq 3b+4$ 才能使用直接取法，且測試次數 $k=b+1$ 。

2.分組法的推廣

使用分組法之前，我們要確定在不同的有電電池數 a 時所需的分組數 m 。依 定理 14 的結論，當 $p=4$ 時分組數 $m=\left\lceil\frac{a-1}{3}\right\rceil$ 。下表 16 是當 $a=4$ 至 12 時，以分組法檢查時的分組數量與有電電池的最差分配。

表 16：當 $p=4$ 時分組數與有電電池分配摘錄

有電電池數 a	分組數 m	有電電池最差分配
4	1	(4)
5	1	(5)
6	1	(6)
7	2	(3,4)
8	2	(3,5)
9	2	(3,6)
10	3	(3,3,4)
11	3	(3,3,5)
12	3	(3,3,6)

我們發現，在最差情形下，最後一組的有電電池數可能是 4 到 6。同 $p=3$ 時的情形，在計算最後一組的測試次數時，要扣除有電電池的數取 4 組合數再加 1（設 x 為最後一組有電電池數量，則測試次數需$-C_4^x+1$）

3.$X2Y1$ 循環檢查法的推廣：交叉檢查法

在 $p=3$ 時，若需要利用 2 組湊出 3 顆有電電池，則有電電池的分配必為 2 顆及 1 顆的組合。但當 $p=4$ 時，就有其它的可能性，所以我們如下定義：

定義 6 **(交叉檢查法)** 在尋找一組有電電池的過程中，除了單獨從每組中取電池進行測試外。也會從不同的組中各取數個電池進行測試，則稱此測試方法為交叉檢查法。

顯然，在 $p=3$ 時所用的 $X2Y1$ 循環檢查法為其中一個例子，但其有特定的循環檢查方法以有效減少測試次數。

在 $p=4$ 進行交叉檢查法時，我們希望可以先進行有效的分組，讓後續可以減少測試次數的同時，也可以全面考量有電電池的所有可能分佈。所以我們規畫要綜合以下兩種方法

進行測試，以下討論均已排除一組中有 4 顆以上的有電電池，因為我們進行交叉檢查之前，會先對各組檢查是否有 4 顆有電電池。

(1)循環檢查法

定義 7 **(循環檢查法)** 同 圖 8 的說明，依序從 A 組、B 組取特定數量的電池檢查後，再從 B 組、C 組 取同樣模式的電池數量進行檢查，重覆進行直到一輪結束。

在 $p=4$ 的情況下，取 2 組做交叉測試時（取 3 組以上會讓測試次數大幅增加，暫不考慮），有下列二種情形。

i. $X3Y1$ 循環檢查：同 定理 11 的證明，能利用此方法檢查的條件為含 3 顆有電電池的組數大於不含有電電池的組數。

ii. $X2Y2$ 循環檢查：條件為含 3 顆或 2 顆有電電池的組數不小於含 1 顆或不含有電電池的組數。

(2)握手檢查法

定義 8 **(握手檢查法)** 從 A 組、B 組取特定數量的電池檢查後，再由 A,C 組、A,D 組等進行相同模式檢查，直到任兩組皆進行此模式檢查為止，稱為握手檢查法。

相較於 $p=3$ 的有電電池分佈， $p=4$ 時電池的分佈的情形較複雜，可能導致只使用循環檢查時會有無法檢查到的情形，故握手檢查也需要列入考量中。

i. $X3Y1$ 握手檢查：至少一組有 3 顆有電電池且其它至少一組有 1 顆有電電池。

ii. $X2Y2$ 握手檢查：至少二組有 2 顆以上有電電池。

(二)實際驗證的結果

1.以直接取法及分組法計算的結果

下表 17 節錄不同的有電電池數 a 與沒電電池數 b 時的測試次數列表：

表 17：$p=4$ 時直接取法與分組法的測試次數節錄

a	m	b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001

5	1	11	31	66	122	206	326	491	711	997	1361
6	1	21	56	112	196	316	481	701	987	1351	1806
7	2	2	6	10	20	30	50	70	105	140	196
8	2	2	6	16	26	46	66	101	136	192	248
9	2	2	6	16	36	56	91	126	182	238	322
10	3	2	3	7	11	15	25	35	45	65	85

與 $p=3$ 時的結果近似，當有電電池數增加但分組數沒增加時，測試次數反而會增加而不是減少。

2.以交叉檢查法時的計算結果

使用交叉檢查法進行測試時，是以下列步驟進行：

(1) 先檢查各組是否有 4 顆有電電池。

(2) 使用 $X3Y1$ 循環檢查。

(3) 使用 $X2Y2$ 握手檢查。

以上述三步驟進行後，在分組適當的情形下，可以檢查出所有有電電池可能的分佈。但在進一步的觀察後，我們發現有以下現象：

(1) 當我們使用 $X3Y1$ 循環檢查後，有時不需進行完整的 $X2Y2$ 循環檢查，即可完整檢查所有有電電池分佈情形，所以檢查次數可以較上述的步驟少。

(2) 當 a 除以 3 餘 1 時，適當的分組與檢查流程會使測試次數與分組法相同。而在其它情形下，測試次數通常會比分組法少。

下表 18 為 $p=4$ 時我們以交叉檢查法進行檢查的步驟，及與相同情形下分組法的比較。

表 18：$p=4$ 時以交叉檢查時的檢查步驟與同情形下分組法比較

有電電池數a	分組數m	檢查方法	當 $b=15$ 時的測試次數	相同情形下分組法的測試次數
5	3	$A4, B4, C4,$ $A3B1, B3C1, C3A1,$ $A2B2, B2C2, C2A2$	1751	4841

6	4	$A4, B4, C4, D4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3A1,$ $A2B2, B2C2, C2D2, D2A2,$ $A2C2, B2D2$	1040	5971
7	4	$A4, B4, C4, D4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3A1,$ $A2B2, C2D2$	660	660
8	5	$A4, B4, C4, D4, E4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3A1,$ $A2B2, B2C2, C2D2, D2E2, E2A2$	527	821
9	5	$A4, B4, C4, D4, E4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3A1,$ $A2B2, C2D2$	391	976
10	6	$A4, B4, C4, D4, E4, F4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3F1, F3A1,$ $A2B2, C2D2, E2F2$	266	266
11	7	$A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1,$ $E3F1, F3G1, G3A1,$ $A2B2, B2C2, C2D2, D2E2,$ $E2F2, F2G2, G2A2$	265	318
12	7	$A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1,$ $E3F1, F3G1, G3A1,$ $A2B2, C2D2, E2F2$	192	364
13	8	$A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4, H4,$ $A3B1, B3C1, C3D1, D3E1,$ $E3F1, F3G1, G3H1, H3A1,$ $A2B2, C2D2, E2F2, G2H2$	140	140

陸、結論

1. 在取 2 顆電池時，當沒電電池數較少時採直接取法、沒電電池數較多時採分組法較有效率，且數量多的組需放後面進行測試

2. 取 2 顆電池時測試次數上界為

$$k=\begin{cases} b+1 & ,n\le 2a-2 \\ (m-n\,\%\,m)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]}+(n\,\%\,m)C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]+1} & ,n>2a-2 \end{cases},$$

而分組法($n>2a-2$ 時)的一般式也可寫為 $\sum_{i=0}^{m-1}C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}$

3. 取 3 顆電池時，以分組法在 a 為偶數時較沒有效率，需使用改良後的 $X2Y1$ 循環檢查法。

4. 取 3 顆電池時，以改良後的 $X2Y1$ 循環檢查法所需的測試次數為

$$k=\sum_{i=0}^{m-1}C_3^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]}+\sum_{i=0}^{m-1}C_2^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]}\times C_2^{\left[\frac{n+s_{(i+1)\%m}}{m}\right]}$$ ，其中 $$s_i=\begin{cases}\frac{i-1}{2} & ,i\text{為奇數}\\ \frac{2m-i}{2} & ,i\text{為偶數}\end{cases}$$ 。

柒、未來展望

1. 找出取不同電池數量下，較佳測試次數的一般式
2. 找出取 p 顆電池中，至少有 q 顆有電電池的測試次數一般式
3. 在有部份電池只有一半電量時，取出指定電量總和的電池時較佳方法

捌、參考文獻資料

[1] GendlerAlex. (2018 年 11 月 28 日)。 Can you solve the giant iron riddle? 擷取自 https://youtu.be/BSF9s0gbJ2M

[2] 許介彥 (2024 年 3 月 3 日)。巴斯卡三角形的幾個性質。擷取自 國立臺灣師範大學科學教育中心: https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/6256410b381784d09345bd5c/3.pdf

[3] 郭玥均,吳承軒,李承熹,郭家綺 (2024 年 3 月 3 日)。假錢幣快出來。擷取自 國立臺灣科學教育館: https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/high/030423.pdf

[4] 葉永南 (2015 年 12 月 26 日)。組合學雜談。擷取自 https://www.math.nsysu.edu.tw/highschool/20151226.pdf

【評語】080404

本研究是一個典型的組合問題，從生活中所面臨的實際問題出發，嘗試將生活問題轉化為數學問題，然後利用數學知識來解決問題，並在探究過程中嘗試改變條件來推廣問題的解決，整體而言，雖然關於數學原理的應用並不深奧，但是研究結果具備應用價值，不失為一份佳作。

作品簡報

來電不來電

壹、前言

一 研究問題

有一個電器，它的電池匣中可以放 p 顆電池。該電器只有 2 種反應：能運作及不能運作。而能運作的唯一條件是放入剛好 p 顆有電電池。其餘情形如放入電池不足、放入的電池有部份沒電等皆無法使電器運作，且無法由外觀得知是因為何原因不能運作。

今天有一批外觀無法辨識的電池，只知道其中有 a 顆有電電池與 b 顆沒電電池，則最多需要測試 k 次才能使電器運作。問 k 值為何？

二 研究目標

1. 驗證原始題目的情形：在 4 顆有電與 4 顆沒電電池中，找到 2 顆有電電池的測試次數上界。
2. 在 4 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 2 顆有電電池的測試次數上界。
3. 在 a 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 2 顆有電電池的測試次數上界。
4. 在 a 顆有電與 b 顆沒電電池中，找出有 3 顆有電電池的測試次數上界。

三 名詞解釋

1. 有電電池數 (a)、沒電電池數 (b)、
2. 總電池數 (n)：$n=a+b$
3. 分組數 (m)、測試次數 (k)
4. 取電池的數量 (p)：一次檢查電池的數量。
5. 求餘符號 $(\%)$：$a\ \%\ b$ 表示求 a 除以 b 之餘數
6. 電池編號表示法 (x_i)
7. 分組編號表示法：以 $(A,B,C,\cdots)$ 表示
8. 電池取法：$A1B2$ 表示從 A 組取 1 顆電池、B 組取 2 顆電池做測試。

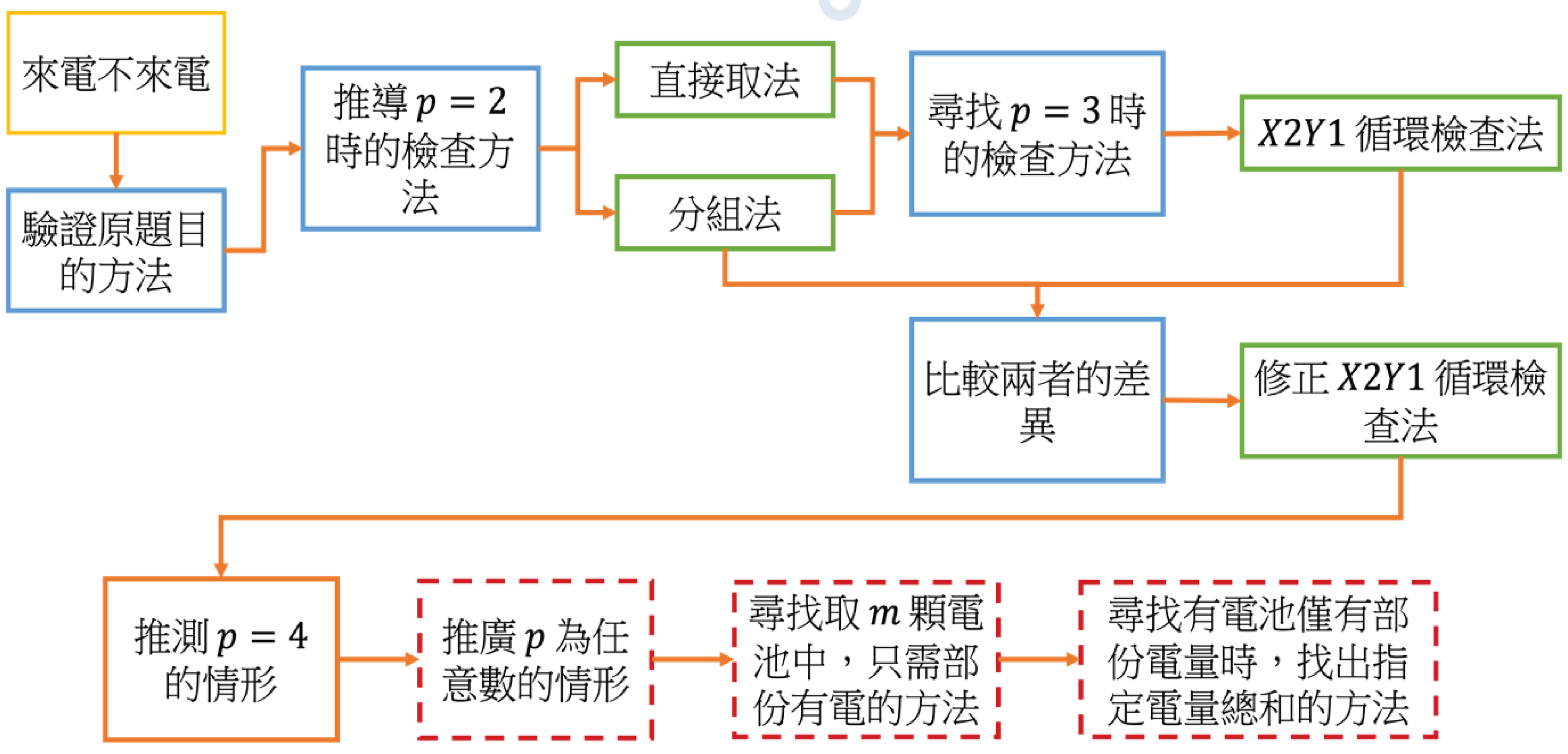

圖 1：研究架構圖

貳、研究過程與結果

研究1 探討 4 顆有電與 4 顆沒電電池時，取 2 顆電池的情形

表 1：4 顆有電與 4 顆沒電電池，取 2 顆電池的分組與測試次數關係

分組數	1	2	2	2	3	3	4
分組方法	(8)	(2, 6)	(3, 5)	(4, 4)	(2, 2, 4)	(2, 3, 3)	(2, 2, 2, 2)
測試次數	23	14	11	10	8	7	8

定理1 分組數越多組合數總和越少

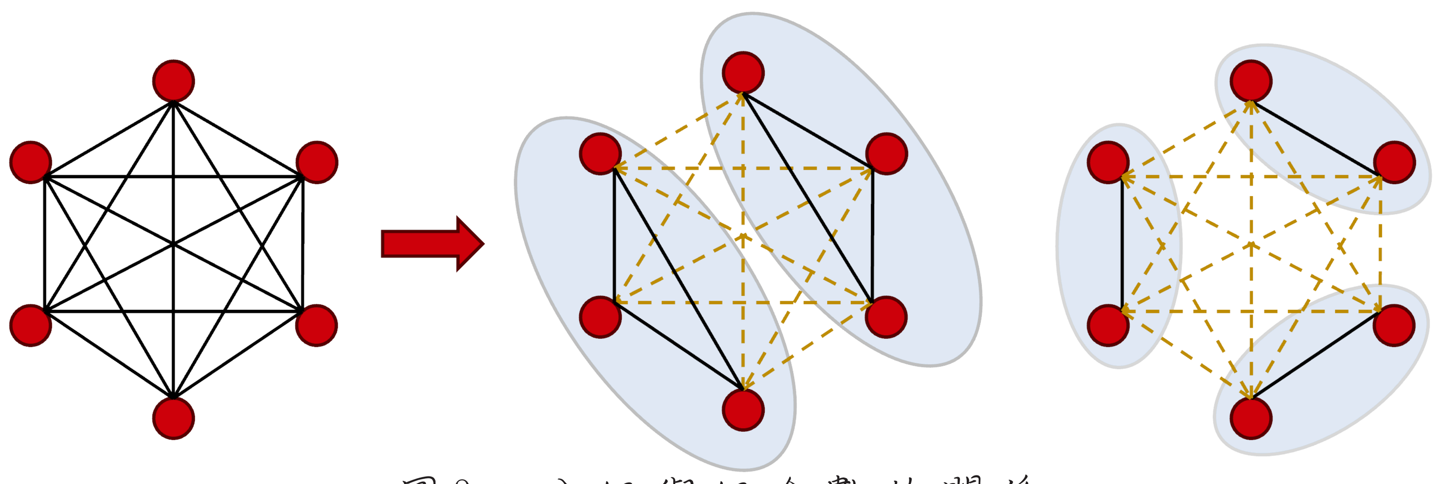

圖 2：分組與組合數的關係

定理2 平均分組有最少組合總數

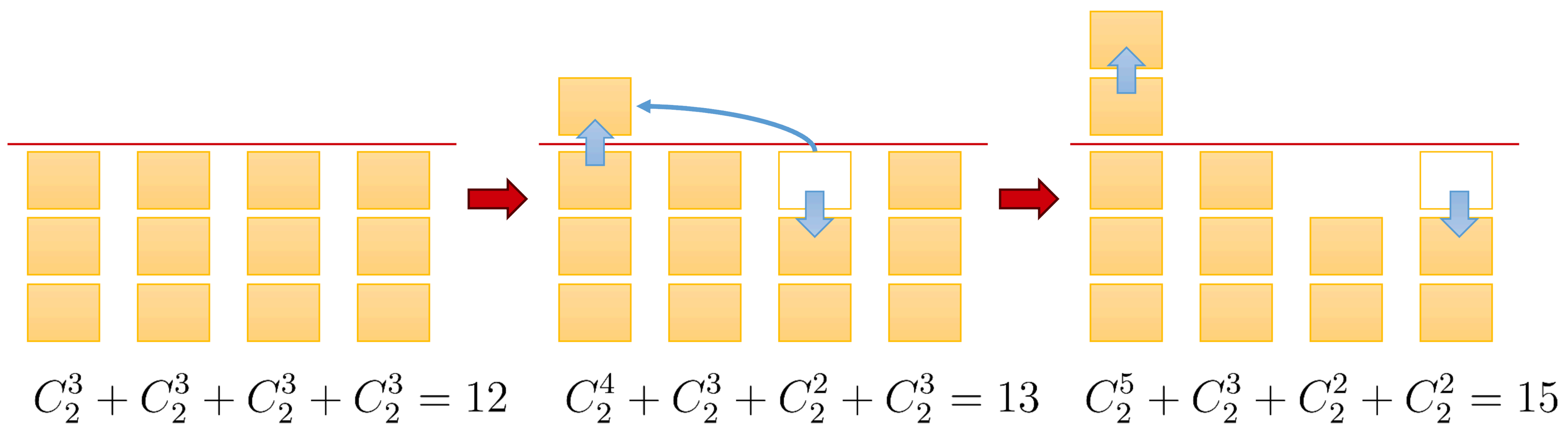

圖 3：調整各組個數時的組合總數關係

定理3 取2顆電池時，二組進行交叉測試與合併成一組等價

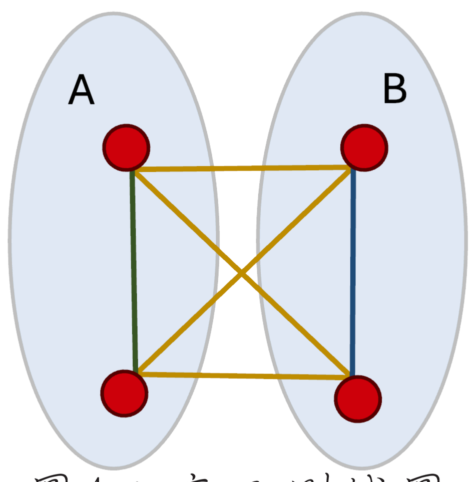

圖 4：交叉測試圖

研究2 取 2 顆電池時，找出不同數量的電池與測試次數關係

定義1 直接取法

直接取 p 顆電池進行測試。

定義2 分組法

分成 m 組，並對各組中取 p 顆進行測試

定理4 p=2時使用直接取法的時機

若 $a\geq b+2$，使用直接取法，且 $k=b+1$

定理5 p=2時使用分組法所需的分組數

在 $p=2$ 時，由鴿籠原理可知分組數 $m\leq a-1$

定理6 分組的電池個數與總電池數關係

當總電池數為 n 且分成 m 組時，會有 $(m-n\ \%\ m)$ 組中有 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 顆電池，有 $(n\ \%\ m)$ 組中有 $\left[\frac{n}{m}\right]+1$ 顆電池或可將每組電池個數寫作

$$\left[\frac{n}{m}\right],\left[\frac{n+1}{m}\right],\left[\frac{n+2}{m}\right],\cdots,\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$$

表 2：取 2 顆電池時，電池數與測試次數關係

a	m	b					
		1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21	28
3	2	2	4	6	9	12	16
4	3	2	3	5	7	9	12
5	4	2	3	4	6	8	10

定理7 p=2時在適用的條件下，直接取法與分組法等價

結論1 p=2時的測試次數上界

當 $p=2$ 時，測試次數上界 k 與有電電池數 a、總電池數 n 的關係可用下列兩種方法表示：

$$k=(m-(n\ \%\ m))\,C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]}+(n\ \%\ m)\,C_2^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}$$ 或 $$k=\sum_{i=0}^{m-1}C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}$$

研究3 使用分組法與直接取法來延伸取 3 顆電池時的結果

定理8 p=3 時使用直接取法的時機與測試次數 在 $p=3$ 時，若 $a \geq 2b+3$ ，使用直接取法，且 $k=b+1$

定理9 p=3 時使用分組法所需的分組數 在 $p=3$ 時，由鴿籠原理可知分組數 $m \leq \left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil$

表3：以分組法或直接取法取3顆電池時的測試數

a	m	b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4	1	7	17	32	53	81	117	162	217	283	361
5	2	2	5	8	14	20	30	40	55	70	91
6	2	2	5	11	17	27	37	52	67	88	109
7	3	2	3	6	9	12	18	24	30	40	50
8	3	2	3	6	9	15	21	27	37	47	57

結論2 p=3 時使用分組法的測試次數

當 $p=3$ ，且 $n > \frac{3a-3}{2}$ 時，使用分組法計算的測試次數為

$$k=(m-(n \% m))\, C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]}+(n \% m)\, C_3^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}-C_3^{4-(a\%2)}+1$$

或

$$k=\sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}-C_3^{4-(a\%2)}+1$$

研究4 使用 X2Y1 循環檢查法進行測試

定理10 X2Y1 循環檢查法必能找出一組皆有電的 3 顆電池

結論3 使用 X2Y1 循環檢查法計算測試次數的一般式

當 $p=3$ 時，使用 $X2Y1$ 循環檢查法計算的測試次數 k 為

$$k=\sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}+\sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]} \times C_1^{\left[\frac{n+(i+1)\%m}{m}\right]} \quad \text{且 } m=a-1$$

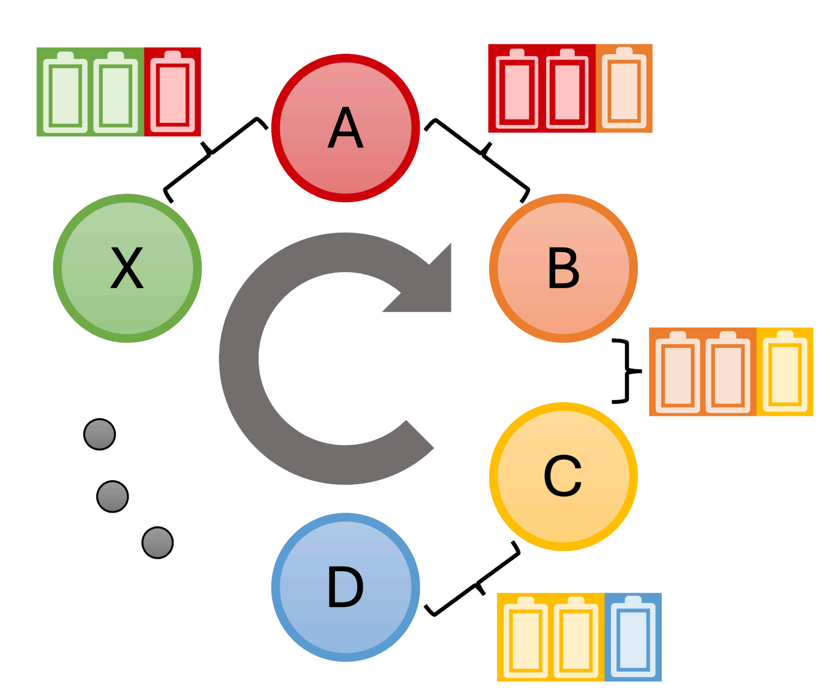

圖5：循環檢查法示例

研究5 比較 X2Y1 循環檢查法與分組法

如表4，每格前面的數據為 $X2Y1$ 循環檢查法、後者為分組法的測試次數。綠色為 $X2Y1$ 循環檢查法較佳，紅色為分組法較佳。

表4：X2Y1循環檢查法與分組法比較

$a \backslash b$	2	3	4	5	6	7	8	9
4	6|17	12|32	20|53	30|81	45|117	63|162	84|217	112|283
5	5|5	8|8	14|14	22|20	30|30	40|40	55|55	73|70
6	5|5	7|11	10|17	16|27	24|37	32|52	40|67	50|88
7	3|3	7|6	9|9	12|12	18|18	26|24	34|30	42|40
8	3|3	7|6	9|9	11|15	14|21	20|27	28|37	36|47

定義3 修正後的 X2Y1 循環檢查法

分組方式不同：令第 i 組的電池個數為 M_i ，則

$$M_i=\left[\frac{n+s_i}{m}\right] \text{，其中 } s_i=\begin{cases}\frac{i-1}{2} & ,i \text{ 為奇數} \\ \frac{2m-i}{2} & ,i \text{ 為偶數}\end{cases}$$

表5：X2Y1循環檢查法修正前後的分組序差異

	原分組順序								修正後的分組順序							
i	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
s_i	0	1	2	3	4	5	6	7	0	7	1	6	2	5	3	4
$n=35$ 示例	4	4	4	4	4	5	5	5	4	5	4	5	4	5	4	4

研究6 計算修正後的 X2Y1 循環檢查法所需測試次數

定理11 修正後 X2Y1 循環檢查法的一般式

$$k=\sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]}+\sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]} \times C_1^{\left[\frac{n+s_{(i+1)\%m}}{m}\right]}$$

表6：修正後的X2Y1循環檢查法與測試次數關係

a	m	b						
		2	3	4	5	6	7	8
6	5	4	7	10	16	22	30	40
7	6	3	6	9	12	18	24	30
8	7	3	5	8	11	14	20	26
9	8	3	4	7	10	13	16	22

定理12 在適用的條件下，修正後 X2Y1 循環檢查法與直接取法等價

結論4 p=3 時以修正後的 X2Y1 循環檢查法有較少的測試次數

參、討論

討論1 與真假幣問題的比較

表7：本作與真假幣問題的比較

	來電不來電	真假幣問題
目的	找出**一組**有電電池	找出**所有**假幣
測試方法	放入**固定數量**的電池至電器中測試	將金幣放置**天秤的兩端**測試，每次測試的數量**不一定相同**
分組原理	鴿籠原理	二分法或三分法

討論2 分組法的分組數

分組法的分組數 m 與有電電池數 a 和欲取的電池數 p 有關。整理得到分組數 m 的最大值為 $\left[\frac{a-1}{p-1}\right]$。

討論3 取 4 顆電池的推廣

推廣1 直接取法的推廣

當 $a \geq 3b+4$ 時，使用直接取法。且此時 $k = b+1$

推廣2 分組法的推廣

分組數 $m = \left[\frac{a-1}{3}\right]$。且在最差情形下，最後一組最多會有 6 顆有電電池。如 $a=12$ 時要分成 3 組，而有電電池的分組為 $(3,3,6)$。

表8：以分組法或直接取法取4顆電池時的測試次數

a	m	b						
		1	2	3	4	5	6	7
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	11	31	66	122	206	326	491
6	1	21	56	112	196	316	481	701
7	2	2	6	10	20	30	50	70
8	2	2	6	16	26	46	66	101
9	2	2	6	16	36	45	91	126
10	3	2	3	7	11	15	25	35

推廣3 交叉檢查法：循環檢查法與握手檢查法

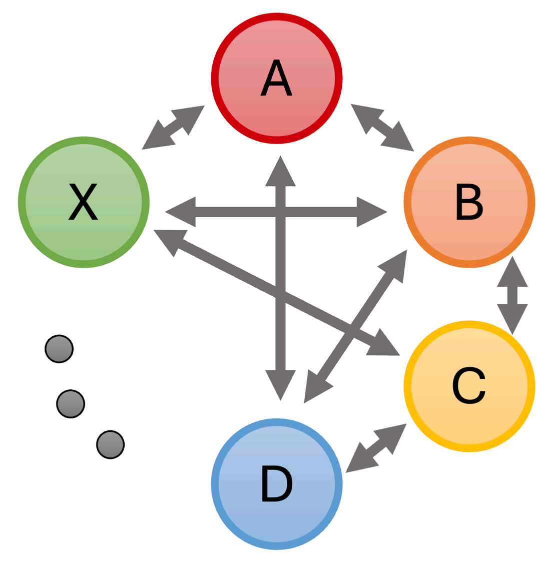

圖6：握手檢查法示例

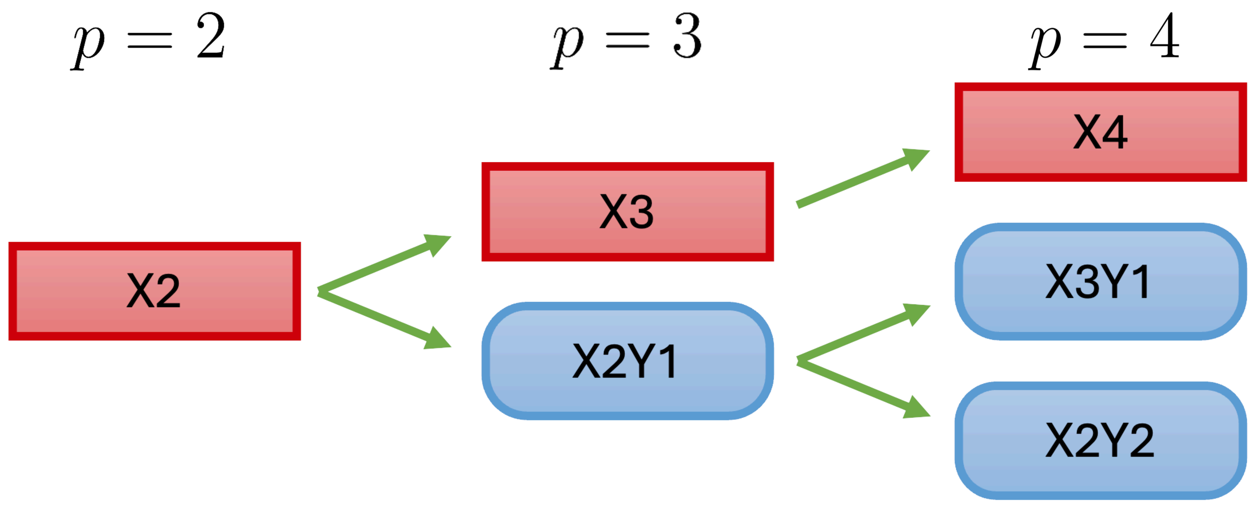

圖7：p值不同時的延伸關係

研究7 以交叉檢查法取 4 顆電池測試的結果

以 $X3Y1$ 循環檢查後，不需進行完整的 $X2Y2$ 循環/握手檢查，即可完整檢查所有有電電池分佈情形，如此能進一步縮減檢查次數。

表9：取4顆電池時，不同有電電池數量的檢查方法

a	m	檢查方法	$b=15$時的測試次數	同情形下分組法的測試次數
5	3	A4, B4, C4, A3B1, B3C1, C3A1, **A2B2, B2C2, C2A2**	1751	4841
6	4	A4, B4, C4, D4, A3B1, B3C1, C3D1, D3A1, **A2B2, B2C2, C2D2, D2A2, A2C2, B2D2**	1040	5971
7	4	A4, B4, C4, D4, A3B1, B3C1, C3D1, D3A1, **A2B2, C2D2**	660	660
8	5	A4, B4, C4, D4, E4, A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3A1, **A2B2, C2D2, E2A2, E2B2**	467	821
9	5	A4, B4, C4, D4, E4, A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3A1, **A2B2, C2D2**	391	976
10	6	A4, B4, C4, D4, E4, F4, A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3F1, F3A1, **A2B2, C2D2, E2F2**	266	266
11	7	A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4, A3B1, B3C1, C3D1, D3E1, E3F1, F3G1, G3A1, **A2B2, B2C2, C2D2, D2E2, E2F2, F2G2, G2A2**	265	318

肆、結論

1. 使用鴿籠原理進行分組可確保至少一組有所需數量的有電電池數，才可使用分組法與 $X2Y1$ 循環檢查法等方法進行測試。
2. 取 2 顆電池時測試次數上界為 $k = \sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+i}{m}\right]}$
3. 取 3 顆電池時，以修正後的 $X2Y1$ 檢查法得到最少的測試次數

$$k = \sum_{i=0}^{m-1} C_3^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]} + \sum_{i=0}^{m-1} C_2^{\left[\frac{n+s_i}{m}\right]} \times C_1^{\left[\frac{n+s_{(i+1)\%m}}{m}\right]}$$

伍、參考資料

[1] GendlerAlex.（2018年11月28日）。Can you solve the giant iron riddle? 擷取自 https://youtu.be/BSF9s0gbJ2M

[2] 郭玥均，吳承軒，李承熹，郭家綺（2024年3月3日）。假錢幣快出來。擷取自 國立臺灣科學教育館：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/high/030423.pdf