中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

探究精神獎

080403

有捨有得，平衡之道

學校名稱： 彰化縣溪湖鎮媽厝國民小學

作者：	指導老師：
小六 張鈞凱 小六 陳昱臻 小六 邱承澄 小五 邱宥鈜 小五 楊景承	黃于婕

關鍵詞： 取捨、策略、整體優勢

摘要

本研究的結果如下：

一、對於 1xn 方格表，快速排法為每格填 0，其可填 1 的個數最大值=0。

對於 mx1 方格表，快速排法為每格填 0，其可填 1 的個數最大值=0。

二、當 m>1，n>1 時，2xn 方格表快速排法為一半方格填 1，一半方格填 2，如圖 5-2-5，在 2xn 方格表可填 1 的個數最大值=n，對於 mx2 方格表，快速排法可以將表格旋轉 90 度，再用 2xn 方格表的快速排法即可達成，則 mx2 方格表可填 1 的個數最大值=m。

三、在探究原始問題 4x5 方格表填入最多 1 的方格數量方法上，推得最佳策略行數=(4n-2m)除以 3，此最佳策略行數可應用於：

mxn 方格表，m=3k+1，n=3t+2 且 3k+1<3t+2<2(3k+1)。

四、對於 mxn(m 不小於 3 且 n 不小於 3)的方格表，分成六種類型，推導出可填入最多 1 的方格數量之快速排法與計數公式的六個定理。

壹、 研究動機

一次的數學課上，老師為了讓我們更好的了解取捨這個議題，同時練習等量公理的未知數列式，根據這個主題告訴了我們一個來自 $2022-2023$國際中小學生數學能力檢測小學中年級的題目：已知在4×5方格表的每一個小方格內填入 0、1 或 2。若每一行、每一列內的數之總和都是 3 的倍數，請問這個4×5方格表中最多可以填入幾個 1？

我們觀察到這個方格表的行、列所組成的方格數不同，因此它的行與列分別能填入 1 的最大數量也不一樣，若是滿足了行填入最大數量的 1，則列就無法填入最大數量的 1，反之亦然。

對於我們觀察到的景象，我們感到很好奇，若方格表上的行與列無法同時填入自己得最佳選擇，那是不是代表有些行或列需要退一步，選擇填入次佳的 1 之數量，以此讓方格表內的行與列滿足題目所設條件？這個問題引起大家討論，希望能從中找到更方便且快速的填入 1 之方格最大值。

貳、　名詞釋義

一、$\mathrm{L_n}$：在 n 個數字時，填入 0、1 或 2 以達到數之總和為三的倍數，且能填入最多 1 的數量，如$\mathrm{L_4} = 3$就是指在四個數字下，最多可以填入三個 1，如圖 2-1-1。

二、$\mathbf{S_n}$：在 n 個數字時，填入 0、1 或 2 以達到數之總和為三的倍數，且能填入次多 1 的數量，如$\mathrm{S_4} = 2$就是指在四個數字下，次佳策略下可以填入二個 1，如圖 2-2-1。

1	1	1	0

圖 2-1-1 四個數字最佳填入策略

1	1	2	2

圖 2-2-1 四個數字次佳填入策略

三、$\mathrm{M^i_{m\times n}}$：在$\mathrm{m \times n}$方格表能填入最多 1 之數量下，數字 i 的在方格表內所填入數量，如$\mathrm{M^1_{4\times5}}$=14 是指在 4× 5方格表最多能填入十四個 1；$\mathrm{M^0_{4\times5}} = 4$是指在$4 \times 5$方格表能填入四個 0；$\mathrm{M^2_{4\times5}} = 2$是指在$4 \times 5$方格表能填入二個 2。

1	1	1	0	0
0	0	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	2	1	1

圖 2-3-1 4×5方格表數字填入圖

參、　研究目的

一、探討原始問題 4 x 5 的方格表，填入最多 1 的快速排法與計數公式。

二、探討對於 1 x n 的方格表，填入最多 1 的快速排法與計數公式。

三、探討對於 2 x n (n > 1)的方格表，填入最多 1 的快速排法與計數公式。

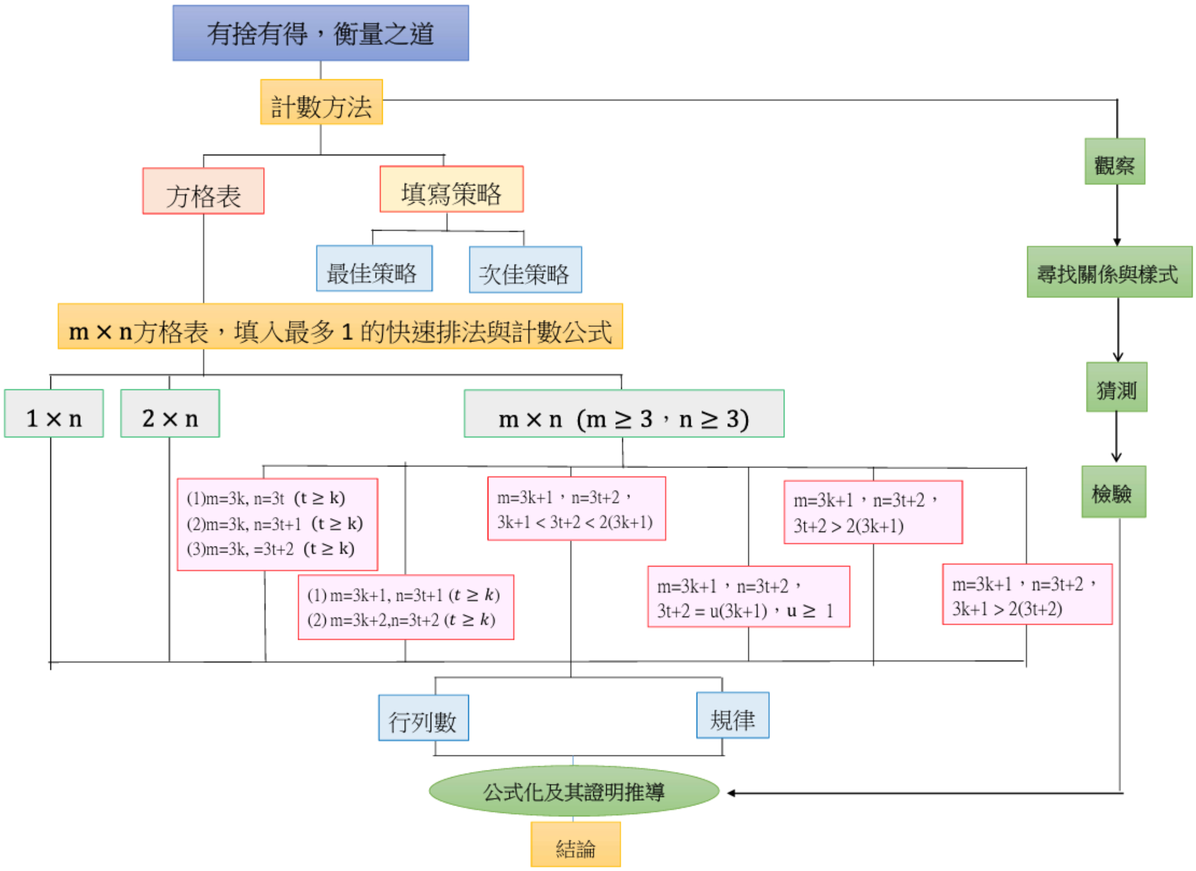
四、探討對於 m x n (m ≥ 3，n ≥ 3)的方格表，填入最多 1 的快速排法與計數公式。

肆、　研究設備及器材

方格紙、電腦、筆、相機、Microsoft Word。

伍、　研究過程或方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

首先，在4×5方格表上,針對方格表內的所有小方格都只能填入 0、1 或 2 的情況下，且每一行、每一列內的數之總和都是三的倍數，則在這個4×5方格表內最多可以填入幾個 1 的問題,我們開始嘗試找到結果。在研究過程中,因為沒有系統的尋找方法導致無法有效地找出填入 1 的方格數量最大值，反而使研究過程紛亂而找不到關聯性，也無法確定方格表是否填入到最多個 1，此困境不利於進行研究,如圖 5-2-1，因此我們要找出有系統的方法來進行研究。

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
0	0	0	0	0

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	2	1
0	0	0	2	1

0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1

圖 5-2-1

我們決定先探討在$1\times n$方格表，其 n 個格子分別所能填入 1 的方格數量最大值與次佳放置數量，其次，探討在$2\times n$方格表，其 2n 個格子分別所能填入 1 的方格數量最大值與次佳放置數量，接著，再繼續深入探討$m\times n$的方格表所能填入 1 的方格數量最大值。

(一) 最佳填寫策略，填入最多 1 的方格數量

1.觀察：

因為方格表只能填入 0、1、2，可知 0 本身數值就可以為三的倍數，也就是三的零倍；而 1 和 2 則需要透過組合才能滿足數之總和為三的倍數這個條件，例如一個 1 和和一個 2 的總和可為三的倍數；又或者都只填入 1 或 2 的話，因 1 和 3 或 2 和 3 彼此互質，其所需最小公倍數分別為1×3和2×3，所以其所需最少數量是 3 個，所以在 1、2、3 個數字下所能填入 0、1、2 之情形如下表 5-2-1。

表 5-2-1 填入 0、1、2 的基本組合模式

可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量	可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0	3	0 0 0	3	0	0
						1 1 1	0	3	0
2	0 0	2	0	0		2 2 2	0	0	3
	1 2	0	1	1		0 1 2	0	1	2

2.尋找關係與樣式：

了解 1、2、3 個可填數下填入滿足條件之 0、1、2 可能組合模式後，因為題目要求要填入最多 1 的數量，所以在 1、2、3 個可填數下填入最多 1 之個數情形如表 5-2-2。

表 5-2-2 在 1、2、3 個可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0
2	1 2	0	1	1
3	1 1 1	0	3	0

我們可以由上表得知每三個可填數可以全部填入 1，因此將所有可填數量除以 3，若有多餘的可填數則依上表填入最佳選擇，也就是說若多出一個可填數，應填入 0；若多出兩個可填數，應填入 1 和 2。可以從中得出若有多餘的可填數，則只會有一個可填數不能填入 1。接著我們便繼續討論在可填數為 4、5、6、7 個的情況下，填入最多 1 之個數情形。

(1)可填數為 4 個$(n=4)$

因每三個數字可以全部填入 1，所以$4 \div 3 = 1 \cdots 1$，會發現多出一個可填數，其餘數字皆可填入 1，而為滿足數之總和為三的倍數之條件，多餘的這一個可填數應填入 0，其驗證過程與 1 的最多填入數量如表 5-2-3。

表 5-2-3 在 n=4 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	4	填入樣式	1 1 1 0	L_4	$4-1=3$
驗證公式	$1 \times 3 + 0 = 3$ ， $3 \div 3 = 1$				

(2)可填數為5 個$(n=5)$

因每三個數字可以全部填入 1，所以$5 \div 3 = 1 \cdots 2$，會發現多出兩個可填數，其餘數字皆可填入 1，而為滿足數之總和為三的倍數之條件與填入最多 1 之個數，多餘的兩個可填數應填入 1 和 2，其驗證過程與 1 的最多填入數量如表 5-2-4。

表 5-2-4 在 n=5 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	5	填入樣式	1 1 1 1 2	L_5	$5-1=4$
驗證公式	$1 \times 4 + 2 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

(3)可填數為 6 個($n = 6$)

因每三個數字可以全部填入 1，所以$6 \div 3 = 2$,所有數字皆可填入 1，其驗證過程與 1 的最多填入數量如表 5-2-5。

表 5-2-5 在 n=6 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	6	填入樣式	1 1 1 1 1 1	L_6	6
驗證公式	$1 \times 6 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

(4)可填數為 7 個($n = 7$)

因每三個數字可以全部填入 1，所以$7 \div 3 = 2 \cdots 1$，會發現多出一個方格數，其餘方格內皆可填入 1，而為滿足方格數內數之總和為三的倍數之條件，多餘的這一個方格應填入 0，其驗證過程與 1 的最多填入數量如表 5-2-6。

表 5-2-6 在 n=7 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	7	填入樣式	1 1 1 1 1 1 0	L_7	$7 - 1 = 6$
驗證公式	$1 \times 6 + 0 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

3.猜測：

由於可填數愈來愈多，因此我們根據先前可填數分別為 2、3、4、5、6、7 個時，所能填入 1 的最大個數之規律，猜測在可填數分別為 8、9、10 個時所能填入 1 之最多數量，其結果如表 5-2-7。

表 5-2-7 猜測在 8 個可填數下填入 1 最多個數計數過程與填入數字之組合

可填數量	8	猜測$\mathbf{L_8}$	$8 \div 3 = 2 \cdots 2$，則$\mathbf{L_8} = 8 - 1 = 7$		
0 的數量	0	1 的數量	7	2 的數量	1
可填數量	9	猜測$\mathbf{L_9}$	$9 \div 3 = 3$，則$\mathbf{L_9} = 9$		
0 的數量	0	1 的數量	9	2 的數量	0
可填數量	10	猜測$\mathbf{L_{10}}$	$10 \div 3 = 3 \cdots 1$，則$\mathbf{L_{10}} = 10 - 1 = 9$		
0 的數量	1	1 的數量	9	2 的數量	0

4.檢驗：

實際填入數字，檢驗 8、9、10 個可填數下所能填入最多 1 的個數之計數結果，如表 5-2-8。

表 5-2-8 在 8、9、10 個可填數下填入 1 之最大個數與填入數字之組合

可填數	8 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 2
		驗證過程	$1 \times 7 + 2 = 9$，$9 \div 3 = 3$
	9 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 1
		驗證過程	$1 \times 9 = 9$，$9 \div 3 = 3$
	10 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
		驗證過程	$1 \times 9 + 0 = 9$，$9 \div 3 = 3$

結果：在 8、9、10 個可填數下填入 1 之最多個數與填入數字組合與我們的猜測數值相符。

由以上檢驗，發現：

a. L_n計數公式：n 個方格數所能填入 1 的最大數量(L_n)*計數公式*為總可填數除以 3，再判斷是否為三的倍數，如果 n 是三的倍數($n = 3k$)，則$L_n = n$，若 n 不是三的倍數($n = 3k + 1$ 或$n = 3k + 2$)，則$L_n = n - 1$。

b. 快速排法：排以及在 n 個可填數下填入數字之組合情形，依 n 是否為三的倍數進行判斷，若 n 是三的倍數(ｎ＝３ｋ)，數字填入組合為 n 個 1；若 n 不是三的倍數，則當餘數為 1 時，數字填入組合為 1 個 0 和(n − 1)個 1；當餘數為 2 時，數字填入組合為 1 個 2 和($n - 1$)個 1。

(二) 1 的次佳數量填入方式

1. 觀察：

根據表 5-2-1 的組成情形，在 1、2、3 個可填數下，填入 0、1 或 2 以達到數之總和為三的倍數，1 的次佳填入樣式統整在表 5-2-9。

表 5-2-9 在 1、2、3 個可填數的次佳填入樣式

可填數	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0
2	0 0	2	0	0
3	1 0 2	0	1	2

原本兩個可填數的最佳填法是填入 1 個 1 和 1 個 2，改為次佳填法是 1 的填入數量減少 1 個，也就是填入 2 個 0；原本三個可填數的最佳填法是填入 3 個 1，改為次佳填法是填入 1 個 0、1 個 1 和 1 個 2，也就是 1 的填入數量會減少 2 個。

2. 尋找關係與樣式：

由上表 5-2-13 的觀察，我們看見 2 和 3 個可填數變化情形，接著我們繼續討論在 4、5、6、7 個可填數下 1 的次佳數量填入樣式與次佳填入數量，如圖 5-2-2。

(1) 4 個可填數($n = 4$)

由 4 個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入 1 個 1 的情況下，即要填 2 個 1 且還有 2 個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下 2 數都應填 2。

(2) 5 個可填數($n = 5$)

由 5 個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入 1 個 1，即要填入 3 個 1 且還有 2 個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下 2 數都應填入 0。

(3) 6 個可填數($n = 6$)

由 6 個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入 2 個 1，即填入 4 個 1 且還有 2 個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下 2 數應填 1 個 0 和 1 個 2。

(4) 7 個可填數($n = 7$)

由 7 個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入 1 個 1，即要填入 5 個 1 且還有 2 個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下 2 數都應填入 2。

可填數量	最佳填法→次佳填法
4	1 1 1 0 → 1 1 2 2
5	1 1 1 1 2 → 1 1 1 0 0
6	1 1 1 1 1 1 → 1 1 1 1 0 2
7	1 1 1 1 1 1 0 → 1 1 1 1 1 2 2

圖 5-2-2 n=4、5、6 和 7 時從最佳變為次佳填入樣式

由上述觀察到 n 個方格從最佳填法轉為次佳填法的變化與數字填入組合關係如表 5-2-10，當最佳填法的所有可填數都填入 1 時，次佳填法要減少填入 2 個 1，並改為填入 1 個 0 和 1 個 2；當最佳填法有一數填入 0 時，次佳填法要減少填入 1 個 1，並改為填入 2 個 2，當最佳填法有一數填入 2 時，次佳填法要減少填入 1 個 1，並改為填入 2 個 0。

表 5-2-10 在可填數$n=1\sim n=7$下次佳組合情形與填入數字個數

可填數	次佳填入樣式	1 數量	0 數量	2 數量
1	0	0	1	0
2	0 0	0	2	0
3	1 0 2	1	1	1
4	1 1 2 2	2	0	2
5	1 1 1 0 0	3	2	0
6	1 1 1 1 0 2	4	1	1
7	1 1 1 1 1 2 2	5	0	2

由上表中可填數(n)的次佳填法與所填入數字之個數關係，除去例外的 1 個可填數情況，可推得$S_n=n-2(n\geq 2)$，也就是填入$(n-2)$個 1，在依 n 是否為三的倍數來判斷填入 0 或 2，即當 n=3k 時，則填入 1 個 0 和 1 個 2；當 n=3k+1 時，則填入 2 個 2；當 n=3k+2 時，則填入 2 個 0。

3. 猜測：

由於可填數愈來愈大，由最佳填法轉為次佳填法的過程越來越雜亂，因此我們根據先前可填數分別在 1、2、3、4、5、6、7 個的規律，猜測可填數分別在 8、9、10 個時次佳填入情形和所填數字數量，其結果如表 5-2-11、表 5-2-12、表 5-2-13。

表 5-2-11 猜測8個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	8	填入數量關係公式		$8=3\times 2+2$	
1 的數量（S_8）	8-2=6	0 的數量	2	2 的數量	0

表 5-2-12 猜測9個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	9	填入數量關係公式	$9=3\times3$		
1 的數量（S_9）	9-2=7	0 的數量	1	2 的數量	1

表 5-2-13 猜測10個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	10	填入數量關係公式	$10=3\times3+1$		
1 的數量（S_{10}）	10-2=8	0 的數量	0	2 的數量	2

4. 檢驗：

實際填入數字，檢驗在 8、9、10 個可填數下所能填入 1 的次多個數之計數結果，如表 5-2-14。

表 5-2-14 在 8、9、10 個可填數下填入 1 之次多個數與填入數字之組合

填入樣式	1 1 1 1 1 1 0 0
驗證過程	$1\times6+0\times2=6$，$6\div3=2$
填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 0 2
驗證過程	$1\times7+2+0=9$，$9\div3=3$
填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 2 2
驗證過程	$1\times8+2\times2=12$，$12\div3=4$

結果：在 8、9、10 個可填數下填入 1 之次多個數與填入數字組合與我們的猜測數值相符。

由以上檢驗，發現：

1xn 方格表 1 的次佳填入數量公式與策略為$S_n=n-2(n\geq2)$和$S_1=0$，而當 n=3k 時，會填入 1 個 0 和 1 個 2；當 n=3k+1 時，則填入 2 個 2；當 n=3k+2 時，則填入 2 個 0。

(三) 發展在m×n 方格表下，填入最多 1 的方格數量填入策略、快速排法與填入 1 的最大值數量計數公式。

1. 觀察：

由原始題目4×5方格表可知每一列有 5 個方格，而每一行有 4 個方格，因此行的最佳填法是填入三個 1 和一個 0，列的最佳填法是填入四個 1 和一個 2，若選擇滿足列的最佳填法，則行就無法達成數之總和為三的倍數這一條件，反之亦然。若選擇行的次佳填法放入 2 個 1 和 2 個 2，可發現行次佳填法中的 2 可以對應 2 列列之最佳填法；若選擇列的次佳填法放入 3 個 1 和 2 個 0，可發現列之次佳填法中的 0 可以對應 2 行行之最佳填法。

為了找出方格表最佳填法，應在行列各自的最佳填法與次佳填法進行平衡。因為行的最佳填法會損失 1 個方格填 0，而次佳填法則損失 2 個方格填 2，由於不確定有哪些行數是用最佳填法，哪些是次佳填法，因此我們決定讓每一行損失方格數固定為 2 個，也就是若是行之最佳填法，會將損失的方格數$\times 2$，即 0 的個數$\times 2$；而行之次佳填法，因本身就會損失 2 個方格數填 2，因此 2 的個數不必做變化。

另一方面，因為列的最佳填法會損失 1 個方格填 2，而次佳填法則損失 2 個方格填 0，由於不確定有哪些列數是用最佳填法，哪些是次佳填法，因此我們決定讓每一列損失方格數固定為 2 個，也就是若是列之最佳填法，會將損失的方格數$\times 2$，即 2 的個數$\times 2$；而列之次佳填法，因本身就會損失 2 個方格數填 0，因此 0 的個數不必做變化。故我們可得到以下計算過程：

$$\begin{cases}\left(0\text{ 的個數}\right)\times 2+\left(2\text{ 的個數}\right)\geq 2\times 5\\ \left(0\text{ 的個數}\right)+\left(2\text{ 的個數}\right)\times 2\geq 2\times 4\end{cases}$$

$$\rightarrow \left(0\text{ 的個數}\right)\times 3+\left(2\text{ 的個數}\right)\times 3\geq 2\times 4+2\times 5$$

$$\rightarrow \left[\left(0\text{ 的個數}\right)+\left(2\text{ 的個數}\right)\right]\times 3\geq 2\times(4+5)$$

$$\rightarrow \left[\left(0\text{ 的個數}\right)+\left(2\text{ 的個數}\right)\right]\geq 2\times(4+5)\div 3$$

$$\rightarrow \left[\left(0\text{ 的個數}\right)+\left(2\text{ 的個數}\right)\right]\geq 6$$

也就是說至少有 6 個方格數不為 1，則4×5方格表全部方格數減 6 後，可以得出最多填入 1 之個數，即$\mathrm{M}_{4\times5}^{1}=4\times5-6=14$。

同時為求出4×5方格表數字填入策略並做檢驗，因此假設行的最佳填法(即填一個 0)有 x 行，則行的次佳填法(即填二個 2)有$(5-\mathrm{x})$行；同時由行的最佳填法推知

出列的次佳填法(即填二個 0)，因列次佳填法需要 2 個 0，所以每 2 行最佳填法可滿足 1 列次佳填法，即有$\frac{x}{2}$列次佳填法；並由行的次佳填法(即填二個 2)推知出列的最佳填法(即填一個 2)，因列最佳填法需要 1 個 2，所以每 1 行最佳填法可滿足 2 列次佳填法，即有 $2(5-x)$列，則方格表內填入最多 1 的計算結果如下表 5-2-15：

表 5-2-15 4×5方格表最佳填入方式計算過程

<table>
<tr><th>行數(n)</th><th>5</th><th>列數(m)</th><th>4</th><th>計算過程</th></tr>
<tr><td>行最佳填法$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$</td><td>x</td><td>列次佳填法[11100]</td><td>$\frac{x}{2}$</td><td rowspan="2">$\frac{x}{2}+2(5-x)=4$
$\rightarrow\ x+4(5-x)=4\times2$
$\rightarrow\ x+4\times5-4x=8$
$\rightarrow 20-3x=8$
$\rightarrow 3x=20-8$
$\rightarrow 3x=12$
$\rightarrow x=4$</td></tr>
<tr><td>行次佳填法$\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$</td><td>5-x</td><td>列最佳填法[11112]</td><td>$2(5-x)$</td></tr>
</table>

也就是說，行的最佳填法有4行，次佳填法有1行，則填入最多 1 的數量應為 $4\times5-(1\times4+2\times1)=14$，即$M^1_{4\times5}=14$，1 的個數與前述計算結果相同，$M^0_{4\times5}=4, M^2_{4\times5}=2$，其方格表數字填入圖如上圖 5-2-3。

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1

圖 5-2-3 4×5方格表最佳填入樣式

2. 尋找關係與樣式：

接著繼續討論在方格表大小為$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$的情況下，填入最多 1 之個數方格表。

(1) $1\times n$方格表

在$1\times n$方格表下，由於每一行只有 1 個方格數，唯一能滿足數之總和為三的倍數條件的數字是 0，因此不論行數為多少，所有方格皆只能填入 0，無法填入 1，即$M^1_{1\times n}=0$，而 0 的填入數量會為 n 個，即$M^0_{1\times n}=n$，其結果如圖 5-2-4。

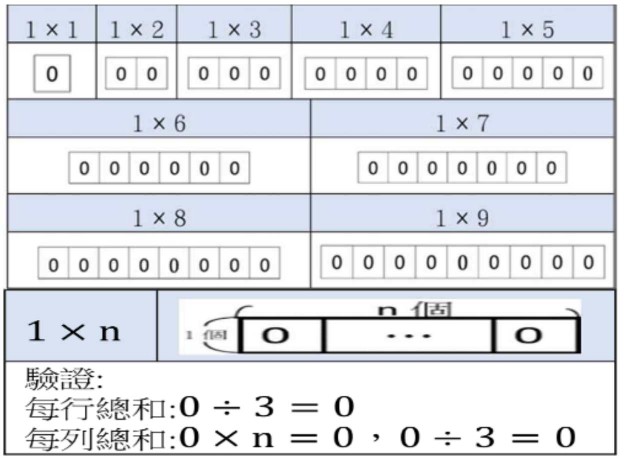


圖 5-2-4 $1 \times n$方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

(2) $2 \times n$方格表

除去$n = 1$，方格只能填入0外，從$n \geq 2$起，由於每行只有兩個方格，為了填入最多 1 的數量，每行最佳填入策略為填入 1 個 1 和 1 個 2，因此滿足列條件之策略也只會出現 1 和 2，即行最佳填法必為$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，列則依$n = 3k$、$3k + 1$ 或 $3k + 2$判斷填法，當$n = 3k$ 時，列可使用最佳填法$[1 \cdots 1]$，快速填法是一列$[1 \cdots 1]$搭配一列$[2 \cdots 2]$；當$n = 3k + 1$時，列可使用次佳填法$[1 \cdots 122]$，快速填法是一列$[1 \cdots 122]$搭配一列$[2 \cdots 211]$；當$n = 3k + 2$時，列可使用最佳填法$[1 \cdots 12]$，快速填法是一列$[1 \cdots 12]$搭配一列$[2 \cdots 21]$，如圖 5-2-5。

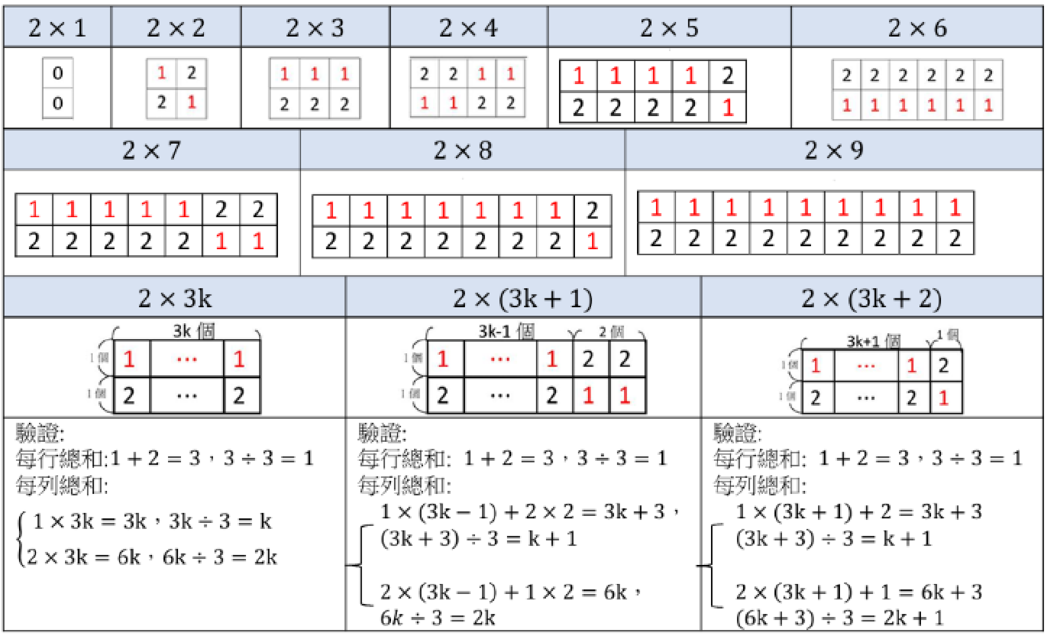


圖 5-2-5 $2 \times n$方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

由上圖可知$2 \times n$方格表因為每行只能由 1 個 1 和 1 個 2組成，所以除去例外的 2×1 方格表只能填入0，即$M_{2\times n}^{1} = 0$，其餘方格表內 1 和 2 填入數量會相同，即當 $n \geq 2$，$M_{2\times n}^{1} = n$，$M_{2\times n}^{2} = n$。

同理而言，由$1 \times n$ 和 $2 \times n$方格表可推知$m \times 1$ 和 $m \times 2$方格表其填入方式，即$M_{m\times 1}^{1} = 0$ 且 $m \geq 1$，$M_{m\times 2}^{1} = m$且$m \geq 2$，須優先判斷行列數是否為 1。

(3) $3 \times n$方格表

因行的格子數為三的倍數，所以每一行最佳填入策略是都填 1，因此依行數判斷列的數字填入方式。

當 n=3k 時，行列數同為三的倍數，所以方格內可以全數填 1；當 n=3k+1 時，列最佳填入策略是有一格填 0，填入行列最佳填法則有 3 個 0；當 n=3k+2 時，列最佳填入策略是有一格填 2，填入行列最佳填法則有 3 個 2 也就是每列至少會有一個方格不能填入 1，而其餘方格皆可填入 1，如圖 5-2-6。

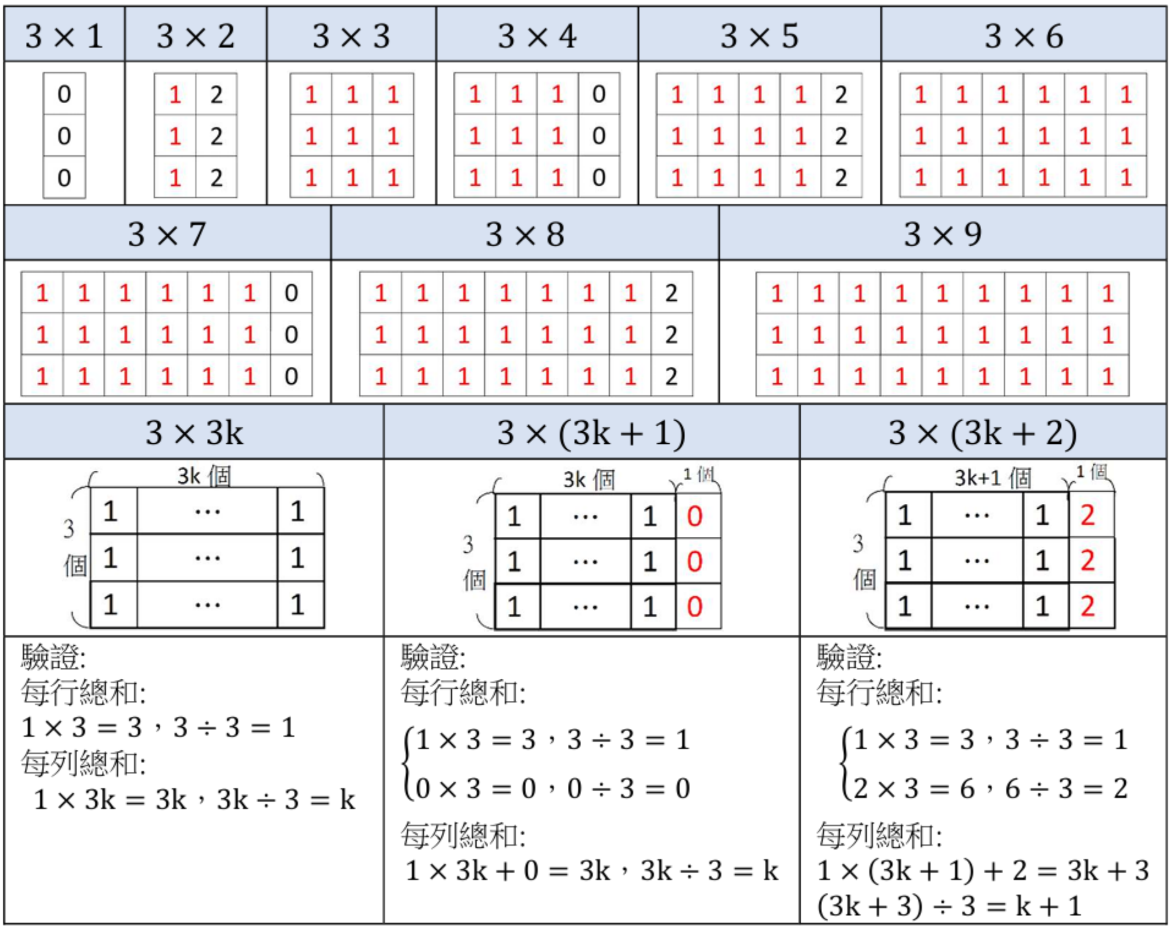


圖 5-2-6 $3 \times n$方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

依上圖可知當$n = 3k$時，所有方格皆填入 1，即$M_{3\times n}^{1} = 3n$；當$n = 3k + 1$時，$M_{3\times n}^{1} = 3(n-1)$且$M_{3\times n}^{0} = 3$；當$n = 3k + 2$時，$M_{3\times n}^{1} = 3(n-1)$且$M_{3\times n}^{2} = 3$。

(4) $4 \times n$方格表

由於每行有 4 個方格，所以行的最佳填入策略是填 3 個 1 和 1 個 0，而當 n=1 和 n=2 時，其填入最多 1 的方格數數量為$M_{4\times 1}^{1} = 0$與$M_{4\times 2}^{1} = 4$，如表 5-2-16。

表 5-2-16 4×1和4×2格表填入最多 1 之方格表樣式圖

<table>
<tr><th colspan="3">4×1</th><th colspan="3">4×2</th></tr>
<tr><td rowspan="3">0
0
0
0</td><td>$M_{4\times 1}^{1}$</td><td>0</td><td rowspan="3">2 1
2 1
1 2
1 2</td><td>$M_{4\times 2}^{1}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$M_{4\times 1}^{0}$</td><td>4</td><td>$M_{4\times 2}^{0}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$M_{4\times 1}^{2}$</td><td>0</td><td>$M_{4\times 2}^{2}$</td><td>4</td></tr>
</table>

當$n \geq 3$且$n = 3k$時，因行數為三的倍數，所以列的最佳填入策略是都填 1，同時因要滿足每行最佳策略須填入一個 0，也就是會有 n 個 0，即$M_{4\times 3k}^{1} = (4-1) \times 3k = 3n$與$M_{4\times 3k}^{0} = 3k = n$，如表 5-2-17，其驗證過程如下所示：

每行的數之總和為$1 \times 3 = 3$，$3 \div 3 = 1$，滿足總和為三的倍數條件；每列的數之總和有兩種情形：$1 \times 3k = 3k$，$3k \div 3 = k$和$0 \times 3k = 0$，$0 \div 3 = 0$，皆滿足總和為三的倍數條件。

表 5-2-17 當$n = 3k$且$k \geq 1$之$4 \times n$方格表填入情形

n	方格表	方格圖	$M_{4\times n}^{1}$	$M_{4\times n}^{0}$	$M_{4\times n}^{2}$
3	4×3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0	9	3	0
6	4×6	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0	18	6	0
9	4×9	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	27	9	0
3k	$4 \times 3k$	3k 個 1 … 1 3 個 1 … 1 1 … 1 1 個 0 … 0	$(4-1) \times 3k = 3 \times 3k = 3n$	n	0

當$n \geq 3$ 且 $n = 3k + 1$時，列的最佳填入策略是有一格填 0，同時因要滿足每行最佳策略須填入一個 0，而行與列的最佳填入策略都是有一格填 0，最佳填法是行列先將 0 填入可同時滿足要求格子，剩下需填入 0 的行數剛好會為三的倍數，則剩下的行數各需填入一個 0 即可滿足行與列之要求，也就是填入 n 個 0，即 $M^1_{4\times(3k+1)} = (4-1) \times 3k = 3n$，如表 5-2-18，其驗證過程如下所示：。

每行的數之總和為$1 \times 3 = 3$，$3 \div 3 = 1$，滿足總和為三的倍數條件；每列的數之總和有兩種情形：$1 \times 3k = 3k$，$3k \div 3 = k$和$1 \times 3 + 0 \times (3k-2) = 3$，$3 \div 3 = 0$，皆滿足總和為三的倍數條件

表 5-2-18 當$n = 3k + 1$且$k \geq 1$ 之 $4 \times n$方格表填入情形

n	方格表	方格圖	$M^1_{4\times n}$	$M^0_{4\times n}$	$M^2_{4\times n}$
4	4×4	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1	12	4	0
7	4×7	0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0	21	7	0
3k+1	$4 \times (3k+1)$	4個　3(k-1)個 3個: 0 1 1 1 1 ⋯ 1 1 0 1 1 1 ⋯ 1 1 1 0 1 1 ⋯ 1 1個: 1 1 1 0 0 ⋯ 0	3(n-1)	n	0

當 $n \geq 3$ 且 $n = 3k + 2$時，列最佳填法是損失一格填 2，而行最佳填法是損失一格填 0，因行列最佳填法不同，所以需要協調各自最佳與次佳填法，才能填入最多個 1。

當$n = 3k + 2$時，列次佳填法是損失兩格填 0，行次佳填法是損失兩格填 2，可發現行最佳填法對應列次佳填法，行次佳填法對應列最佳填法，所以彼此搭配應該可以填入最多個 1，但由於不確定哪些列適用最佳填法，哪些適用次佳填法，故將每列和每行的格子損失量固定成 2 個做計算。

因4×5 方格表在前述已討論，接著討論4×8 方格表，其計算過程如下所示：

$$\begin{cases}(2\text{ 的個數})\times 2+(0\text{ 的個數})\geq 2\times 4\\(0\text{ 的個數})\times 2+(2\text{ 的個數})\geq 2\times 8\end{cases}$$

$$\rightarrow (2\text{ 的個數})\times 3+(0\text{ 的個數})\times 3\geq 2\times 4+2\times 8$$

$$\rightarrow [(2\text{ 的個數})+(0\text{ 的個數})]\times 3\geq 2\times (4+8)$$

$$\rightarrow [(2\text{ 的個數})+(0\text{ 的個數})]\geq 2\times (4+8)\div 3$$

$$\rightarrow [(2\text{ 的個數})+(0\text{ 的個數})]\geq 8$$

也就是說 4×8 方格表全部方格減掉 8後，可以得出可填入1之個數最大值，即 $M_{4\times 8}^{1}=4\times 8-8=24$。同時為求出$4\times 8$方格表數字填入策略並做檢驗，設行的最佳選擇有 x 個，計算過程如表 5-2-19。

表 5-2-19 4×8方格表最佳填入方式計算過程

<table>
<tr><td colspan="2">列數(m)</td><td>4</td><td>行數(n)</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">行最佳填法[0]</td><td>x</td><td>列次佳填法[00]</td><td>$\frac{x}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">行次佳填法$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$</td><td>8-x</td><td>列最佳填法[2]</td><td>$2(8-x)$</td></tr>
<tr><td>計算過程</td><td colspan="2">$\frac{x}{2}+2(8-x)=4$
$\rightarrow x+4(8-x)=4\times 2$
$\rightarrow x+32-4x=8$
$\rightarrow 32-3x=8$
$\rightarrow 3x=32-8$
$\rightarrow 3x=24$
$\rightarrow x=24\div 3$
$\rightarrow x=8$</td><td colspan="2"><table><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>
圖 5-2-7 4×8方格表數字填入圖</td></tr>
</table>

也就是說，行的最佳填法有 8 行，次佳填法有 0 行，則填入最多 1 的數量應該為$4\times 8-(1\times 8+2\times 0)=24$，即$M_{4\times 8}^{1}=24$，與前述計算結果相同，而 $M_{4\times 8}^{0}=8$，$M_{4\times 8}^{2}=0$，方格表數字填入圖如圖 5-2-7。

再由4×5 和 4×8的檢驗算法，歸納$(3k+1)\times(3t+2)$與$(3k+2)\times(3t+1)$的$m\times n$方格表最佳策略行數之計數公式，計算過程如下所示：

設最佳行數為x行，則次佳行數有$(n-x)$行；

最佳列數為$\frac{x}{2}$列，次佳列數有$2(n-x)$

$$\frac{x}{2}+2(n-x)=m \rightarrow x+4(n-x)=m\times2$$

$$\rightarrow x+4\times n-4x=m\times2$$

$$\rightarrow 4n-3x=2m$$

$$\rightarrow 3x=4n-2m$$

$$\rightarrow x=\frac{(4n-2m)}{3}$$

由上述最佳行數x可推知$m\times n$方格表最多填入 1 之個數公式如下：

填入非 1 數量：使用行最佳填法策略，每行會損失一個格子不填 1；

使用行次佳填法策略，每行會損失兩個格子不填 1。

則共損失格子數如下：

$$1\times x+2\times(n-x)=x+2n-2x$$

$$=2n-x$$

$$=2n-\frac{(4n-2m)}{3}$$

$$=\frac{6n-4n+2m}{3}$$

$$=\frac{2m+2n}{3}$$

$$=\frac{(m+n)\times2}{3}$$

所以最多可以填入 $m\times n-\frac{(m+n)\times2}{3}$ 個 1。

由前述統整$m\times n$方格表填入最多 1 的數量策略，推測可以依 m、n 判斷填入策略，如下所示：

a. 當 m 或 n 為 1 時，所有方格只能填入 0。

b. 當 m、n 不為 1 且 m=2 或 n=2 時，會填入$(m \times n) \div 2$個 1。

c. 當m、$n \geq 3$時，如果m、 n 皆為三的倍數，如3×3、3×6、3×9方格表，方格表中的所有方格都填 1。

如果一邊是三的倍數，一邊不是三的倍數，如3×4、3×5、3×7方格表，損失三的倍數邊格子量不填 1，其餘方格則填入 1。

如果兩邊都是三的倍數+1 或三的倍數+2，如2×5、2×8、4×4、4×7方格表，則會損失較大邊方格數不填 1。

如果一邊是三的倍數+1，一邊是三的倍數+2，如4×5、4×8方格表，則可利用最佳行數公式，推得最多可以填入$m \times n - \frac{(m+n) \times 2}{3}$個 1。

3. 猜測：

由於方格表愈來愈大，根據先前$1 \times n$、$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$方格表填入1 的最大個數之規律，猜測在5×1~5×8 方格表填入 1 之最大數量，結果如表 5-2-20。

表 5-2-20 猜測5×1~5×8方格表填入最多 1 之方格數量與策略

$m \times n$	m	n	猜測填入策略與數字組合
5×1	$3 \times 1 + 2$	1	$M^1_{5\times1} = 0$，$M^0_{5\times1} = 5$
5×2	$3 \times 1 + 2$	2	$M^1_{5\times2} = 5$ 和$M^2_{5\times2} = 5$
5×3	$3 \times 1 + 2$	3×1	$M^1_{5\times3} = 3 \times (5-1) = 12$ 和$M^2_{5\times3} = 5$
5×4	$3 \times 1 + 2$	$3 \times 1 + 1$	最佳策略行數=$(4 \times 4 - 5 \times 2) \div 3 = 2$ $M^1_{5\times4}$=$5 \times 4 - (5+4) \times 2 \div 3 = 14$
5×5	$3 \times 1 + 2$	$3 \times 1 + 2$	$M^1_{5\times5} = 5 \times 5 - 5 = 20$ 和$M^2_{5\times5} = 5$
5×6	$3 \times 1 + 2$	3×2	$M^1_{5\times6} = 6 \times (5-1) = 24$ 和$M^2_{5\times6} = 6$
5×7	$3 \times 1 + 2$	$3 \times 2 + 1$	最佳策略行數=$(4 \times 7 - 5 \times 2) \div 3 = 6$ $M^1_{5\times7}$=$5 \times 7 - (5+7) \times 2 \div 3 = 27$
5×8	$3 \times 1 + 2$	$3 \times 2 + 2$	$M^1_{5\times8} = 8 \times (5-1) = 32$ 和$M^2_{5\times8} = 8$

4. 檢驗：

(1) 使用方格圖表實際填入數字，檢驗5×1方格表所能填入最多 1 的方格數之計數結果，如表 5-2-21。

表 5-2-21 5×1、5×2方格表數字填入情形

<table>
<tr><td rowspan="2">5×1
方格表</td><td rowspan="2">o
o
o
o
o</td><td>$M^1_{5\times1}$</td><td>$M^0_{5\times1}$</td><td>$M^2_{5\times1}$</td><td rowspan="2">5×2
方格表</td><td rowspan="2">1 2
1 2
1 2
1 2
2 1</td><td>$M^1_{5\times1}$</td><td>$M^0_{5\times1}$</td><td>$M^2_{5\times1}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td></tr>
</table>

結果：5×1和5×2方格表填入 1 之最大個數與填入數字組合與我們的猜測相符。

(2) 使用方格圖表實際填入數字，檢驗5×3~5×8方格表所能填入最多 1 的方格數之計數結果，如表 5-2-22。

表 5-2-22 5×3~5×8方格表數字填入情形

$m\times n$	樣式圖	$M^1_{m\times n}$	$M^0_{m\times n}$	$M^2_{m\times n}$
5×3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2	12	0	3
5×4	1 1 2 2 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1	14	4	2
5×5	1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1	20	0	5
5×6	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2	24	0	6
5×7	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 2 2 1 1 1 2 2 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1	27	2	6
5×8	2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2	32	0	8

結果：5×3~5×8方格表填入 1 之最大個數與填入數字組合與我們的猜測相符。

(四) 論證：

上述的檢驗雖然是對的，但是我們發現：

由於最佳策略行數 $\frac{4n-2m}{3} \le n \rightarrow 4n-2m \le 3n \rightarrow\ n \le 2m$

即當$n \le 2m$時，才可使用最佳策略行數$=\frac{4n-2m}{3}$。

例如，$(3k+1)\times(3t+2)$方格表的例子，

對於4×17方格表 ，$\frac{4\times 17-2\times 4}{3}=\ \frac{60}{3}=20>17$，就不能使用最佳策略行數。

因此，我們對於$m\times n$ $(\mathrm{m}\ge 3，\mathrm{n}\ge 3)$方格表，進行探究與論證。

1. 定理 5-1：在$m\times n$的方格表中，$(1)\mathrm{m}=3\mathrm{k}，\mathrm{n}=3\mathrm{t}，(\mathrm{t}\ge \mathrm{k})$

$(2)\mathrm{m}=3\mathrm{k}，\mathrm{n}=3\mathrm{t}+1，(\mathrm{t}\ge \mathrm{k})$

$(3)\mathrm{m}=3\mathrm{k}，\mathrm{n}=3\mathrm{t}+2，(\mathrm{t}\ge \mathrm{k})$

則(1) $M^1_{3k\times 3t}=m\times n$，快速排法為每格填上 1。

(2)$M^1_{3k\times(3t+1)}=m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填 0，共填上 m 個 0，而在其餘的每個格子填上 1。

(3)$M^1_{3k\times(3t+2)}=m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填上 2，共填上 m 個 2，而在其餘的每個格子填上 1 。

證明：

(1) 以6×15方格表為例(如圖 5-2-8)，在每一格填上 1，而 6、15 都是 3 的倍數，因此，6×15方格表中的每一列、每一行的數之總和，分別為 15、6，都是 3 的倍數。

可推得 $M^1_{3k\times 3t}=m\times n$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-8 6×15方格表快速排法

(2) 以6×19方格表為例(如圖 5-2-9)，其快速排法為，先在最後一行的每個格子填上 0，共填上 6 個 0，而在其餘的每個格子填上 1，可推得此方格表的每一列、每一行的數之總和，分別為 18 、6，都是 3 的倍數。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

圖 5-2-9 6×19方格表快速排法

可推得$M^1_{6\times 19}=6\times(19-1)$，亦即$M^1_{3k\times(3t+1)}=m\times(n-1)$

(3) 以 6x23 方格表為例 (如圖 5-2-10)，其快速排法為，先在最後一行的每個格子填上 2，共填上 6 個 2，而在其餘的每個格子填上 1，可推得此方格表的每一列、每一行的數之總和，分別為 24、6，都是 3 的倍數。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

圖 5-2-10 6×23方格表快速排法

可推得 $M^1_{6\times23}=6\times(23-1)$，亦即$M^1_{3k\times(3t+2)}=m\times(n-1)$

我們發現，可將上述定理的第 2 個、第 3 個方格表旋轉 90 度，就可推得下列兩種方格表填入最多個 1 的計數公式與快速排法：$(1)\mathrm{m}=3\mathrm{k}+1$，$\mathrm{n}=3\mathrm{t}$ (2) $\mathrm{m}=3\mathrm{k}+2$，$\mathrm{n}=3\mathrm{t}$

2. 定理 5-2：在$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$的方格表中，

$$(1)\mathrm{m}=3\mathrm{k}+1\text{，}\mathrm{n}=3\mathrm{t}+1\ \ (\mathrm{t}\geq\mathrm{k})\qquad(2)\mathrm{m}=3\mathrm{k}+2\text{，}\mathrm{n}=3\mathrm{t}+2\ \ (\mathrm{t}\geq\mathrm{k})$$

則(1)$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)}=(m-1)n$ ，且可推知其快速排法。

(2)$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)}=(m-1)n$ ，且可推知其快速排法。

證明：

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

圖 5-2-11 7×16方格表快速排法

(1) 以7×16方格表為例 (如圖 5-2-11)，其快速排法：

先由方格表左側開始，以(3k+1)為邊長，構造出第一個正方形，並在此正方形的對角線上的每一個格子填上 0，接著，在此方格表分割掉第一個正方形後剩下的方格表最後一列的每一格子上都填 0。

因此7×16格表中的每一列(最後一列總和為 6)、每一行的數之總和分別為 15、6，都是 3 的倍數。可推得 $M^1_{7\times16}=(7-1)\times16$，亦即$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)}=(m-1)\times n$

(2)以8×23方格表為例 (如圖 5-2-12)其快速排法：

先由方格表左側開始，以(3k+2) 為邊長，構造出第一個正方形，並在此正方形的對角線上的每一個格子填上 2，接著在此方格表分割掉一個正方形後剩下的方格表最後一列的每一格子上填上 2。因此，8×23格表中的每一列(最後一列總和為 39)、每一行的數之總和分別為 24、9，都是 3 的倍數。

可推得 $M^1_{8\times23}=(8-1)\times23$，

亦即$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)}=(m-1)n$

2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

圖 5-2-12 8×23方格表快速排法

3. 探究在$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$的方格表中，m=3k+1，n=3t+2，3k+1 < 3t+2 < 2(3k+1)的快速排法，對於

13×17方格表填入 1 之最佳數量方法排法，進行試排，發現下圖 5-2-13 的排法，都能達成$\mathrm{M}^1_{13\mathrm{x}17}=201$。但是，這些排法不只耗時間，而且檢查其是否滿足條件也不方便。因此，我們想進一步探究13×17方格表的快速排法。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-13 13×17方格表 1 之最佳數量各種排法

我們對於13×17方格表進行填入 1 之最佳數量快速排法，

a. 使用最佳策略行數$\frac{4\mathrm{n}-2\mathrm{m}}{3}$，即 $\frac{4\times 17-2\times 13}{3}=\frac{68-26}{3}=\frac{42}{3}=14$

每行要填一個 0，可以滿足行的 3 的倍數的條件，又為了要滿足列的 3 的倍數的條件，因此，採用橫向雙 0 的方式排放，從方格表底層一列開始，逐層錯開往上排，共排了$\frac{14}{2}$列，即 7 列。

b. 由次佳策略行數，可推知$17-14=3$要緊跟著最右邊雙 0 的次行，採用往右上縱向雙 2 的方式排放，共排了 3 行。

如此，就可達成

$\mathrm{M}^1_{13\times 17}=13\times 17-(14+2\times 3)=221-20=201$。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-14 13×17方格表快速排

定理 5-3：在$m\times n$的方格表中，$\mathrm{m}=3\mathrm{k}+1$，$\mathrm{n}=3\mathrm{t}+2$，$3\mathrm{k}+1<3\mathrm{t}+2<2(3\mathrm{k}+1)$

則$M^1_{m\times n}=m\times n-\frac{(m+n)\times 2}{3}$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-14 13×17方格表的快速排法)。

證明：

對於$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$方格表，因為最佳策略行數為$\frac{4n-2m}{3}$，每行要填一個 0。

所以，次佳策略行數為$n-\frac{4n-2m}{3}$=$\frac{3n-4n+2m}{3}$=$\frac{2m-n}{3}$

每行要填兩個 2，可推得 $\frac{4n-2m}{3}+2\times\frac{2m-n}{3}=\frac{4n-2m+4m-2n}{3}=\frac{2m+2n}{3}=\frac{(m+n)\times 2}{3}$

可推得(3k+1)x(3t+2)方格表中，可填入最多 1 之方格數為$\mathrm{M}^1_{\mathrm{m\times n}} = \mathrm{m} \times \mathrm{n} - \frac{(\mathrm{m+n})\times 2}{3}$

此定理 5-3 的應用，

例如圖 5-2-15，$M^1_{10\times 17} = 10 \times 17 - \frac{(10+17)\times 2}{3} = 170 - 18 = 152$

圖 5-2-16，$M^1_{16\times 20} = 16 \times 20 - \frac{(16+20)\times 2}{3} = 320 - 24 = 296$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-15 10×17方格表快速排法

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-16 16×20方格表快速排法

4. 定理 5-4：在$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$的方格表中，

$$\mathrm{m} = 3\mathrm{k} + 1，\mathrm{n} = 3\mathrm{t} + 2，3\mathrm{t} + 2 = \mathrm{u}(3\mathrm{k} + 1)，\mathrm{u} \geq 1 \quad 。$$

則$M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-17 4×20方格表的快速排法)。

證明：

因為$3\mathrm{t} + 2 = u(3k+1)$，$\mathrm{u} \geq 1$

0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0

圖 5-2-17 4×20方格表快速排法

所以，可將$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$方格表分割為 u 個$(3k+1) \times (3k+1)$正方形，而在每個正方形的各自其中一條對角線的每個格子上填上 0，就可使該正方形達成最佳策略行數，同時，也可使$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$方格表達成最佳策略行數。

即每行都有一格填上 0，所以，共有 n 格填上 0，

因此，可推得$M^1_{m\times n} = m \times n - n = (m-1)n$

此定理 5-4 的應用，如圖 5-2-17，$M^1_{4\times 20} = (4-1) \times 20$＝60

5. 定理 5-5：在$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$的方格表中，$\mathrm{m} = 3\mathrm{k} + 1$，$\mathrm{n} = 3\mathrm{t} + 2$，$3\mathrm{t} + 2 > 2(3\mathrm{k} + 1)$。

則 $M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-18 7×29方格表的快速排法)。

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

圖 5-2-18 7×29方格表快速排法

證明：首先，從$m\times n$方格表左側開始，先分割出兩個$(3k+1)\times(3k+1)$的正方形，

並在此兩個正方形的各自其中一條對角線上的每個格子填上 0 。

設$n-2m=r$

則 $r=n-2m=(3t+2)-2\ (3k+1)=3t+2-6k-2=3(t-2k)$

根據$m\times n(m=3k+1, n=3t)$的性質，可在此$(3k+1)\times(3t)$方格表最後一列的每個格子填上 0，即可使原$m\times n$方格表達成最佳策略行數，$2m+r=2m+(n-2m)=n$

亦即在$m\times n$方格表共填入 n 個 0。

可推得 $M^{1}_{m\times n}=m\times n-n=(m-1)n$

此定理 5-5 的應用，如圖 5-2-18，$M^{1}_{7\times 29}=(7-1)\times 29=174$

6. 定理 5-6：在$m\times n$的方格表中，$m=3k+1$，$n=3t+2$，$3k+1>2(3t+2)$。

則$M^{1}_{m\times n}=m\times(n-1)$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-19 25×8方格表的快速排法)。

證明：首先，從 mxn 方格表上方開始，先分割出兩個$(3k+2)\times(3k+2)$的正方形，並在此兩個正方形的各自其中一條對角線上的每個格子填上 2 。

設 $m-2n=r$

則 $r=m-2n$

$=(3k+1)-2(3t+2)$

$=3k+1-6t\ -4$

$=3k-6t-3$

$=3(k-2t-1)$

根據$m\times n\ \ (m=3k, n=3t+2)$ 的性質，可在此$(3k)\times(3t+2)$方格表第一行的每個格子填上 2，即可使原$m\times n$方格表，達成最佳策略行數，$2n+r=2n+(m-2n)=m$

亦即在$m\times n$方格表共填入 m 個 2 。

可推得 $M^{1}_{m\times n}=m\times n-m=m\times(n-1)$

此定理 5-6 的應用，

如圖 5-2-19，$M^{1}_{25\times 8}=25\times(8-1)=175$

2	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1

圖 5-2-19

25×8方格表快速排法

陸、　研究結果

對於$m \times n$ 方格表，我們推得填入最多 1 的方格數量之快速排法與計數公式如下：

一、對於$1 \times n$方格表，快速排法為每格填上 0，$M^1_{1\times n}=0$，

對於$m \times 1$方格表，快速排法為每格填上 0，$M^1_{m\times 1}=0$。

二、當$m > 1$，$n > 1$時，對於$2 \times n$方格表，快速排法為一半方格填 1，一半方格填 2，如圖 5-2-5，$M^1_{2\times n}=n$ ，對於$m \times 2$方格表，快速排法可以將表格旋轉 90 度，再用$2 \times n$方格表的快速排法就可以達成，且$M^1_{m\times 2}=m$ 。

三、對於$m \times n$ $(m \geq 3，n \geq 3)$的方格表，可填入最多 1 的方格數量之快速排法與計數公式如下：

（一）定理 5-1：在$m \times n$的方格表中，$(1) m = 3k，n = 3t，(t \geq k)$

$(2) m = 3k，n = 3t + 1，(t \geq k)$

$(3) m = 3k，n = 3t + 2，(t \geq k)$

則(1) $M^1_{3k\times 3t} = m \times n$，快速排法為每格填上 1。

(2)$M^1_{3k\times(3t+1)} = m \times (n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填 0，共填上 m 個 0，而在其餘的每個格子填上 1。

(3)$M^1_{3k\times(3t+2)} = m \times (n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填上 2，共填上 m 個 2，而在其餘的每個格子填上 1 。

（二）定理 5-2：在$m \times n$的方格表中，

$(1) m = 3k + 1，n = 3t + 1\ (t \geq k)$　$(2) m = 3k + 2，n = 3t + 2\ (t \geq k)$

則(1)$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-11 7×16方格表的快速排法)。

(2)$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-12 8×23方格表的快速排法)。

（三）定理 5-3：在$m \times n$的方格表中，

$$m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 < 3t + 2 < 2(3k + 1)$$

則$M_{m\times n}^{1} = m \times n - \frac{(m+n)\times 2}{3}$，且可推知其快速排法(如圖 5-2-14 13×17方格表的快速排法)。

（四）定理 5-4：在$m \times n$的方格表中，

$$m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 = u(3k + 1)，u \geq 1。$$

則$M_{m\times n}^{1} = (m-1)n$，且可推知其快速排法

(如圖 5-2-17 4×20方格表的快速排法)。

（五）定理 5-5：在$m \times n$的方格表中，$m = 3k + 1$，$n = 3t + 2$，$3t + 2 > 2(3k + 1)$。

則$M_{m\times n}^{1} = (m-1)n$，且可推知其快速排法

(如圖 5-2-18 7×29方格表的快速排法)。

（六）定理 5-6：在$m \times n$的方格表中，$m = 3k + 1$，$n = 3t + 2$，$3k + 1 > 2(3t + 2)$。

則$M_{m\times n}^{1} = m \times (n-1)$，且可推知其快速排法

(如圖 5-2-19 25×8方格表的快速排法)。

柒、 結論

本研究在探討$m \times n$方格表下，填入最多 1 的方格數量之計數公式及計數方法，我們藉由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、對於$1 \times n$方格表，快速排法為每格填上 0，$M_{1\times n}^{1}=0$,

對於$m \times 1$方格表，快速排法為每格填上 0，$M_{m\times 1}^{1}=0$。

二、當$m>1$，$n>1$時，對於$2\times n$方格表，快速排法為一半方格填入 1，一半方格填入 2，如圖 5-2-5，$M_{2\times n}^{1}$=n，對於$m\times 2$方格表，快速排法可以將表格旋轉 90 度，再用$2\times n$方格表的快速排法就可以達成，且$M_{m\times 2}^{1}$=m。

在探究原始問題4×5方格表填入最多 1 的方格數量方法上，我們採用行的最佳選擇、列的次佳選擇、行的次佳選擇、列的最佳選擇，推出在 4x5 方格表填入最多 1 的方格數量，且進一步推得最佳策略行數為$\frac{4n-2m}{3}$，而此最佳策略行數可應用於：

$m\times n$ 方格表，$m=3k+1, n=3t+2$，且$3k+1<3t+2<2(3k+1)$。

三、對於$m\times n$ $(m\geq 3，n\geq 3)$的方格表，分成下列六種類型，推導出可填入最多 1 的方格數量之快速排法與計數公式的六個定理，而下列六點是此六個定理的條件敘述。

（一）在$m\times n$的方格表中，(1)$m=3k$，$n=3t$，$(t\geq k)$

(2)$m=3k$，$n=3t+1$，$(t\geq k)$

(3)$m=3k$，$n=3t+2$，$(t\geq k)$。

（二）在$m\times n$的方格表中，(1)$m=3k+1$，$n=3t+1$ $(t\geq k)$

(2)$m=3k+2$，$n=3t+2$ $(t\geq k)$

（三）在$m\times n$的方格表中，$m=3k+1$，$n=3t+2$，$3k+1<3t+2<2(3k+1)$。

（四）在$m\times n$的方格表中，$m=3k+1$，$n=3t+2$，$3t+2=u(3k+1)$，$u\geq 1$。

（五）在$m\times n$的方格表中，$m=3k+1$，$n=3t+2$，$3t+2>2(3k+1)$。

（六）在$m\times n$的方格表中，$m=3k+1$，$n=3t+2$，$3k+1>2(3t+2)$。

捌、 參考文獻資料

一、國民小學數學課本南一版第十一冊。

二、2022-2023 國際中小學生數學能力檢測小學中年級組中文試題第 25 題

【評語】080403

以一個國際中小學數學能力檢測問題為起點，開啟了研究團隊對於「取捨」議題的探討。從討論原始問題４ｘ５的方格表出發，接著循序探討１ｘｎ的方格表、２ｘｎ（n ＞ 1)的方格表、並進行一般化推廣到ｍｘｎ方格內填入最多１的快速排法與計數公式，並透過行列中0、2 數字的個數特性，計算出行、列的最佳與次佳填法的數目；整體觀之，此題材簡單易上手，適合一般小學生做研究，且作品在研究架構與流程圖上有具體的呈現，研究過程亦符合科學探究精神。

作品簡報

有捨有得，衡量之道

摘要

本研究的結果如下：

一、對於1xn方格表，快速排法為每格填0，其可填1的個數最大值=0。

對於mx1方格表，快速排法為每格填0，其可填1的個數最大值=0。

二、當m>1，n>1時，2xn方格表快速排法為一半方格填1，一半方格填2，如圖5-2-5，在2xn方格表可填1的個數最大值=n，對於mx2方格表，快速排法可以將表格旋轉90度，再用2xn方格表的快速排法即可達成，則mx2方格表可填1的個數最大值=m。

三、在探究原始問題4x5方格表填入最多1的方格數量方法上，推得最佳策略行數＝(4n-2m)÷3，此最佳策略行數可應用於：mxn方格表，m=3k+1，n=3t+2且3k+1<3t+2<2(3k+1)。

四、對於mxn(m不小於3且n不小於3)的方格表，分成六種類型，推導出可填入最多1的方格數量之快速排法與計數公式的六個定理。

壹、研究動機

一次的數學課上，老師為了讓我們更好的了解取捨這個議題，同時練習等量公理的未知數列式，根據這個主題告訴了我們一個來自2022-2023國際中小學數學能力檢測小學中年級的題目：已知在4×5方格表的每一個小方格內填入0、1或2。若每一行、每一列內的數之總和都是3的倍數，請問這個4×5方格表中最多可以填入幾個1？

我們觀察到這個方格表的行、列所組成的方格數不同，因此它的行與列分別能填入1的最大數量也不一樣，若是滿足了行填入最大數量的1，則列就無法填入最大數量的1，反之亦然。

對於我們觀察到的景象，我們感到很好奇，若方格表上的行與列無法同時填入自己的最佳選擇，那是不是代表有些行或列需要退一步，選擇填入次佳的1之數量，以此讓方格表內的行與列滿足題目所設條件？這個問題引起大家討論，希望能從中找到更方便且快速的填入1之方格最大值。

貳、名詞釋義

一、$\mathbf{L_n}$：在n個數字時，填入0、1或2以達到數之總和為三的倍數，且能填入最多1的數量，如$L_4 = 3$就是指在四個數字時，最多可以填入三個1，如圖2-1-1。

二、$\mathbf{S_n}$：在n個數字時，填入0、1或2以達到數之總和為三的倍數，且能填入次多1的數量，如$S_4 = 2$就是指在四個數字時，次佳策略下可以填入二個1，如圖2-2-1。

三、$\mathbf{M^i_{m \times n}}$：在$m \times n$方格表能填入最多1之數量下，數字i的在方格表內所填入數量，例如:

$M^1_{4\times5}$=14是指在4× 5方格表最多能填入十四個1；$M^0_{4\times5} = 4$是指在4×5方格表能填入四個0；$M^2_{4\times5} = 2$是指在4×5方格表能填入二個2。

1	1	1	0

圖 2-1-1 四個數字最佳填入策略

1	1	2	2

圖 2-2-1 四個數字次佳填入策略

1	1	1	0	0
0	0	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	2	1	1

圖 2-3-1 4×5方格表數字填入圖

參、研究目的

一、探討原始問題 4 x 5的方格表，填入最多1的快速排法與計數公式。

二、探討對於1 x n的方格表，填入最多1的快速排法與計數公式。

三、探討對於2 x n (n > 1)的方格表，填入最多1的快速排法與計數公式。

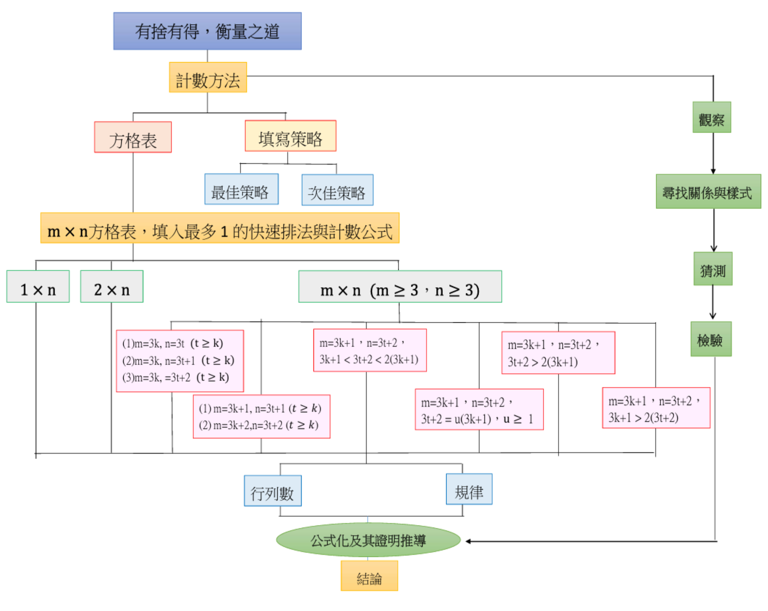
四、探討對於m x n (m ≥ 3，n ≥ 3)的方格表，填入最多1的快速排法與計數公式。

肆、研究設備及器材

方格紙、電腦、筆、相機、Microsoft Word。

伍、研究過程或方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

首先，在4×5方格表上,針對方格表內的所有小方格都只能填入0、1或2的情況下，且每一行、每一列內的數之總和都是三的倍數，則在這個4×5方格表內最多可以填入幾個1的問題,我們開始嘗試找到結果。在研究過程中,因為沒有系統的尋找方法導致無法有效地找出填入1的方格數量最大值，反而使研究過程紛亂而找不到關聯性，也無法確定方格表是否填入到最多個1，此困境不利於進行研究,如圖5-2-1，因此我們要找出有系統的方法來進行研究。

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
0	0	0	0	0

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	2	1
0	0	0	2	1

0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1

圖 5-2-1

我們決定先探討在$1 \times n$方格表，其n個格子分別所能填入1的方格數量最大值與次佳放置數量，其次，探討在$2 \times n$方格表，其2n個格子分別所能填入1的方格數量最大值與次佳放置數量，接著，再繼續深入探討$m \times n$的方格表所能填入1的方格數量最大值。

（一）最佳填寫策略，填入最多1 的方格數量

1. 觀察

因為方格表只能填入0、1、2，可知0本身數值就可以為三的倍數，也就是三的零倍；而1和2則需要透過組合才能滿足數之總和為三的倍數這個條件，例如一個1和和一個2的總和可為三的倍數；又或者都只填入1或2的話，因1和3或2和3彼此互質，其所需最小公倍數分別為1×3和2×3，所以其所需最少數量是3個，所以在1、2、3個數字下所能填入0、1、2之情形如表5-2-1。

表 5-2-1 填入 0、1、2 的基本組合模式

可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量	可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0	3	0 0 0	3	0	0
2	0 0	2	0	0		1 1 1	0	3	0
	1 2	0	1	1		2 2 2	0	0	3
						0 1 2	1	1	1

2. 尋找關係與樣式

了解1、2、3個可填數下填入滿足條件之0、1、2可能組合模式後，因為題目要求要填入最多1的數量，所以在1、2、3個可填數下填入最多1之個數情形如表5-2-2。

表 5-2-2 在 1、2、3 個可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數量	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0
2	1 2	0	1	1
3	1 1 1	0	3	0

我們可以由上表得知每三個可填數可以全部填入1，因此將所有可填數量除以3，若有多餘的可填數則依上表填入最佳選擇，也就是說若多出一個可填數，應填入0；若多出兩個可填數，應填入1和2。可以從中得出若有多餘的可填數，則只會有一個可填數不能填入1。接著我們便繼續討論在可填數為4、5、6、7的情況下，填入最多1之個數情形。

(1)可填數為4個($n = 4$)

因每三個數字可以全部填入1，所以$4 \div 3 = 1 \cdots 1$，會發現多出一個可填數，其餘數字皆可填入1，而為滿足數之總和為三的倍數之條件，多餘的這一個可填數應填入0，其驗證過程與1的最多填入數量如表5-2-3。

表 5-2-3 在 n=4 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	4	填入樣式	1 1 1 0	L_4	$4 - 1 = 3$
驗證公式	$1 \times 3 + 0 = 3$ ， $3 \div 3 = 1$				

(2)可填數為5個($n = 5$)

因每三個數字能全部填入1，所以$5 \div 3 = 1 \cdots 2$，會發現多出兩個可填數，其餘數字皆可填入1，而為滿足數之總和為三的倍數之條件與填入最多1之個數，多餘的兩個可填數應填入1和2，其驗證過程與1的最多填入數量如表5-2-4。

表 5-2-4 在 n=5 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	5	填入樣式	1 1 1 1 2	L_5	$5 - 1 = 4$
驗證公式	$1 \times 4 + 2 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

(3)可填數為6個($n = 6$)

因每三個數字能全部填入1，所以$6 \div 3 = 2$，所有數字皆可填入1，其驗證過程與1的最多填入數量如表5-2-5。

表 5-2-5 在 n=6 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	6	填入樣式	1 1 1 1 1 1	L_6	6
驗證公式	$1 \times 6 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

(4)可填數為7個($n = 7$)

因每三個數字可以全部填入1，所以$7 \div 3 = 2 \cdots 1$，會發現多出一個可填數，其餘數字皆可填入1，而為滿足數之總和為三的倍數之條件，多餘的這一個可填數應填入0，其驗證過程與1的最多填入數量如表5-2-6。

表 5-2-6 在 n=7 的可填數下填入最多 1 之個數情形

可填數	7	填入樣式	1 1 1 1 1 1 0	L_7	$7 - 1 = 6$
驗證公式	$1 \times 6 + 0 = 6$ ， $6 \div 3 = 2$				

3. 猜測

由於可填數愈來愈多，因此我們根據先前可填數分別為2、3、4、5、6、7個時，所能填入1的最大個數之規律，猜測在可填數分別為8、9、10個時所能填入1之最多數量，其結果如表5-2-7。

表 5-2-7 猜測在 8、9、10 個可填數下填入 1 最多個數計數過程與填入數字之組合

可填數量	8	猜測L_8	$8 \div 3 = 2 \cdots 2$，則$L_8 = 8 - 1 = 7$		
0 的數量	0	1 的數量	7	2 的數量	1
可填數量	9	猜測L_9	$9 \div 3 = 3$，則$L_9 = 9$		
0 的數量	0	1 的數量	9	2 的數量	0
可填數量	10	猜測L_{10}	$10 \div 3 = 3 \cdots 1$，則$L_{10} = 10 - 1 = 9$		
0 的數量	1	1 的數量	9	2 的數量	0

4. 檢驗

實際填入數字，檢驗8、9、10個可填數下所能填入最多1的個數之計數結果，如表5-2-8。

表 5-2-8 在 8、9、10 個可填數下填入 1 之最大個數與填入數字之組合

可填數	8 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 2
		驗證過程	$1 \times 7 + 2 = 9$，$9 \div 3 = 3$
	9 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 1
		驗證過程	$1 \times 9 = 9$，$9 \div 3 = 3$
	10 個	填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
		驗證過程	$1 \times 9 + 0 = 9$，$9 \div 3 = 3$

結果：在8、9、10個可填數下填入1之最多個數與填入數字組合與我們的猜測數值相符。

由以上檢驗，發現：

a. L_n計數公式：n個方格數所能填入1的最大數量(L_n)計數公式為總可填數除以3，再判斷是否為三的倍數，如果n是三的倍數($n = 3k$)，則$L_n = n$，若n不是三的倍數($n = 3k + 1$或$n = 3k + 2$)，則$L_n = n - 1$。

b. 快速排法：在 n 個可填數下填入數字之組合情形，依 n 是否為三的倍數進行判斷，當$n = 3k$時，數字填入組合為 n 個1；當$n = 3k + 1$時，數字填入組合為1個0和$(n - 1)$個1；當$n = 3k + 2$時，數字填入組合為1個2和$(n - 1)$個1。

（二）次佳填寫策略，填入次多1 的方格數量

1. 觀察

根據表5-2-1的組成情形，在1、2、3個可填數下，填入0、1或2以達到數之總和為三的倍數，1的次佳填入樣式統整在表5-2-9。

表 5-2-9 在 1、2、3 個可填數的次佳填入樣式

可填數	填入樣式	0 的數量	1 的數量	2 的數量
1	0	1	0	0
2	0 0	2	0	0
3	1 0 2	1	1	1

原本兩個可填數的最佳填法是填入1個1和1個2，改為次佳填法是1的填入數量減少1個，也就是填入2個0；原本三個可填數的最佳填法是填入3個1，改為次佳填法是填入1個0、1個1和1個2，也就是1的填入數量會減少2個。

2. 尋找關係與樣式

由上表5-2-13的觀察，我們看見2和3個可填數變化情形，接著我們繼續討論在4、5、6、7個可填數下1的次佳數量填入樣式與次佳填入數量，如圖5-2-2。

可填數量	最佳填法→次佳填法		
4	1 1 1 0	⟶	1 1 2 2
5	1 1 1 1 2	⟶	1 1 1 0 0
6	1 1 1 1 1 1	⟶	1 1 1 1 0 2
7	1 1 1 1 1 1 0	⟶	1 1 1 1 1 2 2

圖 5-2-2 n=4、5、6 和 7 時從最佳變為次佳填入樣式

(1)4個可填數($n = 4$)

由4個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入1個1的情況下，即要填2個1且還有2個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下2數都應填2。

(2)5個可填數($n = 5$)

由5個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入1個1，即要填入3個1且還有2個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下2數都應填入0。

(3)6個可填數($n = 6$)

由6個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入2個1，即填入4個1且還有2個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下2數應填1個0和1個2。

(4)7個可填數($n = 7$)

由7個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入1個1，即要填入5個1且還有2個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下2數都應填入2。

由7個可填數的最佳填法為基礎，其次佳填法為減少填入1個1，即要填入5個1且還有2個可填數，為滿足數之總和為三的倍數，剩下2數都應填入2。

由上述觀察到n個方格從最佳填法轉為次佳填法的變化與數字填入組合關係如表5-2-10，當最佳填法的所有可填數都填入1時，次佳填法要減少填入2個1，並改為填入1個0和1個2；當最佳填法有一數填入0時，次佳填法要減少填入1個1，並改為填入2個2，當最佳填法有一數填入2時，次佳填法要減少填入1個1，並改為填入2個0。

表 5-2-10 在可填數$n = 1 \sim n = 7$下次佳組合情形與填入數字個數

可填數	次佳填入樣式	1 數量	0 數量	2 數量
1	0	0	1	0
2	0 0	0	2	0
3	1 0 2	1	1	1
4	1 1 2 2	2	0	2
5	1 1 1 0 0	3	2	0
6	1 1 1 1 0 2	4	1	1
7	1 1 1 1 1 2 2	5	0	2

由上表中可填數(n)的次佳填法與所填入數字之個數關係，除去例外的1個可填數情況，可推得$S_n = n - 2(n \geq 2)$，也就是填入$(n - 2)$個1，在依n是否為三的倍數來判斷填入0或2，即當n=3k時，則填入1個0和1個2；當n=3k+1時，則填入2個2；當n=3k+2時，則填入2個0。

3. 猜測

由於可填數愈來愈大，由最佳填法轉為次佳填法的過程越來越雜亂，因此我們根據先前可填數分別在1、2、3、4、5、6、7個的規律，猜測可填數分別在8、9、10個時次佳填入情形和所填數字數量，其結果如表5-2-11、表5-2-12、表5-2-13。

表 5-2-11 猜測8個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	8	填入數量關係公式	$8 = 3 \times 2 + 2$		
1 的數量（S_8）	8-2=6	0 的數量	2	2 的數量	0

表 5-2-12 猜測9個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	9	填入數量關係公式	$9 = 3 \times 3$		
1 的數量（S_9）	9-2=7	0 的數量	1	2 的數量	1

表 5-2-13 猜測10個可填數次佳填入情形和所填數字數量

可填數	10	填入數量關係公式	$10 = 3 \times 3 + 1$		
1 的數量（S_{10}）	10-2=8	0 的數量	0	2 的數量	2

4. 檢驗

實際填入數字，檢驗在8、9、10個可填數下所能填入1的次多個數之計數結果，如表5-2-14。

表 5-2-14 在 8、9、10 個可填數下填入 1 之次多個數與填入數字之組合

填入樣式	1 1 1 1 1 1 0 0
驗證過程	$1 \times 6 + 0 \times 2 = 6$，$6 \div 3 = 2$
填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 0 2
驗證過程	$1 \times 7 + 2 + 0 = 9$，$9 \div 3 = 3$
填入樣式	1 1 1 1 1 1 1 1 2 2
驗證過程	$1 \times 8 + 2 \times 2 = 12$，$12 \div 3 = 4$

結果：在8、9、10個可填數下填入1之次多個數與填入數字組合與我們的猜測數值相符。

由以上檢驗，發現：

a. S_n計數公式：n個方格數所能填入1的次多數量(S_n)計數公式為$S_n = n - 2(n \geq 2)$和$S_1 = 0$。

b. 快速排法：在 n 個可填數下填入數字之組合情形且$n \geq 2$，

當$n = 3k$，數字填入組合為$(n - 2)$個1、1個0和1個2；

當$n = 3k + 1$，數字填入組合為$(n - 2)$個1和2個2；

當$n = 3k + 2$，數字填入組合為$(n - 2)$個1和2個0。

（三）發展在m×n 方格表下，填入最多1的方格數量填入策略、快速排法與填入1的最大值數量計數公式。

1. 觀察

由原始題目4×5方格表可知每一列有5個方格，而每一行有4個方格，因此行的最佳填法是填入三個1和一個0，列的最佳填法是填入四個1和一個2，若選擇滿足列的最佳填法，則行就無法達成數之總和為三的倍數這一條件，反之亦然。若選擇行的次佳填法放入2個1和2個2，可發現行之次佳填法中的2可以對應2列列之最佳填法；若選擇列的次佳填法放入3個1和2個0，可發現列之次佳填法中的0可以對應2行行之最佳填法。

為了找出方格表最佳填法，應在行列各自的最佳填法與次佳填法進行平衡。因為行的最佳填法會損失1個方格填0，而次佳填法則損失2個方格填2，由於不確定有哪些行數是用最佳填法，哪些是次佳填法，因此我們決定讓每一行損失方格數固定為2個，也就是若是行之最佳填法，會將損失的方格數$\times 2$，即0的個數$\times 2$；而行之次佳填法，因本身就會損失2個方格數填2，因此2的個數不必做變化。

另一方面，因為列的最佳填法會損失1個方格填2，而次佳填法則損失2個方格填0，由於不確定有哪些列數是用最佳填法，哪些是次佳填法，因此我們決定讓每一列損失方格數固定為2個，也就是若是列之最佳填法，會將損失的方格數$\times 2$，即2的個數$\times 2$；而列之次佳填法，因本身就會損失2個方格數填0，因此0的個數不必做變化。故我們可得到計算過程如右所示：

$$\begin{cases}(0\text{ 的個數}) \times 2 + (2\text{ 的個數}) \geq 2 \times 5 \\ (0\text{ 的個數}) + (2\text{ 的個數}) \times 2 \geq 2 \times 4\end{cases}$$
$$\to (0\text{ 的個數}) \times 3 + (2\text{ 的個數}) \times 3 \geq 2 \times 4 + 2 \times 5$$
$$\to [(0\text{ 的個數}) + (2\text{ 的個數})] \times 3 \geq 2 \times (4+5)$$
$$\to [(0\text{ 的個數}) + (2\text{ 的個數})] \geq 2 \times (4+5) \div 3$$
$$\to [(0\text{ 的個數}) + (2\text{ 的個數})] \geq 6$$

也就是說至少有6個方格數不為1，則4×5方格表全部方格數減6後，可以得出最多填入1之個數，即$M^1_{4\times5} = 4 \times 5 - 6 = 14$。

同時為求出4×5方格表數字填入策略並做檢驗，因此假設行的最佳填法(即填一個0)有x行，則行的次佳填法(即填二個2)有$(5-x)$行；同時由行的最佳填法推知出列的次佳填法(即填二個0)，因列的次佳填法需要2個0，所以每2行最佳填法可滿足1列次佳填法，即有$\frac{x}{2}$列次佳填法；並由行的次佳填法(即填二個2)推知出列的最佳填法(即填一個2)，因列最佳填法需要1個2，所以每1行次佳填法可滿足2列最佳填法，即有$2(5-x)$列，則方格表內填入最多1的計算結果如右表5-2-15。

表 5-2-15 4 × 5方格表最佳填入方式計算過程

行數(n)	5	列數(m)	4	計算過程
行最佳填法$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$	x	列次佳填法[11100]	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+2(5-x)=4$ $\to x+4(5-x)=4\times2$ $\to x+4\times5-4x=8$ $\to 20-3x=8$ $\to 3x=20-8$ $\to 3x=12$ $\to x=4$
行次佳填法$\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$	5-x	列最佳填法[11112]	$2(5-x)$	

也就是說，行的最佳填法有4行，次佳填法有1行，則填入最多1的數量應為$4 \times 5 - (1 \times 4 + 2 \times 1) = 14$，即$M^1_{4\times5} = 14$，1的個數與前述計算結果相同，$M^0_{4\times5} = 4, M^2_{4\times5} = 2$，其方格表數字填入圖如上圖5-2-3。

1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1

圖 5-2-3 4 × 5方格表最佳填入樣式

2. 尋找關係與樣式

接著繼續討論在方格表大小為$1 \times n$、$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$的情況下，填入最多1之個數方格表。

(1)$1 \times n$方格表

在$1 \times n$方格表下，由於每一行只有1個方格數，唯一能滿足數之總和為三的倍數條件的數字是0，因此不論行數為多少，所有方格皆只能填入0，無法填入1，即$M^1_{1\times n} = 0$，而0的填入數量會為n個，即$M^0_{1\times n} = n$，其結果如圖5-2-4。

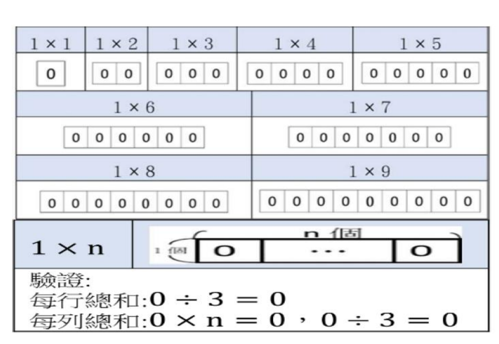


圖 5-2-4 1 × n方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

(2)$2 \times n$方格表

除去$n = 1$，方格只能填入0外，從$n \geq 2$起，由於每行只有兩個方格，為了填入最多1的數量，每行最佳填入策略為填入1個1和1個2，因此滿足列條件之策略也只會出現1和2，即行最佳填法必為$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，列則依$n = 3k$、$3k+1$或$3k+2$判斷填法，當$n = 3k$時，列可使用最佳填法$[1 \cdots 1]$，快速填法是一列$[1 \cdots 1]$搭配一列$[2 \cdots 2]$；當$n = 3k+1$時，列可使用次佳填法$[1 \cdots 122]$，快速填法是一列$[1 \cdots 122]$搭配一列$[2 \cdots 211]$；當$n = 3k+2$時，列可使用最佳填法$[1 \cdots 12]$，快速填法是一列$[1 \cdots 12]$搭配一列$[2 \cdots 21]$，如圖5-2-5。

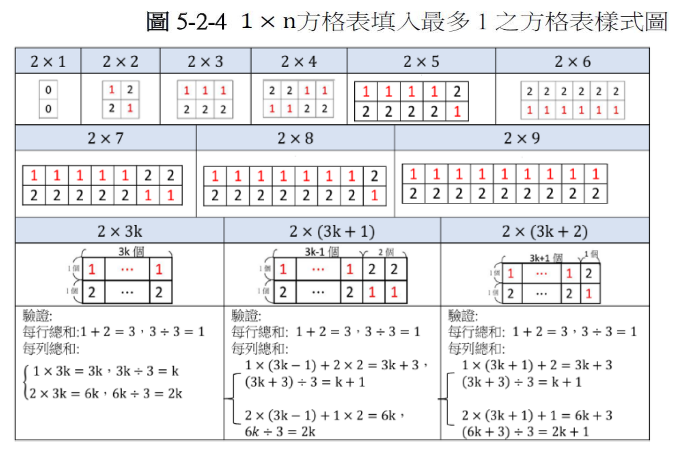


圖 5-2-5 2 × n方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

由上圖可知$2 \times n$方格表因為每行只能由1個1和1個2組成，所以除去例外的2×1方格表只能填入0，即$M^1_{2\times n} = 0$，其餘方格表內1和2填入數量會相同，即當$n \geq 2$，$M^1_{2\times n} = n$，$M^2_{2\times n} = n$。

同理而言，由$1 \times n$和$2 \times n$方格表可推知$m \times 1$和$m \times 2$方格表其填入方式，即$M^1_{m\times1} = 0$且$m \geq 1$，$M^1_{m\times2} = m$且$m \geq 2$，須優先判斷行列數是否為1。

(3)$3 \times n$方格表

因行的格子數為三的倍數，所以每一行最佳填入策略是都填1，因此依行數判斷列的數字填入方式。

當n=3k時，行列數同為三的倍數，所以方格內能全數填1；當n=3k+1時，列最佳填入策略是有一格填0，填入行列最佳填法則有3個0；當n=3k+2時，列最佳填入策略是有一格填2，填入行列最佳填法則有3個2，也就是每列至少會有一個方格不能填入1，而其餘方格皆可填入1，如圖5-2-6。

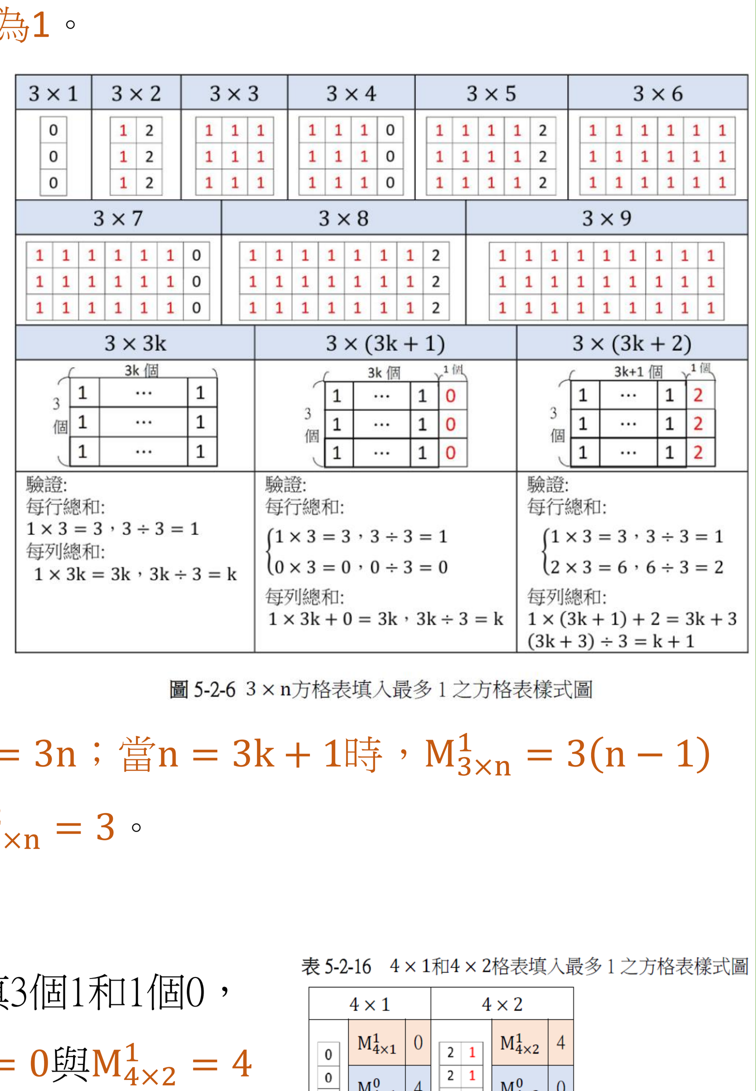


圖 5-2-6 3 × n方格表填入最多 1 之方格表樣式圖

依上圖可知當$n = 3k$時，所有方格皆填入1，即$M^1_{3\times n} = 3n$；當$n = 3k+1$時，$M^1_{3\times n} = 3(n-1)$且$M^0_{3\times n} = 3$；當$n = 3k+2$時，$M^1_{3\times n} = 3(n-1)$且$M^2_{3\times n} = 3$。

(4)$4 \times n$方格表

由於每行有4個方格，所以行的最佳填入策略是填3個1和1個0，而當n=1和n=2時，其填入最多1的方格數數量為$M^1_{4\times1} = 0$與$M^1_{4\times2} = 4$，如表5-2-16。

表 5-2-16 4 × 1和4 × 2格表填入最多 1 之方格表樣式圖

4 × 1			4 × 2		
0 0 0 0	$M^1_{4\times1}$	0	2 1 2 1 1 2 1 2	$M^1_{4\times2}$	4
	$M^0_{4\times1}$	4		$M^0_{4\times2}$	0
	$M^2_{4\times1}$	0		$M^2_{4\times2}$	4

當$n \geq 3$且$n = 3k$時，因行數為三的倍數，所以列的最佳填入策略是都填1，同時因要滿足每行最佳策略須填入一個0，也就是會有n個0，即$M^1_{4\times3k} = (4-1) \times 3k = 3n$與$M^0_{4\times3k} = 3k = n$，如表5-2-17，其驗證過程如下所示：

每行的數之總和為$1 \times 3 = 3$，$3 \div 3 = 1$，滿足總和為三的倍數條件；每列的數之總和有兩種情形：$1 \times 3k = 3k$，$3k \div 3 = k$和$0 \times 3k = 0$，$0 \div 3 = 0$，皆滿足總和為三的倍數條件。

表 5-2-17 當n = 3k且k ≥ 1 之 4 × n方格表填入情形

n	方格表	方格圖	$M^1_{4\times n}$	$M^0_{4\times n}$	$M^2_{4\times n}$
3	4 × 3	111 111 111 000	9	3	0
6	4 × 6	111111 111111 111111 000000	18	6	0
9	4 × 9	111111111 111111111 111111111 000000000	27	9	0
3k	4 × 3k	3k個 1 ⋯ 1 1 ⋯ 1 1 ⋯ 1 0 ⋯ 0	$(4-1) \times 3k = 3 \times 3k = 3n$	n	0

當$n \geq 3$且$n = 3k+1$時，列的最佳填入策略是有一格填0，同時因要滿足每行最佳策略須填入一個0，而行與列的最佳填入策略都是有一格填0，最佳填法是行列先將0填入可同時滿足要求格子，剩下需填入0的行數剛好會為三的倍數，則剩下的行數各需填入一個0即可滿足行與列之要求，也就是填入n個0，即$M^1_{4\times(3k+1)} = (4-1) \times 3k = 3n$，如右表5-2-18，其驗證過程如下所示：

表 5-2-18 當n = 3k + 1且k ≥ 1 之 4 × n方格表填入情形

n	方格表	方格圖	$M^1_{4\times n}$	$M^0_{4\times n}$	$M^2_{4\times n}$
4	4 × 4	1110 1101 1011 0111	12	4	0
7	4 × 7	0111111 1011111 1101111 1110000	21	7	0
3k+1	4 × (3k + 1)	4個　3(k-1)個 0111 1 ⋯ 1 1011 1 ⋯ 1 1101 1 ⋯ 1 1110 0 ⋯ 0	3(n-1)	n	0

每行的數之總和為$1 \times 3 = 3$，$3 \div 3 = 1$，滿足總和為三的倍數條件；每列的數之總和有兩種情形：$1 \times 3k = 3k$，$3k \div 3 = k$和$1 \times 3 + 0 \times (3k-2) = 3$，$3 \div 3 = 0$，皆滿足總和為三的倍數條件。

當$n \geq 3$且$n = 3k+2$時，列最佳填法是損失一格填2，而行最佳填法是損失一格填0，因行列最佳填法不同，所以需要協調各自最佳與次佳填法，才能填入最多個1。

當$n = 3k+2$時，列次佳填法是損失兩格填0，行次佳填法是損失兩格填2，可發現行最佳填法對應列次佳填法，行次佳填法對應列最佳填法，所以彼此搭配應該可以填入最多個1，但由於不確定哪些列適用最佳填法，哪些適用次佳填法，故將每列和每行的格子損失量固定成2個做計算。

因4×5方格表已討論，接著討論4×8方格表，計算過程如右所示：

$$\begin{cases}(2\text{ 的個數}) \times 2 + (0\text{ 的個數}) \geq 2 \times 4 \\ (0\text{ 的個數}) \times 2 + (2\text{ 的個數}) \geq 2 \times 8\end{cases}$$
$$\to (2\text{ 的個數}) \times 3 + (0\text{ 的個數}) \times 3 \geq 2 \times 4 + 2 \times 8$$
$$\to [(2\text{ 的個數}) + (0\text{ 的個數})] \times 3 \geq 2 \times (4+8)$$
$$\to [(2\text{ 的個數}) + (0\text{ 的個數})] \geq 2 \times (4+8) \div 3$$
$$\to [(2\text{ 的個數}) + (0\text{ 的個數})] \geq 8$$

也就是說4×8方格表全部方格減掉8後，可以得出可填入1之個數最大值，即$M^1_{4\times8} = 4 \times 8 - 8 = 24$。同時為求出$4 \times 8$方格表數字填入策略並做檢驗，設行的最佳選擇有x個，計算過程如表5-2-19。

也就是說，行的最佳填法有8行，次佳填法有0行，則填入最多1的數量應該為$4 \times 8 - (1 \times 8 + 2 \times 0) = 24$，即$M^1_{4\times8} = 24$，與前述計算結果相同，而$M^0_{4\times8} = 8$，$M^2_{4\times8} = 0$，方格表數字填入圖如圖5-2-7。

表 5-2-19 4 × 8方格表最佳填入方式計算過程

列數(m)	4	行數(n)	8
行最佳填法[0]	x	列次佳填法[00]	$\frac{x}{2}$
行次佳填法$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$	8-x	列最佳填法[2]	$2(8-x)$
計算過程	$\frac{x}{2}+2(8-x)=4$ $\to x+4(8-x)=4\times2$ $\to x+32-4x=8$ $\to 32-3x=8$ $\to 3x=32-8$ $\to 3x=24$ $\to x=24\div3$ $\to x=8$		

0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

圖 5-2-7 4 × 8方格表數字填入圖

再由4×5和4×8的檢驗算法，歸納$(3k+1) \times (3t+2)$與$(3k+2) \times (3t+1)$的$m \times n$方格表最佳策略行數之計數公式，計算過程如下所示：

設最佳行數為x行，則次佳行數有$(n-x)$行；

最佳列數為$\frac{x}{2}$列，次佳列數有$2(n-x)$列

$$\frac{x}{2}+2(n-x)=m \to x+4(n-x)=m\times2$$
$$\to x+4\times n-4x=m\times2$$
$$\to 4n-3x=2m$$
$$\to 3x=4n-2m$$
$$\to x=\frac{(4n-2m)}{3}$$

由上述最佳行數x可推知$m \times n$方格表最多填入1之個數公式如下：

填入非1數量：使用行最佳填法策略，每行會損失一個格子不填1；使用行次佳填法策略，每行會損失兩個格子不填1。

則共損失格子數如下：

$$1\times x+2\times(n-x)=x+2n-2x$$
$$=2n-x$$
$$=2n-\frac{(4n-2m)}{3}$$
$$=\frac{6n-4n+2m}{3}$$
$$=\frac{2m+2n}{3}$$
$$=\frac{(m+n)\times2}{3}$$

所以最多可以填入$m \times n - \frac{(m+n)\times2}{3}$個1。

由前述統整$m \times n$方格表填入最多1的數量策略，推測可以依m、n判斷填入策略，如下所示：

a. 當m或n為1時，所有方格只能填入0。

b. 當m、n不為1且m=2或n=2時，會填入$[(m \times n) \div 2]$個1。

c. 當m、$n \geq 3$時，如果m、 n 皆為三的倍數，如3×3、3×6、3×9方格表，方格表中的所有方格都填1。

(a)如果一邊是三的倍數，一邊不是三的倍數，如3×4、3×5、3×7方格表，損失三的倍數邊格子量不填1，其餘方格則填入1。

(b)如果兩邊都是三的倍數+1或三的倍數+2，如2×5、2×8、4×4、4×7方格表，則會損失較長邊方格數不填1。

(c)如果一邊是三的倍數+1，一邊是三的倍數+2，如4×5、4×8方格表，則可利用最佳行數公式，推得最多可以填入$m \times n - \frac{(m+n)\times2}{3}$個1。

3. 猜測

由於方格表愈來愈大，根據先前$1 \times n$、$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$方格表填入1的最大個數之規律，猜測在5×1 ~5×8方格表填入1之最大數量，結果如下表5-2-20。

表 5-2-20 猜測5 × 1~5 × 8方格表填入最多 1 之方格數量與策略

m × n	m	n	猜測填入策略與數字組合
5 × 1	3 × 1 + 2	1	$M^1_{5\times1} = 0$，$M^0_{5\times1} = 5$
5 × 2	3 × 1 + 2	2	$M^1_{5\times2} = 5$ 和$M^2_{5\times2} = 5$
5 × 3	3 × 1 + 2	3 × 1	$M^1_{5\times3} = 3 \times (5-1) = 12$ 和$M^2_{5\times3} = 3$
5 × 4	3 × 1 + 2	3 × 1 + 1	最佳策略行數=$(4 \times 4 - 5 \times 2) \div 3 = 2$ $M^1_{5\times4}$=$5 \times 4 - (5+4) \times 2 \div 3 = 14$
5 × 5	3 × 1 + 2	3 × 1 + 2	$M^1_{5\times5} = 5 \times 5 - 5 = 20$ 和$M^2_{5\times5} = 5$
5 × 6	3 × 1 + 2	3 × 2	$M^1_{5\times6} = 6 \times (5-1) = 24$ 和$M^2_{5\times6} = 6$
5 × 7	3 × 1 + 2	3 × 2 + 1	最佳策略行數=$(4 \times 7 - 5 \times 2) \div 3 = 6$ $M^1_{5\times7}$=$5 \times 7 - (5+7) \times 2 \div 3 = 27$
5 × 8	3 × 1 + 2	3 × 2 + 2	$M^1_{5\times8} = 8 \times (5-1) = 32$ 和$M^2_{5\times8} = 8$

4. 檢驗

(1)使用方格圖表實際填入數字，檢驗5×1、5×2方格表所能填入最多1的方格數之計數結果，如表5-2-21。

表 5-2-21 5 × 1、5 × 2方格表數字填入情形

5 × 1 方格表	0 0 0 0 0	$M^1_{5\times1}$	$M^0_{5\times1}$	$M^2_{5\times1}$	5 × 2 方格表	1 2 1 2 1 2 1 2 2 1	$M^1_{5\times1}$	$M^0_{5\times1}$	$M^2_{5\times1}$
		0	5	0			5	0	5

結果：5×1和5×2方格表填入1之最大個數與填入數字組合與我們的猜測相符。

(2)使用方格圖表實際填入數字，檢驗5×3~5×8方格表所能填入最多1的方格數之計數結果，如表5-2-22。

表 5-2-22 5 × 3~5 × 8方格表數字填入情形

m × n	樣式圖	$M^1_{m\times n}$	$M^0_{m\times n}$	$M^2_{m\times n}$
5 × 3	111 111 111 111 222	12	0	3
5 × 4	1122 1011 1011 0111 0111	14	4	2
5 × 5	11112 11121 11211 12111 21111	20	0	5
5 × 6	111111 111111 111111 111111 222222	24	0	6
5 × 7	1111110 1111110 1111221 1122111 2211111	27	2	6
5 × 8	21111111 12111111 11211111 11121111 11112222	32	0	8

結果：5×3~5×8方格表填入1之最大個數與填入數字組合與我們的猜測相符。

(四)論證

上述的檢驗雖然是對的，但是我們發現：由於最佳策略行數$\frac{4n-2m}{3} \le n \to 4n-2m \le 3n \to n \le 2m$

即當$n \le 2m$時，才可使用最佳策略行數=$\frac{4n-2m}{3}$。

例如，$(3k+1)\times(3t+2)$方格表的例子，對於4×17方格表，$\frac{4\times17-2\times4}{3} = \frac{60}{3} = 20 > 17$，就不能使用最佳策略行數。因此，我們對於$m\times n$ ($m \ge 3$，$n \ge 3$)方格表，進行探究與論證。

1. 定理5-1：在$m\times n$的方格表中，(1)$m = 3k$，$n = 3t$，$(t \ge k)$

(2)$m = 3k$，$n = 3t+1$，$(t \ge k)$

(3)$m = 3k$，$n = 3t+2$，$(t \ge k)$

則(1) $M^1_{3k\times3t} = m\times n$，快速排法為每格填上1。

(2)$M^1_{3k\times(3t+1)} = m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填0，共填上m個0，而在其餘的每個格子填上1。

(3)$M^1_{3k\times(3t+2)} = m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填上2，共填上m個2，而在其餘的每個格子填上 1 。

證明：

(1)以6×15方格表為例(如圖5-2-8)，在每一格填上 1 ，而6、15都是3的倍數，因此，6×15方格表中的每列、每行的數之總和分別為15、6，都是3的倍數。可推得$M^1_{6\times15} = 6\times15 = 90$，即$M^1_{3k\times3t} = m\times n$

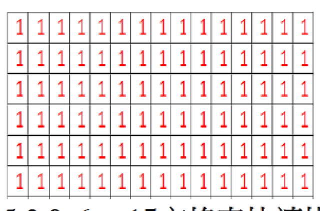


圖 5-2-8 6 × 15方格表快速排法

(2)以6×19方格表為例(如圖5-2-9)，其快速排法為，先在最後一行的每個格子填上0，共填6個0，而在其餘的每個格子填上1，可推得此方格表的每列、每行的數之總和分別為18 、6，都是 3的倍數。

可推得$M^1_{6\times19} = 6\times(19-1)$，亦即$M^1_{3k\times(3t+1)} = m\times(n-1)$

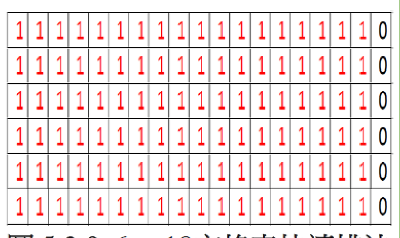


圖 5-2-9 6 × 19方格表快速排法

(3)以6×23方格表為例 (如圖5-2-10)，其快速排法為，先在最後一行的每個格子填上2，共填6個2，而在其餘的每個格子填上1，可推得此方格表的每列、每行的數之總和分別為24、6，都是3的倍數。可推得 $M^1_{6\times23} = 6\times(23-1)$，即$M^1_{3k\times(3t+2)} = m\times(n-1)$

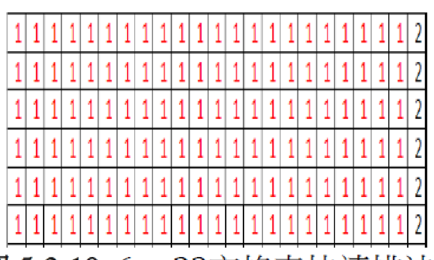


圖 5-2-10 6 × 23方格表快速排法

我們發現，將上述定理的第2、3個方格表旋轉90度，就可推得下列兩種方格表填入最多個1的計數公式與快速排法：(1)m = 3k + 1，n = 3t　　(2) m = 3k + 2，n = 3t

2. 定理5-2：在m × n的方格表中，(1)m = 3k + 1，n = 3t + 1 (t ≥ k)

(2)m = 3k + 2，n = 3t + 2 (t ≥ k)

則(1)$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法。

(2)$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法。

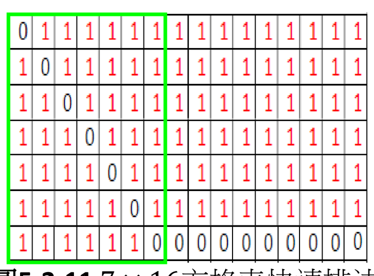


圖5-2-11 7 × 16方格表快速排法

證明：

(1) 以7×16方格表為例 (如圖5-2-11)，其快速排法：

先由方格表左側開始，以(3k + 1)為邊長，構造出第一個正方形，並在此正方形的對角線上的每一個格子上填0，接著在此方格表分割掉第一個正方形後剩下的方格表最後一列的每一格子上都填0。

因此7 × 16格表中的每一列(最後一列總和為6)、每一行的數之總和分別為 15、6，都是3的倍數。可推得 $M^1_{7\times16} = (7-1)\times16$，亦即$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)} = (m-1)\times n$

(2)以8 × 23方格表為例 (如圖5-2-12)其快速排法：

先由方格表左側開始，以(3k + 2) 為邊長，構造出第一個正方形，並在此正方形的對角線上的每一個格子上填2，接著在此方格表分割掉一個正方形後，剩下的方格表最後一列的每一格子上填上2。因此，8 × 23格表中的每一列(最後一列總和為39)、每一行的數之總和分別為24、9，都是3 的倍數。

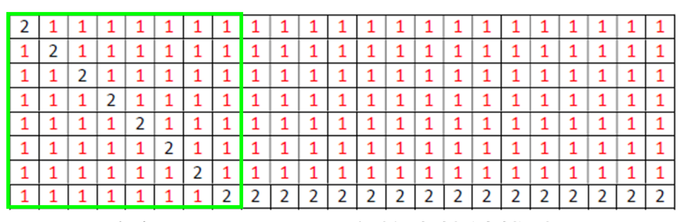


圖 5-2-12　8 × 23方格表快速排法

可推得 $M^1_{8\times23} = (8-1)\times23 = 169$，亦即$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)} = (m-1)n$

3. 探究在$m\times n$的方格表中，$m = 3k+1$，$n = 3t+2$，$3k+1 < 3t+2 < 2(3k+1)$的快速排法，對於13 × 17方格表填入1之最佳數量方法排法，進行試排發現下圖5-2-13的排法，都能達成$M^1_{13\times17} = 201$。但是，這些排法不只耗時間，而且檢查其是否滿足條件也不方便。 因此，我們想進一步探究13 × 17方格表的快速排法。

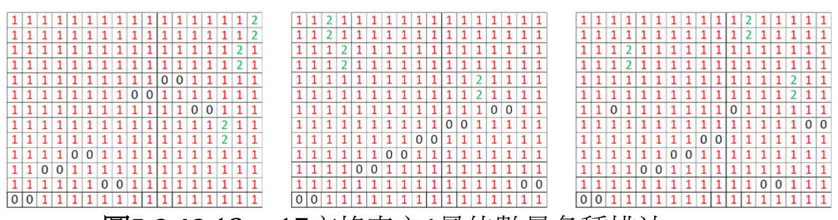


圖5-2-13 13 × 17方格表之1最佳數量各種排法

我們對於13 × 17方格表進行填入1之最佳數量快速排法，

a. 使用最佳策略行數$\frac{4n-2m}{3}$，即$\frac{4\times17-2\times13}{3} = \frac{68-26}{3} = \frac{42}{3} = 14$。每行要填一個0，可以滿足行的3的倍數的條件，又為了要滿足列的3的倍數的條件，因此，採用橫向雙0的方式排放，從方格表底層一列開始，逐層錯開往上排，共排了$\frac{14}{2}$列，即7列。

b. 由次佳策略行數，可推知17 − 14 = 3，要緊跟著最右邊雙0的次行，採用往右上縱向雙2的方式排放，共排了3行，即可達成$M^1_{13\times17} = 13\times17-(14+2\times3) = 221-20 = 201$。

定理5-3：在$m\times n$的方格表中，$m = 3k+1$，$n = 3t+2$，$3k+1 < 3t+2 < 2(3k+1)$

則$M^1_{m\times n} = m\times n - \frac{(m+n)\times2}{3}$，且可推知其快速排法(如圖5-2-14 13 × 17方格表的快速排法)

證明：

對於m × n方格表，因為最佳策略行數為$\frac{4n-2m}{3}$，每行要填一個0。

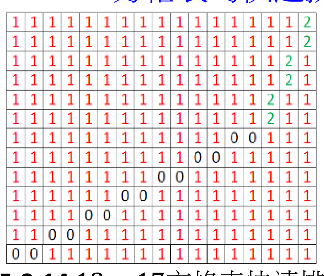


圖5-2-14 13 × 17方格表快速排法

所以，次佳策略行數為$n-\frac{4n-2m}{3} = \frac{3n-4n+2m}{3} = \frac{2m-n}{3}$

每行要填兩個2，可推得 $\frac{4n-2m}{3} + 2\times\frac{2m-n}{3} = \frac{4n-2m+4m-2n}{3} = \frac{2m+2n}{3} = \frac{(m+n)\times2}{3}$

可推得(3k + 1) × (3t + 2)方格表中，可填入最多1之方格數為$M^1_{m\times n} = m\times n - \frac{(m+n)\times2}{3}$

此定理5-3的應用，例如

圖5-2-15，$M^1_{10\times17} = 10\times17 - \frac{(10+17)\times2}{3} = 170-18 = 152$

圖5-2-16，$M^1_{16\times20} = 16\times20 - \frac{(16+20)\times2}{3} = 320-24 = 296$

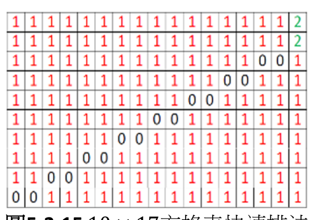


圖5-2-15 10 × 17方格表快速排法

圖5-2-16 16 × 20方格表快速排法

4. 定理5-4：在m × n的方格表中， m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 = u(3k + 1)，u ≥ 1 。

則$M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-17 4 × 20方格表的快速排法)。

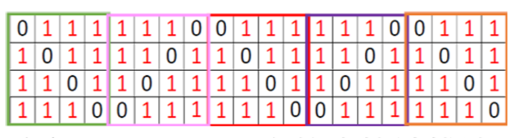


圖 5-2-17　4 × 20方格表快速排法

證明：

因為$3t+2 = u(3k+1)$，u ≥ 1所以，可將m × n方格表分割為u個(3k + 1) × (3k + 1)正方形，而在每個正方形的各自其中一條對角線的每個格子上填上0，就可使該正方形達成最佳策略行數，同時，也可使m × n方格表達成最佳策略行數。即每行都有一格填上0，所以，共有n格填上0，因此，可推得$M^1_{m\times n} = m\times n - n = (m-1)n$

此定理5-4的應用，如圖5-2-17，$M^1_{4\times20} = (4-1)\times20 = 60$

5. 定理5-5：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 > 2(3k + 1)。

則 $M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-18 7 × 29方格表的快速排法)。

證明：

圖 5-2-18　7 × 29方格表快速排法

首先，從m × n方格表左側開始，先分割出兩個(3k + 1) × (3k + 1)的正方形，並在此兩個正方形的各自其中一條對角線上的每個格子填上0 。

設n − 2m = r，則 r = n − 2m = (3t + 2) − 2 (3k + 1) = 3t + 2 − 6k − 2 = 3(t − 2k)

根據m × n(m = 3k + 1, n = 3t)的性質，可在此(3k + 1) × (3t)方格表最後一列的每個格子填上0，即可使原m × n方格表達成最佳策略行數，2m + r = 2m + (n − 2m) = n，亦即在m × n方格表共填入n個0 。因此，可推得 $M^1_{m\times n} = m\times n - n = (m-1)n$

此定理5-5的應用，如圖5-2-18，$M^1_{7\times29} = (7-1)\times29 = 174$

6. 定理5-6：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 > 2(3t + 2) 。

則$M^1_{m\times n} = m\times(n-1)$，且可推知其快速排法(如圖5-2-19 25 × 8方格表的快速排法)。

證明：

首先，從mxn 方格表上方開始，先分割出兩個(3k + 2) × (3k + 2)的正方形，並在此兩個正方形的各自其中一條對角線上的每個格子填上2 。

設 m − 2n = r，則 r = m − 2n

= (3k + 1) − 2(3t + 2)

= 3k + 1 − 6t − 4

= 3k − 6t − 3

= 3(k − 2t − 1)

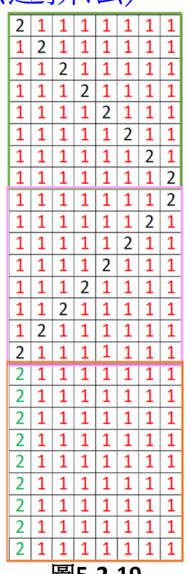


圖5-2-19 25 × 8方格表快速排法

根據m × n (m = 3k, n = 3t + 2) 的性質，可在此(3k) × (3t + 2)方格表第一行的每個格子填上2，即可使原m × n方格表，達成最佳策略行數，2n + r = 2n + (m − 2n) = m，亦即在m × n方格表共填入 m個2 。因此，可推得 $M^1_{m\times n} = m\times n - m = m\times(n-1)$

此定理5-6 的應用，如圖5-2-19，$M^1_{25\times8} = 25\times(8-1) = 175$

陸、研究結果

對於m × n方格表，我們推得填入最多 1 的方格數量之快速排法與計數公式如下：

一、對於1 × n方格表，快速排法為每格填上0，$M^1_{1\times n}$=0，

對於m × 1方格表，快速排法為每格填上0，$M^1_{m\times1}$=0。

二、當m > 1，n > 1時，對於2 × n方格表，快速排法為一半方格填1，一半方格填2，如圖5-2-5，$M^1_{2\times n}$= n，對於m × 2方格表，快速排法可以將表格旋轉90度，再用2 × n方格表的快速排法就可以達成，且$M^1_{m\times2}$= m 。

三、對於m × n (m ≥ 3，n ≥ 3)的方格表，可填入最多1的方格數量之快速排法與計數公式如下：

（一）定理5-1：在m × n的方格表中，(1)m = 3k，n = 3t，(t ≥ k)

(2)m = 3k，n = 3t + 1，(t ≥ k)

(3)m = 3k，n = 3t + 2，(t ≥ k)

則(1) $M^1_{3k\times3t} = m\times n$，快速排法為每格填上1。

(2)$M^1_{3k\times(3t+1)} = m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填上0，共填上m個0，而在其餘的每個格子填上1。

(3)$M^1_{3k\times(3t+2)} = m\times(n-1)$，快速排法為在每一列的最後一格填上2，共填上m個2，而在其餘的每個格子填上 1 。

（二）定理5-2：在m × n的方格表中，

(1)m = 3k + 1，n = 3t + 1 (t ≥ k)　(2)m = 3k + 2，n = 3t + 2 (t ≥ k)

則(1)$M^1_{(3k+1)\times(3t+1)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-11 7 × 16方格表的快速排法)

(2)$M^1_{(3k+2)\times(3t+2)} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-12 8 × 23方格表的快速排法)

（三）定理5-3：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 < 3t + 2 < 2(3k + 1)

則$M^1_{m\times n} = m\times n - \frac{(m+n)\times2}{3}$，且可推知其快速排法(如圖5-2-14 13 × 17方格表的快速排法)。

（四）定理5-4：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 = u(3k + 1)，u ≥ 1

則$M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-17 4 × 20方格表的快速排法)。

（五）定理5-5：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 > 2(3k + 1)

則$M^1_{m\times n} = (m-1)n$，且可推知其快速排法(如圖5-2-18 7 × 29方格表的快速排法)。

（六）定理5-6：在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 > 2(3t + 2) 。

則$M^1_{m\times n} = m\times(n-1)$，且可推知其快速排法(如圖5-2-19 25 × 8方格表的快速排法)。

柒、結論

本研究在探討m × n 方格表下，填入最多1的方格數量之計數公式及計數方法，我們藉由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、對於1 × n方格表，快速排法為每格填上0，$M^1_{1\times n}$=0，

對於m × 1方格表，快速排法為每格填上0，$M^1_{m\times1}$=0。

二、當m > 1，n > 1時，對於2 × n方格表，快速排法為一半方格填入1，一半方格填入2，如圖5-2-5，$M^1_{2\times n}$=n，對於m × 2方格表，快速排法可以將表格旋轉90度，再用2 × n方格表的快速排法就可以達成，且$M^1_{m\times2}$=m。

三、在探究原始問題4 × 5方格表填入最多1的方格數量方法上，我們採用行的最佳選擇、列的次佳選擇、行的次佳選擇、列的最佳選擇，推出在4x5方格表填入最多1的方格數量，且進一步推得最佳策略行數為$\frac{4n-2m}{3}$，而此最佳策略行數可應用於：

m × n方格表，m = 3k + 1, n = 3t + 2，且3k + 1 < 3t + 2 < 2(3k + 1)。

四、對於m × n (m ≥ 3，n ≥ 3)的方格表，分成下列六種類型，推導出可填入最多1的方格數量之快速排法與計數公式的六個定理，而下列六點是此六個定理的條件敘述。

（一）在m × n的方格表中，(1)m = 3k，n = 3t，(t ≥ k)

(2)m = 3k，n = 3t + 1，(t ≥ k)

(3)m = 3k，n = 3t + 2，(t ≥ k)。

（二）在m × n的方格表中，(1)m = 3k + 1，n = 3t + 1 (t ≥ k)

(2)m = 3k + 2，n = 3t + 2 (t ≥ k)

（三）在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 < 3t + 2 < 2(3k + 1)。

（四）在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 = u(3k + 1)，u ≥ 1。

（五）在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3t + 2 > 2(3k + 1)。

（六）在m × n的方格表中，m = 3k + 1，n = 3t + 2，3k + 1 > 2(3t + 2)。

捌、參考文獻資料

一、國民小學數學課本南一版第十一冊。

二、2022-2023國際中小學數學能力檢測小學中年級組中文試題第25題

玖、附錄

一、圖表繪製索引

第一指導教師：圖5-2-1、表5-2-3、表5-2-15

第一作者：表5-2-7、表5-2-8、表5-2-14、圖5-2-5、表5-2-19、表5-2-20、圖5-2-8、圖5-2-9、圖5-2-16

第二作者：圖2-1-1、圖2-2-1、圖5-2-10、圖5-2-12、圖5-2-13、圖5-2-14、圖5-2-18、圖5-2-19、

第三作者：表5-2-9、圖5-2-2、表5-2-10、表5-2-11、表5-2-12、表5-2-13、圖5-2-6、表5-2-21、表5-2-22

第四作者：圖2-3-1、圖5-2-3、表5-2-16、表5-2-17、表5-2-18、圖5-2-7、圖5-2-17

第五作者：表5-2-1、表5-2-2、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6、圖5-2-4、圖5-2-11、圖5-2-15