中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080402

正多邊形平行封閉鍊接結構之研究

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

(附設國小)

作者：	指導老師：
小六 吳佳瑾	歐志昌
小六 鄧岩滂	余尚芸

關鍵詞：鍊接、平行封閉結構、完全覆蓋矩形

得獎感言

圖形特徵與代數結合的冒險之旅

今年，帶著去年滿滿的收穫，加上前年豐富的經驗，很開心我的小夥伴和我抱著研究的熱忱與興趣，再一次啟動新的研究之旅。

一開始利用手作的正方形要不斷嘗試鍊接成平行封閉的結構，每每失敗又成功，成功了又不一定確定結構的正確性；一次又一次，突然靈光一現，可以從代數的觀點去表示圖形的特徵，排列後跟正方形的對角線相關，終於得到系統的方式，並利用「數學分類」—n值特性，推出了萬用的方程組。不只如此，從單項的正方形推廣到多變的正n邊形，是不同規則的重新定義與滿足條件要求的再變向思考，站在原有研究結果的反覆推敲，不同工具的使用讓我們再突破瓶頸！

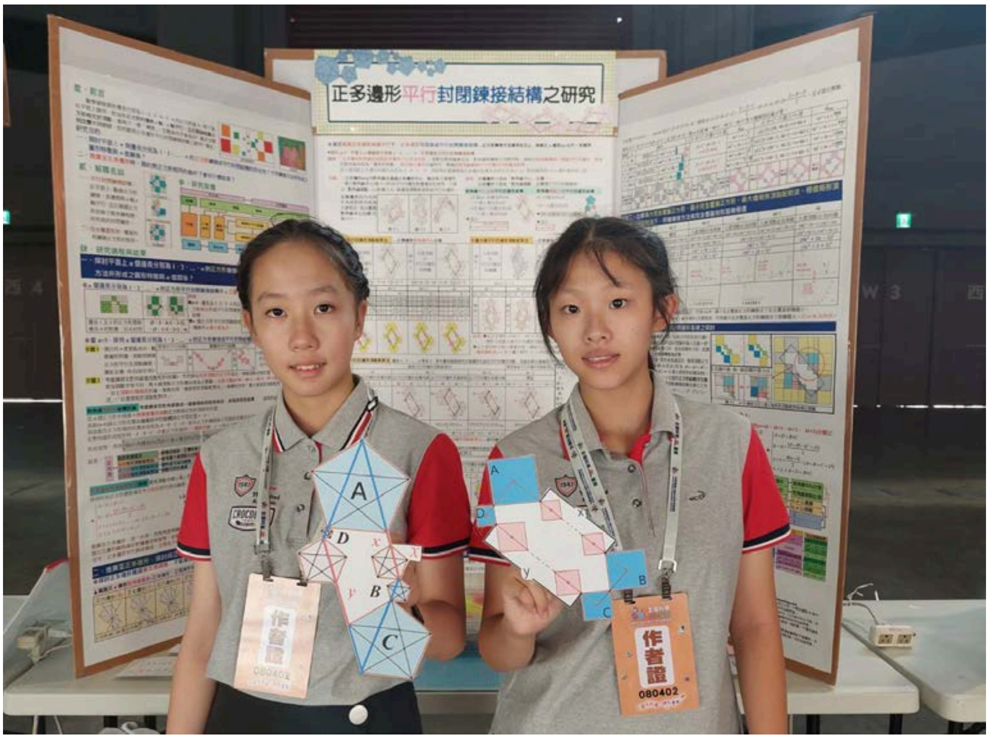
去年的研究體會到「羅素所說：『數學就是符號加邏輯。』」今年，我感受到「圖形特徵利用代數轉換表達」的神奇。從開始研究到比賽結束，不僅享受了突破困難那一刻的感動，更打敗了來作亂的凱米颱風及一直有陰影的線上評審，這要歸功於一直辛苦指導我們的小歐校長，及所有在現場、在線上、在火車上……為我們付出、陪伴我們的老師們，沒有這些老師，就沒有在研究路上衝破困境、得到漂亮結果的我們，感恩再感恩。(佳瑾)

「第一名- 080402」一聽到這句話，想起這段時間辛苦，都覺得甜甜的，心中的喜悅可謂是藏也藏不住。一開始因為營隊遊戲，而開啟研究，過程中遇到許多瓶頸，究竟要如何突破，才可以不用東拼西湊，而是有系統運算，每個環節的進展都讓人欣喜，從正方形推廣到正多邊形，推導出方程組，再進一步發展完全覆蓋正方形，還有內部封閉區域的面積，這個研究讓我看到幾何的美與多變，令人驚奇讚嘆！

完成作品後還有報告練習，又是另一番搏鬥，等到準備好要迎戰了，沒想到凱米來攪局，讓賽程延續整個暑假，之前線上夢魘再度浮現，報告改了好幾版，還是重整裝備繼續前行。這一路上的磕磕碰碰真的很不容易，但這可能就是參賽

的意義吧，每一次的比賽，都要告訴自己，得不得名不是關鍵，關鍵在於這次的比賽中收穫了什麼，得到了什麼，就像我們前年參賽全國線上評審名次也不怎麼好，也是後來經過一次一次的努力，一次一次的精進，終於克服障礙，再度獲得殊榮。

對我來說，每一位參賽者都是第一名，儘管颱風因素賽程異動，但是大家依舊很認真努力的練習，都值得讚許。最重要是感謝老師們的辛苦指導，因為老師不斷鼓勵，讓我們有動力大步邁向前，也才能有好成績。這次64屆科展，也為我們國小生涯的最後一戰，畫上完美的句點。(岩汸)



全國比賽合影

師生合影

作者合影

正多邊形平行封閉鍊接結構之研究

摘要

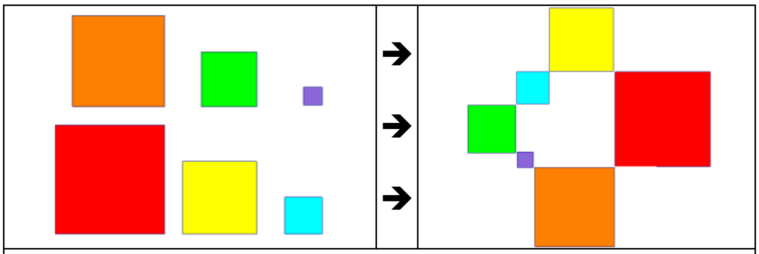
本研究探討 n 個邊長分別為 1、2、...、n 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性與方法，透過「**任意值矩形頂點配對法**」可成功鍊接；**任意數列的正方形組**也可成功，最快速的是「**最大值矩形頂點配對法**」。

推廣至**正多邊形**，正偶邊形透過「**對角線重合法**」，正奇邊形透過「**對角線重合法」搭配「對角線與邊重合法」，每邊可互相平行**；將 n 個正多邊形放置在對角線連線成的平行四邊形，利用 n **值特性**「$4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$」分類頂點位置，結合「**單向複雜形平行結構**」邊長和的差為 1 或 2，**可透過對角線「中心」或「端點」出發的「最大值平行四邊形頂點配對法」**鍊接。

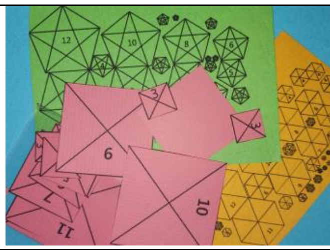
最後得到最大及最小完全覆蓋矩形鍊接法，並推得鍊接正方形內部封閉面積公式。

壹、前言

一次有趣的數學營隊活動，教授要我們將邊長分別為 1、2、3、4、5、6 的正方形各 1，剪下後在平面上排列，要求這些正方形的邊與 x 軸、y 軸平行，並且任兩個相鄰正方形相交在其頂點(如下圖)，也就是像珠子一樣「鍊接」，該要怎麼做才會成功?如果正方形數量更多會怎樣?這沒有想像中簡單，頗具挑戰性，於是嘗試自製道具直接操作(如下右圖)，及利用數學繪圖軟體輔助開始了一系列的研究，探討 n 個邊長分別為 1、2、...、n 的正方形鍊接成平行封閉結構的方法，甚至將正方形換成正多邊形，如何能成功排出正多邊形之平行封閉鍊接結構?



營隊遊戲圖示



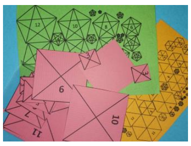
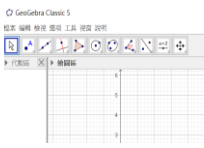
自製道具

根據以上，列出**研究問題**為：

一、探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、...、n 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性？不同鏈接方法所形成之圖形特徵與 n 值關係？

二、推廣至正多邊形時，探討與正方形相同的條件下會有什麼結果？

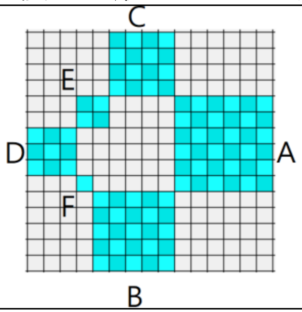
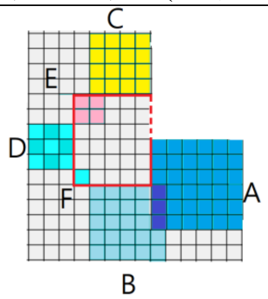
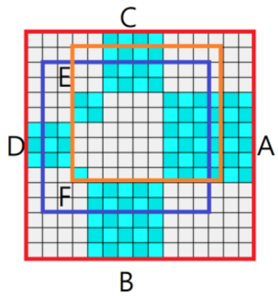
貳、研究設備、名詞解釋與研究架構

一、研究設備：自製道具、 、**burrtools**  、**GGB** 

二、名詞解釋

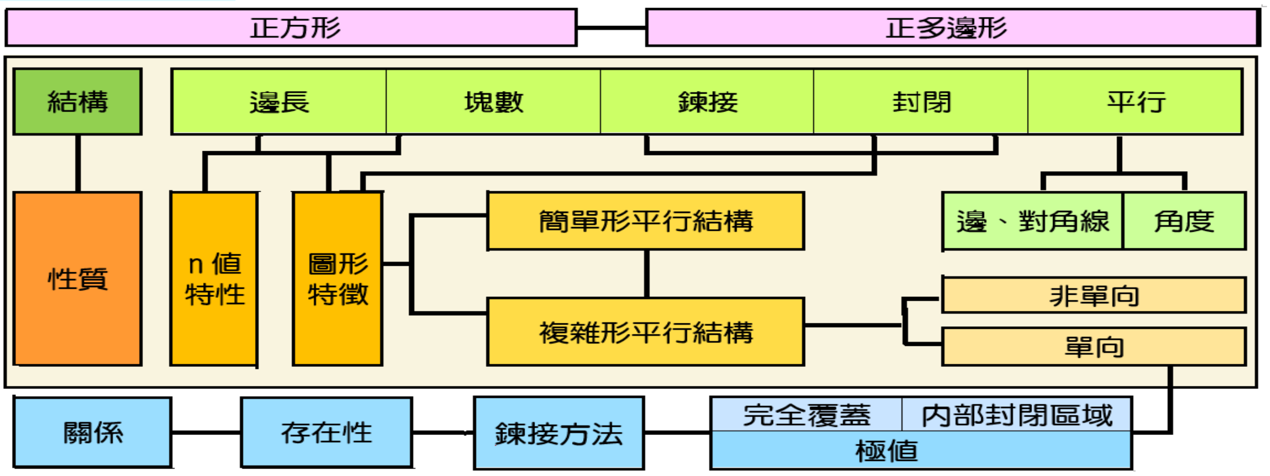
1.平行封閉鍊接結構：數個正方形在平面上鍊接，要求這些正方形的邊與 x 軸、y 軸平行，並且讓任兩個正方形都不相交或是只能在其頂點上碰到，如珠子般串鍊相接，此時所形成的封閉圖形，稱為「平行封閉鍊接結構」。

2.完全覆蓋矩形：能覆蓋所有鍊接正方形的矩形。(如下右圖)

		
平行封閉鍊接結構	**不滿足「平行封閉鍊接結構」**	**完全覆蓋矩形**
正方形 A 和 D、E、F 不相交，且和 B、C 只有頂點相碰，如珠子般串鍊相接。正方形 B 和 C、D、E 不相交且和 A、F 只有頂點相碰。以上 ABCDEF 正方形滿足「平行封閉鍊接結構」。	C 和 E「相交」在一邊； A 和 B「重疊」在深藍色正方形，以上兩者皆不滿足「鍊接」條件。且 ABCDEF 圍起來的圖形非封閉(紅色虛線處)。	如紅色框住所有鍊接正方形的矩形，紅色框圖形為「完全覆蓋矩形」。而藍色、橘色框的矩形無法完全覆蓋所有鍊接正方形。

3.正偶/奇邊形：為方便描述，本研究中偶/奇數邊的正 n 邊形簡稱為「正偶/奇邊形」。

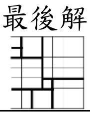
三、研究架構



參、研究過程與結果

文獻探討對本研究的啟發

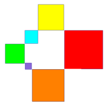
在全國中小學歷屆科展查找以**正方形拼成「平行封閉鍊接結構」**的相關文獻，發現並無相關之研究內容，而以**矩形、正方形、不同圖形拼接組合**的研究很多，雖然沒有完全切合的資料，但其中有幾篇啟發我們一些想法與做法，將其中啟發與本研究差異羅列如下：

序	文獻名稱	與本研究內容**相關的摘要**	對本研究的**啟發與差異處**
1	完美正方形 (45 屆國中組)	探討長為質數的完美正方形為始，將正方形分割成兩個連續整數邊長的正方形，最後解出邊長 1 至 100 中全部有解的正方形。	**1.啟發**：將不同邊長的正方形配對成高度差組合，再進行左右圖形排列 **2.差異**：探討固定數量及邊長的正方形條件下，大正方形下切割小正方形的解。 本研究主要是 n 個正方形的平行封閉鍊接結構。

2	大方塊中的小方塊 (53 屆國小組)	重複利用「簡單二倍法」及「重疊二倍法」，可每次加 2 階或 3 階的方式增加，反覆構作可切割邊長 120 以內的正方形。	**1.啟發**：將不同邊長的正方形進行分類，探討大小正方之間邊長與圖形鍊接與封閉結構的關係。 **2.差異**：該研究探討如何以最小個數切割正方形；本研究主要是 n 個正方形的平行封閉鍊接結構。
3	虧格與方陣的最後一塊拼圖 (53 屆國中組)	以虧格填滿長方形劃掉二格為主，最後在虧格的條件下，拼圖的封閉結構與大圖形間的關係。	**1.啟發**：將不同邊長的正方形進行分類，探討大小正方之間邊長與圖形鍊接與封閉結構的關係。 **2.差異**：在「虧格」條件下，探討小塊拼圖填滿大圖形間關係，本研究為探討正方形平行封閉鍊接結構。
4	解構與運會徽探討平面鑲嵌 (62 屆國中組)	利用組成矩形的三種元件，探討平面鑲嵌。	**1.啟發**：利用**圖形角度特性**及**邊長對應於對角線**的關係，分析本研究中的圖形特徵與鍊接結構的關係。 **2.差異**：以「**平行**」搭配「**鍊接**」、「**封閉**」等多個條件剖析在何情況下構成成功排列。

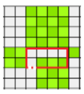
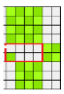
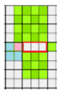
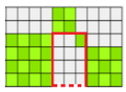
研究一、探討平面上 *n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性？不同鏈接方法所形成之圖形特徵與 *n* 值關係？

好奇：除了營隊中 1、2、3、4、5、6 等 6 個正方形可形成平行封閉鍊接結構，更少數量的正方形可以成功鍊接嗎?



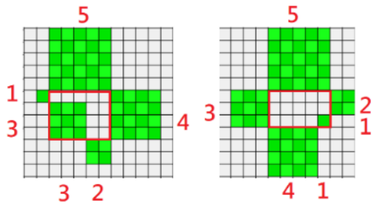
研究一(一)、滿足平面上 *n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形平行封閉鍊接結構 *n* 之最小值為何?

∵要圍成矩形最少 4 個邊，∴嘗試將邊長為 1、2、3、4 的正方形進行放置(如圖)，

			
雖鍊接但未封閉	雖鍊接但未封閉	雖封閉但形成相交	邊長 1 及 3 的正方形需與邊長 4 的對應，但未封閉

發現：當 n=4，即邊長為 1、2、3、4 的正方形必**無法**形成平行封閉鍊接結構。

說明：∵要圍成矩形最少 4 個邊，∴必須每邊都有 1 個邊長不同的正方形，∴$n≥4$，
∵邊長 1 及 3 的正方形需與邊長 4 的對應，
∴僅剩 1 個邊長 2 的正方形，無法組成兩邊，∴$n≠4$

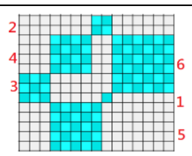
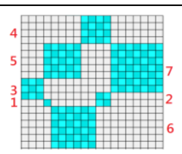
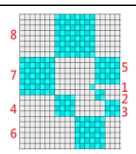
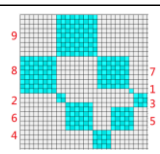
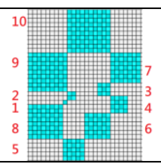


結果：***n* 個正方形平行封閉鍊接結構中 *n* 之最小值為 5。**
此時，利用 5 的對邊可能為 2、3 或 1、4，
若為 3、2，可得另兩邊為 1、4；
若為 1、4，可得另兩邊為 2、3，便可求出解(如右兩個圖)。
∴僅(5，1+3，3+2，2)、(5，3，4+1，1+2)等 2 組可形成平行封閉鍊接結構。

接續，如果 *n* 是大於 5 的正整數，是否也可形成平行封閉鍊接結構?

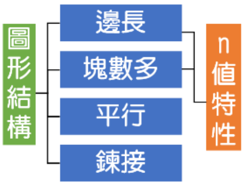
研究一(二)、當 $n \geq 6$，探討平面上 *n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形平行封閉鍊接結構之存在性

本研究利用方格紙自製遊戲道具，搭配 burrtools-0.6.3-win32 進行操作，以邊長為 1、2、3、…、*n*，*n*=6、7、8、9、10、…的正方形去排平行封閉鍊接結構，如下:

n	6	7	8	9	10	…
鍊接結構						…

結果：以邊長為 1、2、、…、n 正方形進行平行封閉鍊接結構的排列，n=6、7、8、9、10 時是可以成功的。(其餘詳見研究紀錄本)

好奇：若同時考慮「塊數、邊長、平行」，還要考慮「鍊接」，「n 值特性」及「圖形結構」交織成更複雜且困難的情況(如右圖)，有沒有什麼方法是不管 n 值多大，都可以確定成功?

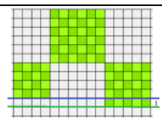
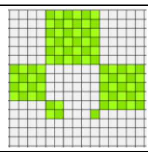
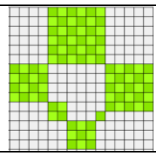


經過嘗試得到幾種鍊接方法如下，並進一步討論這些鍊接方法與 n 值特性、圖形特徵的關係。首先，從鍊接後「外圍」長度間的關係去看。

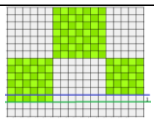
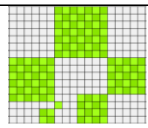
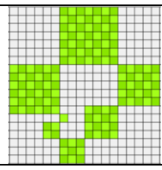
研究一(三)、以「高度差左右鍊接法」探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形平行封閉鍊接結構與 n 值特性、圖形特徵之關係

高度差左右鍊接法做法如下：

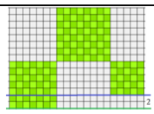
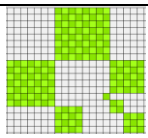
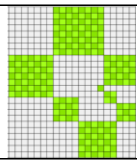
1.當 n=6，即以邊長為 1、2、3、4、5、6 的正方形去排平行封閉鍊接結構

步驟	1---先放置最大正方形為一邊	2	3
過程	先以 6 為其中一邊，再挑選 5、4 作為兩邊， 觀察高度差為 1，∴從中邊長 1、2、3 的正方形抽出 1 個，設抽 3，剩 1、2，其和為 3，-1 後可被 2 整除	分組:4 那邊分 2， 5 那邊分 1， 進行鍊接	最後填入 3， 剛好符合， 便可得 1 組解
圖形呈現			

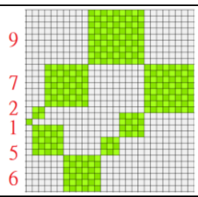
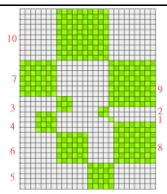
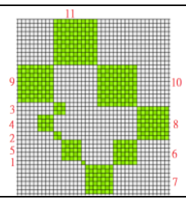
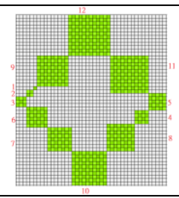
2.當 n=7

步驟	1---先放置最大正方形為一邊	2	3
過程	先以 7 為其中一邊 再挑選 6、5 作為兩邊，高度差為 1 剩 1、2、3、4，拿走 4 後減 1 為 5，為奇數，∴不合	拿 3 後減 1 為 6，為偶數， 和分成兩組為 4 與 2、1 (差 1) 再進行鍊接	最後填入 3， 剛好符合， 便可得 1 組解
圖形呈現			

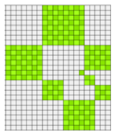
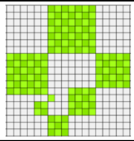
3. n=8，發現無法利用 n=6、7 的方法，即無法使左右兩邊各只用 1 個邊長差為 1 的正方形

步驟	1---先放置最大正方形為一邊	2	3
過程	先將最大正方形 8 置於上方， 並於左右兩邊放置較大者 (不一定要次大及次次大) 假設兩邊為 5、7，高度差為 2，	剩邊長為 1、2、3、4、6 正， 拿走 6 後減 2， 總和為 8，為偶數，合， 分成兩組分別為 4 與 3、2、1(差 2)	最後填入 6， 剛好符合， 便可得 1 組解
圖形呈現			

4. n=9 及 n=10，發現分別可以用 n=7 及 n=8 的方法，同理可以完成 n=9、10、...的鍊接如下：

正方形	1、2、…、9	1、2、…、9、10	1、2、…、10、11	1、2、…、11、12
圖形呈現				

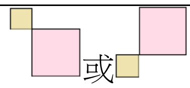
發現:將正方形 1、2、3、…..、 n 排成平行封閉鍊接結構，則步驟如下：

步驟	做法	當 $n=2k+1$ ($k\geq 3$ 的正整數)	當 $n=2k$ ($k\geq 4$ 的正整數)
1	將邊長最大($2k+1$)或 $2k$ 的正方形，置於其中一邊(上方)		
2	於左右兩邊放置邊長較大的正方形 a 、b，此兩正方形邊長差為 d，滿足右式	$d=\lvert a-b\rvert=1$	$d=\lvert a-b\rvert>1$
3	將剩餘的正方形 1、2、…共 t 個取 1 個出來(設正方形邊長為 c)	$t=2k-2$	$t=2k-3$
4	將剩餘的正方形總和減去左右正方形邊長差 d 並除以 2(令為 s)	$s=\dfrac{1+2+\ldots+2k-a-b-c-d}{2}=\dfrac{2k(1+2k)\div 2-a-b-c-d}{2}$	$s=\dfrac{1+2+\ldots+(2k-1)-a-b-c-d}{2}=\dfrac{2k(2k-1)\div 2-a-b-c-d}{2}$
5	若 s 為整數，則將兩邊鍊接，直到符合條件，完成為止。若 s 非整數，需重新挑選底邊正方形，直到符合條件，完成為止。		

困難：由上發現已有方法可鍊接，但困難的是到步驟 5 即便 s 是整數值，也要反覆「嘗試錯誤」，才能確定排法。是否還有更好的方式可直接確定滿足鍊接條件?

突破 1：觀察研究一(一)圖形結構—要符合鍊接且邊平行條件，
影響結構的關鍵就是兩兩正方形鍊接時，對角線連成一直線，為方便進行定義與命名。

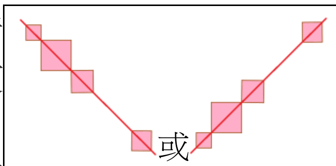
1.簡單形平行結構：只 **2** 個正方形頂點連接，且 4 邊分別互相平行，稱為簡單形平行結構。



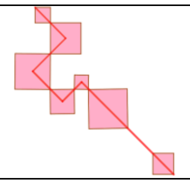
簡單形平行結構

2.複雜形平行結構：多個正方形兩兩相鄰間具單一個頂點連接，且 4 邊分別互相平行，由簡單形平行結構連續鍊接而成，稱為複雜形平行結構，可分成 2 種。

2-1 單向複雜形平行結構：圖形對角線為單一方向直線，如右圖



單向複雜形平行結構



非單向複雜形平行結構

2-2 非單向複雜形平行結構：圖形對角線不只單一方向直線，如上頁右。

∵非單向複雜形形成平行鍊接結構雖連續且可能存在，但在鍊接時**∵非單向時方向會轉來轉去，無法確定正方形組的數值**，此時**無法由 n 值來保證確定此鍊接都可存在，且形成穩定控制可鍊接形式**；故下面鍊接方法**均以「單向複雜形平行結構」為主進行討論**。

突破 2：考慮正方形組對角線連成一個像矩形的形狀，如果能夠先把矩形頂點的正方形固定下來，再排中間，較不會亂無章法；而 1、2、3、…..、n 每個數字皆不同，根據 p.2 文獻 2、3，嘗試將 4 個頂點正方形邊長轉換成正整數討論，依數值特性分成 4 類即 n=4k、4k +1、4k+2、4k+3 去排排看，加上一般數學方法會從極端值(最大或最小)去討論，因而發展得到「極值矩形頂點配對法」

研究一(四)、以「極值矩形頂點配對法」探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形平行封閉鍊接結構與 n 值特性、圖形特徵之關係

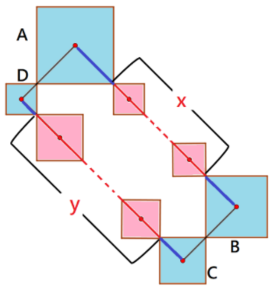
對角線斜矩形結構討論

考慮正方形組對角線連成一個像傾斜的矩形形狀，命為斜矩形(如下頁右圖)。

將邊長 1、2、3、…、n 共 n 個正方形中邊長**極端值的正方形**先排在矩形頂點的位置，其餘剩下的正方形可依**複雜形平行結構**排在中間的位置 x、y(其中 $y>x$)。

假設 A、B、C、D 等藍色正方形提供的邊長長度為 A、B、C、D，

x、y 等粉色正方形組鍊接後提供的邊長長度和各為 x、y，如右圖



A、B、C、D 藍色正方形在對角線形成矩形，分別提供**矩形長 $\frac{1}{2}$ 條對角線**，

而 x、y 等粉色正方形組在對角線形成矩形時，分別提供**矩形長 1 條對角線**，

由矩形對邊的長相等，

得到 $\frac{1}{2}$ 條(A+B)對角線+1 條 x 對角線 = $\frac{1}{2}$ 條(C+D)對角線+1 條 y 對角線

相當 $\frac{1}{2}$ 條(A+B)邊長的$\sqrt{2}$倍+1 條 x 邊長的$\sqrt{2}$倍 = $\frac{1}{2}$ 條(C+D)邊長的$\sqrt{2}$倍+1 條 y 邊長的$\sqrt{2}$倍

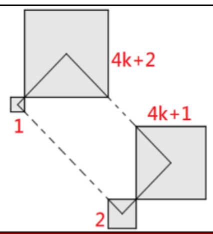
➔ $\frac{1}{2}$ 條(A+B)邊長+1 條 x 邊長 = $\frac{1}{2}$ 條(C+D)邊+1 條 y 邊長 ➔ $y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2}$

故後續研究為了讓對角線排成矩形的長相等，就要滿足式子：$y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2}$

此時正方形可依數字特性，分成 $4k$、$4k$+1、$4k$+2、$4k$+3 討論：

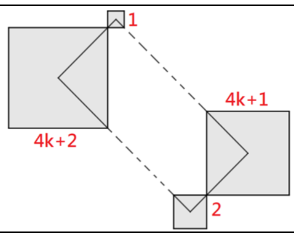
情形 1_n=$4k$+2　將 4 個頂點設為 1、n、2、n -1，即 1、$4k$+2、2、$4k$+1 如下圖

情形 1_❶大值頂點在斜矩形長同側



或

情形 1_❷大值頂點在斜矩形長異側



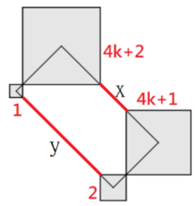
情形 1_❶大值頂點在斜矩形長同側

配對邊長【$4k$+2、1】與【$4k$+1、2】正方形，將【$4k$+2】與【$4k$+1】正方形擺同側，不成立。

【說明】由右圖可知頂點 2 組正方形邊長會差 $\dfrac{(4k+2+4k+1)\text{-}(1+2)}{2}$=$4k$，即 y-x=$4k$，

又 y+x 為剩下所有的正方形邊長和，得到

$\begin{cases} y-x=4k \\ y+x=3+4+\ldots+4k=8k^2+2k-3 \end{cases}$，解得 $2y=8k^2+6k-3$(奇數，不合)，無法成立。



情形 1_❷大值頂點在斜矩形長異側

配對邊長【$4k$+2、1】與【$4k$+1、2】正方形，將【$4k$+2】與【$4k$+1】正方形擺異側。

配出 x、y 的位置 2 個正方形組邊長和分別為 $4k^2$+k-2 與 $4k^2$+k-1 單向複雜形平行結構。

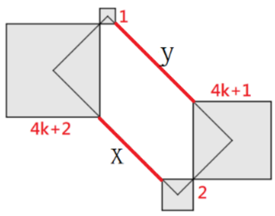
也就是將剩下的 n-4 個正方形邊長分別為 3、4、…、n -3、n -2 分成兩組長度相等的組，且兩組總和相差 1，為(3, n -2,5, n -6,……)，(4,n-3,6, n -7,……)分別各有 $\dfrac{4k+2-4}{2}=2k-1$個正方形擺入 x、y 位置。

【說明】邊長為【$4k$+2】與【$4k$+1】正方形擺至異側，

發現 2 組正方形會差 $\dfrac{(4k+2+2)-(4k+1+1)}{2}$=1，即 y-x=1，

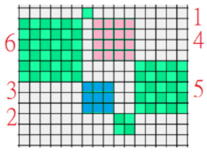
又 x+y 為剩下所有的正方形邊長和，得到

$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=3+4+\ldots+4k=8k^2+2k-3 \end{cases}$，得 x=$4k^2$+k-2，y=$4k^2$+k-1

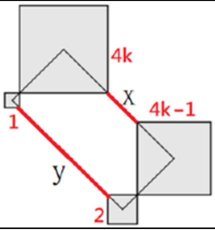
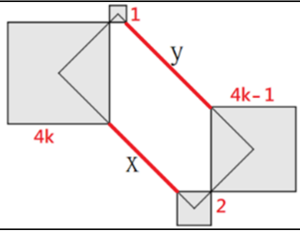


例：n=6，此時 2 組正方形會差 $\frac{(6+2)-(1+5)}{2}=1$，

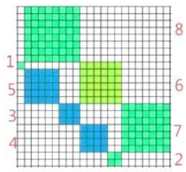
依上面方法配出 1 組和為 3(4×1^2+1-2=3)，及另 1 組和為 4(=4×1^2+1-1=4)的正方形，將【邊長為 3】與【邊長 4】的正方形擺入 x、y 處。



情形 2_n=4k　將 4 個頂點設為 1、n、2、n-1，即 1、4k、2、4k-1 如下圖

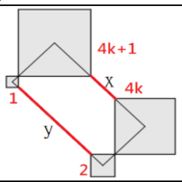
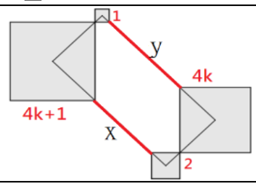
情形 2_❶大值頂點在斜矩形長同側		情形 2_❶大值頂點在斜矩形長異側
	或	
配對邊長【4k、1】與【4k-1、2】正方形，將【4k】與【4k-1】正方形擺同側。配出 2 個正方形組邊長和 x、y 為(4k^2-5k)與(4k^2-k-2)。		配對邊長【4k、1】與【4k-1、2】正方形，將【4k】與【4k-1】正方形擺異側，不成立。
【說明】由上圖可知頂點 2 組正方形差 $\frac{(4k+4k-1)-(1+2)}{2}=4k-2$，即 y-x=4k-2，又 x+y 為剩下所有的正方形邊長和，得到 $\begin{cases} y-x=4k-2 \\ y+x=3+4+...+4k-2=8k^2-6k-2 \end{cases}$，解得 x=4k^2-5k，y=4k^2-k-2		【說明】由上圖可知頂點 2 組正方形差 $\frac{(2+4k)-(1+4k-1)}{2}=1$，$y$-$x$=1，又 x+y 為剩下所有的正方形邊長和，得到 $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=3+4+...+4k-2=8k^2-6k-2 \end{cases}$，得 2$y$=8$k^2-6k$-1(為奇數，不合)，不成立

例：n=8，將大值頂點 8、7 放在斜矩形長同側，此時，2 組正方形會差 $\frac{(8+7)-(1+2)}{2}=6$，依上面方法配出 1 組和為 6(=4×2^2-5×2=6)，及另 1 組和為 12(=4×2^2-2-2=12)的正方形將【邊長 6】與【邊長 3、4、5】的正方形。

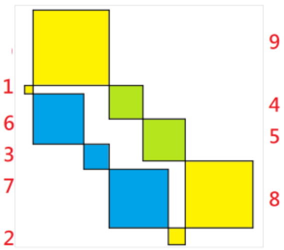


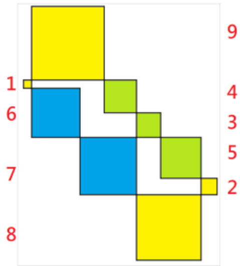
情形 2_❷大值頂點在斜矩形長異側

情形 3_n= 4k+1　將 4 個頂點設為 1、n、2、n-1，即 1、4k+1、2、4k 如下圖

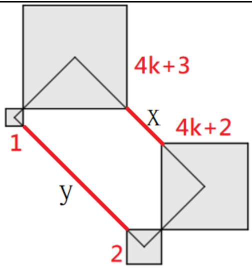
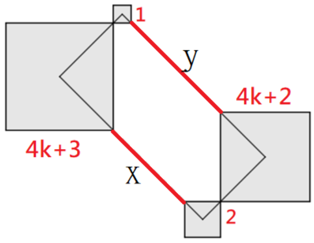
情形 3_❶大值頂點在長同側	情形 3_❷大值頂點在長異側
	
配對邊長【4k+1、1】與【4k、2】正方形，將【4k+1】與【4k】正方形擺同側。x、y 位置擺入邊長和為(4k^2-3k-1)與(4k^2+k-2)單向複雜形平行結構正方形組。	配對邊長【4k+1、1】與【4k、2】正方形，將【4k+1】與【4k】正方形擺異側。x、y 位置擺入邊長和為(4k^2-3k-2)與(4k^2-k-1)單向複雜形平行結構正方形組。
【說明】由圖可知頂點 2 組正方形會差 $\frac{(4k+1+4k)-(1+2)}{2}=4k-1$，即 y-x=4k-1，又 x+y 為剩下所有正方形邊長和，得 $\begin{cases} y-x=4k-1 \\ y+x=3+4+...+(4k-1)=8k^2-2k-3 \end{cases}$ 解得 2y=8k^2+2k-4，y=4k^2+k-2，x=4k^2-3k-1	【說明】由圖可知頂點 2 組正方形會差 $\frac{(4k+1+2)-(1+4k)}{2}=1$，即 y-x=1，又 x+y 為剩下所有正方形邊長和，得 $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=3+4+...+(4k-1)=8k^2-2k-3 \end{cases}$ 解得 2y=8k^2-2k-2，y=4k^2-k-1，x=4k^2-3k-2

例: n=9



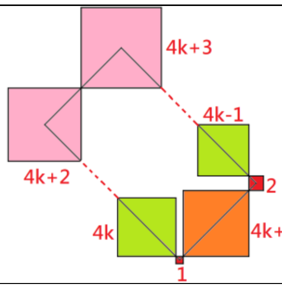
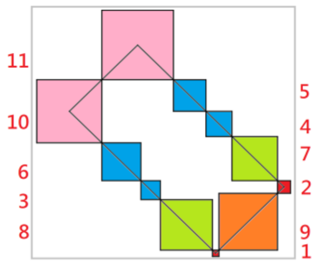


情形 4_n=4k+3 將 4 個頂點設為 1、n、2、n -1，即 1、4k+3、2、4k+2 如下圖

情形 4_❶大值頂點在長同側	情形 4_❷大值頂點在長異側
	
配對邊長【4k+3、1】與【4k+2、2】正方形，將【4k+3】與【4k+2】正方形擺同側，不成立	配對邊長【4k+3、1】與【4k+2、2】正方形，將【4k+3】與【4k+2】正方形擺異側，不成立
【說明】由圖可知頂點 2 組正方形會差 $\dfrac{(4k+3+4k+2)-(1+2)}{2}=4k+1$，即 y-x=4k+1	【說明】由圖可知頂點 2 組正方形會差 $\dfrac{(4k+3+2)-(1+4k+2)}{2}=1$，即 y-x=1，
又 x+y 為剩下所有正方形邊長和，得 $\begin{cases} y-x=4k+1 \\ y+x=3+4+...+(4k+1)=8k^2+6k-2 \end{cases}$ 得 2y=8k^2+10k-1(恆為奇數，不合)，不成立	又 x+y 為剩下所有正方形邊長和，得 $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=3+4+...+(4k+1)=8k^2+6k-2 \end{cases}$ 得 2y=8k^2+6k-1(恆為奇數，不合)，不成立。

困難：沒想到 n=4k+3 無法用原本的「極值矩形頂點配對法」！

突破：進一步挪動部分正方形成為「變型極值矩形頂點配對法」，仍然以 1、2、4k +2、4k +3 鍊接發現終於可以成立，形式如下:

一般化型式	舉例
	

由圖可知頂點 2 組正方形會差 $\dfrac{(4k+3+2)-(1+4k+2)}{2}=1$，即 y-x=1

又 x+y 為剩下所有正方形邊長和，得

$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=3+4+...+4k=8k^2+2k-3 \end{cases}$，解得 2$y$=8$k^2$+2$k$-2，$y$=4$k^2$+k-1，$x$=4$k^2$+$k$-2。

發現:將邊長為【4k+3、4k+2】與【2、4k+1、1】正方形分別配對，可配出 2 組正方形邊長和為(4k^2+k-1)與(4k^2+k-2)】單向複雜形平行結構，分別擺入頂點間 x、y 中。

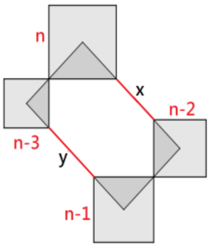
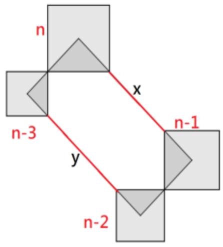
困難：從上發現「極值矩形頂點配對法」無法直接適用在 $n=4k+3$ 時。雖然 $n=4k+3$ 可以透過部分點挪動，達成可以鍊接的一般化狀況，但是否還有更好的方式來滿足條件?

突破：發現頂點配對還是可行，可能因頂點放置的正方形是 1、2 時值較小，限制了圖形擺放，若將頂點換成 4 個最大值正方形(將此方法命為最大值矩形頂點配對法)會怎樣?

研究一(五)、以「最大值矩形頂點配對法」探討正方形平行封閉鍊接結構與 n 值特性、圖形特徵之關係

考慮正方形組排成一個像「**斜矩形**」的形狀，與 p.7 同理。

將邊長 1、2、…、n 共 n 個正方形中邊長**最大的 4 個**正方形先排在矩形頂點位置，並符合寬長度相等，頂點中間 x 和 y 排入正方形(其中 $y>x$)，依逆時針順序有 2 種情況，如下：

情形	1		2	
順序	$[(n，n\text{-}3)，y，(n\text{-}1，n\text{-}2)，x]$		$[(n，n\text{-}3)，y，(n\text{-}2，n\text{-}1)，x]$	
圖示		邊長的差 $y\text{-}x$ $\dfrac{(n+n-2)-(n-3+n-1)}{2}=1$		邊長的差 $y\text{-}x$ $\dfrac{(n+n-1)-(n-3+n-2)}{2}=2$

主要就是要做到單向複雜形平行結構，且 2 個正方形組邊長和的差 $y\text{-}x$ 分別等於 1 或 2。

提供 1 個作法如下：

步驟 1 先放好 4 個最大正方形在頂點位置，剩餘正方形依數字特性，分成 $n=4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 等 4 種情形討論 x、y 中正方形分組；

步驟 2 每次讓兩兩分別填入 x、y 位置平均都用到 4 個正方形；

步驟 3 較大的正方形組配成多組 $y\text{-}x=0$；

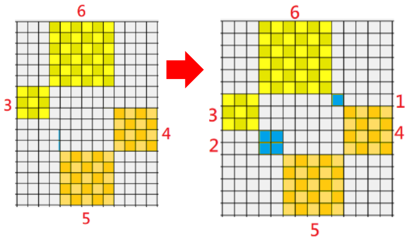
步驟 4 剩下最小的正方形組依 n 值分類會形成 $y\text{-}x=1$ 或 2，得到正方形組配對如下表格：

n		$4k$					$4k+1$					$4k+2$					$4k+3$				
剩餘正方形		1、2、……、n-4					1、2、……、n-4					1、2、……、n-4					1、2、……、n-4				
		1、2、……、$4k$-4					1、2、……、$4k$-3					1、2、……、$4k$-2					1、2、……、$4k$-1				
分組	x	3	8	…	n-8	n-4	0	5	…	n-8	n-4	1	6	…	n-8	n-4	2	7	…	n-8	n-4
		1	5	…	n-11	n-7	0	2	…	n-11	n-7	0	3	…	n-11	n-7	0	4	…	n-11	n-7
	y	4	7	…	n-9	n-5	1	4	…	n-9	n-5	2	5	…	n-9	n-5	3	6	…	n-9	n-5
		2	6	…	n-10	n-6	0	3	…	n-10	n-6	0	4	…	n-10	n-6	1	5	…	n-10	n-6
$y\text{-}x$		2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0
		↓					↓					↓					↓				
頂點		情形 2					情形 1					情形 1					情形 2				

發現:❶當 $n=4k+1$ 及 $4k+2$ 時可用情形 1 的最大值矩形頂點配對法；此時$(x,y)=(4k^2\text{-}5k+1，4k^2\text{-}5k+2)$及$(4k^2\text{-}3k，4k^2\text{-}3k+1)$

❷當 $n=4k$ 及 $4k+3$ 時可用情形 2 的最大值矩形頂點配對法；方法如上表格。此時$(x,y)=(4k^2\text{-}7k+2，4k^2\text{-}7k+4)$及$(4k^2\text{-}k\text{-}1，4k^2\text{-}k+1)$

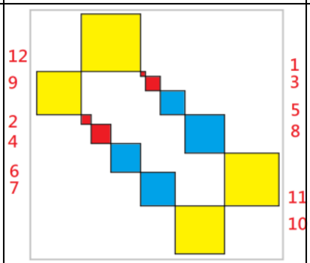
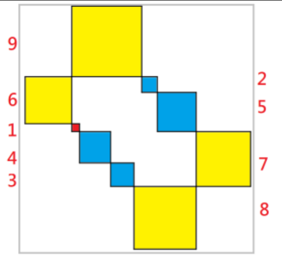
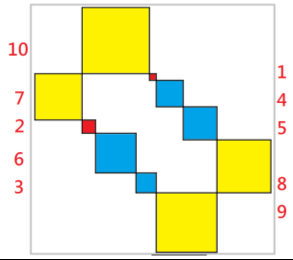
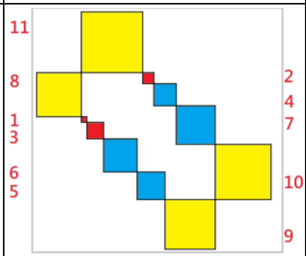
❸上面表格不是唯一鍊接方式，只要讓情形 1—$n=4k+1$ 及 $4k+2$、情形 2—$n=4k$ 及 $4k+3$ 分別滿足中間的單向複雜形平行結構邊長總和差 $y\text{-}x$ 為 1、2 即可，x、y 中的單向複雜形平行結構正方形鍊接順序在 x、y 位置中可以交換。



作法以 n=6 示例如下:

此時正方形邊長分別是 1、2、3、4、5、6，
由最大 6 往下數 4 個數字，配成 2 組等和數字(6，3)，(5，4)，
正方形兩組大的數字相對擺置，最後 4 與 3 旁邊分別放置 1 與 2，
利用 6 的對應邊 1、2、3，可得另兩邊為 4、5，便可求出解。

例:當 n=12、11、10、9 利用**最大值矩形頂點配對法**鍊接結構如下：

頂點	情形 2	情形 1	情形 1	情形 2
n	12	9	10	11
圖示				
y-x	$\frac{(12+10)-(8+9)}{2}=(2+4)-(1+3)=2$	$\frac{(9+7)-(8+6)}{2}=1$	$\frac{(8+10)-(7+9)}{2}=2-1=1$	$\frac{(11+10)-(8+9)}{2}=(1+3)-2=2$
鍊接結構	[12，9，(2,3,6,7)，10，11，(8,5,3,1)]	[9，6，(1,4,3)，8，7，(5,2)]	[10，7，(2,6,3)，9，8，(5,4,1)]	[11，8，(1,3,6,5)，9，10，(7,4,2)]
(承上頁)	其中(2,3,6,7)中正方形可以交換位置，(8,5,3,1)中正方形可交換位置；6，7 可和 8，5 交換位置	其中(1,4,3)中正方形可以交換位置，(5,2)中正方形可交換位置；5，2 可和 4，3 交換位置	其中(2,6,3)中正方形可以交換位置，(5,4,1)中正方形可交換位置；6，3 可和 5，4 交換位置	其中(1,3,6,5)中正方形可以交換位置，(7,4,2)中正方形可交換位置；6，5 可和 4，7 交換位置

延伸說明：簡單說，在頂點 4 個位置的正方形固定後，頂點間 x、y 正方形只要滿足 y-x=1 或 2，且 $x+y=\frac{(n-4)(n-4+1)}{2}$，則頂點間 x、y 排列方法有很多種。

例：以 n=10 最大值矩形頂點配對法為例，頂點間 x、y 長度滿足$(x,y)=(4k^2-3k，4k^2-3k+1)$，$k$=2 代入得$(x,y)$=(10、11)，此時選取正方形為 1、2、....6 分配給 x=10、y=11，則排列方法有 48+36+36+36+48 種。其餘 n 值的正方形排列計算方法同理。

	x=10	y=11	排列	排列方法
正方形組	6、4	5、3、2、1	∵6、4 可交換；5、3、2、1 可交換	→ $2!\times4!=48$
	6、3、1	5、4、2	∵6、3、1 可交換；5、4、2 可交換	→ $3!\times3!=36$
	5、4、1	6、3、2	∵5、4、1 可交換；6、3、2 可交換	→ $3!\times3!=36$
	5、3、2	6、4、1	∵5、3、2 可交換；5、3、2 可交換	→ $3!\times3!=36$
	4、3、2、1	6、5	∵4、3、2、1 可交換；6、5 可交換	→ $4!\times2!=48$

突破：從上可知「最大值矩形頂點配對法」中 x、y 正方形組長度差的值是 1 或 2，這個長度差的值，是否有可能為其他值?發現造成值為 1 或 2 的原因是頂點正方形的邊長，若將頂點換成其他大小的正方形都可行嗎?(將此方法命為任意值矩形頂點配對法)

研究一(六)、以「任意值矩形頂點配對法」探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、...、n 的正方形平行封閉鍊接結構與 n 值特性、圖形特徵之關係

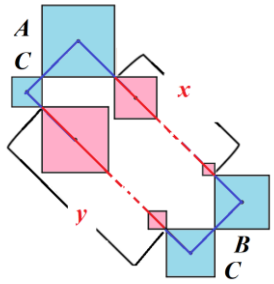
邊長和的差 x-y 是否可能為任意值

考慮正方形組形成一個像「**斜矩形**」的形狀，與 p.7 同理。

選取邊長 1、2、3、...、n-1、n 共 n 個正方形中邊長任意 4 個正方形先排在矩形頂點位置，令為 A、B、C、D ($A>B>C>D$)，發現只要符合 A、B、C、D 兩兩相配，對角線長度和對應相等；頂點中間 x 和 y 的正方形組要做到單向複雜形平行結構，排入除 A、B、C、D 正方形(其中 $y>x$) 配成寬長度相等之鍊接；及長的長度相等之鍊接($\frac{1}{2}(A+B)+x=\frac{1}{2}(C+D)+y$)

$$\Rightarrow y-x=\frac{(A+B)-(C+D)}{2}$$

∵要避免頂點中間 x 和 y 位置的正方形(可能會有較大的正方形)重疊或未相交於頂點；考慮以上，得到所有正方形應該滿足下列式子即可成功鍊接：

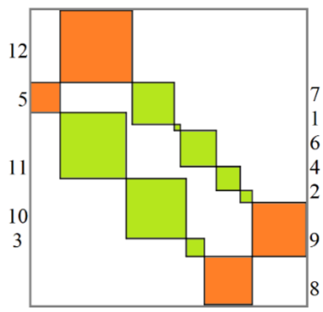


$$★\begin{cases} A+C=B+D \\ y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2} \\ y+x=1+2+......+n-(A+B+C+D)=\dfrac{n(n+1)}{2}-(A+B+C+D) \\ x_i+y_i\le A+C=B+D \end{cases}$$

其中 x_i、y_i 為 x、y 中兩個較相鄰的正方形邊長，滿足解完 y-x 及 y+x 聯立解須為正整數(可搭配前述結果搭配 n 值 $4k$、$4k$+1、$4k$+2、$4k$+3 分類需要滿足大值在同側、異側的情況)，此時在上述條件下，邊長差 y-x 可為任意小於 $2n$-4 [=(n+n-1)-(1+2)]的正整數。

例如：n=12，取頂點為 12、9、8、5，滿足上述條件處理式子如下

$$\begin{cases} A+C=B+D=12+5=9+8 \\ y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2}=\dfrac{(12+9)-(8+5)}{2}=4 \\ y+x=1+2+......+12-(12+9+8+5)=\dfrac{12(12+1)}{2}-(12+9+8+5)=44 \\ |x_i-y_i|\le A+C=B+D=17 \end{cases}$$



當頂點正方形大值頂點 12、9，解出 x=20，y=24，
右圖為其中一種鍊接結構解，x=20=1+2+4+6+7，y=24=11+10+3。

先前研究一(四)極值矩形頂點配對法不成立狀況的調整

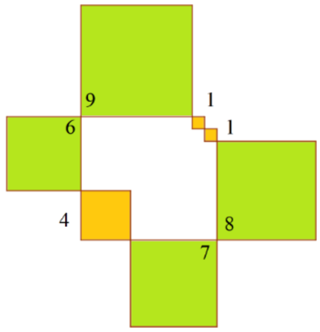
先前 n=4k+3 延伸處理變型的理由是因為最大、最小正方形不管頂點擺放同側、異側都不能鍊接，才往變型處理；其他 n=4k、4k +1、4k +2、4k+3 因至少 1 種頂點擺放同側或異側可以，那就這樣即可成功鍊接，不再考慮變型處理，只要滿足研究一(六)任意值矩形頂點配對法均可成功。

研究一(七)、任意取定不同數量、不同正整數值邊長的正方形形成平行封閉鍊接結構之可行性與方法

事實上，若能滿足「任意值矩形頂點配對法」的★方程組，**任意取定**不同數量、不同正整數值邊長的正方形則亦可成功形成平行封閉鍊接結構。

如右取 1、1、4、6、7、8、9 共 7 個正方形，滿足式子

$$\begin{cases} A+C=B+D=9+6=8+7 \\ y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2}=\dfrac{(9+8)-(7+6)}{2}=2 \\ y+x=1+1+4=6 \\ |x_i-y_i|\leq A+C=B+D=15 \end{cases}$$



綜合研究一(四)、(五)、(六)、(七)得到**結果：**

❶將 n 個正方形放置在**對角線連線而成的斜矩形**上，利用「***n* 值特性**」—***n*=4*k*、4*k*+1、4*k*+2、4*k*+3** 分類正方形在斜矩形頂點擺放方式，搭配「**單向複雜形平行結構**」，可透過「極值矩形頂點配對法」、「最大值矩形頂點配對法」、「任意值矩形頂點配對法」，成功形成 1、2、……、n 等 n 個正方形平行封閉鍊接結構，其中「最大值矩形頂點配對法」最容易成功。

❷若能滿足「任意值矩形頂點配對法」的方程組條件，**任意取定**不同數量、不同正整數值邊長的正方形則亦可成功形成平行封閉鍊接結構。

好奇：若是正多邊形，是否也可得到滿足條件的平行封閉鍊接結構?是否也有方法鍊接成功?

研究二、推廣至正多邊形時，探討與正方形相同條件下的結果

嘗試：若正多邊形要形成封閉鍊接結構，又要滿足像正方形的平行結構與 *x*、*y* 軸平行，這樣可行嗎?從邊數較少的正三角形、正五邊形開始嘗試。

研究二(一)、在原平行封閉鍊接結構鍊接定義下，探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正多邊形鍊接成平行封閉結構的存在性

發現：如果要照原條件，則正三角形、正五邊形等非正方形的正多邊形，無法像正方形的每邊都與 *x*、*y* 軸平行。

改變：「每邊」換成「其中一邊」與 *x* 或 y 軸平行，將每個正多邊形其中一邊排在矩形邊上，滿足 4 邊鍊接的正多邊形「邊長和要對邊相等」即可，如下

n 分成 4 種類型討論：

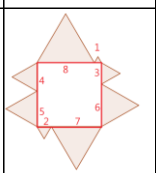
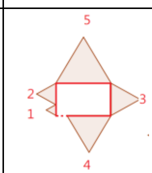
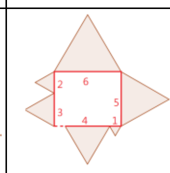
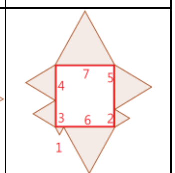
❶當 $n=4k$，則長+寬=$\dfrac{(1+4k)4k}{2}\div 2=(1+4k)k$ ，$k\geqq 2$， $k\in N$ ，(如下圖 k=2，n=8 正△鍊接)

❷當 $n=4k+1$，則長+寬=$\dfrac{(1+4k+1)(4k+1)}{2}\div 2=\dfrac{(2k+1)(4k+1)}{2}$ ，不合，(如下圖 k=1，n=5 正△鍊接)

❸當 $n=4k+2$，則長+寬=$\dfrac{(1+4k+2)(4k+2)}{2}\div 2=\dfrac{(4k+3)(2k+1)}{2}$ ，不合，(如下圖 k=1，n=6 正△鍊接)

❹當 $n=4k+3$，則長+寬=$\dfrac{(1+4k+3)(4k+3)}{2}\div 2=(1+k)(4k+3)$ ，$k\geqq 1$， $k\in N$ (如下圖 k=1 正△鍊接)

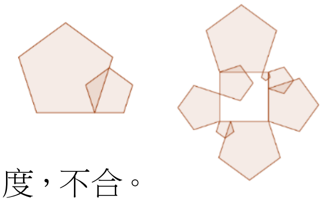
結果：❶邊長為 1、2、3、…、n 的 n 個正△，當 $n=4k$($k\geqq 2$，k 是正整數)或 $4k+3$($k\geqq 1$，k 是正整數)滿足 4 邊鍊接的正△「**邊長和要對邊相等**」，長＋寬分別 $(1+4k)4k$、$(1+k)(4k+3)$，可形成「其中一邊與 x 或 y 軸平行」封閉鍊接圖形。

類	n=4k	n=4k+1	n=4k+2	n=4k+3
例	n=8	n=5	n=6	n=7
示圖				
可?	○	×	×	○

n=4k+1、4k+2 恆無法做到。

❷若 $n\geqq 5$ 的正多邊形則會因為正多邊形外角、內角角度與鍊接的關係，即便能滿足邊長和對邊相等，也無法「其中一邊與 x 或 y 軸平行」形成封閉鍊接圖形。

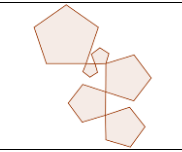
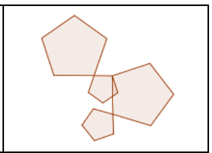
如右圖示例：1、2、……、8 個正五邊形鍊接情形，滿足對邊邊長和相等，但卻無法形成封閉鍊接圖形。



若要「其中一邊與 x 或 y 軸平行」，則有 2 種情形

1.兩個正多邊形並排，當 $n\geqq 5$，$\frac{(n-2)180}{n}\times 2=360-\frac{720}{n}\geq 216>180$ 度，不合。

2.若每邊正多邊形個數是奇數時，則正多邊形安排大小適宜(同時要考慮正多邊形的內角、外角、邊長大小)時可交錯鍊接。

	
每邊奇數個鍊接	每邊偶數個鍊接

說明：正多邊形 n 滿足長寬均為奇數個，設各為 2p+1、2q+1、2r+1、2s+1, 則 2p+1+2q+1+2r+1+2s+1=n

但若每邊正多邊形的個數為偶數時，會遇到頂點轉彎處，則不可能永遠可以這樣交錯鍊街，在頂點轉彎處會出現相交情形。

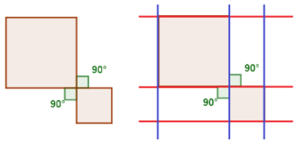
好奇：除了正三角形、正方形可以和 x、y 軸平行，正多邊形鍊接要怎樣調整?才能達到形成平行封閉鍊接結構；不管 n 值多大，都可以確定成功?

研究二(二)、探討正多邊形要怎樣調整，才能達到形成平行封閉鍊接結構

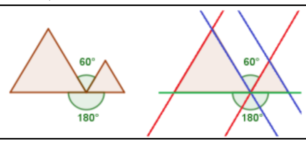
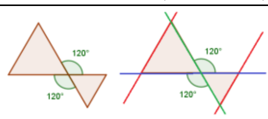
思考：平行條件無法達成，主要是不能和「x、y 軸」平行；原來正方形會和 x、y 軸平行，平行的對象也可視為是每個邊；應該要達成怎樣的條件才可以滿足「正多邊形每邊平行」?

嘗試：依序嘗試正五、六、七邊形，發現並不簡單。

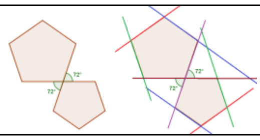
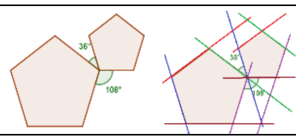
發現：1.只要相接頂點處形成的 2 個外角皆為 90 度，兩兩正方形可滿足每個邊平行。



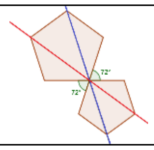
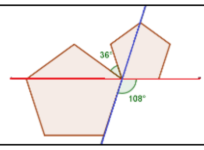
2.正△只要相接頂點處形成的 2 個外角分別為 180、60 度(討論一中的並排鍊接)或是 120、120 度，兩兩正△可滿足每個邊平行。 (如下圖)

	
2 個外角分別為 180、60 度	2 個外角分別為 120、120 度

3.正五邊形只要相接頂點處形成的 2 個外角分別為 72、72 度或是 36、108 度，兩兩正五邊形可滿足每個邊平行。

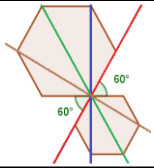
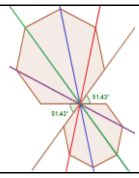
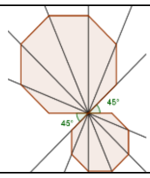
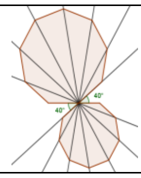
	
2 個外角分別為 72、72 度	2 個外角分別為 36、108 度

觀察：兩兩正五邊形對角線重合時會得到相接頂點處形成的 2 個外角分別為 72、72 度；而其中一邊與另一正五邊形對角線重合時，得到相接頂點處形成的 2 個外角分別為 36、108 度，皆會滿足兩兩正五邊形可滿足每個邊平行如下圖。

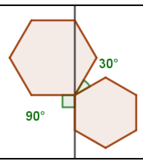
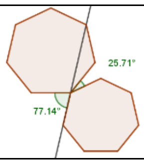
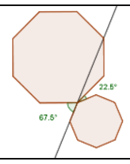
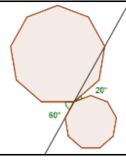
	
兩兩正五邊形對角線重合	正五邊形其中 1 邊與另 1 正五邊形對角線重合

如果正六邊形、正七邊形這樣做是否成功?

▲兩兩正 n 邊形對角線重合

正六邊形	正七邊形	正八邊形	正九邊形
			
2 外角為 60、60 度	2 外角為 $\frac{360}{7}$ 、 $\frac{360}{7}$ 度	2 外角為 45、45 度	2 外角為 40、40 度

▲正 n 邊形其中一邊與另一正 n 邊形對角線重合

正六邊形	正七邊形	正八邊形	正九邊形	…
				…
不平行	平行	不平行	平行	…

說明：

第 1 個外角＝$180^o-\left[(180^o-\frac{360^o}{n})-\frac{180^o-\frac{360^o}{n}}{2}\right]=\frac{540^o}{n}$

第 2 個外角＝$360^o-\left[(180^o-\frac{360^o}{n})\times 2-\frac{540^o}{n}\right]=\frac{180^o}{n}$

發現：1.正 n 邊形($n\geq 4$)，只要兩兩正 n 邊形對角線重合，則相接頂點處形成的 2 個外角相等(為 $\frac{360^o}{n}$)，兩兩正 n 邊形可滿足每個邊平行。為後續研究方便，命為**「對角線重合法」**。

2. 正奇邊形($n\geqq 5$)，只要正多邊形其中一邊與另一正多邊形對角線重合，則相接頂點處形成的 2 個外角分別為 $\frac{540^o}{n}$ 、 $\frac{180^o}{n}$ (計算過程說明如右上)，正奇邊形可滿足每個邊平行。但正偶邊形則無法。為後續研究方便，命為**「對角線與邊重合法」**。

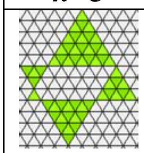
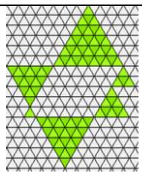
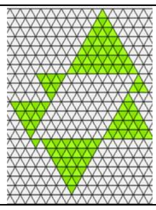
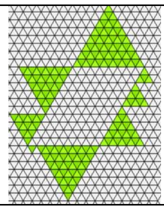
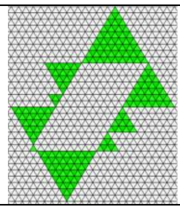
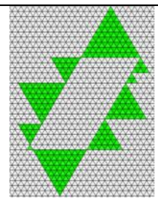
結果：❶**正偶邊形可透過「對角線重合法」**，此時 2 個外角相等，為 $\frac{360^o}{n}$ ，可使兩兩正 n 邊形滿足每個邊平行。

❷**正奇邊形可透過「對角線重合法」及「對角線與邊重合法」**，此時 2 個外角相等($\frac{360^o}{n}$)及為 $\frac{540^o}{n}$ 、 $\frac{180^o}{n}$ ，使得兩兩正 n 邊形可滿足每個邊平行；其中正三角形(沒有對角線)只要相接頂點處形成的 2 個外角分別為 180、60 度或是 120、120 度。

研究二(三)、利用研究二(二)結果，探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正多邊形形成平行封閉鍊接結構的方法

嘗試：在研究二(二)的條件—滿足兩兩正多邊形每邊可平行下，正多邊形可否排成平行封閉鍊接結構?

1.探討平面上邊長分別是 1、2、3、…、n 的 n 個正△之平行封閉鍊接結構

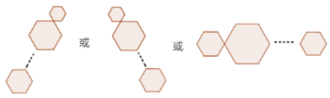
n=5	n =6	n =7	n =8	n =9	n =10
					

發現：正△內角是 60 度，角度小，只要滿足「$\boxed{\text{鄰角是 60-120 度平行四邊形}}$**邊長和對邊相等」，**則可鍊接所有 1、2、3、……、n 的 n 個正△，如下表是**高度差鍊接法之示例(因是平行四邊形，是對邊高度差)，先前正方形所有方法也均適用** 1、2、…、n 的 n 個正△。

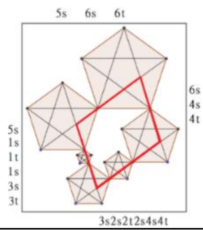
2.探討 n≧5，平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n，正多邊形之平行封閉鍊接結構

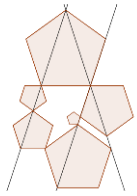
發現：多次操作後發現與斜矩形一樣，「**正多邊形對角線長度對於其邊長之比值為定值**」，而正多邊形利用對角線重合法鍊接時，圖形結構可滿足「**簡單形平行結構**」；

觀察：矩形也是一種平行四邊形，加上正偶邊形利用對角線重合法時，**中心位置連線可形成一直線，滿足「單向複雜形平行結構**(如圖是正六邊形單向複雜形基本平行結構」，可考慮鍊接成一個像「**平行四邊形**」的形狀，用到的對角線長度均為「**邊長的倍數**」。故可**直接以邊長來討論**即可。

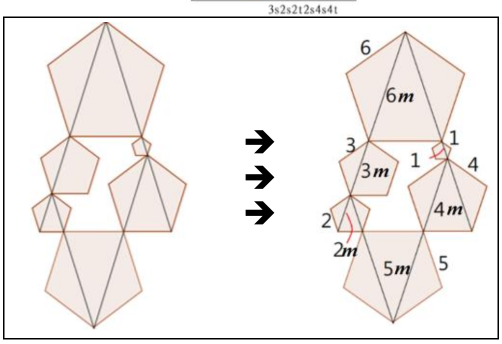


困難：但正奇邊形就無法這樣做了，∵正奇邊形(n≧5)可透過「對角線重合法」搭配「對角線與邊重合法」讓每邊平行，但**對角線未通過正多邊形中心，無法像正偶邊形一樣由對角線中心(如圖)形成平行四邊形對邊邊長和相等。**

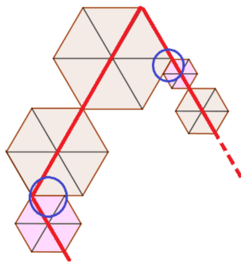




觀察：正奇邊形做平行鍊接時，透過「對角線重合法」搭配「對角線與邊重合法」讓每邊平行均會使用到「對角線」，此時平行封閉結構頂點部分由「**對角線端點**」出發，若做適當調整就會形成平行四邊形，而對角線長度恆為邊長的倍數，將其令為邊長的 m 倍，如圖所示。



思考：正奇邊形利用平行四邊形鍊接法從對角線端點出發，是不是**正偶邊形也可以從「對角線端點」出發**?發現**不能**，如右圖所示，若正偶邊形從對角線端點出發，則因為內角與外角搭配時角度過大，會造成相交，故**正偶邊形只能從對角線中心出發。**



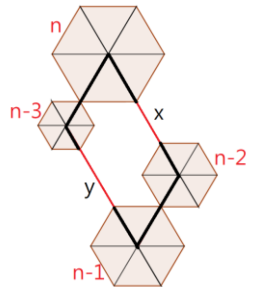
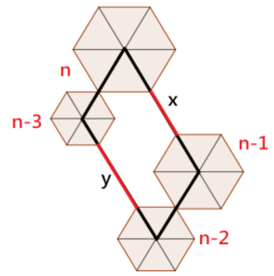
發現：正偶邊形可透過「**對角線中心」出發、正奇邊形**可透過「**對角線端點」出發**進行平行結構鍊接。

接著仿照研究一(四)(五)(六)探討正偶邊形與正奇邊形如何才能鍊接成功?從最快速的最大值頂點配對法開始。

(1)最大值平行四邊形頂點配對法

A.正偶邊形對角線中心出發平行封閉鍊接結構

將邊長 1、2、3、…、n-1、n 共 n 個正偶邊形中最大的 4 個，先排在平行四邊形頂點的位置，並符合**對邊長度相等**，頂點鍊接順序只有 2 種情況；頂點中間 x 和 y 排入 n 邊形(其中 y>x)，做到單向複雜形平行結構，依逆時針順序情況如下：

情形	1		2	
順序	$[(n，n\text{-}3)，y，(n\text{-}1，n\text{-}2)，x]$		$[(n，n\text{-}3)，y，(n\text{-}2，n\text{-}1)，x]$	
圖示		邊長的差 y-x $\frac{(n+n-2)-(n-3+n-1)}{2}=1$		邊長的差 y-x $\frac{(n+n-1)-(n-3+n-2)}{2}=2$

主要就是要做到單向複雜形平行結構，且 2 個正偶邊形組邊長和的差 y-x 分別等於 1 或 2。

提供 1 個作法如下：

步驟 1 先放好 4 個最大正偶邊形在頂點位置，剩餘正偶邊形依數字特性，分成 $n=4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 等 4 種情形討論 x、y 中正偶邊形組；

步驟 2 每次讓兩兩分別填入 x、y 位置平均都用到 1 個正偶邊形組；

步驟 3 較大的正方形組配成多組 y-x=0；

步驟 4 剩下最小的正偶邊形組依 n 值分類會形成 y-x=1 或 2，得到正偶邊形組配對如下表格：

n		$4k$					$4k+1$					$4k+2$					$4k+3$				
剩餘正方形		1、2、……、n-4					1、2、……、n-4					1、2、……、n-4					1、2、……、n-4				
		1、2、……、$4k$-4					1、2、……、$4k$-3					1、2、……、$4k$-2					1、2、……、$4k$-1				
分組	x	3	8	…	n-8	n-4	0	5	…	n-8	n-4	1	6	…	n-8	n-4	2	7	…	n-8	n-4
		1	5	…	n-11	n-7	0	2	…	n-11	n-7	0	3	…	n-11	n-7	0	4	…	n-11	n-7
	y	4	7	…	n-9	n-5	1	4	…	n-9	n-5	2	5	…	n-9	n-5	3	6	…	n-9	n-5
		2	6	…	n-10	n-6	0	3	…	n-10	n-6	0	4	…	n-10	n-6	1	5	…	n-10	n-6
y_i-x_i		2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0
		↓					↓					↓					↓				
頂點		情形 2					情形 1					情形 1					情形 2				

發現: ❶當 $n=4k+1$ 及 $4k+2$ 時可用情形 1 的最大值平行四邊形頂點配對法；

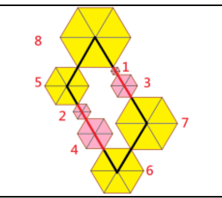
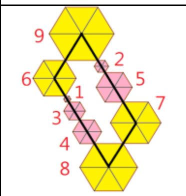
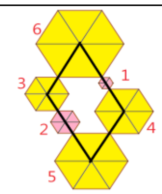
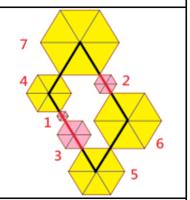
此時$(x,y)=(4k^2-5k+1，4k^2-5k+2)$及$(4k^2-3k，4k^2-3k+1)$

❷當 $n=4k$ 及 $4k+3$ 時可用情形 2 的最大值平行四邊形頂點配對法；方法如上表格；

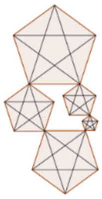
此時$(x,y)=(4k^2-7k+2，4k^2-7k+4)$及$(4k^2-k-1，4k^2-k+1)$

❸上面表格不是唯一鍊接方式，只要讓情形 1—$n=4k+1$ 及 $4k+2$、情形 2—$4k$ 及 $4k+3$ 分別滿足中間的單向複雜形平行結構邊長總和差 y-x 為 1、2 即可，x、y 中的單向複雜形平行結構正偶邊形組鍊接順序在 x、y 位置中可以交換。

例:【正偶邊形可利用最大值平行四邊形頂點配對法之示例】—當 n=6、7、8、9 的**正六邊形**，結構如右所示。

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
頂點	情形 2	情形 1	情形 1	情形 2
n	8	9	6	7
圖示				
y-x	$\frac{(12+10)-(8+9)}{2}=(2+4)-(1+3)=2$	$\frac{(9+7)-(8+6)}{2}=1$	$\frac{(8+10)-(7+9)}{2}=2-1=1$	$\frac{(11+10)-(8+9)}{2}=(1+3)-2=2$

嘗試正奇邊形，發現不同於正偶邊形由正多邊形中心探討對角線長度，**正奇邊形對角線形成的平行四邊形**(下圖藍平行四邊形)是**由正奇邊形對角線端點出發**，故頂點外中間平行四邊形長度不需除以 2，僅需處理頂點配對後頂點正奇邊形對角線差。



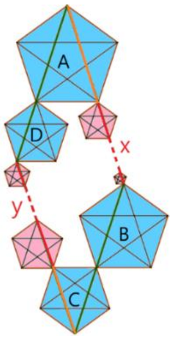
B.正奇邊形對角線端點出發平行封閉鍊接結構

考慮正奇邊形組對角線連成像平行四邊形的形狀，$n=5$ 此類鍊接法如右。

將邊長 1、2、…、n-1、n 共 n 個正奇邊形中邊長，**極端值的正多邊形**先排在平行四邊形頂點的位置，剩餘的正奇邊形可依單向**複雜形平行結構**排在中間位置。

假設藍色正奇邊形 A、B、C、D 提供的邊長長度為 A、B、C、D，

x、y 等粉色正奇邊形鍊接後提供的邊長長度和各為 x、y，如下頁圖。



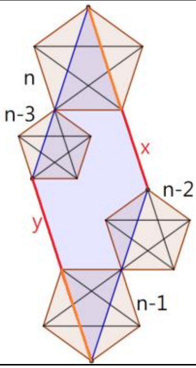
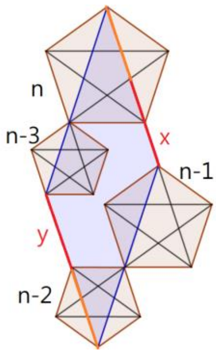
發現對角線的長度=正奇邊形邊長的 m 倍，是定值倍數，故討論時，為方便可直接用正奇邊形邊長去看，只是實際長度需做轉換。

相當於 $\boxed{(A+x)\text{邊長的 } m \text{ 倍}=(C+y)\text{邊長的 } m \text{ 倍}}$

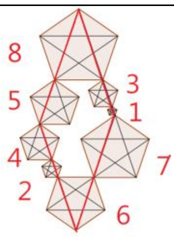
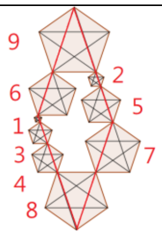
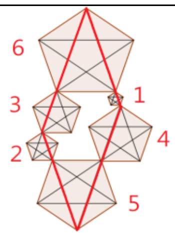
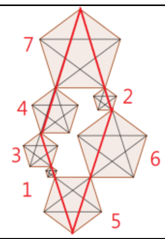
$\Rightarrow \boxed{(A+x)\text{邊長}=(C+y)\text{邊長}} \Rightarrow y—x=A-C$

故為了讓對角線排成平行四邊形的長相等，就要滿足式子：$\boxed{y—x=A-C}$

此時符合對邊長度相等，依逆時針順序有 2 種情況，仿照先前研究方法得到結果如下：

情形	1		2	
鍊接順序	[(n，n-3)，y，(n-1，n-2)，x]		[(n，n-3)，y，(n-2，n-1)，x]	
圖示				
邊長差 y-x	n-(n-1) = 1		n-(n-2) = 2	
分類	$4k+1$	$4k+2$	$4k$	$4k+3$
(x,y)	($4k^2$-$5k$+1，$4k^2$-$5k$+2)	($4k^2$-$3k$，$4k^2$-$3k$+1)	($4k^2$-$7k$+2，$4k^2$-$7k$+4)	($4k^2$-k-1，$4k^2$-k+1)

例:【正奇邊形可利用最大值平行四邊形頂點配對法之示例】—當 n=6、7、8、9 的**正五邊形**，結構如下

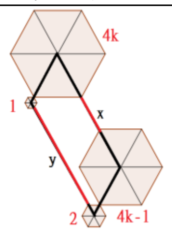
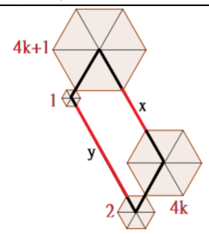
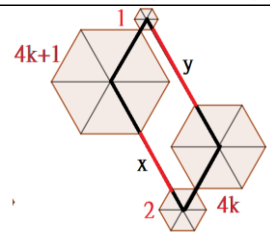
n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
頂點	情形 2	情形 1	情形 1	情形 2
n	8	9	6	7
圖示				
y-x	8-6=2	9-8=1	6-5=1	7-5=2

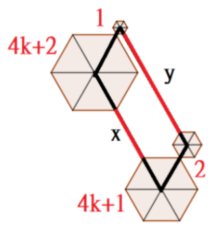
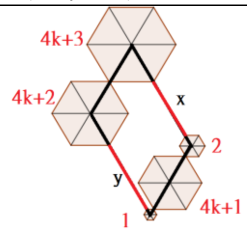
接著試試極值頂點配對法。

(2)極值平行四邊形頂點配對法

A.正偶邊形對角線中心出發平行封閉鍊接結構

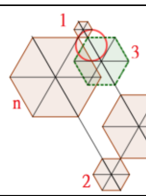
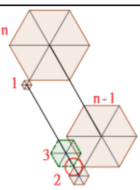
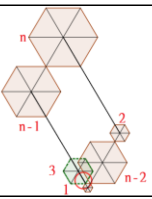
將 n 個邊長分別是 1、2、3、…、 n-1、n 正偶邊形中邊長極端值的，先排在平行四邊形頂點的位置，其餘剩下的正偶邊形可依**單向複雜形平行結構**排在平行四邊形中間 x、y 的位置。此時，正偶邊形可直接依據先前研究一(四)的可行結果—**極值平行四邊形頂點配對法及變型極值平行四邊形頂點配對法**，分成 4k、4k+1、4k+2、4k+3 討論，整理如下:

方法	極值平行四邊形頂點配對法		
情形	4k	4k+1	
頂點放置	大值頂點在平行四邊形長**同側**	大值頂點在平行四邊形長**同側**	大值頂點在平行四邊形長**異側**
頂點	1、4k、2、4k-1	1、4k+1、2、4k	1、4k+1、2、4k
鍊接順序	[(n，1)，y，(2，n-1)，x]	[(n，1)，y，(2，n-1)，x]	[(1，n)，x，(2，n-1)，y]
圖示			
邊長差 y-x	$\frac{(4k+4k-1)-(1+2)}{2}=4k-2$	$\frac{(4k+1+4k)-(1+2)}{2}=4k-1$	$\frac{(4k+1+2)-(4k+1)}{2}=1$

方法	極值平行四邊形頂點配對法	變型極值平行四邊形頂點配對法
情形	4k+2	4k+3
頂點放置	大值頂點在平行四邊形長**同側**	**變型**
頂點	1、4k+2、2、4k+1	1、4k+1、2、4k+2、4k+3
鍊接順序	[(1，n)，x，(2，n-1)，y]	[(n，n-1)，y，(1，n-2，2)，x]
圖示		
邊長的差 y-x	$\frac{(1+4k+2)-(2+4k+1)}{2}=1$	$\frac{(2+4k+3)-(1+4k+2)}{2}=1$

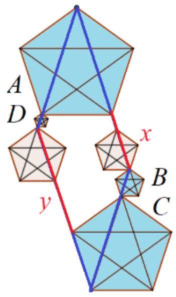
說明：從計算來看，雖然正偶邊形在極值平行四邊形頂點配對法和變型極值平行四邊形頂點配對法下，頂點排列及(x,y)亦和正方形方式一樣可以成功，**但實際去鍊接時**，在正六邊形(含)以上時，卻因為邊長及內角角度過大的關係，不會成功。

如下圖示例:嘗試在最小邊長的位置排入頂點外剩餘正偶邊形中最小的，仍無法成功。

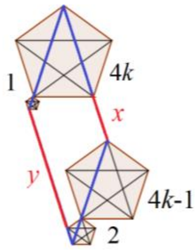
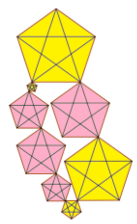
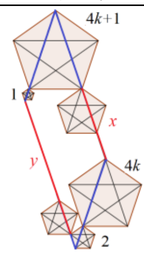
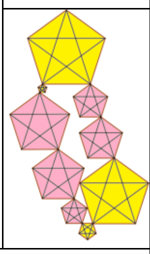
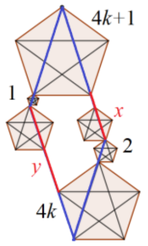
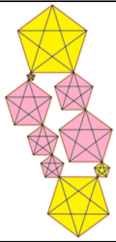
極值頂點配對法—大值頂點在長**異側**	極值頂點配對法—大值頂點在長**同側**	變型極值平行四邊形頂點配對法
		

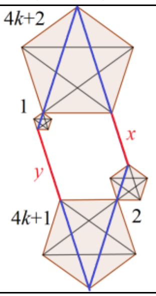
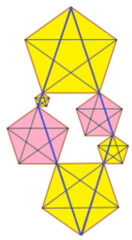
結果：除正方形外，其餘因「對角線中心」出發加上「邊長及內角角度過大」，無法使用「極值平行四邊形頂點配對法」形成平行封閉鍊接結構。

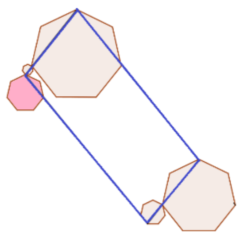
B.正奇邊形**對角線端點**出發平行封閉鍊接結構



將 n 個邊長分別是 1、2、3、…、 n -1、n 正奇邊形中邊長極端值的，先排在平行四邊形頂點的位置，其餘剩下的正奇邊形可依**單向複雜形平行結構**排在平行四邊形中間 x、y 的位置。此時，可直接依據先前研究一(四)的可行結果搭配正奇邊形對角線端點出發，滿足式子：$\boxed{y-x=A-C}$，分成 4k、4k+1、4k+2、4k+3 討論，整理如下:

方法	極值平行四邊形頂點配對法					
情形	4k		4k+1			
頂點放置	大值頂點在平行四邊形長**同側**		大值頂點在平行四邊形長**同側**		大值頂點在平行四邊形長**異側**	
頂點	1、4k、2、4k-1		1、4k+1、2、4k		1、4k+1、2、4k	
鍊接順序	[(n，1)，y，(2，n -1)，x]		[(n，1)，y，(2，n -1)，x]		[(1，n)，x，(2，n -1)，y]	
圖示		n=8 		n=9 		n=9 
y-x	$(4k)-(2)=4k-2$		$(4k+1)-(2)=4k-1$		$(4k+1)-(4k)=1$	

方法	極值平行四邊形頂點配對法		變型極值平行四邊形頂點配對法
情形	4k+2		4k+3
頂點放置	大值頂點在平行四邊形長**異側**		**變型**
頂點	1、4k+2、2、4k+1		1、4k+1、2、4k+2、4k+3
鍊接順序	[(1，n)，x，(2，n -1)，y]		[(n，n -1)，y，(1，n -2，2)，x]
圖示		n=6 	1.同側及異側不行 (跟正方形鍊接同理，是非正整數解，不合) $\begin{cases} y-x=(4k+3)-(4k+2)=1\text{...............大值頂點同側} \\ y-x=(4k+3)-(2)=4k+1\text{...............大值頂點異側} \\ y+x=3+4+...+4k+1=8k^2+2k-2 \end{cases}$ 2.變型不行 (原本方法對邊不等長(4k+3)+(4k+2)≠1+(4k+1)+2)
y-x	$(4k+2)-(4k+1)=1$		



結果：正奇邊形由「**對角線端點出發**」，在排列時若滿足頂點間的正方形其中兩兩距離和小於頂點距離和，即 $x_i+y_i\le A+C=B+D$，則可使用「極值平行四邊形頂點配對法」。

(3)任意值平行四邊形頂點配對法

以上不管是正偶邊形或正奇邊形若要仿照任意值矩形頂點配對法，亦要滿足★方程組才可鍊接成功。

綜合研究二(三)得到**結果：**可推廣至正 n 邊形，

1.滿足下列條件可使兩兩正 n 邊形滿足每個邊平行。

❶**正偶邊形可透過「對角線重合法」，使** 2 個外角相等形成 $\frac{360^o}{n}$ ；

❷**正奇邊形可透過「對角線重合法」搭配「對角線與邊重合法」，使** 2 個外角相等形成 ($\frac{360^o}{n}$)及分別形成 $\frac{540^o}{n}$ 、 $\frac{180^o}{n}$ ；其中正三角形(∵沒有對角線)只要相接頂點處形成的 2 個外角分別為 180、60 度或是 120、120 度。

2.將 n 個正 n 邊形放置在**對角線連線而成的平行四邊形**上，
利用「**n 值特性」—n=4k、4k+1、4k+2、4k+3** 分類正 n 邊形在**平行四邊形**頂點擺放方式，搭配「**單向複雜形平行結構**」，**正偶邊形**可透過「**對角線中心」出發、正奇邊形**可透過「**對角線端點」出發**的「最大值平行四邊形頂點配對法」，成功形成 1、2、……、n 等 n 個正 n 邊形平行封閉鍊接結構。

❶當 n=4k+1 及 4k+2 時可依[(n，n-3)，y，(n-1，n-2)，x]逆時針順序放置頂點正方形，單向複雜形平行結構正方形組總和差 y-x=1。

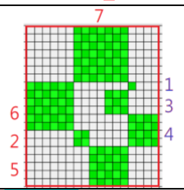
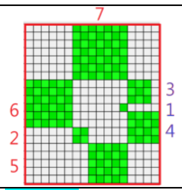
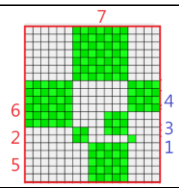
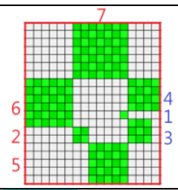
❷當 n=4k 及 4k+3 時可依[(n，n-3)，y，(n-2，n-1)，x]逆時針順序放置頂點正方形，單向複雜形平行結構正方形組總和差 y-x=2。

3.正奇邊形在滿足條件下，由對角線端點出發可使用「極值平行四邊形頂點配對法」成功鍊接；而除正方形外，其餘正偶邊形(n≥5)因「對角線中心」出發加上「邊長及內角角度過大」，無法使用「極值平行四邊形頂點配對法」形成平行封閉鍊接結構。

4.以上不管是正偶邊形或正奇邊形若要仿照任意值矩形頂點配對法，亦要滿足★方程組才可鍊接成功。

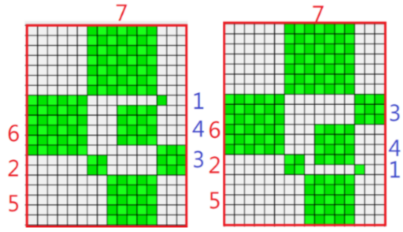
肆、討論

發現：這些鍊接方法保證不管任何 n 值(n≥5)均可成功；排列後單向複雜形平行結構的正方形可在滿足條件下交換順序，那鍊接方法種類就更多(如下示例)。下表中這些複雜形平行結構的每邊組成結構一樣，但排列順序不同，此類複雜形平行結構，命為「同構複雜形平行結構」。

圖示				
排列	(7，1+3+4，2+5，6+2)	(7，3+1+4，2+5，6+2)	(7，4+3+1，2+5，6+2)	(7，4+1+3，2+5，6+2)
覆蓋面積	(6+7+4)(7+6+2+5) =17×20=340	(6+7+4) (7+6+2+5) =17×20=340	(6+7+4) (7+6+2+5) =17×20=340	(6+7+4) (7+6+2+5) =17×20=340

觀察 1：不管怎麼排，這些正方形結構可被一個較大的矩形完全覆蓋(如上表圖示中外框紅色為完全覆蓋矩形及矩形面積數據)，為方便研究，將其命為「完全覆蓋矩形」。而這些也會圍成內部封閉，將其命為「內部封閉圖形」。

觀察 2：初始以為若只要是「同構複雜形平行結構」，搭配其他正方形所形成的平行鍊接結構，其完全覆蓋矩形面積就會一樣，但並不然。像右圖跟上面表格中的複雜形平行結構同構，但面積卻是 **16×20=320**，並不相等。最上面表中這些形成完全覆蓋矩形等面積的同構複雜形平行結構，稱為「等積同構複雜形平行結構」。



思考：怎樣鍊接才可找出「最大完全覆蓋矩形」或「最小完全覆蓋矩形」？ 甚至找到「最大內部封閉圖形」或「最小內部封閉圖形」？

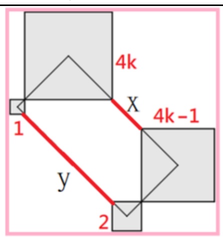
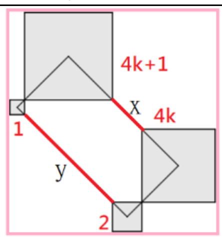
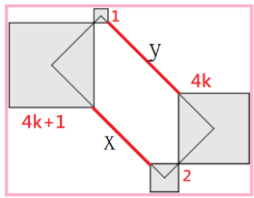
事實上，「探討覆蓋面積」是在鍊接的前提下，能覆蓋所有鍊接正方形的圖形，覆蓋時多了正方形組四周多出來的區域，跟傳統固定周長求面積極值的問題不同。

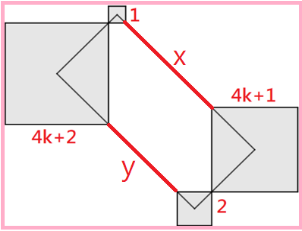
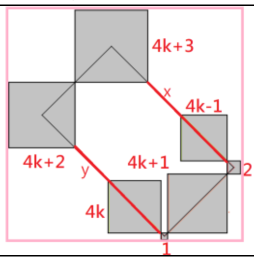
只能在「存在的鍊接結構下」求最大完全覆蓋矩形或最小完全覆蓋矩形，加上「在非單向複雜形形成平行結構下，長度無法以固定值討論」，故以單向複雜形平行結構探討。另外，一般矩形討論極值往往與正方形有關，∴根據先前的 **2** 種單向複雜形平行結構鍊接法—最大值矩形頂點配對法、極值矩形頂點配對法，探討完全覆蓋矩形面積為何，再嘗試是否找到「完全覆蓋正方形」的鍊接結構，得到最大或最小的完全覆蓋正方形面積，與矩形其他排法的面積比較。

討論一、以極值矩形頂點配對法、最大值矩形頂點配對法，探討完全覆蓋矩形面積為何?

(一)以極值矩形頂點配對法，探討完全覆蓋矩形面積

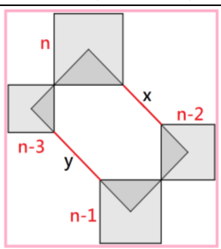
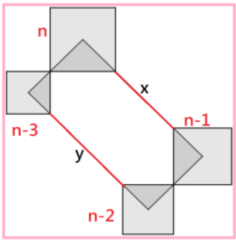
依據先前研究一(四)的可行結果—極值矩形頂點配對法及變型極值矩形頂點配對法，算出 n=4k、4k+1、4k+2、4k+3 排列的面積，整理如下:

極值法	極值矩形頂點配對法		
情形	$4k$	$4k+1$	
頂點放置	大值頂點在長**同側**	大值頂點在長**同側**	大值頂點在長**異側**
頂點	1、$4k$、2、$4k$-1	1、$4k$+1、2、$4k$	1、$4k$+1、2、$4k$
排列順序	[(n，1)，y，(2，n-1)，x]	[(n，1)，y，(2，n-1)，x]	[(1，n)，x，(2，n-1)，y]
圖示			
邊長的差 y-x	$\frac{(4k+4k-1)-(1+2)}{2}=4k-2$	$\frac{(4k+1+4k)-(1+2)}{2}=4k-1$	$\frac{(4k+1+2)-(1+4k)}{2}=1$
(x,y)	($4k^2$-5k，$4k^2$-k-2)	($4k^2$-3k-1，$4k^2$+k-2)	($4k^2$-3k-2，$4k^2$-k-1)
長	4k+1+y+2 =4k+1+$4k^2$-k-2+2	4k+1+1+y+2 =4k+1+1+$4k^2$+k-2+2	1+4k+1+x+2 =1+4k+1+$4k^2$-3k-2+2
寬	1+4k+x+4k-1 =1+4k+$4k^2$-5k+4k-1	1+4k+1+x+4k =1+4k+1+$4k^2$-3k-1+4k	4k+1+1+y+4k =4k+1+1+$4k^2$-k-1+4k
完全覆蓋矩形面積	**($4k^2$+3k+1) ($4k^2$+3k)**	**($4k^2$+5k) ($4k^2$+5k+1)**	**($4k^2$+k+2) ($4k^2$+7k+1)**

	極值矩形頂點配對法	極值矩形頂點配對法
情形	$4k+2$	$4k+3$
頂點放置	大值頂點在長**異側**	**變型**
頂點	1、$4k+2$、2、$4k+1$	1、$4k+1$、2、$4k+2$、$4k+3$
排列順序	[(1，n)，x，(2，n-1)，y]	[(n，n-1)，y，(1，n-2，2)，x]
圖示		
邊長的差 y-x	$\dfrac{(2+4k+2)-(1+4k+1)}{2}=1$	$\dfrac{(3+4k+2)-(2+4k+1)}{2}=1$
(x,y)	($4k^2+k-2$，$4k^2+k-1$)	($4k^2+k-2$，$4k^2+k-1$)
長	$1+4k+2+y+2=1+4k+2+4k^2+k-2+2$	$4k+3+4k+2+y+1=4k+3+4k+2+4k^2+k-1+1$
寬	$4k+2+1+x+4k+1=4k+2+1+4k^2+k-1+4k+1$	$4k+2+4k+3+x+2=4k+2+4k+3+4k^2+k-2+2$
完全覆蓋矩形面積	**$(4k^2+5k+3)\ (4k^2+9k+3)$**	**$(4k^2+9k+2)\ (4k^2+9k+5)$**

(二)以最大值矩形頂點配對法，探討完全覆蓋矩形面積

依據先前研究一(五)的可行結果—最大值矩形頂點配對法，算出 n=$4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 結構的面積，整理如下:

情形	1　(n=$4k+1$、$4k+2$)		2　(n=$4k$、$4k+3$)	
鍊接順序	[(n，n-3)，y，(n-1，n-2)，x]		[(n，n-3)，y，(n-2，n-1)，x]	
圖示		邊長的差 y-x $\dfrac{(n+n-2)-(n-3+n-1)}{2}$ $=1$		邊長的差 y-x $\dfrac{(n+n-1)-(n-3+n-2)}{2}$ $=2$
分類	$4k+1$	$4k+2$	$4k$	$4k+3$
(x,y)	($4k^2-5k+1$，$4k^2-5k+2$)	($4k^2-3k$，$4k^2-3k+1$)	($4k^2-7k+2$，$4k^2-7k+4$)	($4k^2-k-1$，$4k^2-k+1$)
長	$4k+1+4k-2+y+4k$ $=4k+1+4k-2+4k^2-5k+2+4k$	$4k+2+4k-1+y+4k+1$ $=4k+2+4k-1+4k^2-3k+1+4k+1$	$4k+4k-3+y+4k-2$ $=4k+4k-3+4k^2-7k+4+4k-2$	$4k+3+4k+y+4k+1$ $=4k+3+4k+4k^2-k+1+4k+1$
寬	$4k-2+4k+1+x+4k-1$ $=4k-2+4k+1+4k^2-5k+1+4k-1$	$4k-1+4k+2+x+4k$ $=4k-1+4k+2+4k^2-3k+4k$	$4k-3+4k+x+4k-1$ $=4k-3+4k+4k^2-7k+2+4k-1$	$4k+4k+3+x+4k-1$ $=4k+4k+3+4k^2-k-1+4k-1$
完全覆蓋矩形面積	**$(4k^2+7k+1)\ (4k^2+7k-1)$**	**$(4k^2+9k+3)(4k^2+9k+1)$**	**$(4k^2+5k-1)\ (4k^2+5k-2)$**	**$(4k^2+11k+5)(4k^2+11k+2)$**

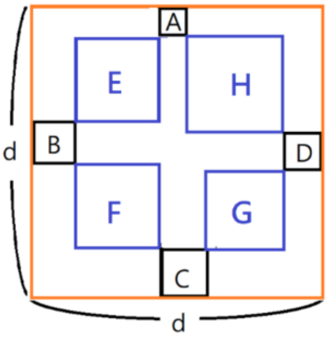
得到完全覆蓋矩形面積結果，如上面表格紅色數據。

∵最大值矩形頂點配對法、極值矩形頂點配對法的矩形長度固定，只能以「同構單向複雜形平行結構」呈現，所以無法以此 2 種鍊接方法直接形成「完全覆蓋正方形」，再作嘗試。

要以 1、2、……、n 等 n 個正方形排出可完全覆蓋正方形，因「在非單向複雜形形成平行結構下，鍊接長度無法以一個固定值討論」，因此，仍以「單向複雜形平行結構」進行探討：

討論二、在最大完全覆蓋正方形及最小完全覆蓋正方形條件下，探討正方形鍊接成平行封閉結構的方法與 n 值特性、圖形特徵之關係

不失一般性假設邊長為 1、2、…、n 等 n 個正方形要被大正方形完全覆蓋，且要滿足平行封閉鍊接結構須形成如右由 A、B、C、D、E、F、G、H 組成的鍊接結構，其中
A、B、C、D 是 1、2、…、n 的 n 個正方形中其中邊長相異的單 1 個正方形，
E、F、G、H 則是由剩餘 n-4 個正方形分別組成的單向複雜形平行鍊接結構，
d 為完全覆蓋正方形之邊長。



則由上條件可知須滿足

$$\begin{cases} E+B+F=H+D+G \ldots\ldots(1) \\ E+A+H=F+C+G \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

為方便往下的計算，

令定值 $S=1+2+3+\ldots\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=A+B+C+D+E+F+G+H$　　由(1)

有 $d=A+E+B+F+C$

$$=\frac{2(E+B+F)}{2}+A+C=\frac{(E+B+F)+(E+B+F)}{2}+A+C=\frac{(E+B+F)+(H+D+G)}{2}+A+C$$

$$=\frac{(E+B+F)+(H+D+G)+A+C}{2}+\frac{A}{2}+\frac{C}{2}=\frac{S+A+C}{2}$$，同理，$d=B+E+A+H+D=\dfrac{S+B+D}{2}$

此時，$d=\dfrac{S+A+C}{2}=\dfrac{S+B+D}{2}$（其中 S 是定值$=\dfrac{n(n+1)}{2}$），且 d 是正整數，令 $A+C=B+D=t$

⇨$2|S+A+C$，且 $2|S+B+D$，

將 n 分成 $4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 等 4 種類型討論 d 值，

類型 1_$n=4k$

$$d=\frac{S+A+C}{2}=\frac{S+B+D}{2}=\frac{4k(4k+1)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+k+\frac{t}{2}$$，$\because d\in N$，$\therefore t$ 是偶數

類型 2_$n=4k+1$

$$d=\frac{S+A+C}{2}=\frac{S+B+D}{2}=\frac{(4k+1)(4k+2)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+3k+\frac{1+t}{2}$$，$\because d\in N$，$\therefore t$ 是奇數

類型 3_$n=4k+2$

$$d=\frac{S+A+C}{2}=\frac{S+B+D}{2}=\frac{(4k+2)(4k+3)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+5k+\frac{3+t}{2}$$，$\because d\in N$，$\therefore t$ 是奇數

類型 4_$n=4k+3$

$$d=\frac{S+A+C}{2}=\frac{S+B+D}{2}=\frac{(4k+3)(4k+4)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+7k+3+\frac{t}{2}$$，$\because d\in N$，$\therefore t$ 是偶數

情形 1 若要完全覆蓋正方形最小，則 $A+B+C+D$ 要最小值，此時
若 $n=4k$，$4k+3$ 時，為類型 1、4⇨t 是偶數，t 最小值為 1+5=2+4=6
若 $n=4k+1$，$4k+2$ 時，為類型 2、3⇨t 是奇數，t 最小值為 1+4=2+3=5

類型	1($n=4k$)	2($n=4k+1$)	3($n=4k+2$)	4($n=4k+3$)
d_{min}	$4k^2+k+\frac{6}{2}$ $=4k^2+k+3$	$4k^2+5k+\frac{1+5}{2}$ $=4k^2+3k+3$	$4k^2+5k+\frac{3+5}{2}$ $=4k^2+5k+4$	$4k^2+7k+3+\frac{6}{2}$ $=4k^2+7k+6$

情形 2 若要完全覆蓋正方形最大，則 $A+B+C+D$ 要最大值

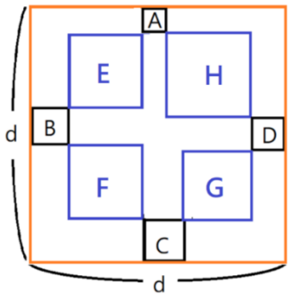
若 n=4k，4k+3 時，為類型 1、4⇨t 是偶數；t 最大值為 $A+C=B+D$(不一定是最大 4 個數)

若 n=4k+1，4k+2 時，為類型 2、3⇨t 是奇數；t 最大值為 $A+C=B+D$(不一定是最大 4 個數)

類型	1(n=4k)	2(n=4k+1)	3(n=4k+2)	4(n=4k+3)
t_{max}	4k+4k-4=4k-1+4k-3 =8k-4	4k+1+4k-2=4k+4k-1 =8k-1	4k+2+4k-1=4k+1+4k =8k+1	4k+3+4k-1=4k+2+4k =8k+2
A	4k	4k+1	4k+2	4k+3
C	4k-4	4k-2	4k-1	4k-1
B	4k-1	4k	4k+1	4k+2
D	4k-3	4k-1	4k	4k
d_{max}	$4k^2+k+\frac{8k-4}{2}$ $=4k^2+5k-2$	$4k^2+3k+\frac{1+8k-1}{2}$ $=4k^2+7k$	$4k^2+5k+\frac{3+8k+1}{2}$ $=4k^2+9k+2$	$4k^2+7k+3+\frac{8k+2}{2}$ $=4k^2+11k+4$

註：上面(A，C)及(B，D)中()中的 A、C 及 B、D 可交換；(A，C)及(B，D)中配對可交換。

結果： 邊長為 1、2、…、n 等 n 個正方形要被正方形完全覆蓋，且要滿足平行封閉鍊接結構須形成如右由 A、B、C、D、E、F、G、H 組成的鍊接結構，其中 A、B、C、D 是 1、2、…、n 的 n 個正方形中其中邊長相異的單一個正方形，E、F、G、H 則是由剩餘 n-4 個正方形分別組成的單向複雜形平行鍊接結構。



1.若要完全覆蓋正方形最小，則 $A+B+C+D$ 要最小值，此時

❶若 n=4k、4k+3 時，$A+C=B+D$ 為偶數，(A，B，C，D)=(1，2，5，4)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+k+3$、$4k^2+7k+6$。

❷若 n=4k+1、4k+2 時，$A+C=B+D$ 為奇數，(A，B，C，D)=(1，2，4，3) ，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+3k+3$、$4k^2+5k+4$。

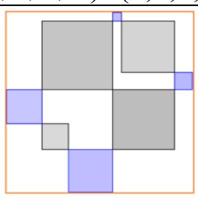
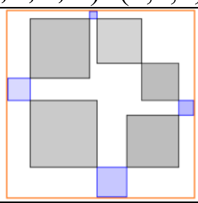
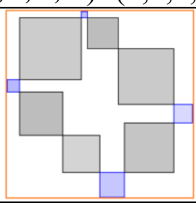
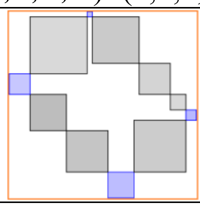
2.若要完全覆蓋正方形最大，則 $A+B+C+D$ 要最大值

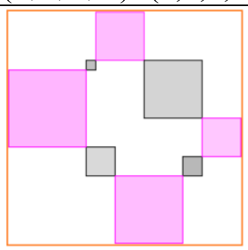
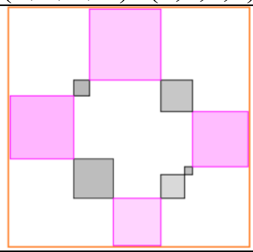
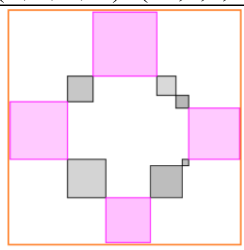
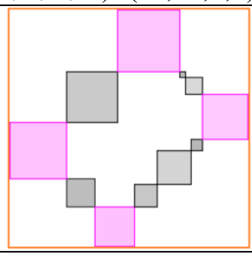
❶若 n=4k、4k+3 時，$A+C=B+D$ 為偶數，(A，B，C，D)=(4k，4k-1，4k-4，4k-3)、(4k+3，4k+2，4k-1，4k)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+5k-2$、$4k^2+11k+4$。

❷若 n=4k+1、4k+2 時，$A+C=B+D$ 為奇數，(A，B，C，D)=(4k+1，4k，4k-2，4k-1)、(4k+2，4k+1，4k-1，4k)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+7k$、$4k^2+9k+2$。

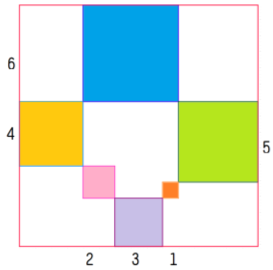
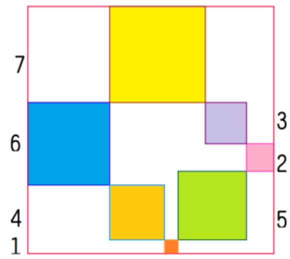
特別注意： 上述討論方式須配合 $ABCDEFGH$ 共 8 塊結構配置，n 最少為 8。

以 n=8、9、10、11 為示例

類型		1(n=4k)	2(n=4k+1)	3(n=4k+2)	4(n=4k+3)
n		8	9	10	11
最小完全覆蓋正方形	x	6(偶)	5(奇)	5(奇)	6(偶)
	d	$4\times2^2+2+3=21$	$4\times2^2+3\times2+3=25$	$4\times2^2+5\times2+4=30$	$4\times2^2+7\times2+6=36$
		(A,B,C,D)=(1,4,5,2)	(A,B,C,D)=(1,3,4,2)	(A,B,C,D)=(1,2,4, 3)	(A,B,C,D)=(1,4,5,2)
	鍊接結構				
面積		21×21=441	25×25=625	30×30=900	36×36=1296

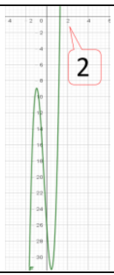
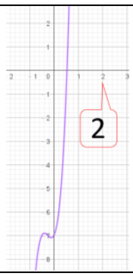
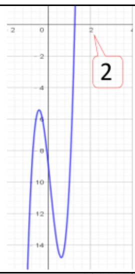
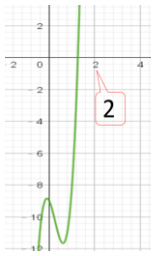
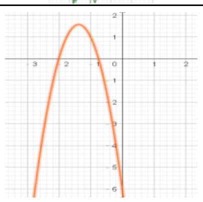
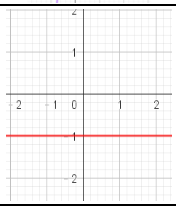
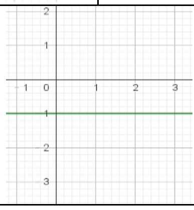
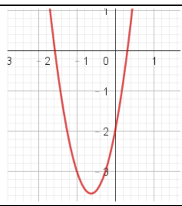
最大完全覆蓋正方形					
	x	12(偶)	15(奇)	17(奇)	18(偶)
	d	$4\times 2^2+5\times 2-2=24$	$4\times 2^2+7\times 2=30$	$4\times 2^2+9\times 2+2=36$	$4\times 2^2+11\times 2+4=42$
		$(A,B,C,D)=(5,8,7,4)$	$(A,B,C,D)=(9,8,6,7)$	$(A,B,C,D)=(10,7,9,8)$	$(A,B,C,D)=(11,10,7,8)$
	鍊接結構				
面積		24x24=576	30x30=900	36x36=1296	42x42=1764

n=5 為唯一鍊接結構，無法進行最大最小完全覆蓋正方形之探討。而 n =6、n =7 的完全覆蓋正方形鍊接結構如右

n=6		n=7	
	(4+6+5)(6+4+2+3)=225		(6+7+3+2)(7+6+4+1)=324

討論三、比較最大完全覆蓋正方形、最小完全覆蓋正方形、最大值矩形頂點、極值矩形頂點 4 種方法下完全覆蓋面積之極值

列出最大完全覆蓋正方形、最小完全覆蓋正方形、最大值矩形頂點法、極值矩形頂點配對法等 4 種方法之完全覆蓋面積公式，以兩兩面積公式相減輸入 GGB 中，進行比較如下：

n 值分類 / 方法	$4k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k+1$	$4k$
	變型	大值頂點在長異側	大值頂點在長同側	大值頂點在長異側	大值頂點在長同側
極值矩形頂點配對法面積 A_1	$(4k^2+9k+2)\times(4k^2+9k+5)$	$(4k^2+5k+3)\times(4k^2+9k+3)$	$(4k^2+5k)\times(4k^2+5k+1)$	$(4k^2+k+2)\times(4k^2+7k+1)$	$(4k^2+3k+1)\times(4k^2+3k)$
最大值矩形頂點配對法面積 A_2	$(4k^2+11k+5)\times(4k^2+11k+2)$	$(4k^2+9k+1)\times(4k^2+9k+3)$	$(4k^2+7k+1)(4k^2+7k-1)$		$(4k^2+5k-1)\times(4k^2+5k-2)$
最大完全覆蓋正方形面積 A_3	$(4k^2+11k+4)^2$	$(4k^2+9k+2)^2$	$(4k^2+7k)^2$		$(4k^2+5k-2)^2$
最小完全覆蓋正方形面積 A_4	$(4k^2+7k+6)^2$	$(4k^2+5k+4)^2$	$(4k^2+3k+3)^2$		$(4k^2+k+3)^2$
A_1-A_4 GGB 函數圖					
A_2-A_3 GGB 函數圖					

發現：❶由上 $A_1 - A_4$ GGB 所有函數圖 $k \geq 2$ 後函數值恆為正，代表 n≧8，最小完全覆蓋正方形鍊接法下完全覆蓋面積最小。

但 k=1 時，值小於 0，代表當 k=1，n=7 時，極值鍊接的面積比最小完全覆蓋正方形結構的面積小，探討得知∵最小完全覆蓋正方形鍊接結構 n 存在的最小值為 8，故 $n \geq 8$，原本最小完全覆蓋鍊接結構就是最小面積鍊接結構。

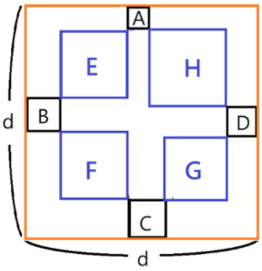
❷ $A_2 - A_3$ GGB 函數圖中當 4k+3、4k+2、4k+1 時 $k \geq 0$ 後函數值恆負，代表最大完全覆蓋正方形鍊接法下完全覆蓋面積最大。

但 n=4k 為一特例，探討得知∵同和下(所有正方形鍊接成一個封閉圖形)，算完全覆蓋正方形邊長(影響面積)時，頂點正方形被會重覆計算，頂點正方形越大，重複計算值越大造成面積越大，而在 n=4k，為配合 A+C=B+D 為偶數，(A，B，C，D)=(4k，4k-1，4k-4，4k-3)並非最大的 4 個頂點，加上中間單向複雜型平行結構長度後，略少於最大值矩形頂點配對法之長度，是造成特例的原因。

例如:n=7，最大完全覆蓋正方形面積=$(4\times1^2+11\times1+4)^2=19^2=361$，

最小完全覆蓋正方形面積=$(4\times1^2+7\times1+6)^2=289$

結果：依照單向複雜形鍊接結構處理，邊長為 1、2、……、n 等 n 個正方形要被正方形完全覆蓋，且要滿足平行封閉鍊接結構須形成如右，由 A、B、C、D、E、F、G、H 組成，其中 A、B、C、D 是 1、2、……、n 的 n 個正方形中其中邊長相異的單一個正方形，E、F、G、H 則是由剩餘 n-4 個正方形分別組成的單向複雜形平行鍊接結構，此法 n 最少為 8。



1.若要完全覆蓋正方形最小，則 A+B+C+D 要最小值，此時

❶若 n=4k、4k+3 時，A+C=B+D 為偶數，(A，B，C，D)=(1，2，5，4)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+k+3$、$4k^2+7k+6$

❷若 n=4k+1、4k+2 時，A+C=B+D 為奇數，(A，B，C，D)=(1，2，4，3)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+3k+3$、$4k^2+5k+4$

❸當 n=4k、4k+1、4k+2、4k+3 時，分別得最小完全覆蓋矩形面積為$(4k^2+k+3)^2$、$(4k^2+3k+3)^2$、$(4k^2+5k+4)^2$、 $(4k^2+7k+6)^2$。

2.若要完全覆蓋正方形最大，則 A+B+C+D 要最大值

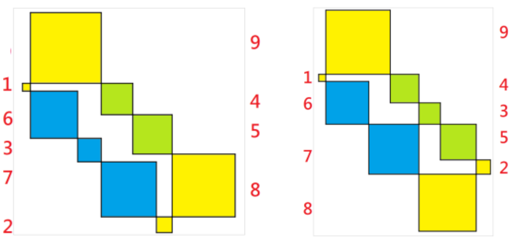
❶若 n=4k、4k+3 時，A+C=B+D 為偶數，(A，B，C，D)=(4k，4k-1，4k-4，4k-3)、(4k+3，4k+2，4k -1，4k)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+5k-2$、$4k^2+11k+4$

❷若 n=4k+1、4k+2 時，A+C=B+D 為奇數，(A，B，C，D)=(4k+1，4k，4k-2，4k-1)、(4k+2，4k+1，4k-1，4k)，完全覆蓋正方形之邊長=$4k^2+7k$、$4k^2+9k+2$

❸當 n=4k、4k+1、4k+2、4k+3 時，分別得最大完全覆蓋矩形面積為$(4k^2+5k-2)^2$、$(4k^2+7k)^2$、$(4k^2+9k+2)^2$、 $(4k^2+11k+4)^2$。

討論四、不同鍊接結構下內部封閉圖形面積之探討

困難：雖單向複雜形平行結構可「保證對角線長為固定值」，此時內部封閉的周長也跟著是固定值；但內部封閉圖形在同一長度下，卻∵排列順序不同，呈現凹凹凸凸完全不同形狀(如右圖)，這樣面積值如何計算?怎樣鍊接才能找到最大最小值?



觀察： 嘗試數個不同方式後，發現這些區域是由大小不同的矩形組成，而這些矩形的長寬為原不同正方形的邊長配對組成。

以 n=12 最大值矩形頂點配對法為例：

列舉 x、y 位置不同鍊接方式，像方式 1(圖 4-1)是 x，y 分別以(8 ,5 ,3 ,1)及(7 ,6 ,2 ,4)去排，並將這些面積輸入 EXCEL 進行運算(如下 EXCEL 結果圖)，

藍色區域是 x、y 對於其他較小邊長的矩形面積和(下圖 4-1 紅色圈圈內藍色矩形面積為 $8\times(5+3+1)=72$、另一邊藍色為 $7\times(6+2+4)=84$)、

粉紅區域是次大邊長對於其他較小邊長的矩形面積和(下圖 4-1 紅色圈圈內粉紅矩形面積為中為 $5\times(3+1)=20$、另一邊粉紅為 $6\times(2+4)=36$)，.....，其餘以此類推，

最後將完全覆蓋矩形下除正方形面積(灰色)及內部封閉面積(白色)之外，

加總藍色、粉紅、綠色區域面積為 EXCEL 紫色區塊如下表右呈現。

=E3*(F3+G3+H3+I3)

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
				頂點間	列正方形								
排列方式	頂點間	和	正方形1	正方形2	正方形3	正方形4	正方形5	藍色區域	粉色區域	綠色區域	其他區域	x或y區域的和	所有總和
1	x	17	8	5	3	1	0	72	20	3	0	95	223
	y	19	7	6	4	2	0	84	36	8	0	128	
2	x	17	8	5	4			72	20	0	0	92	223
	y	19	7	6	3	2	1	84	36	9	2	131	
3	x	17	8	4	3	2		72	20	6	0	98	223
	y	19	7	6	5	1		84	36	5	0	125	
4	x	17	6	5	3	2	1	66	30	9	2	107	223
	y	19	8	7	4			88	28	0	0	116	
5	x	17	8	7	2			72	14	0	0	86	223
	y	19	6	5	4	3	1	78	40	16	3	137	
6	x	17	7	4	3	2	1	70	24	9	2	105	223
	y	19	8	6	5			88	30	0	0	118	
7	x	17	6	5	4	2		66	30	8	0	104	223
	y	19	8	7	3	1		88	28	3	0	119	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

得到的藍、粉、綠區域面積因鍊接結構不同，造成面積和不同，

但從紫色表格**得知：**不管正方形組怎麼鍊接，**面積和恆為定值**。

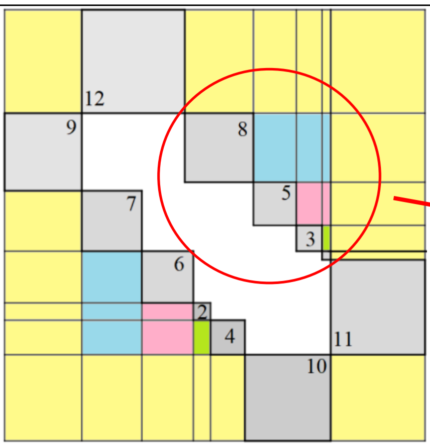
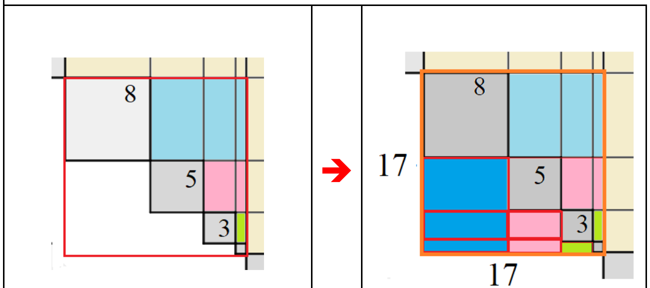


圖 4-1 n=12 排列方式 1 最大值矩形頂點排列區域分割圖

紅色圈圈中藍、粉、綠面積計算方式



$=$藍色面積$8\times(5+3+1)$
$+$粉紅面積$5\times(3+1)$
$+$綠色面積3×1
$=$ $\dfrac{17^2-8^2-5^2-3^2-1^2}{2}$

圖 4-2　x 位置區域面積分割圖再分析

說明: ∵排列固定後，完全覆蓋矩形的邊長就固定，

雖然因鍊接結構不同，內部圖形凹凹凸凸不一定一樣，

但內部面積(白色區域)=完全覆蓋矩形—正方形(灰色)—其他矩形（非白色灰色部分)面積；

∴其他矩形的面積和

$$=12\times11+12\times9+12\times8+12\times5+12\times3+12\times1 \Rightarrow =12\times11+12\times9+12\times(8+5+3+1)$$

$$+11\times10+11\times8+11\times5+11\times3+11\times1 \qquad +11\times10+11\times(8+5+3+1)$$

$$+10\times9+10\times7+10\times6+10\times2+10\times4 \qquad +10\times9+10\times(7+6+2+4)$$

$$+9\times7+9\times6+9\times2+9\times4 \qquad +9\times(7+6+2+4)$$

$$+8\times5+8\times3+8\times1+5\times3+5\times1+3\times1 \qquad +8\times(5+3+1)+5\times(3+1)+3\times1$$

$$+7\times6+7\times2+7\times4+6\times2+6\times4+2\times4 \qquad +7\times(6+2+4)+6\times(2+4)+2\times4$$

$$\frac{17^2-8^2-5^2-3^2-1^2}{2}$$

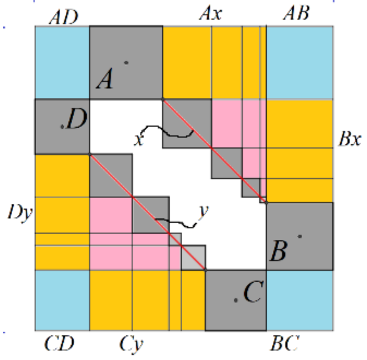
可參考上頁圖 4-2
下面式子亦同理

其他矩形的面積和推到一般式為

$$=A\times B+A\times D+B\times C+C\times D$$ 右圖藍色區域

$$+A\times x+B\times x+C\times y+D\times y$$ 右圖黃色區域

$$+\frac{x^2+y^2-(n-4)^2-(n-5)^2-.....-2^2-1^2}{2}$$ 右圖粉紅區域



以 n=4k 最大值矩形頂點配對法為例，此值為

$$n(n-1)+n(n-3)+nx+(n-1)(n-2)+(n-1)x+(n-2)(n-3)+(n-2)y+(n-3)y$$

$$+\frac{x^2+y^2-(n-4)^2-(n-5)^2-.....-2^2-1^2}{2}\Rightarrow \text{恆為定值}$$

觀察與推導:

1.發現在完全覆蓋矩形鍊接結構下(以 1、2、.....、12 最大值矩形結構為例，其餘同理)，頂點位置正方形固定後，長寬矩形也就固定，此時頂點正方形周遭區域(左上圖黃色區域)也是固定(恆為 $AB+AD+BC+CD+Ax+Bx+Cy+Dy$)。

2.在頂點正方形間 x、y 位置的正方形組順序不管怎麼換，面積是固定(灰白黃之外的其他區域)(最大值頂點鍊接結構恆為 $\dfrac{x^2+y^2-(n-4)^2-(n-5)^2-.....-2^2-1^2}{2}$)。

結果:1.設 d_1 、 d_2 是完全覆蓋矩形長與寬，i 是正方形邊長，

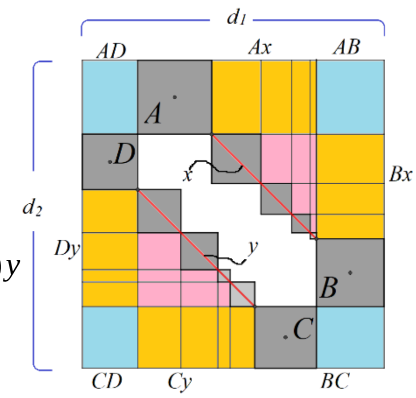
A、B、C、D 是頂點正方形邊長，

x、y 是頂點間單向複雜型平行鍊接結構正方形組長度，

當鍊接方式固定後內部封閉面積為定值(右圖)，

內部封閉面積公式為 $d_1d_2-\Big[(A+C)(B+D)+(A+B)x+(C+D)y$

$$+x^2+y^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}i^2-A^2-B^2-C^2-D^2\Big)\Big]$$



2.若頂點正方形結構確定，則內部封閉面積固定，不因頂點間正方形組順序不同而不同；若完全覆蓋矩形面積是最大，則內部封閉面積亦為最大。

伍、結論

一、n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形鍊接成平行封閉結構中 n 之最小值為 5，此時邊長組合(5，1+3，3+2，2)、(5，3，4+1，1+2)等為 2 組鍊接結構解。

二、1.將 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形放置在**對角線連線而成的斜矩形**上，利用 **n 值特性「n=4k、4k+1、4k+2、4k+3」**分類正方形在斜矩形頂點擺放方式，搭配「**單向複雜形平行結構**」，當滿足「任意值矩形頂點配對法」的方程組，

$$\begin{cases} A+C=B+D \\ y-x=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2} \\ y+x=1+2+......+n-(A+B+C+D)=\dfrac{n(n+1)}{2}-(A+B+C+D) \\ x_i+y_i \le A+C=B+D \end{cases},$$

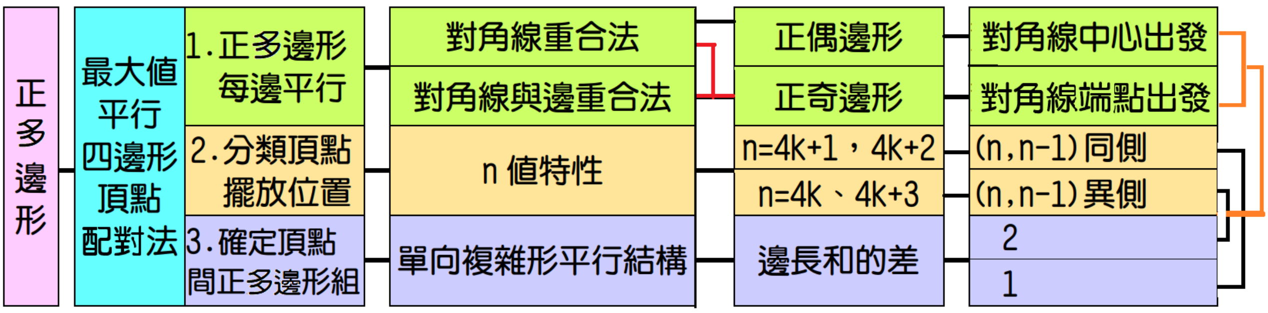
其中頂點正方形邊長為 A、B、C、D，x 和 y 是頂點間正方形組長度，x_i、y_i 是頂點間正方形組中的單一正方形邊長；可成功形成 1、2、…、n 等 n 個正方形平行封閉鍊接結構。

2.「任意值矩形頂點配對法」可推廣至任意取定不同邊長的正方形形成平行封閉鍊接結構。

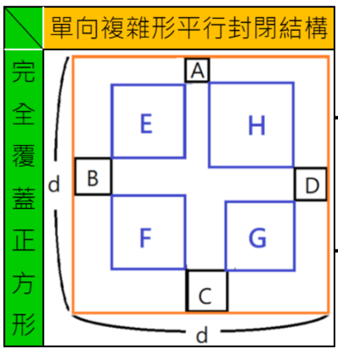
3.一定能成功的最快速方法是「最大值矩形頂點配對法」。

4.正奇邊形在滿足條件下，由對角線端點出發可使用「極值平行四邊形頂點配對法」成功鍊接；而除正方形外，其餘正偶邊形(n≧5)因「對角線中心」出發加上「邊長及內角角度過大」，無法使用「極值平行四邊形頂點配對法」形成平行封閉鍊接結構。

三、推廣至正多邊形，透過「**圖形特徵**」與「**n 值特性**」分析，得到 **n** 個邊長分別為 1、2、…、**n** 的正多邊形平行封閉鍊接結構，最快速的最大平行四邊形頂點配對法流程圖如下：



四、n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形鍊接成平行封閉結構被正方形完全覆蓋，得到單向複雜形平行結構下，最大及最小完全覆蓋矩形的鍊接法如下圖



面積	A+B+C+D	n 值特性	A+C=B+D	(A,B,C,D)	完全覆蓋面積
最小	最小	4k	偶數	(1,2,5,4)	$(4k^2+k+3)^2$
		4k+3			$(4k^2+5k+4)^2$
		4k+1	奇數	(1,2,4,3)	$(4k^2+3k+3)^2$
		4k+2			$(4k^2+7k+6)^2$
最大	最大	4k	偶數	(4k,4k-1,4k-4,4k-3)	$(4k^2+5k-2)^2$
		4k+3		(4k+3,4k+2,4k-1,4k)	$(4k^2+11k+4)^2$
		4k+1	奇數	(4k+1,4k,4k-2,4k-1)	$(4k^2+7k)^2$
		4k+2		(4k+2,4k+1,4k-1,4k)	$(4k^2+9k+2)^2$

以上 A、B、C、D 為 1、2、…、n 等 n 個正方形中其中邊長相異的單一個正方形，
E、F、G、H 為由剩餘 $n-4$ 個正方形分別組成的單向複雜形平行鍊接結構。

五、1.設 d_1、d_2 是完全覆蓋矩形長與寬，i 是正方形邊長，A、B、C、D 是頂點正方形邊長，x、y 是頂點間單向複雜型平行鍊接結構正方形組長度，當方式固定後內部封閉面積為定值，內部封閉面積公式為

$$d_1d_2-\left[x^2+y^2+(A+B)x+(C+D)y+(A+C)(B+D)-(\sum_{i=1}^{n}i^2-A^2-B^2-C^2-D^2)\right]$$

2.若頂點正方形鍊接結構確定，則內部封閉面積固定，不因頂點間順序不同而不同；若完全覆蓋矩形面積是最大，則內部封閉面積亦為最大。

陸、應用與參考文獻

一、應用

商業市集的攤位或建商蓋社區型別墅大小、數量不一，如何能在給定的數量及大小的正方形區域下圍成最大或最小內部封閉區域，可利用我們的研究結果進行規劃與排列。例如:若想要攤位圍成的內部最大，方便該區域辦活動，則可用本研究最大完全覆蓋正方形排列法規劃攤位。

二、參考文獻

1.林怡君、葉姝昀、劉欣瑜(2005)。完美正方形。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會國中組數學科第一名作品說明書。

2.邱彤安、李依軒、翁彤葳、劉黎君(2013)。大方塊中的小方塊。中華民國第 53 屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作作品說明書。

3.吳沛昀、柯睿穎(2017)。虧格與方陣的最後一塊拼圖。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會作品說明書。

4.余宥芹、吳怡宣、藍睿瑜(2022)。解構奧運會徽探討平面鑲嵌。中華民國第 62 屆中小學科學展覽會國中組數學科第一名作品說明書。

5.APMO 2023 Problem 1 (artofproblemsolving.com)

三、圖片說明

本作品說明書中所有圖形及圖片由作者親自繪製，P1 中「自製道具」圖片由作者拍攝。

【評語】080402

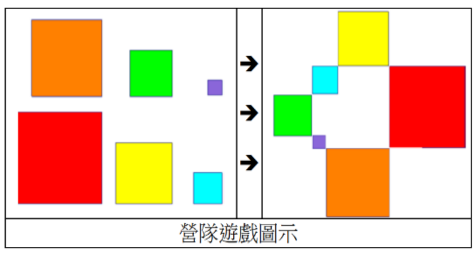
從一個數學營的活動出發，本研究主要目的在探討 n 個邊長分別為1、2、…、n 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性與方法，作者發展出「最大值矩形頂點配對法」及「任意值矩形頂點配對法」，給予正方形鍊成平行四邊形結構完整的說明；接著推廣至正多邊形的鍊接，最後並探討正方形在各種鍊接結構其完全覆蓋的矩形及最大、最小完全覆蓋正方形面積，並得出了非常豐富的成果。此作品的研究架構圖具體、清楚，使得本研究涉及的各個變項、關鍵流程、重要性質與結果清晰可見、一目了然；同時亦能透過文獻探討，將相關研究的結果摘要，並羅列各個研究對於本研究的啟發、以及與本研究的差異性；且在問題的分割處理細膩，分析探討過程有系統，問題的本質與解決的策略亦具備創意性，研究的最後，其鍊接結構的內部封閉面積公式分解整理與圖示解法相當漂亮，是一份出色優秀的作品。

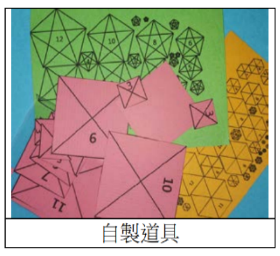
作品簡報

正多邊形平行封閉鍊接結構之研究

壹、前言

數學營隊提供邊長分別為 1、2、3、4、5、6 的正方形**各 1**，剪下後在平面上排列，使這些**正方形的邊與 *x* 軸、*y* 軸平行，且任兩個相鄰正方形相交於頂點**，像珠子一樣「鍊接」，怎麼排列才會成功? **從正方形到改變不同形狀**，如何做到正多邊形平行封閉鍊接結構之排列? 據此，


營隊遊戲圖示


自製道具

研究目的：

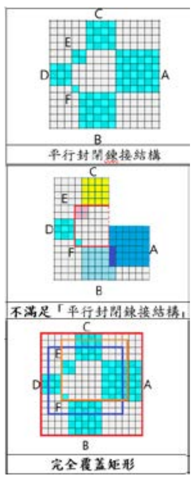
一、探討平面上 *n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性？不同鍊接方法所形成之圖形特徵與 *n* 值關係？

二、推廣至正多邊形時，探討與正方形相同的條件下會有什麼結果？

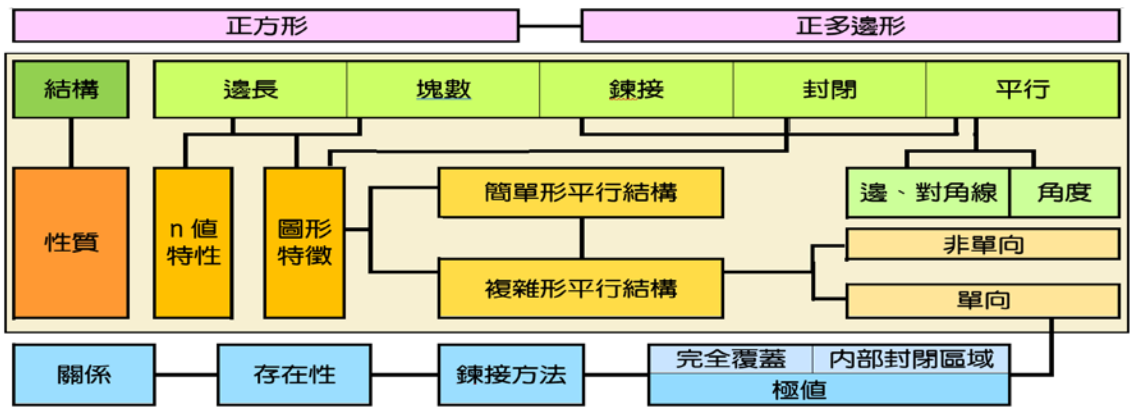
貳、解釋名詞

一、平行封閉鍊接結構：在平面上，數個正方形鍊接，其邊需與 *x* 軸 *y* 軸平行，且任兩個正方形如珠子般串鍊相接，所形成的封閉圖形。

二、完全覆蓋矩形：覆蓋所有鍊接正方形的矩形。



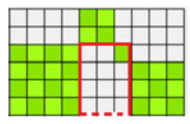
參、研究架構

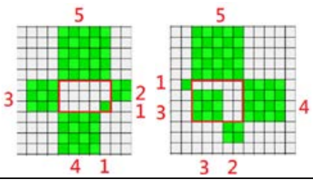


肆、研究過程與結果

一、探討平面上 *n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形鍊接成平行封閉結構的存在性？不同鍊接方法所形成之圖形特徵與 *n* 值關係？

◈*n* 個邊長分別為 1、2、…、*n* 的正方形平行封閉鍊接結構中 n 之最小值及存在性


邊長 1 及 3 的正方形需與邊長 4 的對應，但未封閉

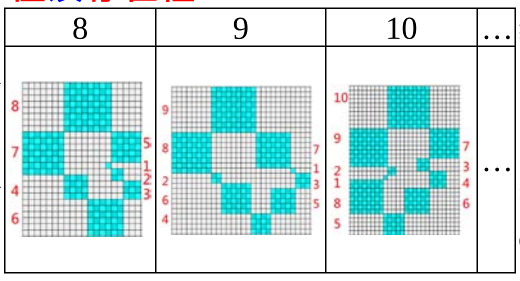

(5，3，4+1，1+2)、(5，1+3，3+2，4)

發現：

❶n=4，邊長為 1、2、3、4 的正方形無法形成平行封閉鍊接結構。

❷n 個正方形平行封閉鍊接結構排列 n 最小值為 5。

8	9	10	…

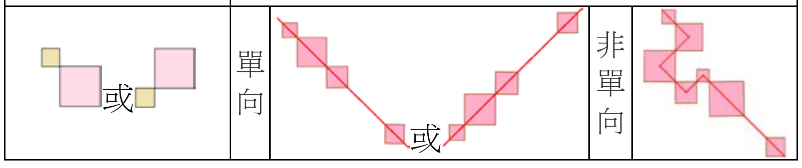


結果：n=8、9、10… 時，可成功平行鍊接。
(其餘詳見研究紀錄)

◈當 n>5，排列 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形鍊接成平行封閉結構的方法

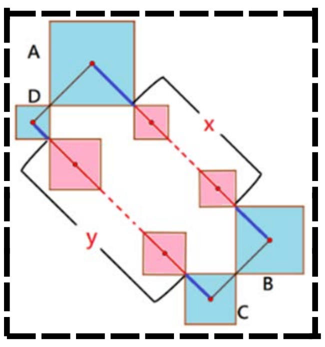
步驟 1：要任何 *n* 值都能成功，觀察圖形特徵，須做到兩兩正方形平行及頂點鍊接，據此定義、命名(如右表)。

簡單形平行結構	複雜形平行結構			
或	單向	或	非單向	



∵非單向時無法確定正方形組的數值
⇨無法由 n 值來保證此鍊接都可存在，且形成穩定控制可鍊接形式；故下面鍊接法均以「**單向複雜形平行結構**」討論。

步驟 2：考慮鍊接完對角線連成像矩形(如圖)，先把排在**矩形頂點的正方形**固定，再排頂點中間位置；∵邊長值每個數字皆不同，將 4 個頂點正方形邊長視為正整數，**分成 4 類(n=4k、4k+1、4k+2、4k+3)鍊接**，加上**頂點從極端值**討論，發展而得「極值矩形頂點配對法」；後續依序有「最大值矩形頂點配對法」、「任意值矩形頂點配對法」。



對角線斜矩形結構討論 考慮鍊接完對角線連成一個像傾斜的矩形形狀，命名為斜矩形結構　斜矩形結構➔

從 *n* 個正方形中挑選 **4 個適當邊長值**的正方形排在矩形頂點的位置，

其餘(n-4)個正方形依**單向複雜形平行結構**排在中間位置 *x*、*y*。

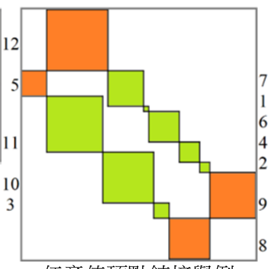
假設藍色正方形提供的邊長長度為 *A*、*B*、*C*、*D*，粉色正方形鍊接後分別提供的邊長長度和各為 *x*、*y*，如圖；

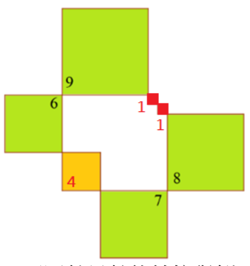
在對角線形成矩形時，*A*、*B*、*C*、*D* 藍正方形提供**1/2 條對角線**，*x*、*y* 粉正方形提供 **1 條對角線**給**斜矩形長**，∵要讓對角線排成矩形的長相等，得到$\frac{1}{2}$條(*A*+*B*)邊長的$\sqrt{2}$倍+1 條 *x* 邊長的$\sqrt{2}$倍=$\frac{1}{2}$條(*C*+*D*)邊長的$\sqrt{2}$倍+1 條 *y* 邊長的$\sqrt{2}$倍➔滿足 $|y-x|=\frac{(A+B)-(C+D)}{2}$

結果：

正方形
- 高度差鍊接法 — 要嘗試錯誤，反覆檢查才可得到鍊接方式
- **極值**矩形頂點配對法 — 要考慮大值頂點在同側、異側，推廣時有部分限制
- **最大值**矩形頂點配對法 — 最快速可成功鍊接
- **任意值**矩形頂點配對法 — 頂點可放任意值

➔ 可判斷連續數列、任意數列；可推廣至 n 邊形


任意值頂點鍊接舉例


不同數量數值鍊接舉例

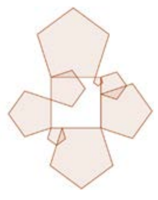


圖 1-1

任意值矩形頂點配對法說明 避免頂點中間 *x* 和 *y* 位置的正方形重疊或未鍊接

得到所有正方形應該滿足★方程組即可成功鍊接：

$$★\begin{cases} A+D=B+C \\ |y-x|=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2} \\ y+x=1+2+......+n-(A+B+C+D) \\ x_i+y_i\le A+D=B+C \end{cases};$$

➢其中 x_i、y_i 為 x、y 中兩個較相鄰的正方形邊長，滿足解完 $|y-x|$及 $y+x$ 聯立解須為正整數(可搭配 *n* 值 4*k*、4*k*+1、4*k*+2、4*k*+3 分類，需要滿足大值在同側、異側的情況)，且邊長差$|y-x|$可為任意小於 $2n-4$ 【$=(n+n-1)-(1+2)$】的正整數。

➢若能滿足★方程組，**任意取定不同數量**、**不同正整數值**邊長的正方形，亦可成功。

推廣至正多邊形，因「外角、內角角度與鍊接」的關係，即便邊長和對邊相等，也無法「其中一邊與 *x* 或 *y* 軸平行」。如圖 1-1： 8 個正五邊形鍊接滿足對邊邊長和相等，但無法平行。

思考：正多邊形平行無法達成，主要是不能和「*x*、*y* 軸」平行；原條件可視為「每邊平行」，怎樣可「兩兩正多邊形每邊平行」？

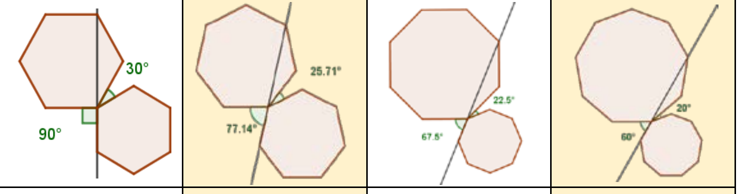
二、推廣至正多邊形，探討與正方形相同的條件下會有什麼結果？

◈探討正多邊形鍊接要怎樣調整，才能達到鍊接成平行封閉鍊接結構➔兩兩正多邊形每邊可平行

▲兩兩正 *n* 邊形**對角線重合**–正奇邊形、正偶邊形皆可平行

正六邊形(偶)	正七邊形(奇)	正八邊形(偶)	正九邊形(奇)
			
2 外角 60、60 度	2 外角$\frac{360}{7}$、$\frac{360}{7}$度	2 外角 45、45 度	2 外角 40、40 度

▲正 *n* 邊形其中一**邊與**另一正 *n* 邊形**對角線重合**

正六邊形(偶)	正七邊形(奇)	正八邊形(偶)	正九邊形(奇)
			
不平行	平行	不平行	平行

結果：❶正偶邊形透過「**對角線重合法**」❷正奇邊形透過「**對角線重合法**」及「**對角線與邊重合法**」，使兩兩正 *n* 邊形滿足每個邊平行。

◈滿足兩兩正多邊形每邊平行下，正多邊形可否排成平行封閉鍊接結構—正方形鍊接方法適用在正△，其餘正 n 邊形(n>5)不一定適用

■探討 $n\geq5$，平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n，正多邊形之平行封閉鍊接結構

關鍵：「正多邊形對角線長度對於其邊長之比值為定值」，當配合對角線重合法、對角線與邊重合法排列時，鍊接完對角線連成一個像平行四邊形，用到的對角線長度為「邊長的倍數」。故直接以邊長討論即可，要滿足對角線鍊接平行四邊形的對邊長相等。

設 4 個頂點正多邊形的邊長長度為 A、B、C、D，頂點間位置鍊接後正多邊形組邊長長度和各為 x、y，對角線長度=正 n 邊形邊長的 s 倍

困難：∵正奇邊形($n\geq5$)對角線未通過正多邊形中心，無法像正偶邊形一樣由對角線中心(圖 2-1)形成平行四邊形對邊邊長和相等，只能由「對角線端點」出發(圖 2-2)，做適當調整使其形成平行四邊形。

正偶邊形因內角與外角搭配時角度過大會相交，故只能從對角線中心出發(見圖 2-3)。

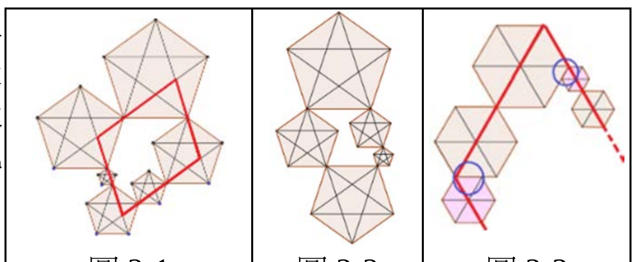


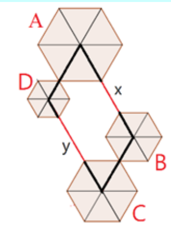
圖 2-1　圖 2-2　圖 2-3

發現：正偶邊形可透過「對角線中心」出發，正奇邊形可透過「對角線端點」出發進行平行結構鍊接。

對角線中心出發平行四邊形結構

1/2 條($A+B$)邊長的s倍 +1 條 x 邊長的s倍 =1/2 條($C+D$)邊長的s倍 +1 條 y 邊長的s倍

➔滿足 $\boxed{y-x=\frac{(A+B)-(C+D)}{2}}$

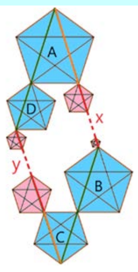


對角線端點出發平行四邊形結構

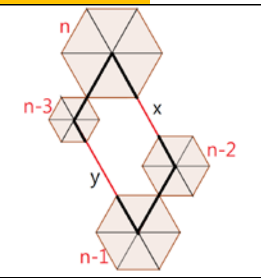
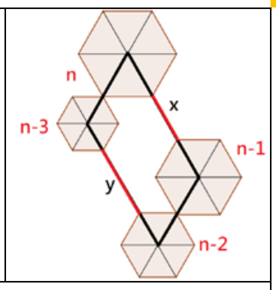
($A+x$)邊長的s倍 = ($C+y$)邊長的s倍

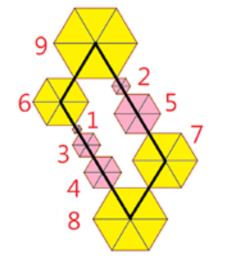
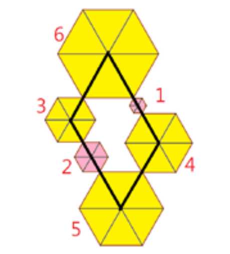
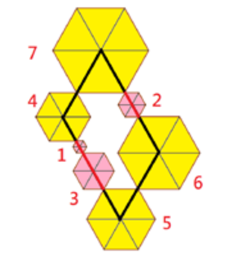
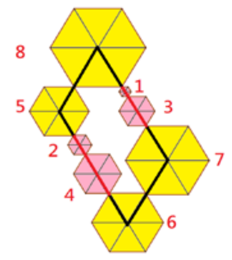
➔ ($A+x$)邊長= ($C+y$)邊長

➔滿足 $\boxed{y-x=A-C}$

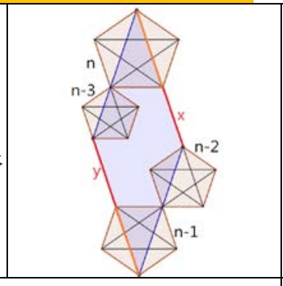
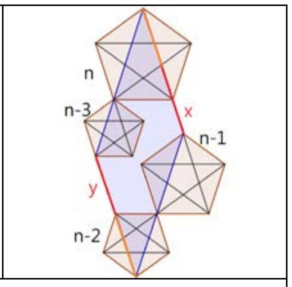
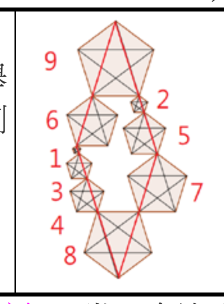
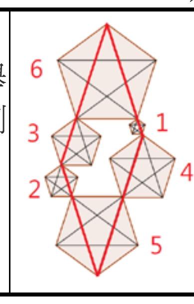
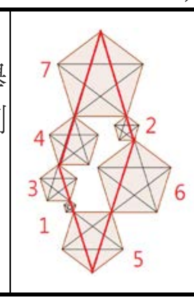
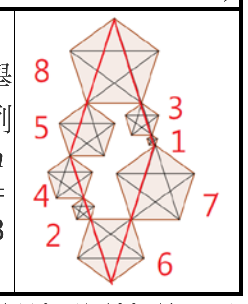


◈最大值平行四邊形頂點配對法—正偶邊形對角線中心出發

	情形 1	情形 2
圖示	情形 1　大值頂點在平行四邊形長**異側** 	情形 2　大值頂點在平行四邊形長**同側** 
$\lvert y-x\rvert$	$[(n+n-2)-(n-3+n-1)]\div2=\mathbf{1}$	$[(n+n-1)-(n-3+n-2)]\div2=\mathbf{2}$

n	$4k+1$					$4k+2$					$4k+3$					$4k$				
剩餘正方形	1、2、…、$4k$-3					1、2、…、$4k$-2					1、2、…、$4k$-1					1、2、…、$4k$ -4				
分組 x	0	5	…	n -8	n-4	1	6	…	n-8	n -4	2	7	…	n -8	n -4	3	8	…	n -8	n -4
分組 x	0	2	…	n-11	n-7	0	3	…	n -11	n -7	0	4	…	n -11	n -7	1	5	…	n -11	n -7
分組 y	1	4	…	n-9	n-5	2	5	…	n-9	n-5	3	6	…	n-9	n-5	4	7	…	n-9	n-5
分組 y	0	3	…	n-10	n-6	0	4	…	n-10	n-6	1	5	…	n-10	n-6	2	6	…	n-10	n-6
$yi-xi$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0
舉例																				

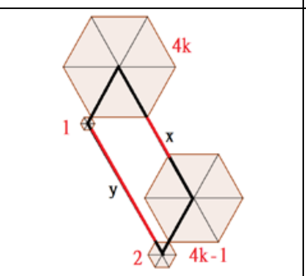
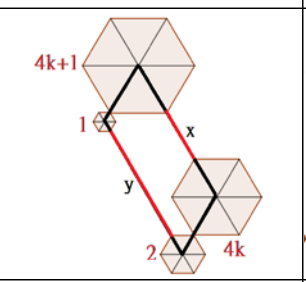
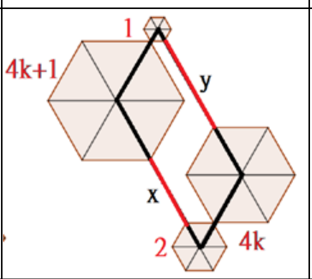
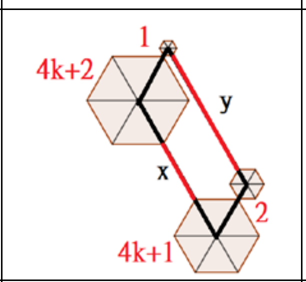
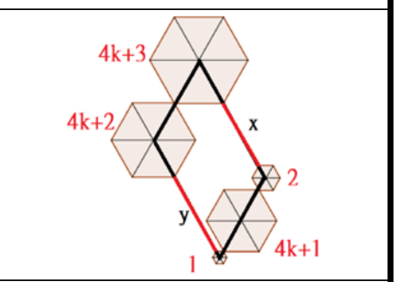
◈最大值平行四邊形頂點配對法—正奇邊形對角線端點出發

情形 1		情形 2	
情形 1　大值頂點在平行四邊形長**異側** 		情形 2　大值頂點在平行四邊形長**同側** 	
n-(n -1) = **1**		$n-(n-2)=$ **2**	
$4k$ +1	$4k$ +2	$4k$	$4k$ +3
($4k^2$-5k+1，$4k^2$-5k+2)	($4k^2$-3k，$4k^2$-3k+1)	($4k^2$-k-1，$4k^2$-k+1)	($4k^2$-7k+2，$4k^2$-7k+4)
舉例 n = 9 	舉例 n = 6 	舉例 n = 7 	舉例 n = 8 

結果:❶當正多邊形 n=4k +1、4k +2 及 n=4k、4k +3 時分別可用情形 1 及情形 2 的最大值平行四邊形頂點配對法。

❷左上述表格不是正偶邊形唯一鍊接方式，只要讓中間的正偶邊形組合邊長總和差 y-x 為 1 或 2 即可，x、y 中的正偶邊形組鍊接順序可交換。

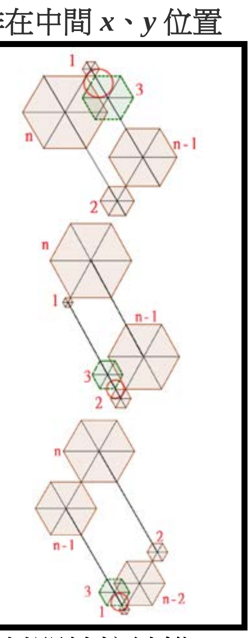
◈◈極值平行四邊形頂點配對法 邊長 1、2、…、n 等各 1，其中邊長極端值的正偶邊形先排在平行四邊形頂點，其餘依單向複雜形平行結構排在中間 x、y 位置

極值法	極值平行四邊形頂點配對法				變型極值平行四邊形頂點配對法
情形	$4k$	$4k$ +1		$4k$ +2	$4k$ +3
大值頂點	在平行四邊形長邊同側	在平行四邊形長邊同側	在平行四邊形長邊異側	在平行四邊形長邊同側	變型
頂點	$4k$、$4k$ -1、2、1	$4k$ +1、$4k$、2、1	1、$4k$、2、$4k$ +1	1、2、$4k$ +1、$4k$ +2	$4k$ +3、2、$4k$ +1、1、$4k$ +2
圖示					
邊長差$\lvert y-x\rvert$	$\frac{(4k+4k-1)-(1+2)}{2}=\mathbf{4k-2}$	$\frac{(4k+1+4k)-(1+2)}{2}=\mathbf{4k-1}$	$\frac{(4k+1+2)-(4k+1)}{2}=\mathbf{1}$	$\frac{(4k+2+4k++1)-(1+2)}{2}=\mathbf{4k}$	$\frac{(4k+3+2)-(1+4k+2)}{2}=\mathbf{1}$
(x,y)	($4k^2$-5k，$4k^2$-k -2)	($4k^2$-3k -1，$4k^2$+ k -2)	($4k^2$-3k -2，$4k^2$- k -1)	($4k^2$+k-2，$4k^2$+ k -1)	($4k^2$+ k -2，$4k^2$+ k -1)

中間 x、y 在最小邊長處排入頂點外剩下的最小圖形

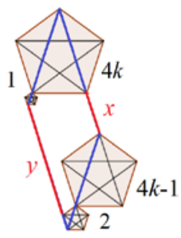
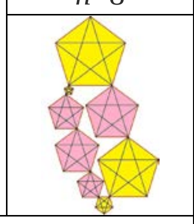
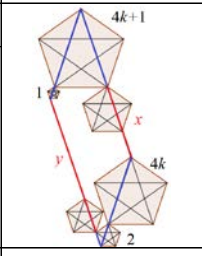
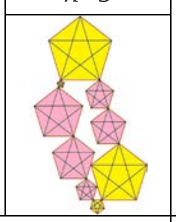
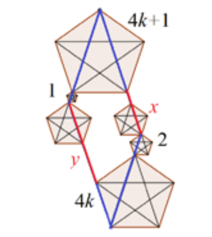
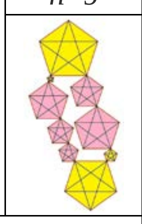
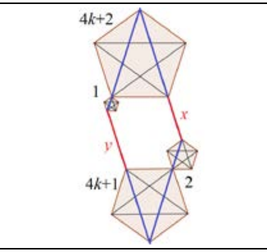
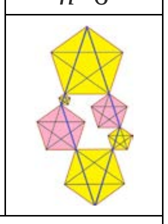
➔➔

失敗



結果：除正方形，其餘因「邊長及內角過大」，無法使用「極值平行四邊形頂點配對法」排列邊長 1、2、…、n 各 1 個正偶 n 邊形平行封閉鍊接結構。

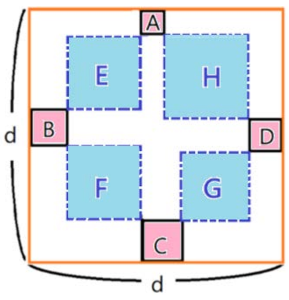
◈◈極值平行四邊形頂點配對法 邊長 1、2、…、n 等各 1，其中邊長極端值的正奇邊形先排在平行四邊形頂點，其餘依單向複雜形平行結構排在中間 x、y 位置

方法	極值平行四邊形頂點配對法			變型極值圖形頂點配對法
情形	$4k$	$4k$+1		$4k$+2	$4k$+3
頂點放置	大值頂點在平行四邊形長**同側**	大值頂點在平行四邊形長**同側**	大值頂點在平行四邊形長**異側**	大值頂點在平行四邊形長**異側**	**變型**
頂點	$4k$、2、$4k$-1、1	$4k$+1、2、$4k$、1	$4k$+1、2、$4k$、1	$4k$+2、2、$4k$+1、1	$4k$ +3、2、$4k$ +1、1、$4k$ +2
鍊接順序	[n， x，n-1，2，y，1]	[n，x，2，y，1]	[n，2，x，n -1，y，1]	[(n，x，2，n -1，y，1]	[(n，x，2，n -2，1，y，n -1]
圖示	 n=8 	 n=9 	 n=9 	 n=6 	1.同側及異側不行(跟正方形鍊接同理，是非正整數解，不合) 2.變型不行:原本方法對邊不等長。
$\lvert y-x\rvert$	$(4k)-(2)=4k-2$	$(4k+1)-(2)=4k-1$	$(4k+1)-(4k)=1$	$(4k+2)-(4k+1)=1$	

結果：正奇邊形由「對角線端點出發」，在鍊接時要注意 x、y 位置中間的正奇邊形兩兩不要重疊，可使用「極值平行四邊形頂點配對法」。

◈◈◈任意值平行四邊形頂點配對法

要滿足任意值矩形頂點配對法的★方程組才可鍊接成功。



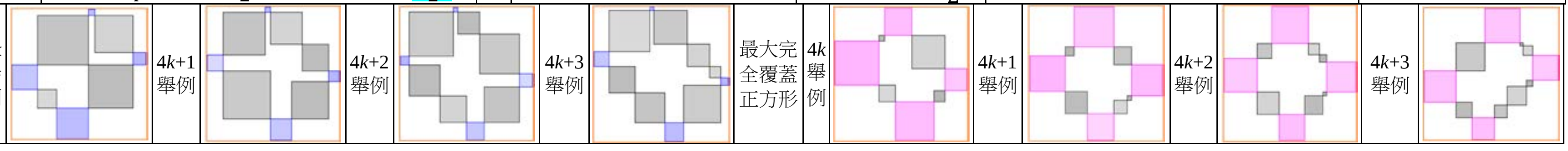
伍、討論

討論一、在最大完全覆蓋正方形及最小完全覆蓋正方形條件下，探討平面上 n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形排列成平行封閉鍊接結構的方法與 n 值特性、圖形特徵之關係

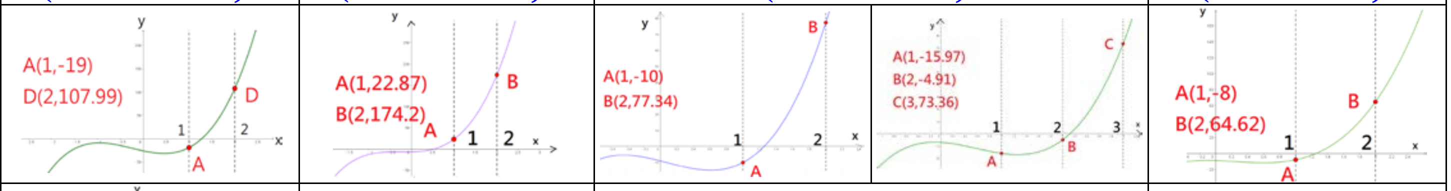
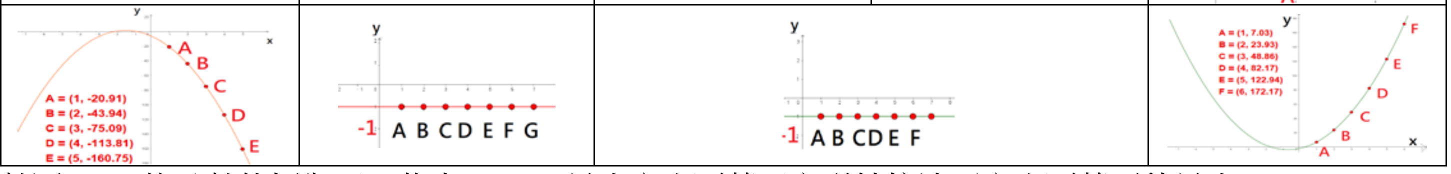
假設由 A、B、C、D、E、F、G、H 組成平行封閉鍊接結構會被大正方形完全覆蓋，其中 A、B、C、D 是 n 個正方形中邊長相異的單 1 正方形，E、F、G、H 是由剩餘 n-4 個正方形分別組成的單向複雜形平行鍊接結構，d 為完全覆蓋正方形之邊長，須滿足$\begin{cases}E+B+F=H+D+G \ldots\ldots(1)\\E+A+H=F+C+G \ldots\ldots(2)\end{cases}$，

令定值 $S=1+2+3+\ldots\ldots+n=A+B+C+D+E+F+G+H$，得到 $d=A+E+B+F+C=\dfrac{S+A+C}{2}=B+E+A+H+D=\dfrac{S+B+D}{2}$，且 d 是正整數，再令 $A+C=B+D=t \Rightarrow 2|S+A+C$，且 $2|S+B+D$，將 n 分成 $4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 等 4 種類型討論 d 值：

類型	n	$d\in N$	t	$A+B+C+D$ 最小⇨t 值	d_{min}	$A+B+C+D$ 最大⇨t 值	d_{max}
1	$4k$	$\frac{4k(4k+1)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+k+\frac{t}{2}$	偶數	$A+C=B+D=t$ **1+5=2+4=6**	$4k^2+k+\frac{6}{2}$	$(A,C)=(4k,4k-4) \Rightarrow t=8k-4$	$4k^2+k+\frac{8k-4}{2}$
4	$4k+3$	$\frac{(4k+3)(4k+4)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+7k+3+\frac{t}{2}$			$4k^2+7k+3+\frac{6}{2}$	$(A,C)=(4k+3,4k-1) \Rightarrow t=8k+2$	$4k^2+7k+3+\frac{8k+2}{2}$
2	$4k+1$	$\frac{(4k+1)(4k+2)+t}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+3k+\frac{1+t}{2}$	奇數	$A+C=B+D=t$ **1+4=2+3=5**	$4k^2+3k+\frac{1+5}{2}$	$(A,C)=(4k+1,4k-2) \Rightarrow t=8k-1$	$4k^2+3k+\frac{1+8k-1}{2}$
3	$4k+2$	$\frac{(4k+2)(4k+3)}{4}+\frac{t}{2}=4k^2+5k+\frac{3+t}{2}$			$4k^2+5k+\frac{3+5}{2}$	$(A,C)=(4k+2,4k-1) \Rightarrow t=8k+1$	$4k^2+5k+\frac{3+8k+1}{2}$



討論二、比較最大完全覆蓋正方形、最小完全覆蓋正方形、最大值矩形頂點配對法、極值矩形頂點配對法下，何種鍊接方法有完全覆蓋矩形面積極值

n 值分類 / 排列方法	$4k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k+1$	$4k$
極值矩形頂點配對法 A_1	變型	大值頂點在長異側	大值頂點在長同側	大值頂點在長異側	大值頂點在長同側
	$(4k^2+9k+2)(4k^2+9k+5)$	$(4k^2+5k+3)(4k^2+9k+3)$	$(4k^2+5k)(4k^2+5k+1)$	$(4k^2+k+2)(4k^2+7k+1)$	$(4k^2+3k+1)(4k^2+3k)$
最大值矩形頂點配對法 A_2	$(4k^2+11k+5)(4k^2+11k+2)$	$(4k^2+9k+3)(4k^2+9k+1)$	$(4k^2+7k+1)(4k^2+7k-1)$		$(4k^2+5k-1)(4k^2+5k-2)$
最大完全覆蓋正方形 A_3	$(4k^2+11k+4)^2$	$(4k^2+9k+2)^2$	$(4k^2+7k)^2$		$(4k^2+5k-2)^2$
最小完全覆蓋正方形 A_4	$(4k^2+7k+6)^2$	$(4k^2+5k+4)^2$	$(4k^2+3k+3)^2$		$(4k^2+k+3)^2$
A_1-A_4 GGB 函數圖 (紅色點是部分正整數解)					
A_2-A_3 GGB 函數圖 (紅色點是部分正整數解)					

發現：❶A_1-A_4GGB 所有函數圖 $k\geq 2$ 後函數值恆為正，代表 $n\geq 8$，最小完全覆蓋正方形鍊接法下完全覆蓋面積最小。
❷ A_2-A_3GGB 函數圖中當 $4k+3$、$4k+2$、$4k+1$ 時 $k\geq 0$ 值恆負，代表最大完全覆蓋正方形鍊接法下面積最大。但 $n=4k$ 為特例。

討論三、不同鍊接結構下內部封閉圖形面積之探討

困難：在同一長度下，∵鍊接順序不同，呈現不同形狀(如右圖)，面積如何計算?怎樣鍊接可得內部封閉圖形最大及最小值?

EXCEL 計算分析得知:因鍊接結構不同，造成面積和不同；當**頂點位置正方形固定，內部面積恆為定值**。

結果:1.**頂點位置**正方形固定後，矩形長寬就固定，推得頂點正方形周遭區域(黃色區域)也固定(恆為 $AB+AD+BC+CD+Ax+Bx+Cy+Dy$)(以 $n=12$ 最大值矩形結構為例)。

2.在頂點正方形固定，其間 x、y 位置的**正方形組順序交換，內部封閉面積亦固定**(最大值頂點鍊接結構灰黃白之外的面積恆為 $[x^2+y^2-(n-4)^2-(n-5)^2-\ldots\ldots-2^2-1^2]\div 2$)。

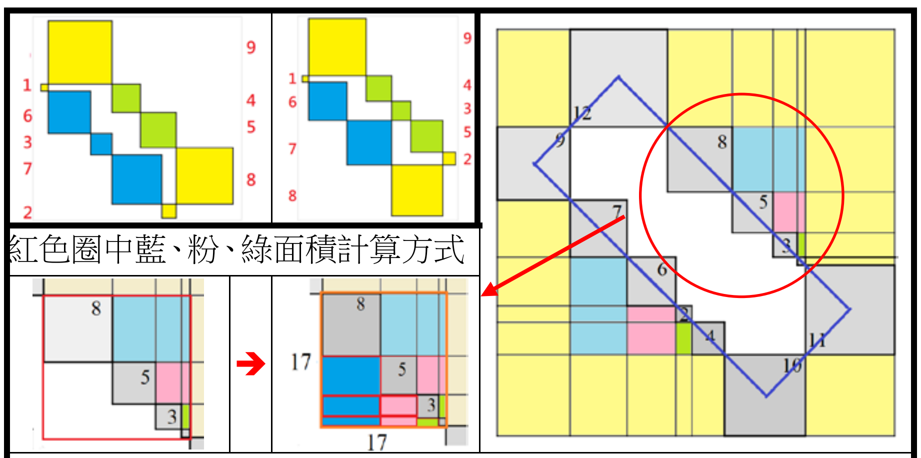


圖 3-1　$n=12$ 鍊接方式 1 最大值矩形頂點配對區域分割圖

陸、結論

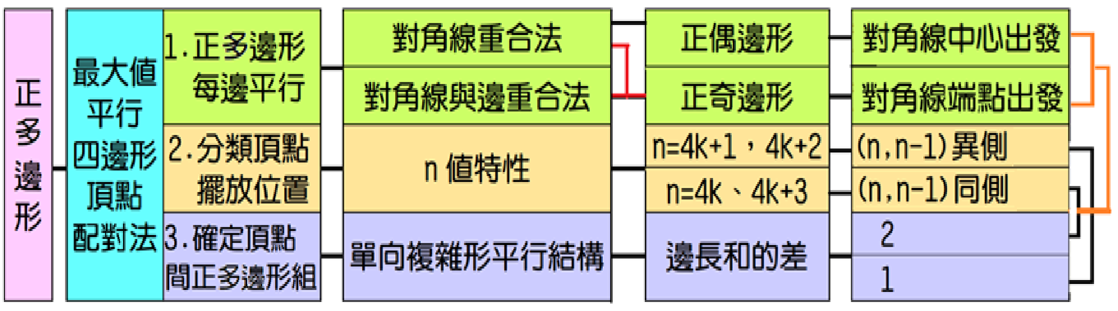
一、n 個邊長分別為 1、2、…、n 的正方形鍊接成平行封閉結構中 **n 最小值為 5**。

二、將 1、2、…、n 等 n 個正方形放置在**對角線連線而成的斜矩形**上，利用 **n 值特性($n=4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$)分類**正方形在斜矩形頂點擺放方式，頂點正方形邊長為 A、B、C、D，搭配「單向複雜形平行結構」，x 和 y 是頂點間正方形組長度， x_i、y_i 是頂點間正方形組中較相鄰的單一正方形邊長；可透過「**極值矩形頂點配對法**」、「**最大值矩形頂點配對法**」、「**任意值矩形頂點配對法**」成功形成平行封閉鍊接結構。
當**滿足「任意值矩形頂點配對法」的方程組★**(見右)， 可推廣至**任意取定不同邊長**、**不同數量**的正方形**判斷是否成功**形成平行封閉鍊接結構。

$$\bigstar\begin{cases} A+D=B+C \\ |y-x|=\dfrac{(A+B)-(C+D)}{2} \\ y+x=\dfrac{n(n+1)}{2}-(A+B+C+D) \\ x_i+y_i\leq A+D=B+C \end{cases}$$

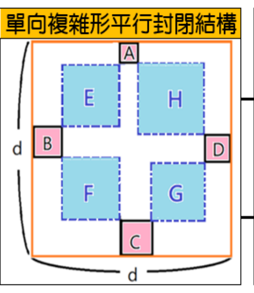
三、**推廣至 n 邊形**，透過「**圖形特徵**」與「**n 值特性**」系統分析，得到**最快速的最大平行四邊形頂點配對法**流程(見右圖)。

四、單向複雜形平行結構下，**最大完全覆蓋正方形鍊接法及最小完全覆蓋正方形鍊接法流程**(見右下➘)



五、設 d_1、d_2 是完全覆蓋矩形長與寬，i 是正方形邊長，A、B、C、D 是頂點正方形邊長，x、y 是頂點間單向複雜形平行鍊接結構正方形組長度，當**鍊接結構的頂點位置確定，x、y 間的正方形不管如何交換，內部封閉面積為定值**。

內部封閉面積公式為 $d_1d_2-[x^2+y^2+(A+B)x+(C+D)y+(A+C)(B+D)-(\sum_{i=1}^{n}i^2-A^2-B^2-C^2-D^2)]$

完全覆蓋正方形 / 單向複雜形平行封閉結構	面積	A+B+C+D	n 值特性	A+C=B+D	(A,B,C,D)	完全覆蓋面積
	最小	最小	4k	偶數	(1,2,5,4)	$(4k^2+k+3)^2$
			4k+3			$(4k^2+5k+4)^2$
			4k+1	奇數	(1,2,4,3)	$(4k^2+3k+3)^2$
			4k+2			$(4k^2+7k+6)^2$
	最大	最大	4k	偶數	(4k,4k-1,4k-4,4k-3)	$(4k^2+5k-2)^2$
			4k+3		(4k+3,4k+2,4k-1,4k)	$(4k^2+11k+4)^2$
			4k+1	奇數	(4k+1,4k,4k-2,4k-1)	$(4k^2+7k)^2$
			4k+2		(4k+2,4k+1,4k-1,4k)	$(4k^2+9k+2)^2$

柒、應用

透過結果可以優化「**商業攤位配置或房屋用地規劃**」；還設計一款全新「**正多邊形益智遊戲拼圖**」，內含多種正多邊形不同邊長、不同數量的拼板，變化超多，可以給定不同形狀、不同數量，運用計算益智解題，讓遊戲不只是遊戲，好玩又燒腦。

◈**備註：本研究所有照片、圖片皆由作者自行拍攝及繪製。**

捌、參考文獻

1. APMO 2023 Problem 1 (artofproblemsolving.com)
2.林怡君、葉姝昀、劉欣瑜(2005)。完美正方形。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會國中組數學科第一名作品說明書。
3.邱彤安、李依軒、翁彤葳、劉黎君(2013)。大方塊中的小方塊。全國第 53 屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作作品說明書。
4.吳沛昀、柯睿穎(2017)。虧格與方陣的最後一塊拼圖。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會 作品說明書。
5.余宥芹、吳怡宣、藍睿瑜(2022)。解構奧運會徽探討平面鑲嵌。全國第 62 屆中小學科學展覽會國中組數學科第一名作品說明書。