

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國小組 數學科

佳作

080401

魚龍百變-在轉角遇見小魚畫家

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：  小六 楊晉暘  小六 湯淳茜  小六 沈恣曜  小五 洪羽彤	指導老師：  陳志平
---	------------------

關鍵詞：繪圖機、齒輪、轉速比

# 魚龍百變-在轉角遇見小魚畫家

## 摘要

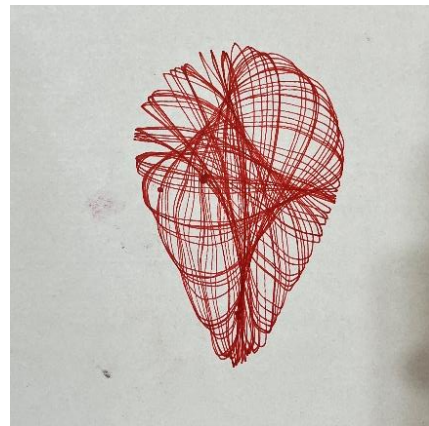
- 一、本研究探討連動桿繪圖機的結構以及相關原理，並改良原有的繪圖機。
- 二、順利找出繪圖機桿長的限制。在改變連桿長度以及旋轉半徑等變數的研究中，改變後的變數必須符合桿長的限制才能順利繪製出圖形。
- 三、找出繪製圖形的形狀，也找出繪圖點 B 和繪圖點 P 的極值。
- 四、探討出轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑對於繪製出來圖形的影響。
- 五、改良現有的繪圖機，並且以改變旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑三個變數來繪製出不同的圖形。
- 六、依照研究的成果來改變繪圖機的變數，順利繪製出想要的圖形。

## 壹、研究動機

我們在自然教室的角落發現一臺由保麗龍板、廢 CD、木條、玻璃紙、馬達以及太陽能板所組成的繪圖機玩具，如圖一。可以看出這臺繪圖機的動力由太陽能板提供，我們試著用燈光照射，目前已無法運作，但是機器上卻留下了一張當時的繪圖作品，如圖二。這臺機器和這張圖紙引發我們的興趣，為什麼這樣簡單的機器能夠畫出這麼漂亮的圖案？這些圖案是固定的嗎？有什麼方式可以改變它的外觀？其中又隱含了什麼數學原理在裡面呢？在一連串的疑問下，展開了我們「魚龍百變-在轉角遇見小魚畫家」的研究。這臺繪圖機當時被命名為「小魚畫家」。今年是龍年，相傳鯉魚躍過龍門之後，即可化身為龍，騰飛升天，形象百變、幻化無窮。我們將研究題目訂為「魚龍百變」，期許自己在繪圖機所畫出千變萬化的圖形中，找出規律，並理解其相關原理。



圖一 指導老師拍攝



圖二 指導老師拍攝

## 貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有四：

- 一、分析學長姐所留下小魚畫家連動桿繪圖機繪圖原理。
- 二、找出繪圖機各桿件長度的限制。
- 三、找出影響繪圖機繪圖的變數，畫出不同的圖形。
- 四、改良現有連動桿繪圖機。

## 參、研究器材

紙、筆、Linkage 機構模擬軟體、Microsoft Excel 軟體、齒輪繪製網站、Beam Studio 雷切軟體、雷切機、雷切用木板、市售連動桿繪圖機。

## 肆、研究過程

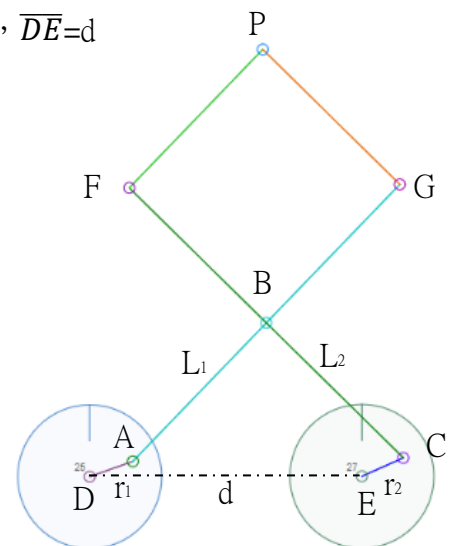
### 一、相關名詞及代號定義

(一)連動桿：指由許多構件組成，用來傳遞力及運動的機械結構。

(二) Linkage 機構模擬軟體：為免費的電腦程式，可以模擬連動桿機構運轉。

(三)繪圖機各部位代號：

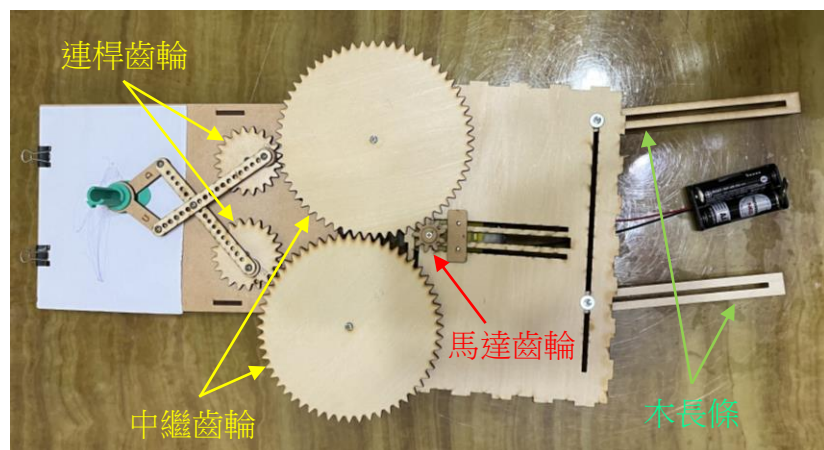
繪圖機由兩個旋轉的轉盤，以及一組連動桿所組成，各個連接處以鉚釘或是轉軸固定，可以自由轉動，為了方便辨識，我們將各連接點命名如圖三所示，各桿件的長度如下： $\overline{AB}=L_1$ ， $\overline{BC}=L_2$ ， $\overline{AD}=r_1$ ， $\overline{CE}=r_2$ ， $\overline{DE}=d$   
點 P 和點 B 分別為兩個可繪製圖形的點。



(四)自製改良現有繪圖機各齒輪名稱，如圖四：

- 1.馬達齒輪：裝在馬達上，隨著馬達轉動的齒輪。
- 2.中繼齒輪：同時連接馬達齒輪和連桿齒輪，由馬達齒輪帶動，再將動力傳送給連桿齒輪，中繼齒輪固定在木長條上，木長條可在木板上橫向移動，中繼齒輪可在木長條上縱向移動，以符合不同大小的連桿齒輪。
- 3.連桿齒輪：連接中繼齒輪和連桿組，帶動連動桿進行繪圖，連桿齒輪有不同齒數以產生不同的轉速。不同齒數，會產生不同大小的齒輪。

圖三 自 Linkage 軟體匯出



圖四 指導老師拍攝

## 二、文獻探討

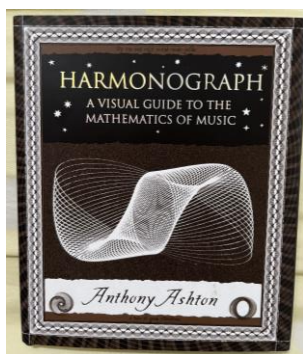
我們在學校的網站找到當年的相關資料，這臺機器原來是學長姐在 2016 年參加太陽能科學玩具比賽所留下來的作品，由網站上的照片我們發現學姐手上所拿的圖形與現在我們看到的不同，如圖五。由此可知這臺繪圖機能夠繪製出不同的圖形。由於當年的學長姐都已經畢業，經過詢問，我們順利找到他們的指導老師，老師借給我們一本英文書籍 Harmonograph(Ashton[1])，如圖六。另外我們查閱歷屆的全國科展的資料，並無相關的研究。而以連動桿繪圖機進行搜尋，網路上有多款的繪圖機，其中林允涵的自造筆記齒輪連桿繪圖機的網站中[2]，有提到繪圖機的相關歷史。我們綜合英文書籍 Harmonograph 的敘述及網路上查找到的資料，將其整理如下：

繪圖機最早可以追溯到 2500 年前畢達哥拉斯(Pythagoras，前 570 年-前 495 年)聽到鐵錘敲擊鐵砧所發出的聲音，它的音高與鐵錘的重量有關，不同重量的鐵錘產生的聲音有不同的頻率，結合幾個不同頻率的音就可以形成動聽的和弦。

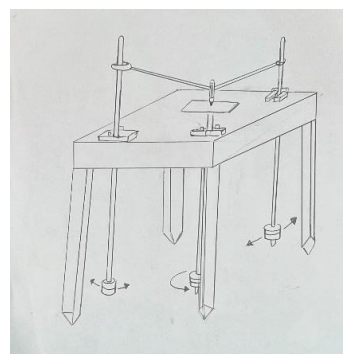
音樂與美術經由數學做出了連結，就像不同的音高組成了和弦，進而產生好聽的音樂；不同方向的擺動結合在一起可以操控畫筆畫下線條，產生美麗的圖形。蘇格蘭數學家 Bailie Hugh Blackburn(1823-1909)於 1844 年發明了諧波儀(Harmonograph)，透過使用三個擺錘，其中兩個擺錘以相對的直角擺動，並透過連桿連接到畫筆，第三個擺錘承載著畫紙，三個擺錘同時擺動，畫出圖形，如圖七。



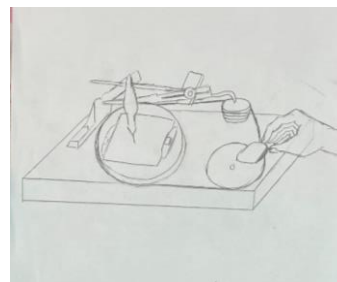
圖五 自學校網站下載



圖六 指導老師拍攝 圖七 參考 Harmonograph(Ashton[1])  
由第四作者繪製



1908 年被稱為 Marvelous Wondergraph 的繪圖機上市，它不再以擺錘為動力，改用手轉動轉盤並以繩子帶動紙板盤和連桿，連桿上的畫筆則會在紙板盤上繪製出令人驚嘆的圖形，如圖八。



圖八 參考自造筆記齒輪連桿繪圖機(林允涵[2])  
由第四作者繪製

之後 Pintograph 繪圖機被製造出來，它由兩個轉盤組成。並各自以不同的速率轉動，兩個轉盤經由連桿連接到畫筆，形式就和我們研究的小魚畫家繪圖機相似。

### 三、繪圖機的構造分析

#### (一)基本構造

查看學長姐留下的小魚畫家繪圖機，如圖九，可以發現它的動力來自以太陽能為能源的馬達，馬達帶動圓形轉盤，並經由橡皮筋帶動另一個轉盤，轉盤上連接一組連桿，經由轉盤的轉動，帶動整組的連桿做規律的移動，連桿的頂端夾有一枝筆，將頂端的移動路徑繪製下來，形成了我們看到的圖案。

#### (二)可改變的因素

- 1.連桿組的木條上有許多的孔洞，用鉚釘固定連桿上不同的孔洞，會產生不同比例的連桿長度。
- 2.在兩個轉盤上分別有 6 個和 3 個孔洞，可以將連桿固定在這些孔洞中，轉盤轉動時可產生  $6 \times 3 = 18$  種不同的旋轉半徑組合。
- 3.右邊被帶動的轉盤，有上下 2 層，其大小不同，當橡皮筋套在不同的位置，會有 2 種不同的旋轉速度比。

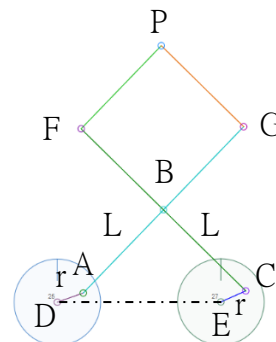


圖九 指導老師拍攝

#### (三)桿件長度限制

##### 1. $\overline{AB}$ 的長度限制

在繪圖的過程中，點 A 以  $r_1$  為半徑，繞著點 D 做圓周運動；點 C 以  $r_2$  為半徑，繞著點 E 做圓周運動，進而帶動整組的連動桿進行規律性的運動，A 點和 C 點在整個旋轉過程中會產生兩個圓，不同的轉速會讓  $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$  彼此之間會有不同的角度組合，進而與點 B 形成不同形狀的三角形，利用三角形的基本性質，兩邊之和大於第三邊可以推論出繪圖機下半部構件的長度限制。為了簡化研究，我們先讓繪圖機呈現左右對稱的情形，亦即  $\overline{AB} = \overline{BC} = L$ ， $\overline{AD} = \overline{CE} = r$ ， $\overline{FB} = \overline{GB}$ ， $\overline{FP} = \overline{GP}$ ，如圖十。



圖十 自 Linkage 軟體匯出

點 A 和點 C 繞著各自的旋轉中心旋轉，當 A、C、D、E 四點形成一直線且點 D 和點 E 在  $\overline{AC}$  上，如圖十一，此時  $\angle ABC$  的角度最大。而點 B 最靠近  $\overline{DE}$ ，此時可以推論出  $\overline{AB}$  最短的長度限制。

$\triangle ABC$  中，依據三角形基本性質兩邊之和大於第三邊可知

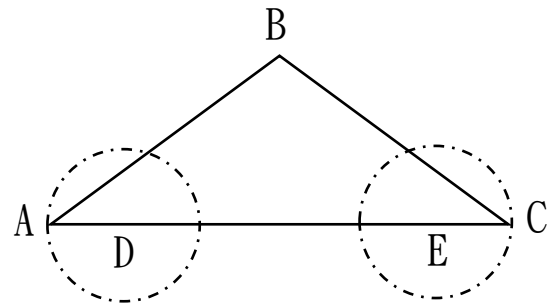
$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{DE} + \overline{AD} + \overline{CE}$$

$$\text{令 } \overline{AB} = \overline{BC}, \overline{AD} = \overline{CE} = r, \overline{DE} = d$$

$$\Rightarrow 2\overline{AB} > d + 2r$$

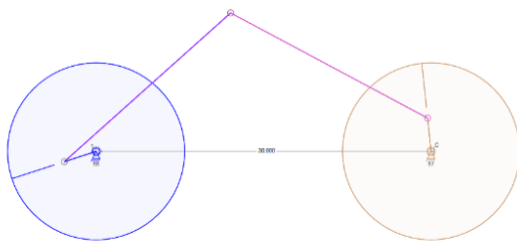
$$\Rightarrow \overline{AB} > \frac{d}{2} + r$$



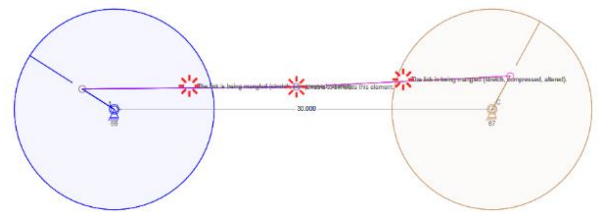
圖十一 自 Linkage 軟體匯出

由上述的推論可知  $\overline{AB}$  的桿長、兩旋轉中心彼此的距離  $d$  及旋轉半徑  $r$  三者之間必須符合  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$  才可以形成一個三角形。

為了觀察繪圖機運轉的狀況，我們使用 Linkage 機構模擬軟體來進行模擬，我們量測學長姐所留下的小魚畫家繪圖機下半部各構件的比例，令  $\overline{AB} = \overline{BC} = L = 20$ ， $\overline{AD} = \overline{CE} = r = 3$ ， $\overline{DE} = d = 30$ ，如圖十二，可正常運轉。由上述推論  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ， $\overline{AB} = 20 > \frac{d}{2} + r = 18$ ，符合推論的結果。若是  $\overline{AB} < \frac{d}{2} + r$  會有什麼狀況呢？我們讓  $\overline{AB} = 17 < \frac{d}{2} + r = 18$ ，在運轉的過程中會突然中斷，如圖十三，原因是  $\overline{AB} + \overline{BC}$  的長度過短(兩邊之和)，無法與  $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$  和  $\overline{DE}$  三條線段構成的直線(第三邊)，形成一個三角形。



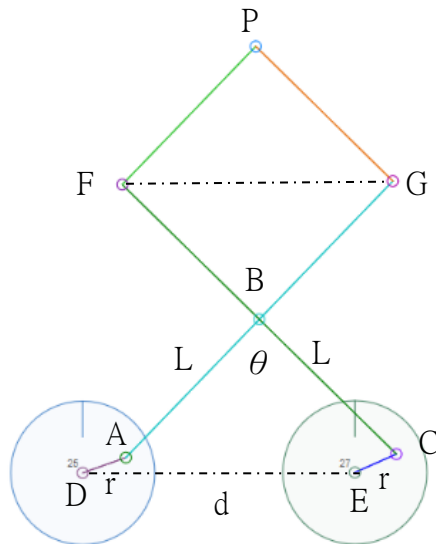
圖十二 自 Linkage 軟體匯出



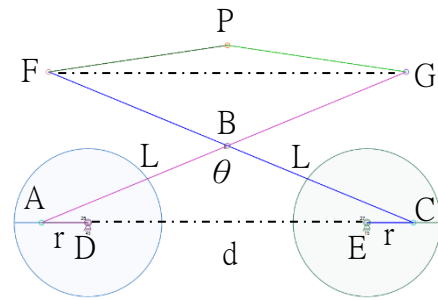
圖十三 自 Linkage 軟體匯出

## 2. $\overline{FP}$ 的長度限制

繪圖機的上半部分由箏形 PGBF 所組成，其中  $\overline{FP} = \overline{GP}$ ， $\overline{FB} = \overline{GB}$ ，如圖十四。 $\overline{FP}$  的長度受限於  $\overline{FB}$  的長度以及  $\angle ABC$  所形成的角度  $\theta$ ，將點 F 與點 G 以輔助線連接起來，形成  $\triangle PGF$  和  $\triangle BFG$ ，在繪圖的過程中，點 A 以  $r$  為半徑，繞著點 D 做圓周運動；點 C 以  $r$  為半徑，繞著點 E 做圓周運動，當點 A 和點 C 分別旋轉至左右兩側，當 A、C、D、E 四點形成一直線，且點 D 和點 E 在  $\overline{AC}$  上時  $\theta$  最大，如圖十五，此時可以推算出  $\overline{FP}$  的最短長度限制。



圖十四 自 Linkage 軟體匯出



圖十五 自 Linkage 軟體匯出

$\overline{FP}$  的長度除了受到  $\overline{FB}$  和  $\overline{GB}$  長度的影響外，還取決於  $\angle ABC$  可以張開的最大角度， $\angle ABC$  的角度又受  $\triangle ABC$  的三個邊的長度所決定，為了解決這個問題，我們找到了一本「史上最強圖解數學」(數學能力開發研究會[3])，這本書介紹了許多從小學到高中數學知識，我們從其中找到了餘弦定理，它可以處理三角形中三個邊的長度和一個夾角的關係。

在  $\triangle ABC$  中由餘弦定理可知：

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{L^2 + L^2 - (d+r+r)^2}{2L^2} \\ &= \frac{2L^2 - (d+2r)^2}{2L^2} \end{aligned}$$

同理，在  $\triangle BFG$  中，

$$\cos \theta = \frac{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - \overline{FG}^2}{2\overline{BF} \times \overline{BG}}$$

$$\overline{FG}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta$$

$$\overline{FG} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}$$

根據三角形兩邊之和大於第三邊，

在  $\triangle PGF$  中，可得  $\overline{FP} + \overline{GP} > \overline{FG}$ ，令  $\overline{FP} = \overline{GP}$

$$2\overline{FP} > \overline{FG} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$

綜合以上推論可知繪圖機的桿長受到兩個限制，分別為  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$  以及

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2},$$

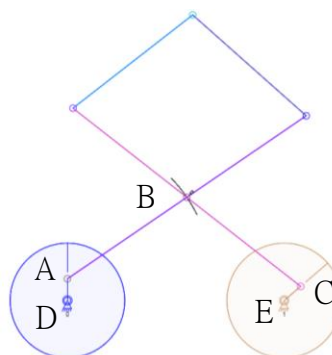
其中  $d$  為  $\overline{DE}$  長度， $r$  為旋轉半徑，

$$\theta \text{ 為 } \angle ABC \text{ 的夾角，} \cos \theta = \frac{2L^2 - (d + 2r)^2}{2L^2}, \overline{AB} = \overline{BC} = L。$$

#### 四、繪製圖形的形狀

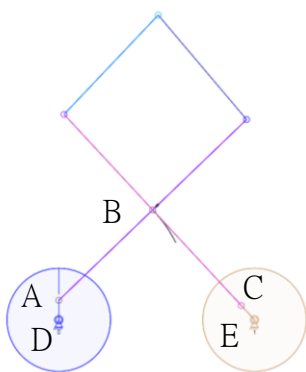
##### (一) 點 B 所繪製出來的圖形

點 A 以  $r_1$  為半徑，繞著點 D 做圓周運動；點 C 以  $r_2$  為半徑，繞著點 E 做圓周運動，同時有兩個旋轉點來影響點 B 的位置，我們先讓點 A 不動，來觀察點 C 旋轉對於繪圖點 B 所產生的帶動情形，我們在 Linkage 機構模擬軟體中，將點 A 的旋轉速度設定為 0，點 C 的旋轉速度設定為 1，觀察點 C 的轉動與繪圖點 B 之間的關係，如圖十六。

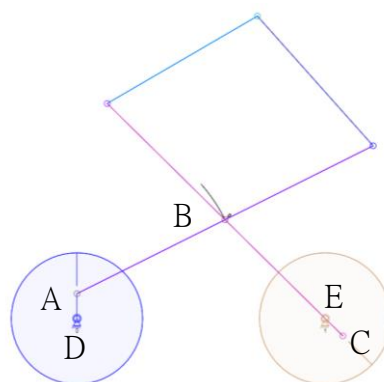


圖十六 自 Linkage 軟體匯出

我們發現完成完整繪圖後，點 B 所畫出來的是個弧形，而這個弧形的兩個端點都出現在 B、C、E 三點在同一直線上時，當點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  上時，如圖十七，點 B 會在弧形的左上端點。當點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  的延長線上，如圖十八，點 B 會在弧形的右下端點。



圖十七 自 Linkage 軟體匯出

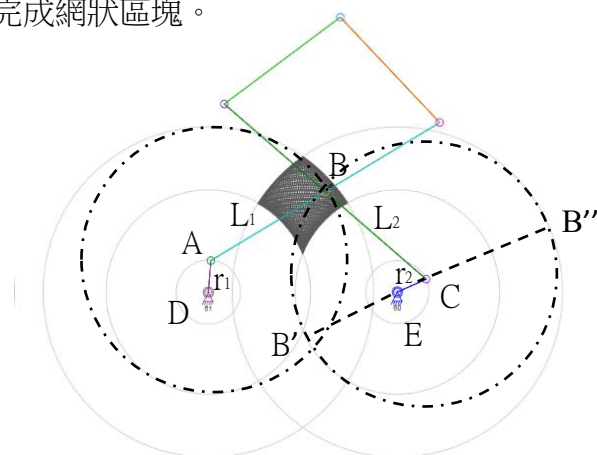


圖十八 自 Linkage 軟體匯出

因為點 A 被設定為固定不動，所以點 B 所能繪製的範圍為以點 A 為圓心，以  $\overline{AB}$  為半徑的弧形。而點 B 的另一邊連接著點 C，點 C 繞著點 E 旋轉，可以發現點 B 在弧形的左上端點時為點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  上，如圖十七；點 B 在弧形的右下端點時為點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  的延長線上，如圖十八。由此可知點 B 的位置以點 E 的位置來推算，介於  $\overline{BC} + \overline{CE}$  與  $\overline{BC} - \overline{CE}$  之間；以及以點 A 為圓心以  $\overline{AB}$  為半徑的弧形上。



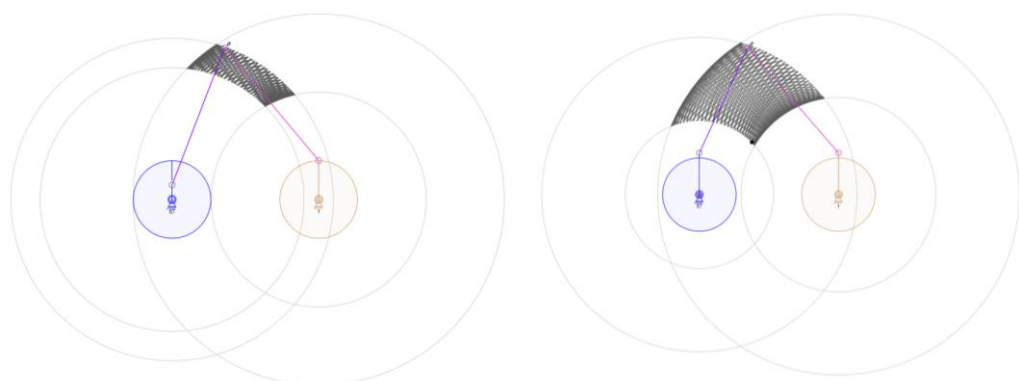
由上述的結果我們分別以點 C 和點 A 來推論點 B 的可能範圍，先以點 C 的位置來推論點 B 可能的位置，點 B 與點 C 之間的距離為  $L_2$ ，對於旋轉到任一位置的點 C 必有距離點 E 最近的點  $B'$  在  $\overline{CE}$  的延長線上，使得  $\overline{EB'}$  長度 =  $L_2 - r_2$ ，及距離點 E 最遠的點  $B''$  在  $\overline{CE}$  的延長線上，使得  $\overline{EB''}$  長度 =  $L_2 + r_2$ ，將所有可能的點 B 標示出來，即為以點 E 為圓心，分別  $L_2 - r_2$  和  $L_2 + r_2$  為半徑所畫出來的兩圓之間的環形區域。同理可證，以點 A 的位置來推論點 B 可能出現的位置，為以點 D 為圓心，分別  $L_1 - r_1$  和  $L_1 + r_1$  為半徑所畫出來的兩圓之間的環形區域。因為點 B 同時受點 A 和點 C 兩點所連接的連桿限制，所以點 B 的移動範圍為兩個環形重疊的區塊，如圖十九中間已繪製完成網狀區塊。



圖十九 自 Linkage 軟體匯出

由上述可知，點 B 繪製出來的圖形取決於  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$  和  $\overline{CE}$  等四個線段的長度，並且要符合  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ，其中  $\overline{DE} = d$ ， $r = \frac{\overline{AD} + \overline{CE}}{2}$ 。

利用 Linkage 機構模擬軟體將  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$  和  $\overline{CE}$  四個線段設定不同長度，點 B 所繪制出來的圖形如圖二十。

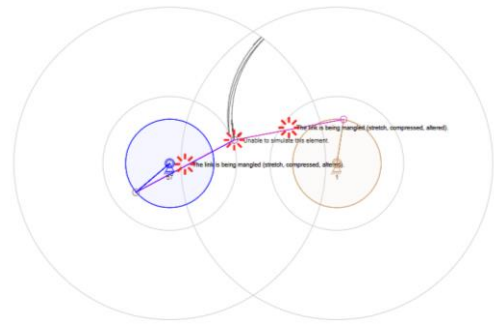


$$\overline{AB}=30、\overline{BC}=30、\overline{AD}=3、\overline{CE}=8$$

$$\overline{AB}=25、\overline{BC}=30、\overline{AD}=9、\overline{CE}=9$$

圖二十 自 Linkage 軟體匯出

點 B 繪製的圖形即為兩個環形的上方的重疊區塊，如果兩個環形沒有重疊區塊，會產生什麼狀況呢？我們讓  $\overline{AB}=20$ 、 $\overline{BC}=20$ 、 $\overline{AD}=8$ 、 $\overline{CE}=8$ ，左右兩個環形沒有完整的重疊區域，結果點 B 也沒有辦法順利的繪製出圖形，如圖二十一。



$$\overline{AB}=20、\overline{BC}=20、\overline{AD}=8、\overline{CE}=8$$

圖二十一 自 Linkage 軟體匯出

將各桿件的長度代入我們求得的桿長限制  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ，

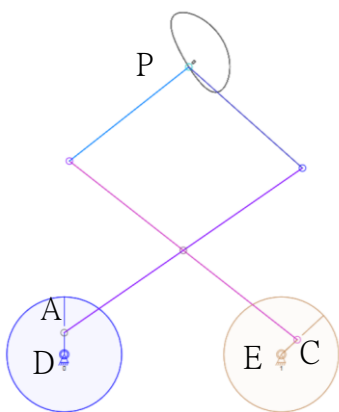
可得  $\overline{AB}=20$ ，

$$\frac{d}{2} + r = \frac{30}{2} + 8 = 23，$$

$\overline{AB}=20 < \frac{d}{2} + r = 23$ ，與我們推導出的長度限制不符，故點 B 無法繪製出圖形。

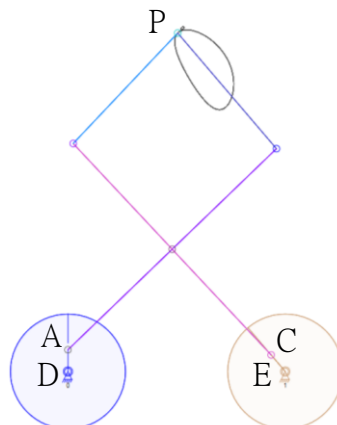
## (二) 點 P 所繪製出來的圖形

我們同樣以 Linkage 機構模擬軟體進行模擬，將點 A 的旋轉速度設定為 0，點 C 的旋轉速度設定為 1，觀察點 C 的旋轉與繪圖點 P 之間的關係，如圖二十二。繪圖點 P 所繪製出來的圖形為左上右下較為狹長的封閉曲線。觀察點 C 旋轉的位置與繪圖點 P 的位置的關係，曲線的左上端點沒有剛好產生在點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  上時，如圖二十三；曲線的右下端點也沒有刚好在點 C 旋轉到  $\overline{BE}$  的延長線上時，如圖二十四。



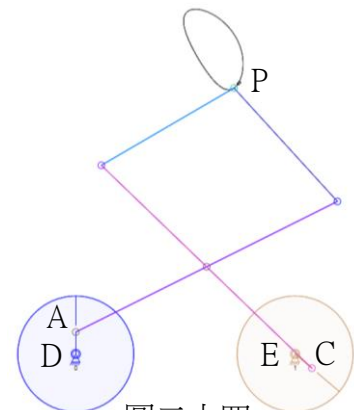
圖二十二

自 Linkage 軟體匯出



圖二十三

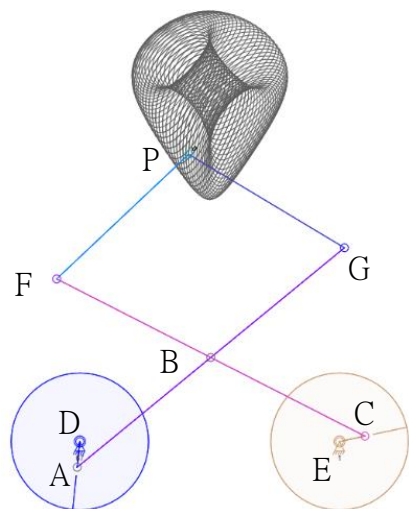
自 Linkage 軟體匯出



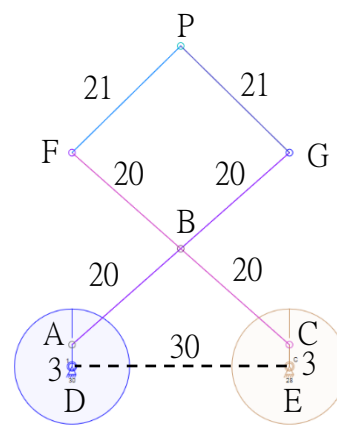
圖二十四

自 Linkage 軟體匯出

在繪圖機中點 P 分別與點 F 和點 G 相連，與點 B 共 4 個點形成一個四邊形 PGBF，點 A 和點 C 做圓周運動，使得  $\angle FBG$  產生不同的角度，改變四邊形 PGBF 的形狀和位置，讓點 P 繪製出圖形，故無法直接用將  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$  和  $\overline{CE}$  四個線段來推論繪圖點 P 的位置。我們以 Linkage 軟體來模擬繪圖機，模擬出點 P 繪製的圖形，如圖二十五上方網狀區域。



圖二十五 自 Linkage 軟體匯出



圖二十六 自 Linkage 軟體匯出

我們以原小魚畫家繪圖機各構件的比例在 Linkage 軟體中模擬出繪圖機，令  $\overline{AB}=\overline{BC}=L=20$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=r=3$ ， $\overline{DE}=d=30$ ， $\overline{BF}=\overline{BG}=20$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ ，如圖二十六。

令點 D 座標為原點(0, 0)，利用 Linkage 軟體匯出點 P、點 B 以及旋轉點 A、旋轉點 C 的座標，找出點 P 和點 B 的極值(即這兩個點可以繪製範圍中最高、最低、最左、最右等四個點，用來表示可以繪製圖形的範圍)。

已知 D(0, 0)、E(30, 0)以及旋轉點 A、旋轉點 C 的座標，利用餘弦定理(數學能力開發研究會[3])可算出  $\angle ADE$  和  $\angle CED$  的角度，如附件一。(  $\angle ADE$  和  $\angle CED$  計算方式請參閱討論二)

我們用 Linkage 軟體匯出所有點 B 的座標，依數值大小進行排序，找出極左點 R、極上點 S、極右點 T、極下點 U，並用 Microsoft Excel 軟體的公式計算出各點相對  $\angle ADE$  和  $\angle CED$  的角度，如表一。(座標及角度取到小數點以下第一位) 這樣可得知點 A 和點 C 旋轉到什麼位置，會產生點 B 所繪出圖形的極值。其圖形如圖二十七。

點 B 極點	B 點座標	A 點座標	C 點座標	$\angle ADE$	$\angle CED$
極左點 R	(11.0, 13.0)	(-2.0, -2.2)	(27.6, 1.8)	132.9°	35.9°
極上點 S	(15.0, 17.4)	(2.0, 2.3)	(28.0, 2.3)	49.3°	49.3°
極右點 T	(19.0, 13.0)	(2.6, 1.5)	(32.1, -2.2)	30.1°	133.1°
極下點 U	(15.0, 8.0)	(-2.6, -1.5)	(32.6, -1.4)	150.3°	151.9°

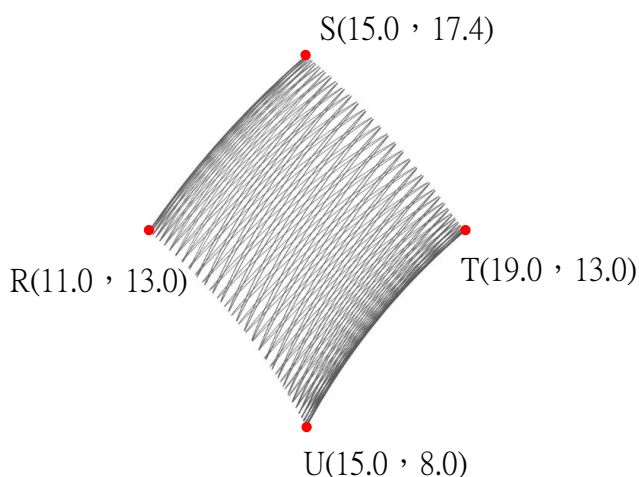
表一

以相同方式利用 Linkage 軟體匯出點 P、旋轉點 A、旋轉點 C 的座標，找出點 P 的極點以及產生極點時  $\angle ADE$  與  $\angle CED$  的角度。由附件一中整理出各極點座標如表二，其圖形如圖二十八。

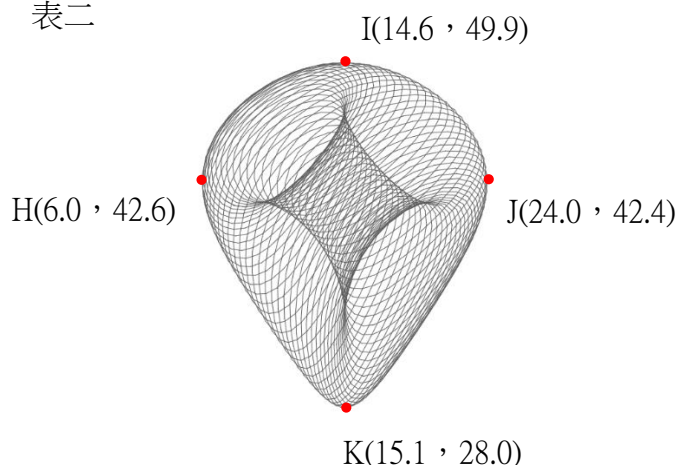
這樣可得知點 A 和點 C 旋轉到什麼位置，會產生點 P 所繪出圖形的極值。

點 P 極點	P 點座標	A 點座標	C 點座標	$\angle ADE$	$\angle CED$
極左點 H	(6.0, 42.6)	(0.3, -3.0)	(28.1, 2.3)	$84.7^\circ$	$51.3^\circ$
極上點 I	(14.6, 49.9)	(2.9, 0.9)	(27.2, 1.2)	$18.1^\circ$	$22.9^\circ$
極右點 J	(24.0, 42.4)	(1.8, 2.4)	(29.7, -3.0)	$54.1^\circ$	$85.1^\circ$
極下點 K	(15.1, 28.0)	(-3.0, -0.4)	(32.9, -0.6)	$171.7^\circ$	$167.7^\circ$

表二



圖二十七 自 Linkage 軟體匯出



圖二十八 自 Linkage 軟體匯出

### 五、影響繪製圖形的變數

觀察學長姐所做的小魚畫家繪圖機，可以發現以下幾個可變動的因子：右邊被帶動的轉盤，有上下 2 層，其大小不同，所以會有 2 種不同的旋轉速度比；連桿組的木條上有許多的孔洞，用鉚釘固定連桿上不同的孔洞，會產生不同比例的連桿長度；在兩個轉盤上分別有 6 個和 3 個孔洞，可以將連桿固定在這些孔洞中，轉盤轉動時可產生  $6 \times 3 = 18$  種不同的旋轉半徑組合。

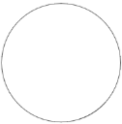















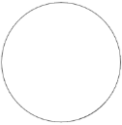















我們分別以轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑做為變數進行研究。為了控制研究變數，以下繪製的圖形我們讓旋轉點 A 和旋轉點 C 的旋轉起始點位置都是由正上方開始轉動。

#### (一)不同旋轉速度

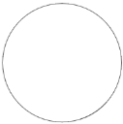















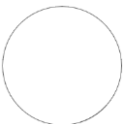















依照上述的研究，連桿的長度必須符合  $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$  以及

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}, \text{ 我們利用 Linkage 軟體來模擬，以原小魚}$$

畫家繪圖機各構件的比例，令  $\overline{AB} = \overline{BC} = L = 20$ ， $\overline{AD} = \overline{CE} = r = 3$ ， $\overline{DE} = d = 30$ ， $\overline{FB} = \overline{GB} = 20$ ， $\overline{FP} = \overline{GP} = 21$ 。左右兩個轉盤以不同速度比進行繪圖，正整數代表順時針旋轉，負整數代表逆時針旋轉，將結果整理如表三及表四：

1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6	1 : 7	1 : 8
							
1 : -1	1 : -2	1 : -3	1 : -4	1 : -5	1 : -6	1 : -7	1 : -8
							
2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6	2 : 7	2 : 8	2 : 9
							
2 : -2	2 : -3	2 : -4	2 : -5	2 : -6	2 : -7	2 : -8	2 : -9
							

表三

1 : 1	2 : 1	3 : 1	4 : 1	5 : 1	6 : 1	7 : 1	8 : 1
							
-1 : 1	-2 : 1	-3 : 1	-4 : 1	-5 : 1	-6 : 1	-7 : 1	-8 : 1
							
2 : 2	3 : 2	4 : 2	5 : 2	6 : 2	7 : 2	8 : 2	9 : 2
							
-2 : 2	-3 : 2	-4 : 2	-5 : 2	-6 : 2	-7 : 2	-8 : 2	-9 : 2
							

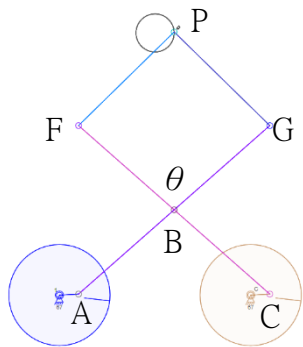
表四  
12

### 發現與歸納

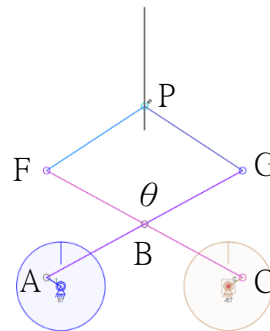
- 1.當兩個轉盤旋轉速度的最簡單整數比為 1 : 1 時，圖形呈圓形，為 1 : -1 時，圖形呈一條直線，如圖二十九、三十。

說明：當兩轉盤速度為 1 : 1，兩個轉盤呈同方向等速運動，箏形 PGBF 被點 A 和點 C 牽引做相同的圓周運動，點 P 繪製出來的是半徑為 3 的圓形。

當兩轉盤速度為 1 : -1，兩個轉盤呈反方向等速運動，箏形 PGBF 被點 A 和點 C 牽引做上下運動，點 P 繪製出來的為一直線。



圖二十九 自 Linkage 軟體匯出



圖三十 自 Linkage 軟體匯出

- 2.若轉盤的速度有相同的最簡單整數比，則繪製出來的圖形相同。

說明：速度比=圈數比，

以速度比 4 : 6 為例，

$$4 : 6 = 2 : 3,$$

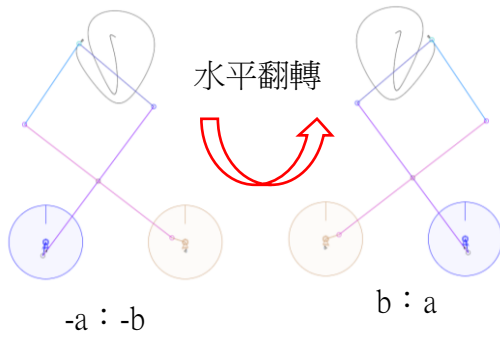
兩個轉盤分別要轉 2 圈和 3 圈會同時回到原來相同的位置，整個旋轉的過程速度比為 4 : 6 與速度比為 2 : 3 的相對位置都相同，故繪製出來的圖形相同。

- 3.速度比相反，則繪製出來的圖形呈左右線對稱。

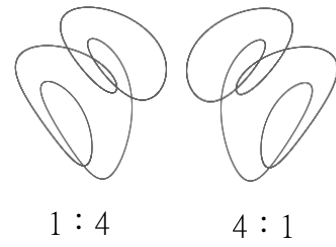
說明：若速度比相反，即速度比  $a : b$  變成  $b : a$ ，其中  $a, b \in \mathbb{N}$

速度比  $a : b$  與速度比  $-a : -b$  的兩個轉盤相對位置都相同，只有繪製過程中繪圖點 P 運轉的方向相反，故  $a : b$  與  $-a : -b$  繪製出來的圖形會相同。

$b : a$  繪製出來的圖形可視為將整個繪圖機水平翻轉來看  $-a : -b$  的圖形，如此  $-a : -b$  與  $b : a$  的圖形會呈現左右線對稱的圖形，如圖三十一。因為  $a : b$  與  $-a : -b$  繪製出來的圖形相同； $-a : -b$  與  $b : a$  繪製出來的圖形又會呈現左右線對稱，故速度比  $a : b$  與  $b : a$  繪製的圖形會呈現左右線對稱。以 1 : 4 和 4 : 1 為例，如圖三十二。



圖三十一 自 Linkage 軟體匯出



圖三十二 自 Linkage 軟體匯出

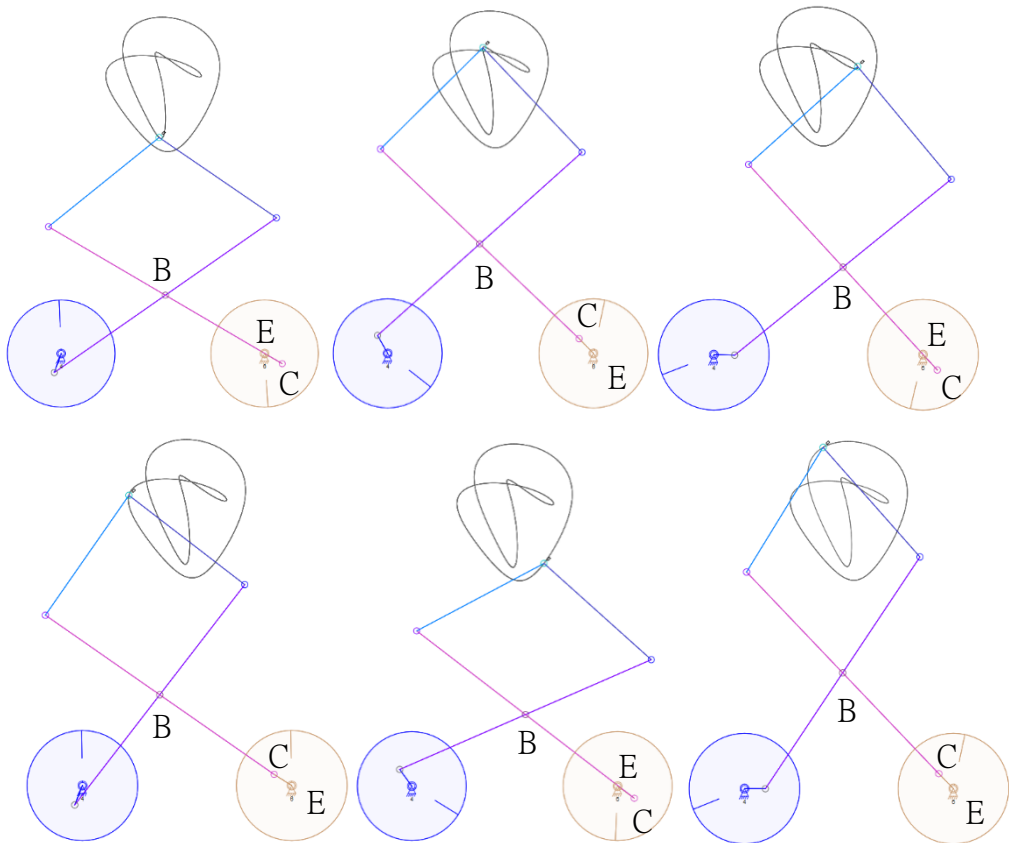
4. 轉速較快的轉盤較易產生花瓣或折返點。

說明：旋轉點 A 和旋轉點 C 轉速的最簡單整數比為  $a : b$ ，其中  $a, b \in \mathbb{N}$ ，在點 A 與點 C 分別轉了  $a$  圈和  $b$  圈時兩個旋轉點會回到起始點，完成了一次完整的繪圖。旋轉點每轉一圈會產生一次點 B 離旋轉中心最遠及一次點 B 離旋轉中心最近的情形。以旋轉點 C 為例，點 B 離旋轉中心 E 最遠和最近都會產生在 B、C、E 三點成一直線時，分別為  $\overline{BE} = L_2 + r_2$  及  $L_2 - r_2$  時，此時易產生折返的花瓣圖形或折返點，故左上及右下的花瓣數常為  $2b$  個；同理右上及左下的花瓣數常為  $2a$  個，轉速較快的轉盤因遠近的變化較快，故較易產生花瓣或折返點。

以速度比  $4 : 6$  為例，

$$4 : 6 = 2 : 3$$

點 C 轉了 3 圈時會和點 A 轉了 2 圈同時返回原起點，點 C 轉得較快， $2 \times 3 = 6$ ，故其間左上及右下共有 6 個花瓣或折返點，如圖三十三。



圖三十三 自 Linkage 軟體匯出

(二)連桿的長度

1.  $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 、 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的連桿長度

我們讓 $\overline{AG}=40$ 的總長度不變， $\overline{BC}=\overline{BF}=20$ 也維持不變，只改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度比，點 B 每次移動 1cm，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如表五。

$\overline{AB} : \overline{BG}$	29 : 11	28 : 12	27 : 13	26 : 14	25 : 15	24 : 16	23 : 17
圖形							
$\overline{AB} : \overline{BG}$	22 : 18	21 : 19	20 : 20	19 : 21	18 : 22	17 : 23	16 : 24
圖形							

表五

另外我們讓 $\overline{AG}=\overline{CF}=40$ ，總長度不變，同時改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間與 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的長度比，且讓 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}$ ，點 B 每次移動 1cm，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度與繪製出來的圖形記錄如表六。

$\overline{AB} : \overline{BG}$	31 : 9	30 : 10	29 : 11	28 : 12	27 : 13	26 : 14	25 : 15
圖形							
$\overline{AB} : \overline{BG}$	24 : 16	23 : 17	22 : 18	21 : 19	20 : 20	19 : 21	18 : 22
圖形							

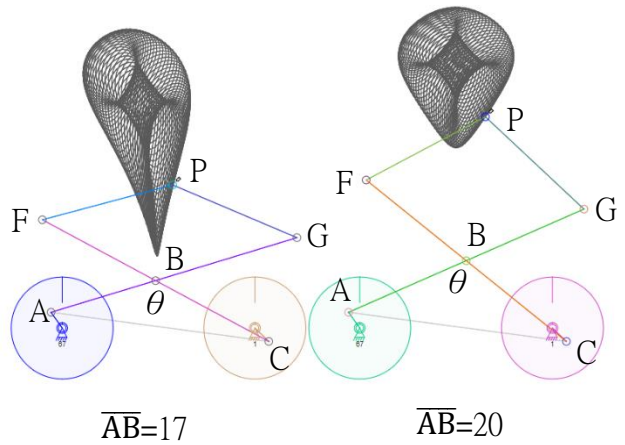
表六

發現與歸納

(1)在表五中當 $\overline{AB} : \overline{BG}$ 前項的值越小，後項的值越大，圖形的左下角會往內縮得越明顯，整體呈現細長且偏斜的形狀；反之則圖形的左下角會向外凸出，整體呈現矮寬形狀。

說明：以同樣轉速，不同 $\overline{AB} : \overline{BG}$ 的長度來比較，如圖三十四，兩臺繪圖機轉速相同，故同一時間，兩臺繪圖機的點 A 與點 C 都在相同的位置，左圖 $\overline{AB}$ 較短，故  $\theta$  較大，點 P 可以繪製的位置較往下，故圖形會較狹長。





圖三十四 自 Linkage 軟體匯出

(2)當 $\overline{AB} : \overline{BG}=16 : 24$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，

$$\text{桿長需符合 } \overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}, \text{ 已知 } \overline{AB}=16, \overline{BG}=24,$$

$$\overline{AD}=\overline{CE}=3, \overline{DE}=30, \overline{FP}=\overline{GP}=21, \overline{BF}=20, \overline{BC}=20。$$

$\theta$  最大時如圖三十五，點 A 和點 C 分別在點 D 和點 E 的外側，且四點在同一直線上，

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{16^2 + 20^2 - 36^2}{2 \times 16 \times 20} \\ &= -\frac{640}{640} = -1 \end{aligned}$$

將各桿件的長度和  $\cos \theta$  代入桿長限制

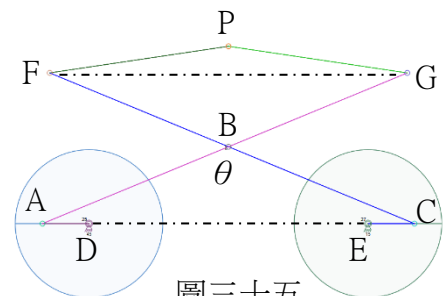
$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{20^2 + 24^2 - 2 \times 20 \times 24 \times (-1)}}{2}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{1936}}{2}$$

$$\overline{FP} > 22, \text{ 已知 } \overline{FP}=21(\rightarrow \leftarrow)$$

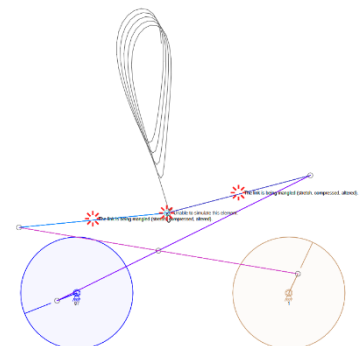
故無法順利繪製出圖形，如圖三十六。



圖三十五

(示意圖，非正確比例)

自 Linkage 軟體匯出



圖三十六 自 Linkage 軟體匯出

(3)在表六中 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}$ ，繪圖機左右呈對稱，增加 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的長度圖形越瘦長，反之圖形越矮寬。

(4)當 $\overline{AB} : \overline{BG}=18 : 22$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，

$$\text{桿長需符合 } \overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}, \text{ 已知 } \overline{AB}=\overline{BC}=18,$$

$$\overline{BG}=\overline{BF}=22, \overline{AD}=\overline{CE}=3, \overline{DE}=30, \overline{FP}=\overline{GP}=21。$$

$\theta$  最大時如上述圖三十五，點 A 和點 C 分別在點 D 和點 E 的外側，且四點在同一直線上，

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \times \overline{BC}}$$

$$= \frac{18^2 + 18^2 - 36^2}{2 \times 18 \times 18}$$

$$= -\frac{648}{648} = -1$$

將各桿件的長度和  $\cos \theta$  代入桿長限制

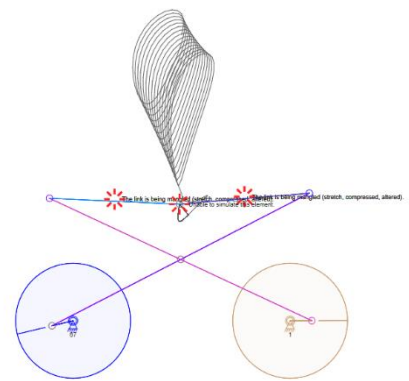
$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{22^2 + 22^2 - 2 \times 22 \times 22 \times (-1)}}{2}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{1936}}{2}$$

$$\overline{FP} > 22, \text{ 已知 } \overline{FP}=21(\rightarrow \leftarrow)$$

故無法順利繪製出圖形，如圖三十七。



圖三十七 自 Linkage 軟體匯出

## 2. $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 的連桿長度

我們讓 $\overline{GP}=21$  保持不變，每次將 $\overline{FP}$ 增長或縮短 1cm，改變點 P 位置，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如表七。

$\overline{FP} : \overline{GP}$	28 : 21	27 : 21	26 : 21	25 : 21	24 : 21	23 : 21	22 : 21
圖形							
$\overline{FP} : \overline{GP}$	21 : 21	20 : 21	19 : 21	18 : 21	17 : 21	16 : 21	15 : 21
圖形							

表七

我們讓 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，每次將 $\overline{FP}$ 和 $\overline{GP}$ 同時增長或縮短 1cm，改變點 P 位置，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如表八。

$\overline{FP} : \overline{GP}$	31 : 31	30 : 30	29 : 29	28 : 28	27 : 27	26 : 26	25 : 25
圖形							
$\overline{FP} : \overline{GP}$	24 : 24	23 : 23	22 : 22	21 : 21	20 : 20	19 : 19	18 : 18
圖形							

表八

### 發現與歸納

- (1)在表七中當 $\overline{FP} : \overline{GP}$ 前項的值越小，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。因為 $\overline{FP}$ 較短，所以整體圖形偏向中心軸的左側，如圖三十八。
- (2)當 $\overline{FP} : \overline{GP}=15 : 21$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，

$$\text{桿長需符合 } \overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}, \text{ 已知 } \overline{AB}=\overline{BC}=20,$$

$$\overline{BF}=\overline{BG}=20, \overline{AD}=\overline{CE}=3, \overline{DE}=30, \overline{FP}=15, \overline{GP}=21。$$

上述研究中令 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，現在 $\overline{FP} \neq \overline{GP}$ ，故桿長的限制需進行修正，

$$\text{桿長需符合 } \frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$

$\theta$  最大時如上述圖三十五，點 A 和點 C 分別在點 D 和點 E 的外側，且四點在同一直線上，

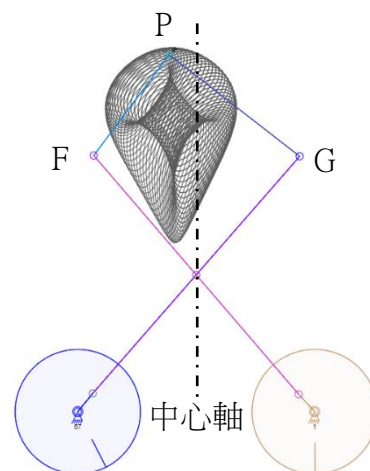
$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \times \overline{BC}}$$

$$= \frac{20^2 + 20^2 - 36^2}{2 \times 20 \times 20}$$

$$= -\frac{496}{800} = -0.62$$

將各桿件的長度和  $\cos \theta$  代入桿長限制

$$\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$



圖三十八 自 Linkage 軟體匯出

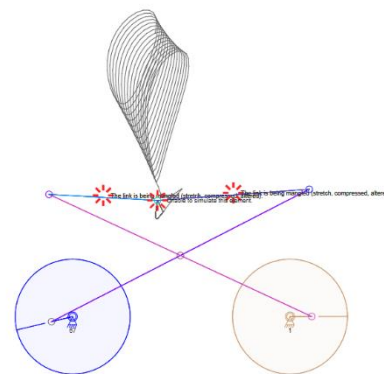
$$\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{20^2 + 20^2 - 2 \times 20 \times 20 \times (-0.62)}}{2}$$

$$\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{1296}}{2}$$

$$\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > 18,$$

$$\text{但 } \frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} = \frac{15 + 21}{2} = 18 (\rightarrow \leftarrow)$$

故無法順利繪製出圖形，如圖三十九。



圖三十九 自 Linkage 軟體匯出

(3)在表八中， $\overline{FP} = \overline{GP}$ ，當 $\overline{FP}$ 和 $\overline{GP}$ 的長度越長，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。

(4)當 $\overline{FP} : \overline{GP} = 18 : 18$ ，由上述中可知 $\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > 18$ ，但 $\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} = 18 (\rightarrow \leftarrow)$

故無法順利繪製出圖形。

### (三)旋轉半徑

#### 1. 改變 $\overline{AD}$ 的長度， $\overline{CE}$ 保持不變

我們讓 $\overline{AD}$ 的長度每次增加或減少 1cm，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如表九。

$\overline{AD} : \overline{CE}$	7 : 3	6 : 3	5 : 3	4 : 3	3 : 3	2 : 3	1 : 3
圖形							

表九

#### 2. 令 $\overline{AD} = \overline{CE}$ ，同時改變 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度

我們讓 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 長度每次增加或減少 1cm，以速度比 67 : 1 進行研究。將 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如表十。

$\overline{AD} : \overline{CE}$	5 : 5	4 : 4	3 : 3	2 : 2	1 : 1
圖形					

表十

#### 發現與歸納

(1)在表九中當 $\overline{AD} : \overline{CE}$ 前項的值越小，除了周圍的變形之外，中間重疊的區域也由右上到左下的細長狀變成從左上到右下的細長狀，當 $\overline{AD} : \overline{CE} = 1 : 3$ 時甚至產生中間有空隙的環狀。

(2)當 $\overline{AD} : \overline{CE} = 7 : 3$ 時，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，

$$\text{桿長需符合 } \overline{AB} > \frac{d}{2} + r,$$

已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=d=30$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{CE}=3$ 。

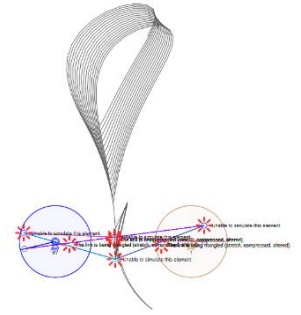
上述研究中令 $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，現在 $\overline{AD} \neq \overline{CE}$ ，故桿長的限制需進行修正，

$$\overline{AB} > \frac{d}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{CE}}{2}$$

$$\overline{AB} > \frac{30}{2} + \frac{7+3}{2}$$

$\overline{AB} > 20$ ，已知 $\overline{AB}=20$ ( $\rightarrow \leftarrow$ )

故無法順利繪製出圖形，如圖四十。



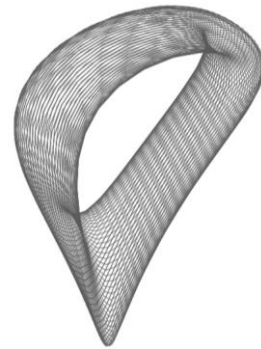
圖四十 自 Linkage 軟體匯出

- (3)觀察表九中，圖形愈左邊， $\overline{AD} : \overline{CE}$ 前項的值越大，中間重疊的區域也變成從右上到左下的細長狀，有可能產生中間有空隙的環狀，但 $\overline{AD} : \overline{CE}=7 : 3$ 已無法順利繪製出圖形，我們讓 $\overline{CE}$ 的值變小，使得 $\overline{AD} : \overline{CE}=7 : 2$ 。

$$\overline{AB} > \frac{d}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{CE}}{2}$$

$$\overline{AB} > \frac{30}{2} + \frac{7+2}{2}$$

$\overline{AB} > 19.5$ ， $\overline{AB}=20 > 19.5$ ，符合桿長限制，繪製出來的圖形果然產生中間有空隙的環狀，如圖四十一。



圖四十一 自 Linkage 軟體匯出

- (4)觀察表十中， $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，同時改變 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度， $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度越長，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。
- (5)當 $\overline{AD} : \overline{CE}=5 : 5$ 時，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，

桿長需符合 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ，

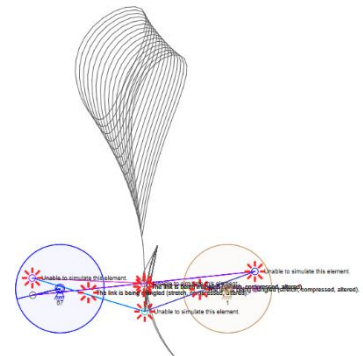
已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=d=30$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=5$ 。

$$\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$$

$$\overline{AB} > \frac{30}{2} + 5$$

$\overline{AB} > 20$ ，已知 $\overline{AB}=20$ ( $\rightarrow \leftarrow$ )

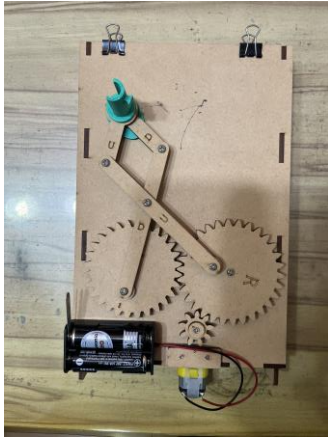
故無法順利繪製出圖形，如圖四十二。



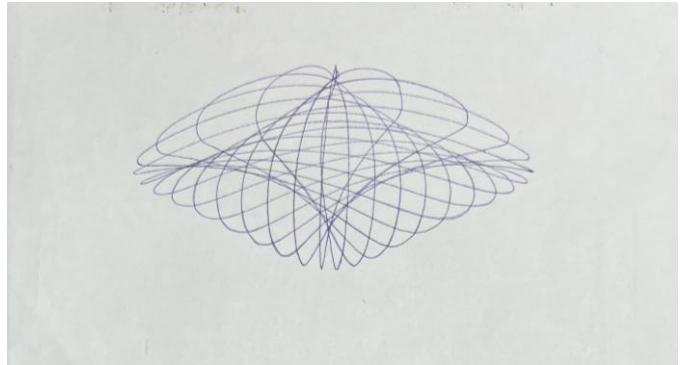
圖四十二 自 Linkage 軟體匯出

## 六、改良現有連動桿繪圖機

我們市面上找到一款連動桿繪圖機，用馬達帶動齒輪，連桿齒輪齒數分別為 28 與 30，以固定 30:28 的旋轉速度比來繪製圖形，如圖四十三，因其速度比、桿件長及旋轉半徑都固定，故只能繪製出一種圖形，如圖四十四。

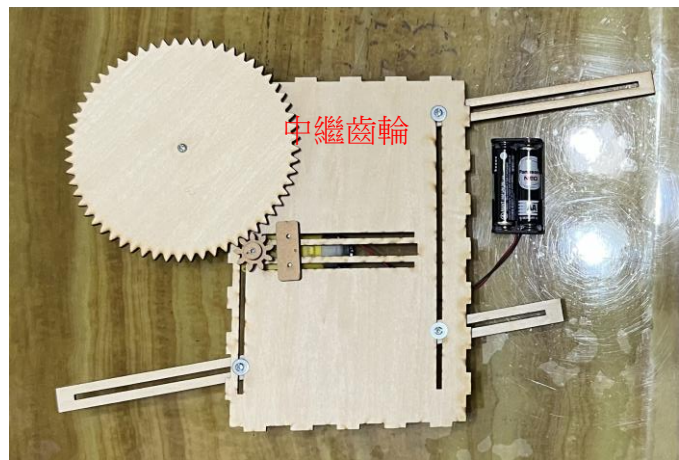
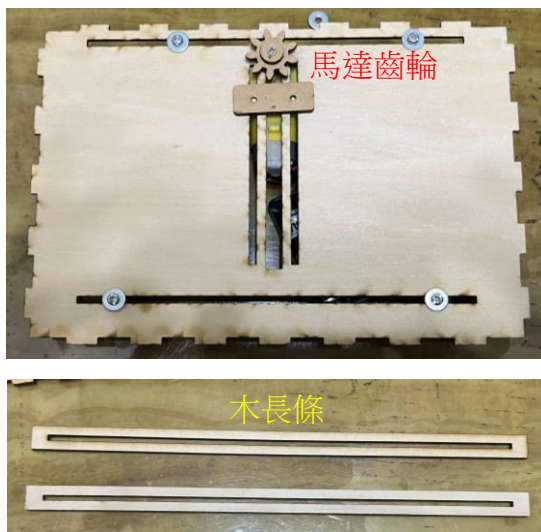


圖四十三 指導老師拍攝



圖四十四 指導老師拍攝

依照上述的研究結果，我們想要改變的變數有轉速比、旋轉半徑以及連桿長度。我們使用雷切軟體 Beam Studio，雷切出一片板子，將市售的連動桿繪圖機的馬達齒輪拆下裝在板子上，並在板子上切出溝槽，讓馬達齒輪可以在上面移動。另外雷切出兩根木長條，供中繼的齒輪移動，如圖四十五。



中繼齒輪可在木長條上移動，  
以符合不同大小的連桿齒輪

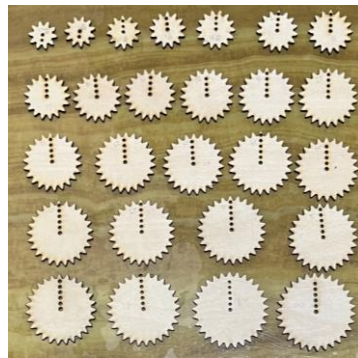
圖四十五 指導老師拍攝

利用網路上的齒輪繪製器(Rainer[4])，如圖四十六，製作出不同齒數的連桿齒輪，以改變旋轉速度。為了改變旋轉半徑，在齒輪上距離圓心每 0.5cm 打 1 個洞，如圖四十七。要使每個齒輪能彼此咬合，我們讓齒輪繪製器上每個齒輪的參數相同(圓螺距 7、壓力角 28、間隙 0.01、齒隙 0.03)。為了改變桿長，在連動桿上每 0.5cm 打 1 個洞，如圖四十八。

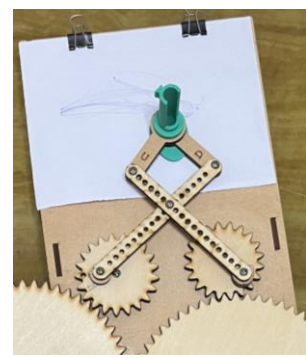


圖四十六 指導老師拍攝自

*Involute Spur Gear Builder*  
v2.0.(2020) (Rainer[4])

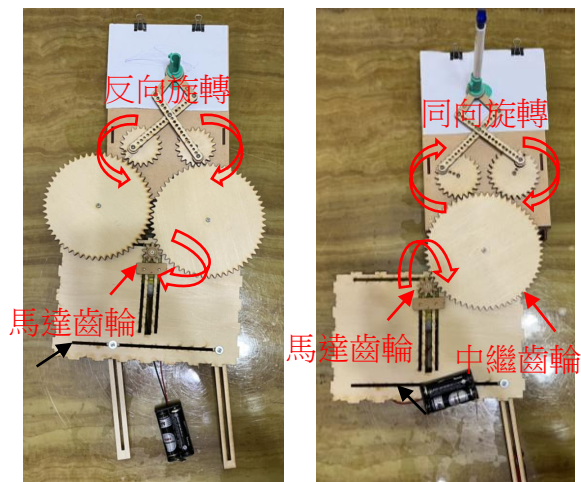


圖四十七 指導老師拍攝



圖四十八 指導老師拍攝

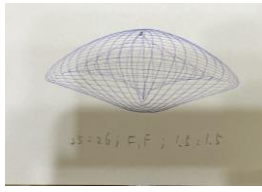
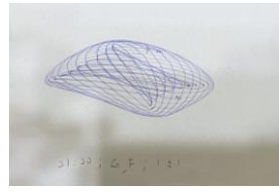
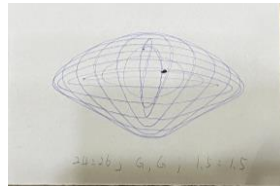
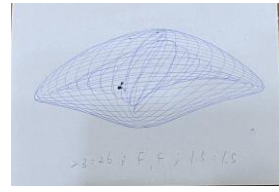
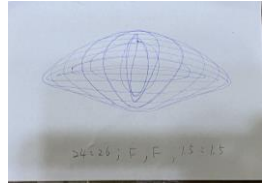

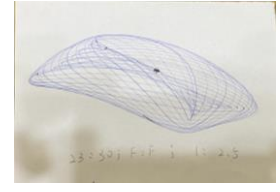
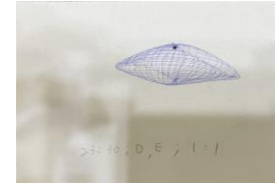
馬達齒輪以順時針方向旋轉並帶動中繼齒輪，中繼齒輪再帶動不同齒數比的連桿齒輪，帶動整組的連動桿開始繪圖。兩個中繼齒輪可以帶動兩個連桿齒輪反向旋轉，一個中繼齒輪可以帶動兩個連桿齒輪同向旋轉，藉此產生正負兩種的速度比，如圖四十九。



圖四十九 指導老師拍攝

運用我們改良的繪圖機，就可以繪製出多變的圖形，我們將連桿上的孔洞由上至下分別編代號 A~Q。自編代號如「18-23；D-G；1.5-1」，其中 18-23：前項代表左側連桿齒輪齒數，後項表示右側連桿齒輪齒數<sup>註</sup>；D-G：前面的 D 表示左邊連桿相連結的孔洞，後面的 G 表示右邊連桿相連結的孔洞；1.5-1：前項 1.5 表示左側連桿齒輪距離圓心 1.5cm 與連桿相接，後項 1 表示右側連桿齒輪距離圓心 1cm 與連桿相接。順利繪製出不同變數的圖形，如表十一。更完整的繪製圖形請參閱附件二。

註：齒輪齒數越多轉得越慢，齒輪齒數與轉速成反比，齒輪齒數比=a：b，則轉速比=b：a。

25-26 ; F-F ; 1.5-1.5	21-20 ; G-F ; 1-1	24-26 ; G-G ; 1.5-1.5	23-26 ; F-F ; 1.5-1.5
			
24-26 ; F-F ; 1.5-1.5	10-11 ; F-F ; 0.5-0.5	23-30 ; F-F ; 1-2.5	23-30 ; D-E ; 1-1
			

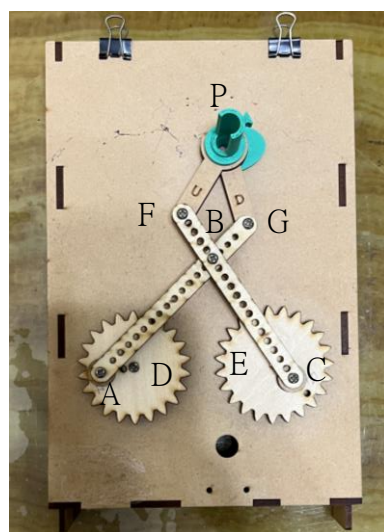
表十一

### 七、Linkage 機構模擬軟體與自行改良繪圖機繪製圖形之比較

我們用 Linkage 機構模擬軟體可以繪製出各種變數的圖形，利用自行改良繪圖機也能依照我們設定的變數來繪製圖形，那麼兩種繪圖機若是設定相同的變數，繪製出來的圖形會相同嗎？自行改良繪圖機各變數有現實上機器的限制，但是 Linkage 機構模擬軟體的變數可以自行依照需要任意輸入數值，所以我們將自行改良繪圖機可以繪製出圖形的變數來輸入 Linkage 機構模擬軟體中。


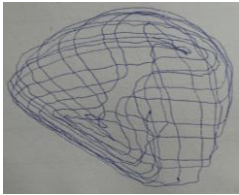

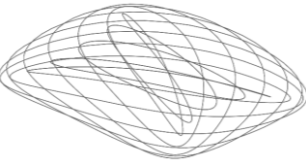
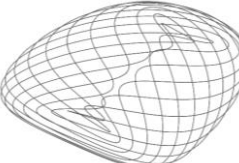
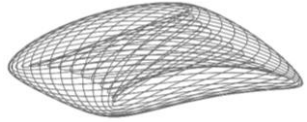
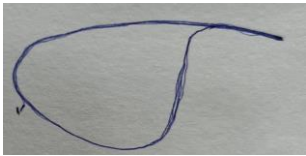



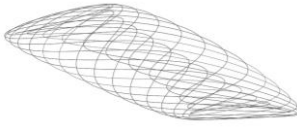

我們先量測自行改良繪圖機各個部位的長度， $\overline{DE}=6.5$ ， $\overline{AG}=\overline{CF}=9.5$ ，

$\overline{FP}=\overline{GP}=3.5$ ，如圖五十，來設定 Linkage 機構模擬軟體各桿件的相對比例。將自行改良繪圖機和 Linkage 機構模擬軟體所繪製的圖形整理如表十二。因為齒輪齒數比與速度比成反比，故在代號中齒輪齒數比為  $a : b$ ，在 Linkage 機構模擬軟體中輸入的速度比須為  $b : a$ 。



圖五十 指導老師拍攝



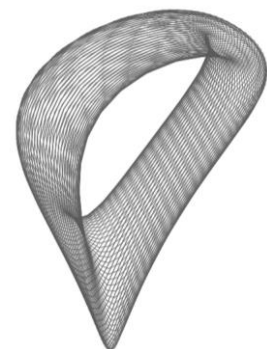
圖形代號	26-24 ; F-F ; 1-1.5	24-11 ; J-G ; 1-0.5	23-30 ; E-F ; 1.5-1
自行改良繪圖機			
Linkage 機構模擬			
圖形代號	24-12 ; G-G ; 1-0.5	10-29 ; D-E ; 0.5-1	25-20 ; E-E ; 1.5-1.5
自行改良繪圖機			
Linkage 機構模擬			

表十二

我們發現自行改良繪圖機與 Linkage 機構模擬軟體在相同的變數下，繪製出來的圖形非常相似，自行改良繪圖機由齒輪帶動，齒輪在運轉的過程中會有振動的情形，所以繪製出來的圖形會有晃動產生殘影的狀況，屬於合理的操作誤差。

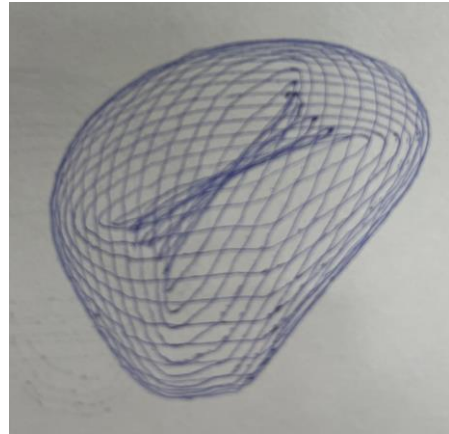
#### 八、利用自行改良的繪圖機繪製出想要的圖形

在旋轉半徑的研究中，當左右兩邊的旋轉半徑 $\overline{AD} : \overline{CE} = 7 : 2$ 時會產生中空圖形，如圖五十一。我們覺得這個圖形相當好看而且特別，但是在我們利用自行改良繪圖機所繪製出來的圖形中(請參閱附件二)，卻沒有一張圖是呈現中空的現象，可見這種圖形不易繪製出來。我們想利用已研究出來的成果，來讓自行改良的繪圖機也能繪製出如此好看的中空圖形。



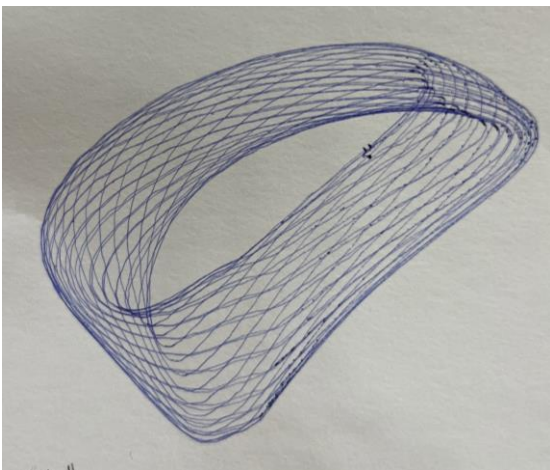
圖五十一 自 Linkage 軟體匯出

Linkage 機構模擬軟體繪製出來中空圖形的各項變數為 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=30$ ， $\overline{BF}=\overline{BG}=20$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{CE}=2$ ，但自行改良繪圖機兩個旋轉中心的位置是固定的，亦即 $\overline{DE}=6.5$ ，故我們需將 Linkage 機構模擬軟體繪圖機的原尺寸等比例縮小，兩者的倍率為 $30 \div 6.5 \doteq 4.6$ ，將所有桿件的長度縮小為原來的 $\frac{1}{4.6}$ ，並取概數到自行改良繪圖機可以設置的數值，設置自行改良繪圖機各項變數為 $\overline{DE}=6.5$ ， $\overline{AB}=\overline{BC} \doteq 4.6$ ， $\overline{BF}=\overline{BG} \doteq 4.9$ ， $\overline{FP}=\overline{GP} \doteq 3.5$ ， $\overline{AD} \doteq 1.5$ ， $\overline{CE} \doteq 0.5$ ，設置完成後雖然順利繪製出圖形，但是卻依然沒有中空的現象，如圖五十二。推測原因可能是在縮小的計算中為了符合自行改良繪圖機各桿件能設置的限制，取的概數已失去原有的比例。

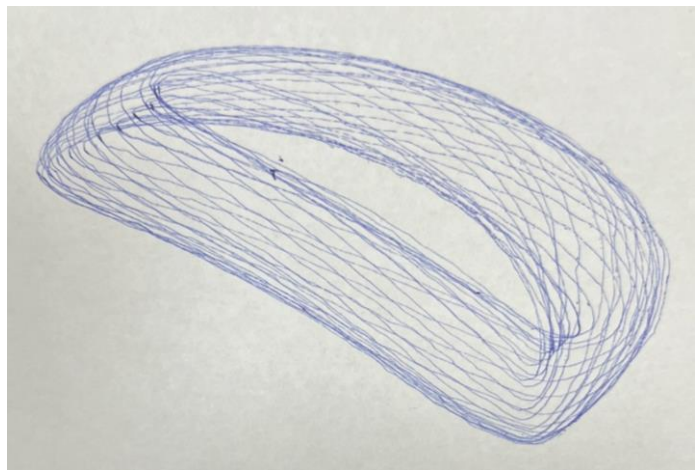


圖五十二 指導老師拍攝

我們觀察旋轉半徑的研究，在旋轉半徑 $\overline{AD}$ 與旋轉半徑 $\overline{CE}$ 兩線段長度相差較大時，較容易產生中空的圖形，經由多次的嘗試，終於成功繪製出中空的圖形，其圖形代號為 26-25；H-H；2-0.5。如圖五十三。我們也順利繪製出 $\overline{AD} < \overline{CE}$ 中空的圖形，其圖形代號為 23-24；H-G；0.5-2，如圖五十四。



圖五十三 指導老師拍攝



圖五十四 指導老師拍攝

因為這樣圖形， $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 兩者中有一條線段會較長，所以容易違反 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ 的限制，故圖形較少成功繪製出來。

## 伍、研究結果

一、順利找出繪圖機桿長的限制， $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$  以及  $\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$ ，其

中  $d$  為  $\overline{DE}$  長度， $r$  為旋轉半徑， $\theta$  為  $\angle ABC$  的夾角， $\cos \theta = \frac{2L^2 - (d + 2r)^2}{2L^2}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = L$ 。

二、找出繪製圖形的形狀，點  $B$  必定在以點  $D$  為圓心， $L_1 + r_1$  及  $L_1 - r_1$  為半徑的環形與以點  $E$  為圓心， $L_2 + r_2$  及  $L_2 - r_2$  為半徑的環形所重疊的區塊。也找出點  $B$  和點  $P$  的極值。

三、探討出轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑對於繪製出來圖形的影響。

四、改良現有的繪圖機，並且以改變旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑三個變數來繪製出不同的圖形。

五、依照研究的成果來改變繪圖機的變數，順利繪製出想要的圖形。

## 陸、討論

一、點  $B$  和點  $P$  的極點分別在不同的旋轉位置產生

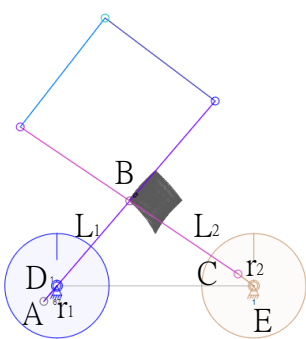
繪圖機在運作時，點  $B$  的位置取決於旋轉點  $A$  及旋轉點  $C$  兩點的帶動，

當  $\overline{BD} = L_1 - r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$  時點  $B$  會有極左點，如圖五十五；

當  $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$  時點  $B$  會有極上點，如圖五十六；

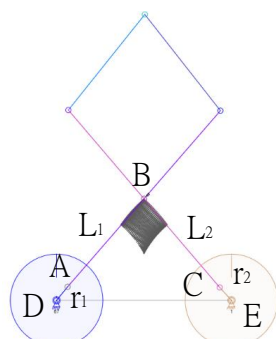
當  $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 - r_2$  時點  $B$  會有極右點，如圖五十七；

當  $\overline{BD} = L_1 - r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 - r_2$  時點  $B$  會有極下點，如圖五十八。



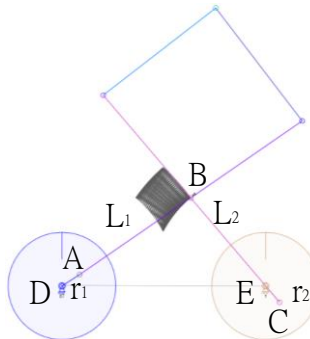
圖五十五

自 Linkage 軟體匯出



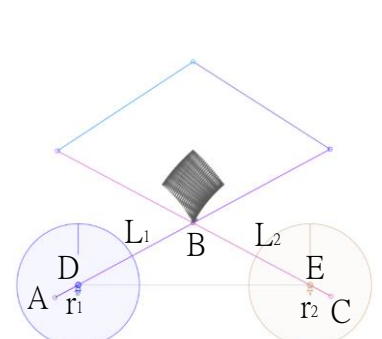
圖五十六

自 Linkage 軟體匯出



圖五十七

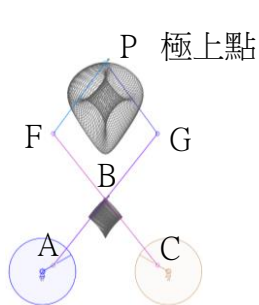
自 Linkage 軟體匯出



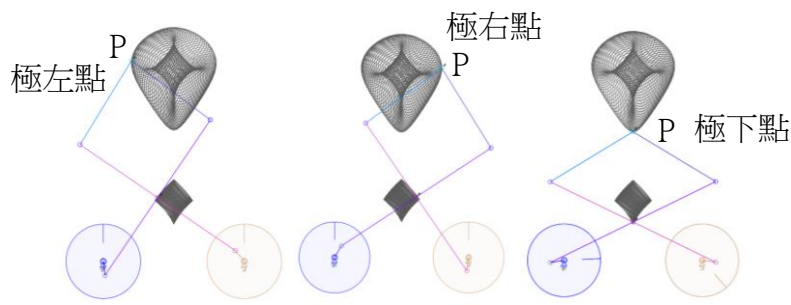
圖五十八

自 Linkage 軟體匯出

點  $B$  的位置取決於  $\triangle BED$  中  $\overline{BD}$  和  $\overline{BE}$  的長度，而點  $P$  的位置除了受  $\triangle BED$  的邊長的影響外，還取決於四邊形  $PGBF$  的內角角度。以極上點為例，點  $B$  在  $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$  時會有極上點，若點  $A$  和點  $C$  繼續向內旋轉，雖然點  $B$  會被往下帶，但是  $\angle ABC$  角度會變小，四邊形  $PGBF$  反而會往上延伸，故點  $P$  的位置同時受  $\triangle BED$  的邊長和  $\angle ABC$  角度的影響，如圖五十九。所以無法單純以點  $A$  和點  $C$  的位置來推論點  $P$  位置，我們改以座標來推論  $P$  點四個極點的位置，如圖六十。



圖五十九 自 Linkage 軟體匯出



圖六十 自 Linkage 軟體匯出

## 二、 $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 的角度

### (一) $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 角度計算

已知  $D(0, 0)$ 、 $E(30, 0)$  以及旋轉點  $A$ 、旋轉點  $C$  的座標，計算  $\angle ADE$  和  $\angle CED$  的角度。

已知  $D(0, 0)$ 、 $E(30, 0)$ ，令  $A(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ ，

在  $\triangle AED$  中， $\overline{DE}=30$ ，由畢氏定理， $\overline{AD}=\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ， $\overline{AE}=\sqrt{(30-x_1)^2 + y_1^2}$ ，如圖六十一。

由餘弦定理可知  $\cos \alpha = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2\overline{AD} \times \overline{DE}}$ ，其中  $\alpha = \angle ADE$ 。

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}^2 + 30^2 - \sqrt{(30-x_1)^2 + y_1^2}^2}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \times 30}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 900 - [(30-x_1)^2 + y_1^2]}{60\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 900 - (900 - 60x_1 + x_1^2 + y_1^2)}{60\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

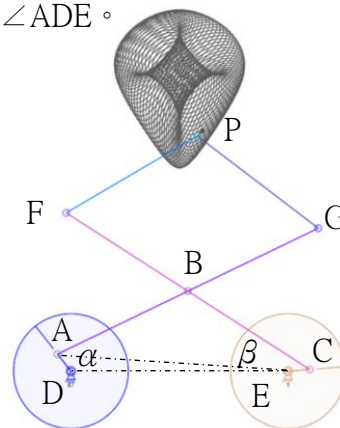
$$\cos \alpha = \frac{60x_1}{60\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

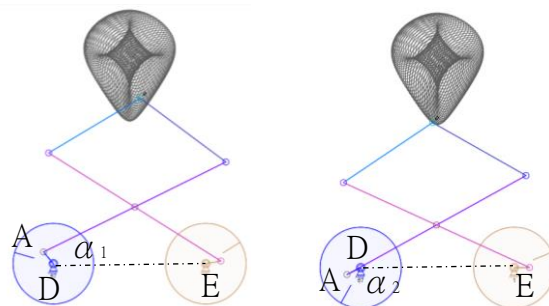
$$\alpha = \angle ADE = \cos^{-1} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

同理可推得

$$\beta = \angle CED = \cos^{-1} \frac{30-x_2}{\sqrt{(30-x_2)^2 + y_2^2}}$$



圖六十一 自 Linkage 軟體匯出



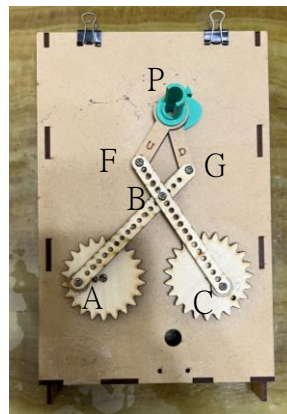
圖六十二 自 Linkage 軟體匯出

### (二) $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 角度限制

$\angle ADE$  的角度取決於旋轉點  $A$ ，當點  $A$  在  $\overline{DE}$  的上方，即點  $A$  的  $y$  座標為正值時， $\angle ADE = \alpha_1$ ；當點  $A$  在  $\overline{DE}$  的下方，即點  $A$  的  $y$  座標為負值時，則  $\angle ADE = \alpha_2$ ，如圖六十二，故  $\angle ADE \leq 180^\circ$ ；同理可知  $\angle CED \leq 180^\circ$ 。

### 三、改良的繪圖機沒有將 $\overline{FP}$ 及 $\overline{GP}$ 的桿長做為改變的因素

在研究過程五-(二)我們發現改變 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 的連桿長度，不管 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 是否相等，僅會使圖形呈現細長形狀或矮寬形狀的變化(參閱表七、表八)。而這樣的變化改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 連桿的長度即可達到，而且在 $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ 時還會讓繪製出來的圖形產生偏斜的情況，更有變化性(參閱表五、表六)，所以我們改良的繪圖機只有在 $\overline{AG}$ 和 $\overline{CF}$ 的桿件上打洞做為變數，沒有將 $\overline{FP}$ 及 $\overline{GP}$ 的桿長做為改變的因素，如圖六十三。



圖六十三 指導老師拍攝

### 四、研究 $\overline{FP}$ 桿長限制沒有以相似三角形來推論

在研究過程三-(三)-2 中，為了簡化研究我們先假設繪圖機呈左右對稱，即 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ， $\overline{FB}=\overline{GB}$ ， $\overline{AB}=\overline{CB}$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，如圖六十四。當 A、C、D、E 四點形成一直線且點 D 和點 E 在 $\overline{AC}$ 上，此時 $\angle ABC$ 的角度最大，而點 B 最靠近 $\overline{DE}$ ，點 P 最靠近 $\overline{FG}$ ，可以推論出 $\overline{FP}$ 最短的長度限制，

$\because \angle ABC = \angle FBG$  (對頂角)，且 $\overline{FB}=\overline{GB}$ ， $\overline{AB}=\overline{CB}$

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle BFG = \angle BGF$

故 $\triangle ABC \sim \triangle FBG$

可得 $\overline{FG} : \overline{AC} = \overline{FB} = \overline{AB}$

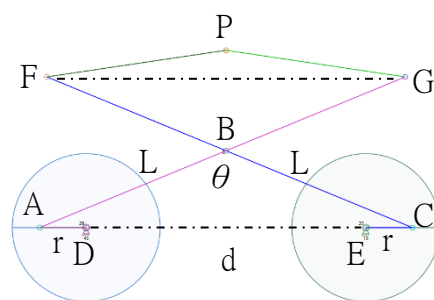
$$\overline{FG} = \frac{\overline{FB} \times \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FB} \times (d+2r)}{\overline{AB}}$$

$\triangle PGF$  中兩邊之和大於第三邊

$$\overline{FP} + \overline{GP} > \overline{FG} = \frac{\overline{FB} \times (d+2r)}{\overline{AB}}, \text{ 又 } \overline{FP} = \overline{GP},$$

$$2\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d+2r)}{\overline{AB}}$$

$$\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d+2r)}{2\overline{AB}}, \text{ 得出桿長 } \overline{FP} \text{ 的限制。}$$



圖六十四 自 Linkage 軟體匯出

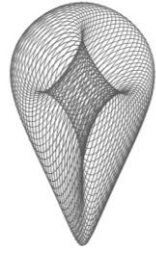
雖然這個公式比用餘弦定理求得的 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$ 簡單，但是這個

公式的前題是繪圖機呈左右對稱，即 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ， $\overline{FB}=\overline{GB}$ ， $\overline{AB}=\overline{CB}$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}$ 。我們以研究過程五-(二)-1 改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 、 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的連桿長度的研究的舉例。讓 $\overline{AG}=\overline{CF}=40$ ，總長度不變，同時改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間與 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的長度比，且讓 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}$ ，

雖然改變點 B 的位置但是繪圖機依然呈左右對稱，在表六中當  $\overline{AB} : \overline{BG} = 19 : 21$ ，此時  $\overline{FP} = 21$ ， $d = 30$ ， $r = 3$ ， $\overline{FB} = \overline{BG} = 21$

代入桿長限制  $\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d + 2r)}{2\overline{AB}}$ ，

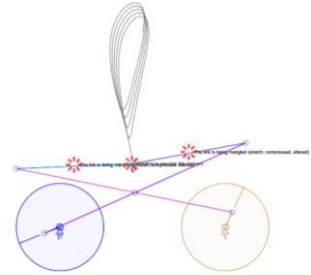
$\overline{FP} = 21 > \frac{21 \times (30 + 6)}{38} \doteq 19.9$ ，符合限制，故能畫出圖形，如圖六十五。



圖六十五 自 Linkage 軟體匯出

當  $\overline{AB} : \overline{BG} = 18 : 22$ ，代入桿長限制  $\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d + 2r)}{2\overline{AB}}$ ，

$\overline{FP} = 21 > \frac{22 \times (30 + 6)}{36} = 22 (\rightarrow \leftarrow)$ ，故無法畫出圖形，如圖六十六



圖六十六 自 Linkage 軟體匯出

若是繪圖機左右沒有對稱，如研究過程五-(二)-1 中，我們讓  $\overline{AG} = 40$  的總長度不變， $\overline{BC} = \overline{BF} = 20$  也維持不變，只改變  $\overline{AB}$  與  $\overline{BG}$  之間的長度比，在表五中當  $\overline{AB} : \overline{BG} = 17 : 23$  時， $\overline{AB} = 17 \neq \overline{BC} = 20$ 。

代入桿長限制  $\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d + 2r)}{2\overline{AB}}$  中

$\overline{FP} = 21 > \frac{20 \times (30 + 6)}{34} \doteq 21.2 (\rightarrow \leftarrow)$ ，依公式得到的結果應該無法繪製出圖形，但是繪圖

機卻依然能畫出圖形，如圖六十七。由此可知這個以相似三角形推論出來的公式，不適用所有的情形，只適用於左右對稱的繪圖機。

但是由餘弦定理求得的桿長限制  $\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$ ，運用的是邊長和

角度來推論，故沒有繪圖機是否左右對稱的問題，所以我們以

$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$  為我們的桿長限制公式。而不以由相似三角形推論

出來的  $\overline{FP} > \frac{\overline{FB} \times (d + 2r)}{2\overline{AB}}$  為一般適用的公式。



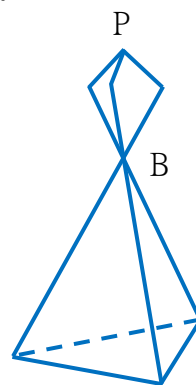
圖六十七 自 Linkage 軟體匯出

## 柒、結論

- 一、這次的研究中，我們從自然教室的角落發現多年前遺留下來的繪圖機玩具出發，經由書籍的查閱、網路資料的搜尋、公式的推導、自製的木板和齒輪、組裝機器…等等的過程中遇到了許多困難，常常看著繪圖機反覆的旋轉，一圈一圈的畫出看似有規則的圖形，卻毫無頭緒，不免想要放棄，但在同學的互相勉勵、老師的鼓勵下，終於走到了最後，完成這個研究，讓我們感到非常開心。
- 二、在研究過程中我們發現找尋答案方法有很多種，有時這條路走不通可以試試別的方法，各方法間也可以彼此驗證結果的正確性。除了在電腦軟體中的繪製，甚至能在紙上畫出研究的成果，讓我們深深的感受到數學之美。
- 三、在研究中我們發現耐心與細心非常重要，研究過程有許多的計算和公式推導，靜下心來仔細的思考，才能順利推論出正確的結果，看到改良的繪圖機依照我們給的變數順利畫出多變的圖形，一切的辛苦都化為喜悅和滿足。
- 四、未來發展方向：

目前我們已找出繪圖機桿長的限制公式、繪圖的形狀、了解改變繪製出來圖形的變數，並依照這些變數改良現有的繪圖機。但是基於現在我們的能力有限，還有一些疑問尚未解決，若改變旋轉中心的位置圖形將會如何改變呢？如何描述畫圖的軌跡呢？是否有更簡便的機器可以畫出更漂亮的圖形？

我們所研究的是平面的繪圖機，有朝一日若有足夠的能力和技術，是否能開發出立體的繪圖機呢？將三個旋轉點分別置於正三角錐底面的三個頂點，繪圖點 B 位於角錐上方的頂點，角錐的三個側邊往上繼續延伸並折向中心交於繪圖點 P，如圖六十八這樣的立體繪圖機。平面繪圖機點 B 所繪製出來的圖形是兩個環形重疊的區塊，立體繪圖機點 B 所繪製出來的圖形會是三個空心球體所交會的區域嗎？平面繪圖機點 P 所繪製出來的圖形是水滴形，立體繪圖機點 P 所繪製出來的圖形會是立體的水珠形嗎？這些想像出來的可能性將是未來可以研究的方向。



圖六十八 第一作者繪製

## 捌、參考資料

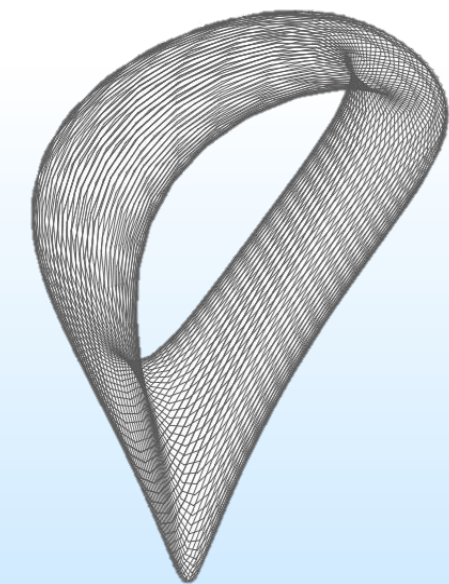
- 一、Ashton, A. (2003). *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*. Bloomsbury USA, New York
- 二、林允涵 (2019 年 6 月 17 日) · 自造筆記齒輪連桿繪圖機 · 取自 <https://vmaker.tw/archives/36818>
- 三、數學能力開發研究會 (2017) · *史上最強圖解數學* · 新北市：漢湘。
- 四、*Involute Spur Gear Builder v2.0*(2020). Rainer Hessmer. Retrieved January 10, 2024, from <https://hessmer.org/gears/InvoluteSpurGearBuilder.html>

## 【評語】 080401

本研究從教室中遺留的一台舊連動桿繪圖機出發，首先分析連動桿繪圖機的結構以及相關原理，亦能透過文獻探討，深化研究團隊對於連動桿繪圖機的認識與理解；然後嘗試找出繪圖機桿長的限制、以及繪製圖形的形狀，也探討了繪圖機相關條件的改變對於繪製出來圖形的影響，同時亦進一步改良原有的繪圖機。整體而言，數學性質的發現、歸納、論證雖然較少，但是通過調整轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑，在電腦軟體中繪製出各種不同的圖形，並改良了連動桿繪圖機，使其能改變轉速、方向、連桿長度比及旋轉半徑，展示了研究團隊的實踐能力，也使得研究成果兼具了美感與應用價值，堪稱是一份佳作。



## 作品簡報

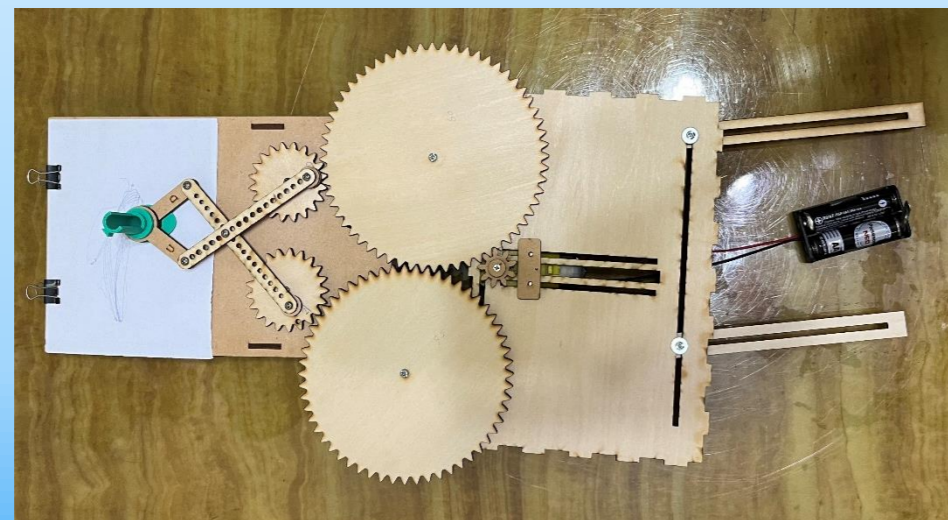
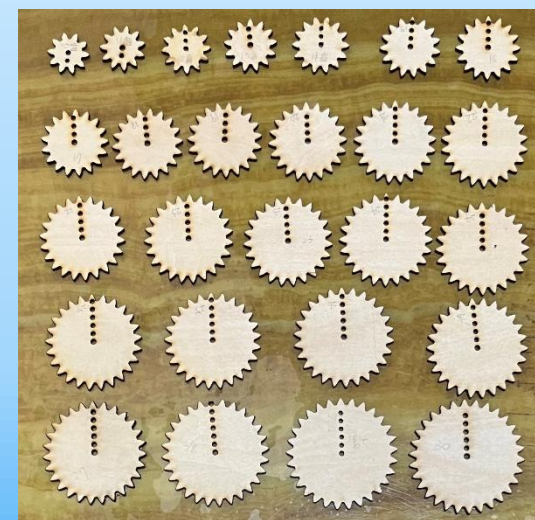
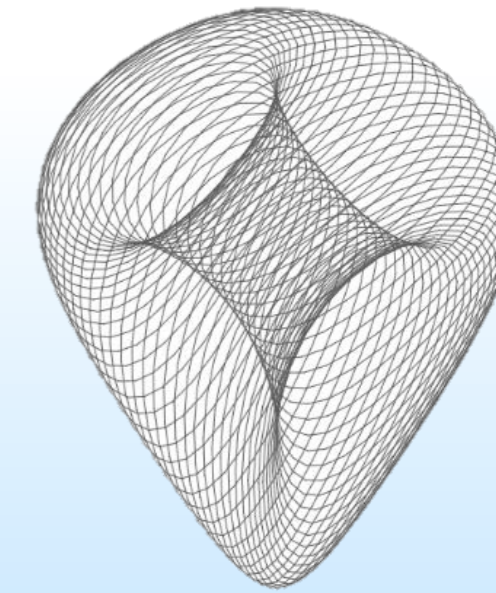


魚

龍

百

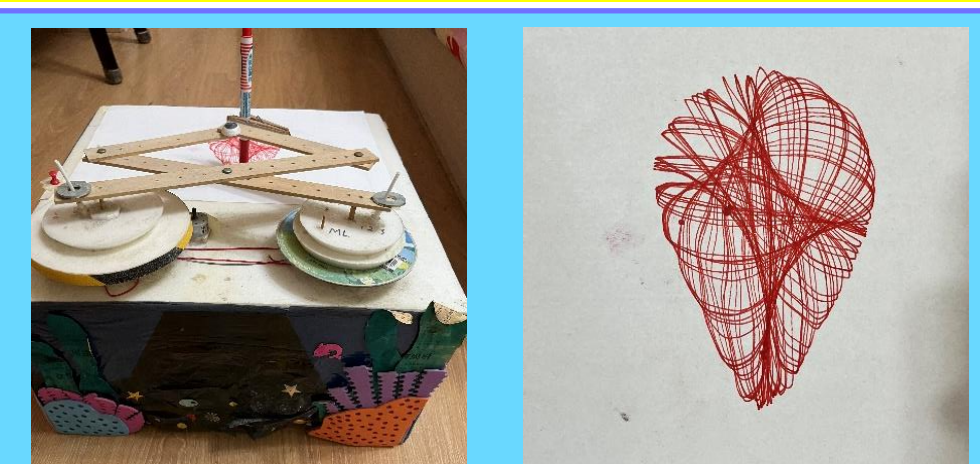
變



— 在轉角遇見小魚畫家

# 壹、研究動機

我們在自然教室的角落發現一臺由保麗龍板、廢CD、木條、玻璃紙、馬達以及太陽能板所組成的繪圖機玩具，如圖一。可以看出這臺繪圖機的動力由太陽能板提供，我們試著用燈光照射，目前已無法運作，但是機器上卻留下了一張當時的繪圖作品，如圖二。這臺機器和這張圖紙引發我們的興趣，為什麼這樣簡單的機器能夠畫出這麼漂亮的圖案？這些圖案是固定的嗎？有什麼方式可以改變它的外觀？其中又隱含了什麼數學原理在裡面呢？在一連串的疑問下，展開了我們「魚龍百變-在轉角遇見小魚畫家」的研究。這臺繪圖機當時被命名為「小魚畫家」。今年是龍年，相傳鯉魚躍過龍門之後，即可化身為龍，騰飛升天，形象百變、幻化無窮。我們將研究題目訂為「魚龍百變」，期許自己在繪圖機所畫出千變萬化的圖形中，找出規律，並理解其相關原理。



圖一 指導老師拍攝 圖二 指導老師拍攝

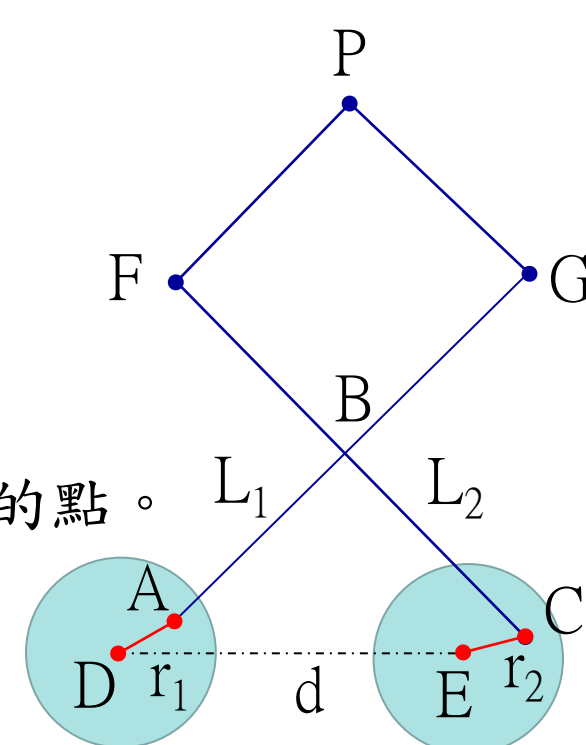
# 貳、研究目的

- 一、分析學長姐所留下來小魚畫家連動桿繪圖機繪圖原理。
- 二、找出繪圖機各桿件長度的限制。
- 三、找出影響繪圖機繪圖的變數，畫出不同的圖形。
- 四、改良現有連動桿繪圖機。

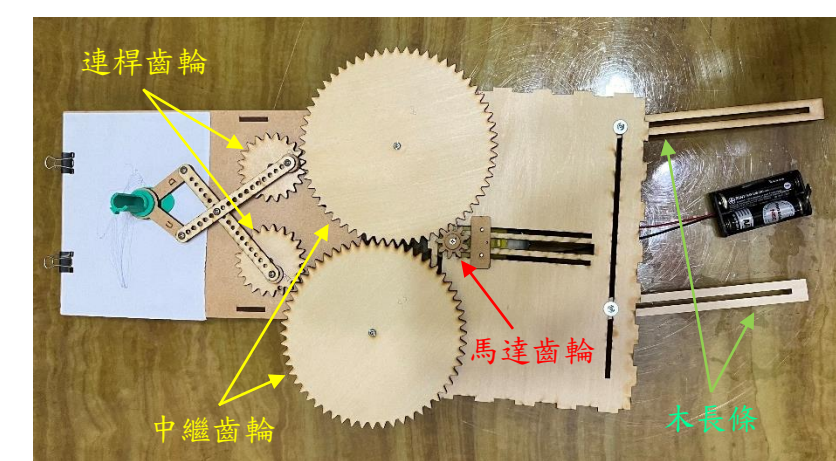
# 參、研究過程

## 一、相關名詞及代號定義

- (一)連動桿：指由許多構件組成，用來傳遞力及運動的機械結構。
- (二)Linkage機構模擬軟體：為免費的電腦程式，可以模擬連動桿機構運動。
- (三)繪圖機各部位代號：繪圖機由兩個旋轉的轉盤，以及一組連動桿所組成，各個連接處以鉚釘或是轉軸固定，可以自由轉動，為了方便辨識，我們將各連接點命名如圖三所示，各桿件的長度如下： $\overline{AB}=L_1$ ， $\overline{BC}=L_2$ ， $\overline{AD}=r_1$ ， $\overline{CE}=r_2$ ， $\overline{DE}=d$ 。點P和點B分別為兩個可繪製圖形的點。
- (四)自製改良現有繪圖機各齒輪名稱，如圖四：
  1. 馬達齒輪：裝在馬達上，隨著馬達轉動的齒輪。
  2. 中繼齒輪：同時連接馬達齒輪和連桿齒輪，由馬達齒輪帶動，再將動力傳送給連桿齒輪，中繼齒輪固定在木長條上，木長條可在木板上橫向移動，中繼齒輪可在木長條上縱向移動，以符合不同大小的連桿齒輪。
  3. 連桿齒輪：連接中繼齒輪和連桿組，帶動連動桿進行繪圖，連桿齒輪有不同齒數以產生不同的轉速。不同齒數，會產生不同大小的齒輪。



圖三 自Linkage軟體匯出



圖四 指導老師拍攝

## 二、文獻探討

我們在學校的網站找到當年的相關資料，這臺機器原來是學長姐在2016年參加太陽能科學玩具比賽所留下來的作品，由網站上的照片我們發現學姐手上所拿的圖形與現在我們看到的不同，如圖五。由此可知這臺繪圖機能夠繪製出不同的圖形。由於當年的學長姐都已經畢業，經過詢問，我們順利找到他們的指導老師，老師借給我們一本英文書籍Harmonograph(Ashton[1])，如圖六。另外我們查閱歷屆的全國科展的資料，並無相關的研究。而以連動桿繪圖機進行搜尋，網路上有多款的繪圖機，其中林允涵的自造筆記齒輪連桿繪圖機的網站中[2]，有提到繪圖機的相關歷史。我們綜合英文書籍Harmonograph的敘述及網路上查找到的資料，將其整理如下：

繪圖機最早可以追溯到2500年前畢達哥拉斯(Pythagoras, 前570年-前495年)聽到鐵錘敲擊鐵砧所發出的聲音，它的音高與鐵錘的重量有關，不同重量的鐵錘產生的聲音有不同的頻率，結合幾個不同頻率的音就可以形成動聽的和弦。

音樂與美術經由數學做出了連結，就像不同的音高組成了和弦，進而產生好聽的音樂；

不同方向的擺動結合在一起可以操控畫筆畫下線條，產生美麗的圖形。

蘇格蘭數學家Bailie Hugh Blackburn(1823-1909)於1844年發明了諧波儀(Harmonograph)，透過使用三個擺錘，其中兩個擺錘以相對的直角擺動，並透過連桿連接到畫筆，第三個擺錘承載著畫紙，三個擺錘同時擺動，畫出圖形，如圖七。1908年被稱為Marvelous Wondergraph的繪圖機上市，它不再以擺錘為動力，改用手轉動轉盤並以繩子帶動紙板盤和連桿，連桿上的畫筆則會在紙板盤上繪製出令人驚嘆的圖形，如圖八。之後Pintograph繪圖機被製造出來，它由兩個轉盤組成。並各自以不同的速率轉動，兩個轉盤經由桿連接到畫筆，形式就和我們研究的小魚畫家繪圖機相似。



圖五 自學校網站下載

圖六 指導老師拍攝

圖七 參考Harmonograph(Ashton[1])由第四作者繪製

圖八 參考自造筆記齒輪連桿繪圖機(林允涵[2])由第四作者繪製

## 三、繪圖機的構造分析

### (一)基本構造

查看學長姐留下的小魚畫家繪圖機，如圖九，可以發現它的動力來自以太陽能為能源的馬達，馬達帶動圓形轉盤，並經由橡皮筋帶動另一個轉盤，轉盤上連接一組連桿，經由轉盤的轉動，帶動整組的連桿做規律的移動，連桿的頂端夾有一枝筆，將頂端的移動路徑繪製下來，形成了我們看到的圖案。

### (二)可改變的因素

1. 連桿組的木條上有許多的孔洞，用鉚釘固定連桿上不同的孔洞，會產生不同比例的連桿長度。
2. 在兩個轉盤上分別有6個和3個孔洞，可以將連桿固定在這些孔洞中，轉盤轉動時可產生 $6 \times 3 = 18$ 種不同的旋轉半徑組合。
3. 右邊被帶動的轉盤，有上下2層，其大小不同，當橡皮筋套在不同的位置，會有2種不同的旋轉速度比。

### (三)桿件長度限制

#### 1. $\overline{AB}$ 的長度限制

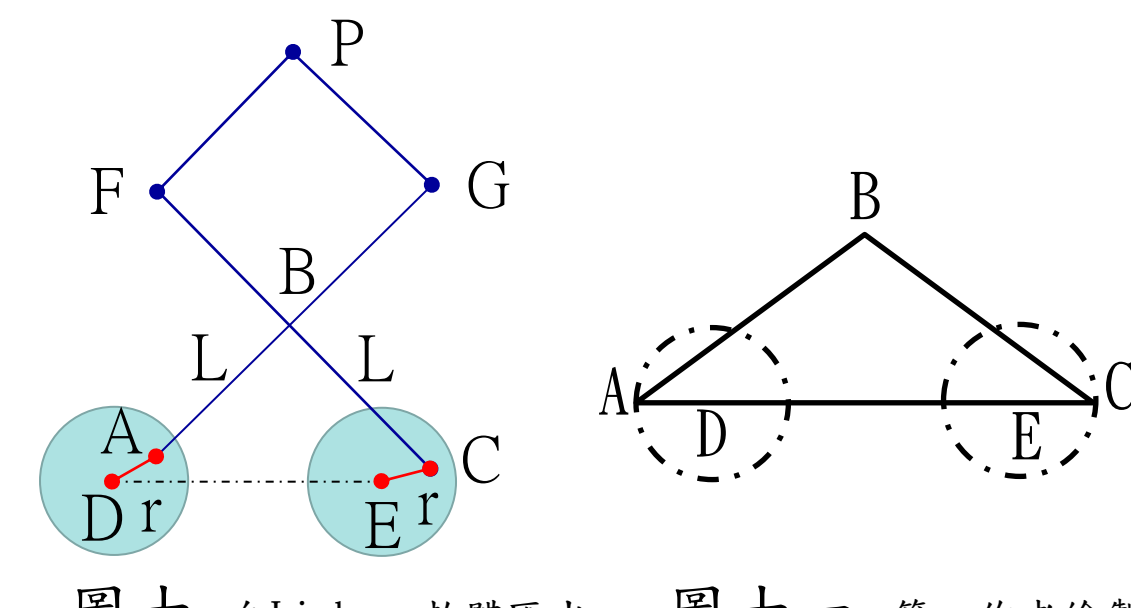
在繪圖的過程中，點A以 $r_1$ 為半徑，繞著點D做圓周運動；點C以 $r_2$ 為半徑，繞著點E做圓周運動，進而帶動整組的連動桿進行規律性的運動，A點和C點在整個旋轉過程中會產生兩個圓，不同的轉速會讓 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$ 彼此之間會有不同的角度組合，進而與點B形成不同形狀的三角形，利用三角形的基本性質，兩邊之和大於第三邊可以推論出繪圖機下半部構件的長度限制。為了簡化研究，我們先讓繪圖機呈現左右對稱的情形，亦即 $\overline{AB}=\overline{BC}=L$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=r$ ， $\overline{FB}=\overline{GB}$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，如圖十。

點A和點C繞著各自的旋轉中心旋轉，當A、C、D、E四點形成一直線且點D和點E在 $\overline{AC}$ 上，如圖十一，此時 $\angle ABC$ 的角度最大。而點B最靠近 $\overline{DE}$ ，此時可以推論出 $\overline{AB}$ 最短的長度限制。

$\triangle ABC$ 中，依據三角形基本性質兩邊之和大於第三邊可知  
 $\overline{AB}+\overline{BC} > \overline{AC}$   
 $\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC} > \overline{DE}+\overline{AD}+\overline{CE}$   
 令 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=r$ ， $\overline{DE}=d$   
 $\Rightarrow 2\overline{AB} > d+2r$   
 $\Rightarrow \overline{AB} > \frac{d}{2}+r$



圖九 指導老師拍攝



圖十 自Linkage軟體匯出

圖十一 第一作者繪製

#### 2. $\overline{FP}$ 的長度限制

繪圖機的上半部分由等形PGBF所組成，其中 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ， $\overline{FB}=\overline{GB}$ ，如圖十二。 $\overline{FP}$ 的長度受限於 $\overline{FB}$ 的長度以及 $\angle ABC$ 所形成的角度 $\theta$ ，將點F與點G以輔助線連接起來，形成 $\triangle PGF$ 和 $\triangle BFG$ ，在繪圖的過程中，點A以 $r$ 為半徑，繞著點D做圓周運動；點C以 $r$ 為半徑，繞著點E做圓周運動，當點A和點C分別旋轉至左右兩側，當A、C、D、E四點形成一直線，且點D和點E在 $\overline{AC}$ 上時 $\theta$ 最大，如圖十三，此時可以推算出 $\overline{FP}$ 的最短長度限制。

$\overline{FP}$ 的長度除了受到 $\overline{FB}$ 和 $\overline{GB}$ 長度的影響外，還取決於 $\angle ABC$ 可以張開的最大角度， $\angle ABC$ 的角度又受 $\triangle ABC$ 的三個邊的長度所決定，為了解決這個問題，我們找到了一本「史上最強圖解數學」(數學能力開發研究會[3])，這本書介紹了許多從小學到高中數學知識，我們從其中找到了餘弦定理，它可以處理三角形中三個邊的長度和一個夾角的關係。

在 $\triangle ABC$ 中由餘弦定理可知：

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{L^2 + L^2 - (d+2r)^2}{2L^2} = \frac{2L^2 - (d+2r)^2}{2L^2}$$

同理，在 $\triangle BFG$ 中， $\cos \theta = \frac{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - \overline{FG}^2}{2\overline{BF} \times \overline{BG}}$ ， $\overline{FG}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta$ ， $\overline{FG} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}$

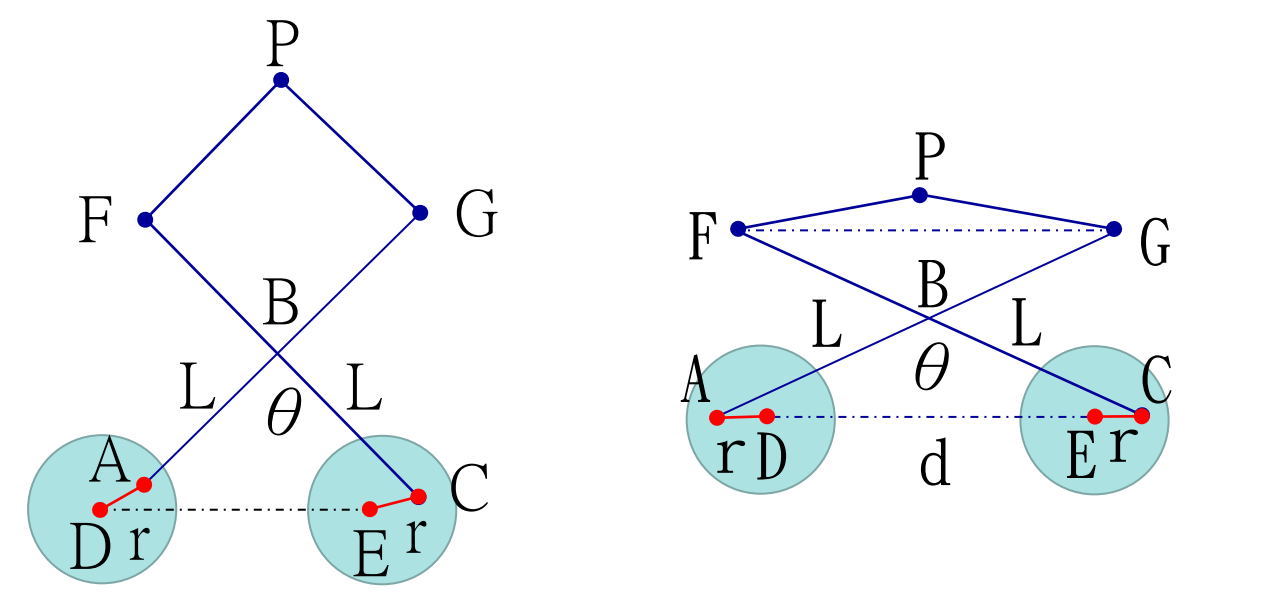
根據三角形兩邊之和大於第三邊，在 $\triangle PGF$ 中，可得 $\overline{FP} + \overline{GP} > \overline{FG}$ ，令 $\overline{FP} = \overline{GP}$

$$2\overline{FP} > \overline{FG} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$$

綜合以上推論可知繪圖機的桿長受到兩個限制，分別為 $\overline{AB} > \frac{d}{2}+r$ 以及 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BF} \times \overline{BG} \cos \theta}}{2}$ ，

其中 $d$ 為 $\overline{DE}$ 長度， $r$ 為旋轉半徑， $\theta$ 為 $\angle ABC$ 的夾角， $\cos \theta = \frac{2L^2 - (d+2r)^2}{2L^2}$ ， $AB=BC=L$ 。



圖十二 自Linkage軟體匯出

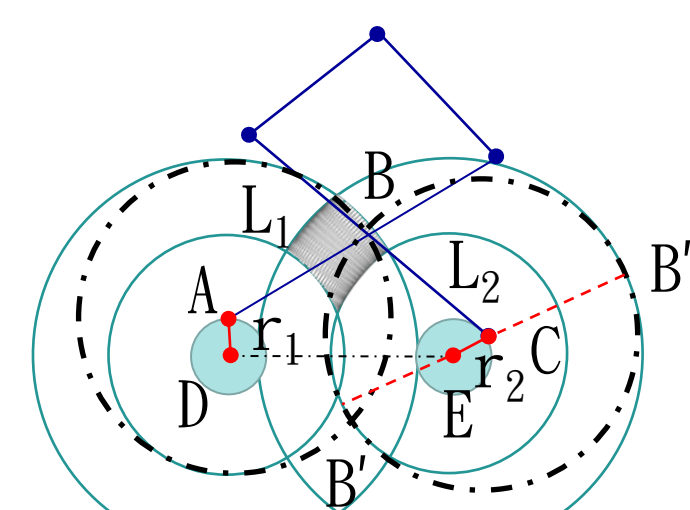
圖十三 自Linkage軟體匯出

## 四、繪製圖形的形狀

### (一)點B所繪製出來的圖形

分別以點C和點A來推論點B的可能範圍，先以點C的位置來推論點B可能的位置，點B與點C之間的距離為 $L_2$ ，對於旋轉到任一位置的點C必有距離點E最近的點B'在 $\overline{CE}$ 的延長線上，使得 $\overline{EB'}$ 長度= $L_2-r_2$ ，及距離點E最遠的點B''在 $\overline{CE}$ 的延長線上，使得 $\overline{EB''}$ 長度= $L_2+r_2$ ，將所有可能的點B標示出來，即為以點E為圓心，分別 $L_2-r_2$ 和 $L_2+r_2$ 為半徑所畫出來的兩圓之間的環形區域。同理可證，以點A的位置來推論點B可能出現的位置，為以點D為圓心，分別 $L_1-r_1$ 和 $L_1+r_1$ 為半徑所畫出來的兩圓之間的環形區域。因為點B同時受點A和點C兩點所連接的連桿限制，所以點B的移動範圍為兩個環形重疊的區塊，如圖十四中間已繪製完成網狀區塊。

由上述可知，點B繪製出來的圖形取決於 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 等四個線段的長度，並且要符合 $\overline{AB} > \frac{d}{2}+r$ ，其中 $\overline{DE}=d$ ， $r = \frac{\overline{AD}+\overline{CE}}{2}$ 。



圖十四 自Linkage軟體匯出

(二)點P所繪製出來的圖形

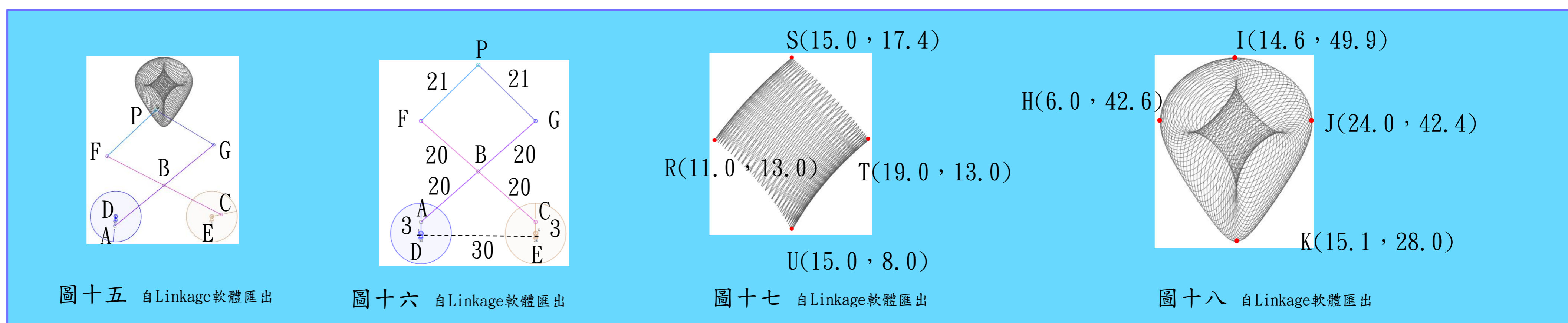
在繪圖機中點P分別與點F和點G相連，與點B共4個點形成一個四邊形PGBF，點A和點C做圓周運動，使得∠FBG產生不同的角度，改變四邊形PGBF的形狀和位置，讓點P繪製出圖形，故無法直接用將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 四個線段來推論繪圖機點P的位置。我們以Linkage軟體來模擬繪圖機，模擬出點P繪製的圖形，如圖十五上方網狀區域。

我們以原小魚畫家繪圖機各構件的比例在Linkage軟體中模擬出繪圖機，令 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{L}=20$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=\overline{r}=3$ ， $\overline{DE}=\overline{d}=30$ ， $\overline{BF}=\overline{BG}=20$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ ，如圖十六。令點D座標為原點(0, 0)，利用Linkage軟體匯出點P、點B以及旋轉點A、旋轉點C的座標，找出點P和點B的極值(即這兩個點可以繪製範圍中最高、最低、最左、最右等四個點，用來表示可以繪製圖形的範圍)。

已知D(0, 0)、E(30, 0)以及旋轉點A、旋轉點C的座標，利用餘弦定理(數學能力開發研究會[3])可算出∠ADE和∠CED的角度，如附件一。(∠ADE和∠CED計算方式請參閱討論二)我們用Linkage軟體匯出所有點B的座標，依數值大小進行排序，找出極左點R、極上點S、極右點T、極下點U，並用Microsoft Excel軟體的公式計算出各點相對∠ADE和∠CED的角度，如作品說明書第10頁表一。(座標及角度取到小數點以下第一位)

這樣可得知點A和點C旋轉到什麼位置，會產生點B所繪出圖形的極值。其圖形如圖十七。

以相同方式利用Linkage軟體匯出點P、旋轉點A、旋轉點C的座標，找出點P的極點以及產生極點時∠ADE與∠CED的角度。由附件一中整理出各極點座標如作說明書第11頁表二，其圖形如圖十八。這樣可得知點A和點C旋轉到什麼位置，會產生點P所繪出圖形的極值。



五、影響繪製圖形的變數

觀察學長姐所做的小魚畫家繪圖機，可以發現以下幾個可變動的變數：右邊被帶動的轉盤，有上下2層，其大小不同，所以會有2種不同的旋轉速度比；連桿組的木條上有許多的孔洞用鉚釘固定連桿上不同的孔洞，會產生不同比例的連桿長度；在兩個轉盤上分別有6個和3個孔洞，可以將連桿固定在這些孔洞中，轉盤轉動時可產生6x3=18種不同的旋轉半徑組合。我們分別以轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑做為變數進行研究。為了控制研究變數，以下繪製的圖形我們讓旋轉點A和旋轉點C的旋轉起始點位置都是由正上方開始轉動。

(一)不同旋轉速度

依照上述的研究，連桿的長度必須符合 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ 以及 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ，我們利用Linkage軟體來模擬，以原小魚畫家繪圖機各構件的比，令 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{L}=20$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=\overline{r}=3$ ， $\overline{DE}=\overline{d}=30$ ， $\overline{BF}=\overline{BG}=20$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ 。左右兩個轉盤以不同速度比進行繪圖，正整數代表順時針旋轉，負整數代表逆時針旋轉，將結果整理如作品說明書第12頁表三及表四。

發現與歸納

1. 當兩個轉盤旋轉速度的最簡單整數比為1:1時，圖形呈圓形，為1:-1時，圖形呈一條直線，如圖十九、二十。

說明：當兩轉盤速度為1:1，兩個轉盤呈同方向等速運動，箏形PGBF被點A和點C牽引做相同的圓周運動，點P繪製出來的為半徑為3的圓形。

當兩轉盤速度為1:-1，兩個轉盤呈反方向等速運動，箏形PGBF被點A和點C牽引做上下運動，點P繪製出來的為一直線。

2. 若轉盤的速度有相同的最簡單整數比，則繪製出來的圖形相同。

說明：速度比=圈數比，以速度比4:6為例，4:6=2:3，

兩個轉盤分別要轉2圈和3圈會同時回到原來相同的位置，整個旋轉的過程速度比為4:6與速度比為2:3的相對位置都相同，故繪製出來的圖形相同。

3. 速度比相反，則繪製出來的圖形呈左右線對稱。

說明：若速度比相反，即速度比a:b變成b:a，其中a、b∈N

速度比a:b與速度比-a:-b的兩個轉盤相對位置都相同，只有繪製過程中繪圖點P運轉的方向相反，故a:b與-a:-b繪製出來的圖形會相同。

b:a繪製出來的圖形可視為將整個繪圖機水平翻轉來看-a:-b的圖形，如此-a:-b與b:a的圖形會呈現左右線對稱的圖形，如圖二十一。因為a:b與-a:-b繪製出來的圖形相同；-a:-b與b:a繪製出來的圖形又會呈現左右線對稱，故速度比a:b與b:a繪製的圖形會呈現左右線對稱。以1:4和4:1為例，如圖二十二。

4. 轉速較快的轉盤較易產生花瓣或折返點。

說明：旋轉點A和旋轉點C轉速的最簡單整數比為a:b，其中a、b∈N，在點A與點C分別轉了a圈和b圈時兩個旋轉點會回到起始點，

完成了一次的完整繪圖。旋轉點每轉一圈會產生一次點B離旋轉中心最遠及一次點B離旋轉中心最近的情形。

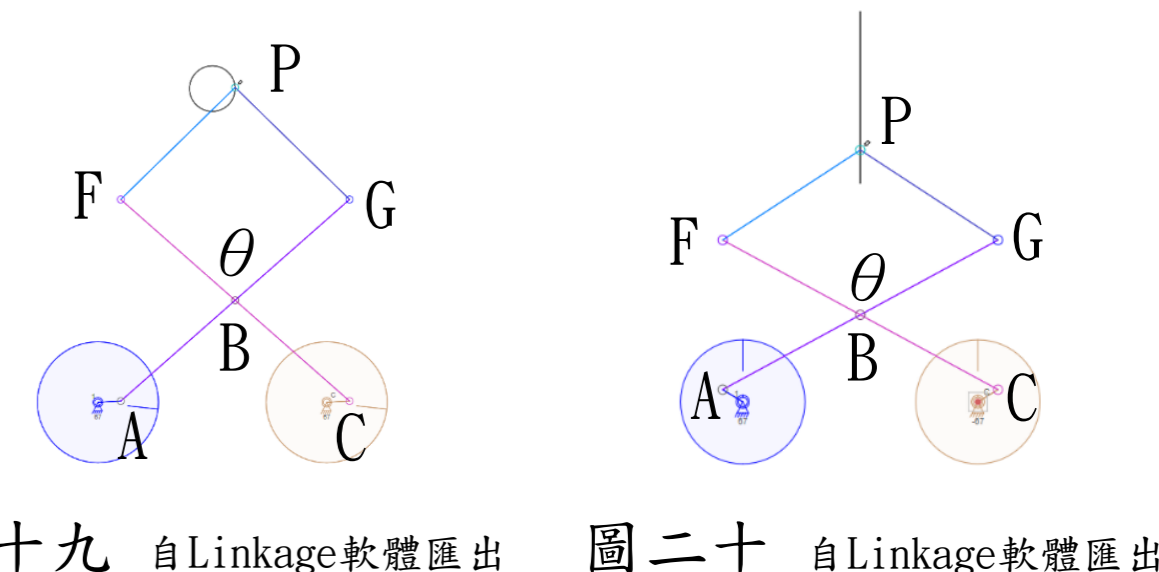
以旋轉點C為例，點B離旋轉中心E最遠和最近都會產生在B、C、E三點成一直線時，分別為 $\overline{BE}=\overline{L}_2+r_2$ 及 $\overline{L}_2-r_2$ 時，

此時易產生折返的花瓣圖形或折返點，故左上及右下的花瓣數常為2b個；同理右上及左下的花瓣數常為2a個，

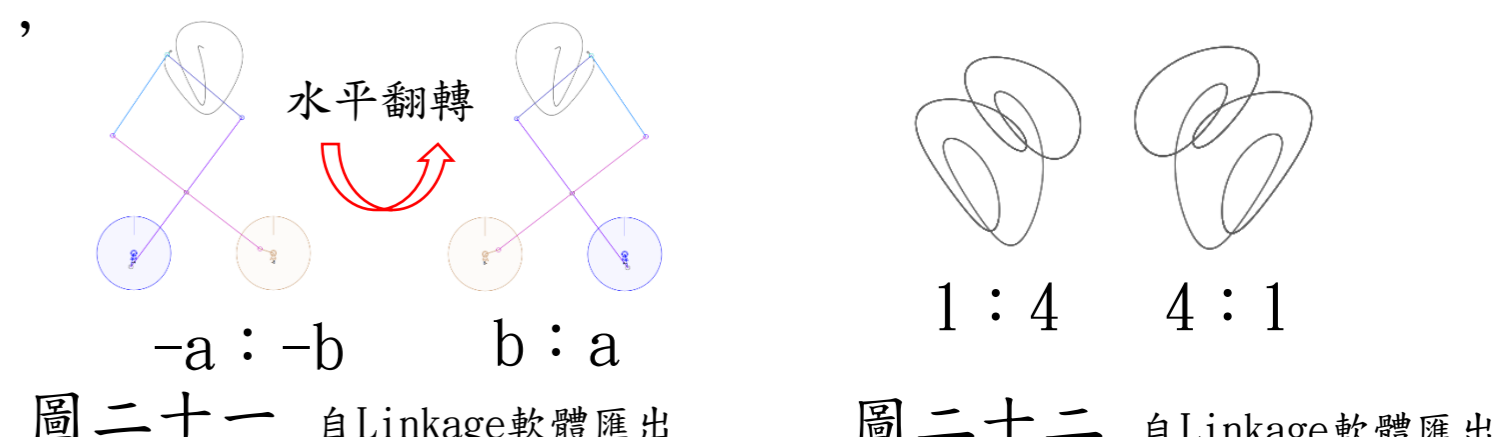
轉速較快的轉盤較易產生花瓣或折返點。

以速度比4:6為例，4:6=2:3。點C轉了3圈時會和點A轉了2圈同時返回原起點，點C轉得較快，

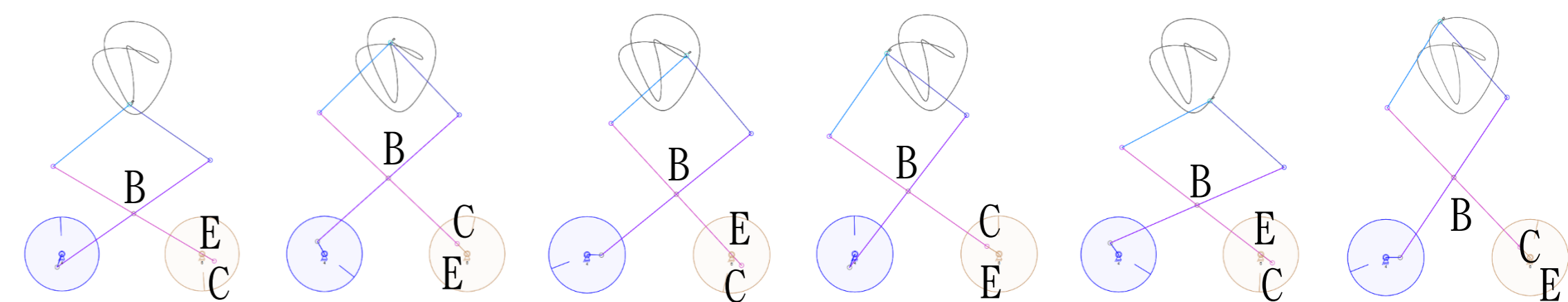
2x3=6，故其間左上及右下共有6個花瓣或折返點，如圖二十三。



圖十九 自Linkage軟體匯出 圖二十 自Linkage軟體匯出



圖二十一 自Linkage軟體匯出 圖二十二 自Linkage軟體匯出



圖二十三 自Linkage軟體匯出

(二)連桿的長度

1.  $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 、 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的連桿長度

我們讓 $\overline{AG}=40$ 的總長度不變， $\overline{BC}=\overline{BF}=20$ 也維持不變，只改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度比，點B每次移動1cm，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如作品說明書第15頁表五。

另外我們讓 $\overline{AG}=\overline{CF}=40$ ，總長度不變，同時改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間與 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BF}$ 之間的長度比，且讓 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}$ ，點B每次移動1cm，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 之間的長度與繪製出來的圖形記錄如作品說明書第15頁表六。

發現與歸納

(1) 在表五中當 $\overline{AB}:\overline{BG}$ 前項的值越小，後項的值越大，圖形的左下角會往內縮得越明顯，整體呈現細長且偏斜的形狀；

反之則圖形的左下角會向外凸出，整體呈現矮寬形狀。

說明：以同樣轉速，不同 $\overline{AB}:\overline{BG}$ 的長度來比較，如圖二十四，兩臺繪圖機轉速相同，故同一時間，

兩臺繪圖機點A與點C都在相同的位置，左圖 $\overline{AB}$ 較短，故 $\theta$ 較大，點P可以繪製的位置較往下，故圖形會較狹長。

(2) 當 $\overline{AB}:\overline{BG}=16:24$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，桿長需符合 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ，已知 $\overline{AB}=16$ ， $\overline{BG}=24$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=3$ ， $\overline{DE}=30$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ ，

$\overline{BF}=20$ ， $\overline{BC}=20$ 。 $\theta$ 最大時如圖二十五，點A和點C分別在點D和點E的外側，且四點在同一直線上，

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{16^2 + 20^2 - 36^2}{2 \times 16 \times 20} = -\frac{640}{640} = -1$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}, \overline{FP} > \frac{\sqrt{20^2 + 24^2 - 2 \times 20 \times 24 \times (-1)}}{2}, \overline{FP} > \frac{\sqrt{936}}{2}, \overline{FP} > 22, \text{ 已知 } \overline{FP} = 21 (\rightarrow \leftarrow) \text{ 故無法順利繪製出圖形，如圖二十六。}$$

(3) 在表六中 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}$ ，繪圖機左右呈對稱，減短 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的長度圖形越瘦長，反之圖形越矮寬。

(4) 當 $\overline{AB}:\overline{BG}=18:22$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，桿長需符合 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=18$ ， $\overline{BG}=\overline{BF}=22$ ，

$\overline{AD}=\overline{CE}=3$ ， $\overline{DE}=30$ ， $\overline{FP}=\overline{GP}=21$ 。 $\theta$ 最大時如上述圖二十五，點A和點C分別在點D和點E的外側，且四點在同一直線上，

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{18^2 + 18^2 - 36^2}{2 \times 18 \times 18} = -\frac{648}{648} = -1, \text{ 將各桿件的長度和 } \cos \theta \text{ 代入桿長限制}$$

$$\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}, \overline{FP} > \frac{\sqrt{22^2 + 22^2 - 2 \times 22 \times 22 \times (-1)}}{2}, \overline{FP} > \frac{\sqrt{1936}}{2}, \overline{FP} > 22, \text{ 已知 } \overline{FP} = 21 (\rightarrow \leftarrow), \text{ 故無法順利繪製出圖形，如圖二十七。}$$

2.  $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 的連桿長度

我們讓 $\overline{GP}=21$ 保持不變，每次將 $\overline{FP}$ 增長或縮短1cm，改變點P位置，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄

如作品說明書第17頁表七。

我們讓 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，每次將 $\overline{FP}$ 和 $\overline{GP}$ 同時增長或縮短1cm，改變點P位置，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄

如作品說明書第18頁表八。

發現與歸納

(1) 在表七中當 $\overline{FP}:\overline{GP}$ 前項的值越小，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。因為 $\overline{FP}$ 較短，所以整體圖形偏向中心軸的左側，如圖二十八。

(2) 當 $\overline{FP}:\overline{GP}=15:21$ ，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，桿長需符合 $\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{BF}=\overline{BG}=20$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=3$ ， $\overline{DE}=30$ ， $\overline{FP}=15$ ， $\overline{GP}=21$ 。

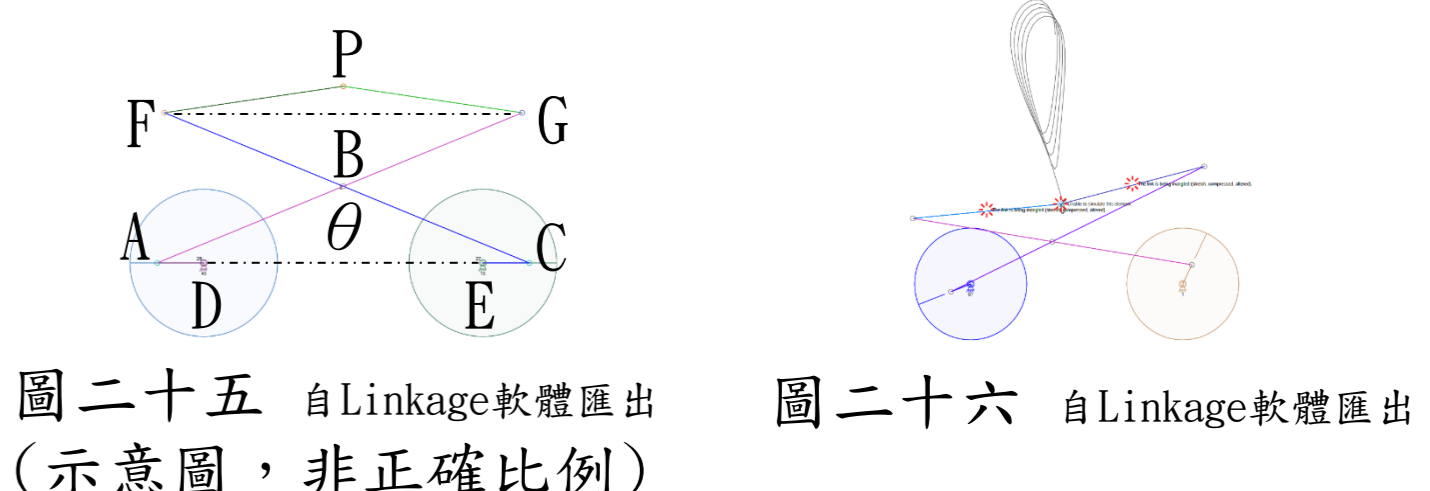
上述研究中令 $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，現在 $\overline{FP} \neq \overline{GP}$ ，故桿長的限制需進行修正，桿長需符合 $\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ， $\theta$ 最大時如上述圖二十五，點A和點C分別在點D和點E的外側，

且四點在同一直線上， $\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{20^2 + 20^2 - 36^2}{2 \times 20 \times 20} = -\frac{496}{800} = -0.62$  將各桿件的長度和 $\cos \theta$ 代入桿長限制

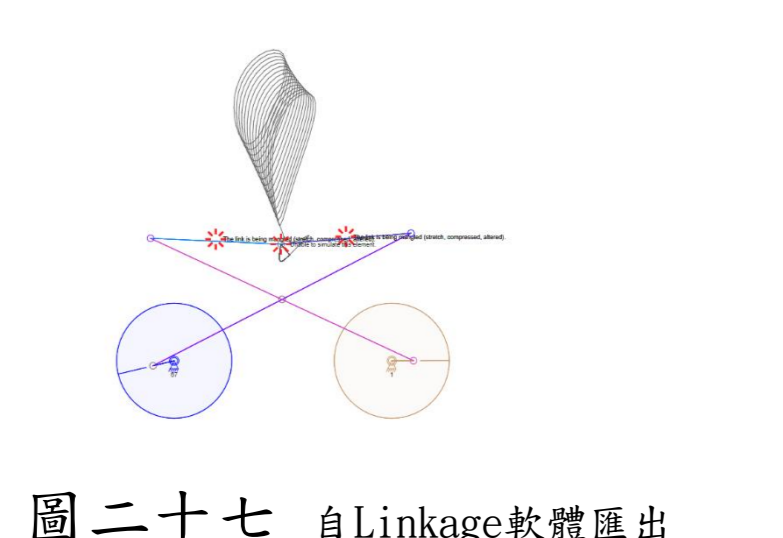
$$\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}, \frac{15 + 21}{2} > \frac{\sqrt{20^2 + 20^2 - 2 \times 20 \times 20 \times (-0.62)}}{2}, \frac{36}{2} > \frac{\sqrt{1296}}{2}, \frac{18}{2} > 18, \text{ 但 } \frac{15 + 21}{2} = 18 (\rightarrow \leftarrow), \text{ 故無法順利繪製出圖形，如圖二十九。}$$

(3) 在表八中， $\overline{FP}=\overline{GP}$ ，當 $\overline{FP}$ 和 $\overline{GP}$ 的長度越短，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。

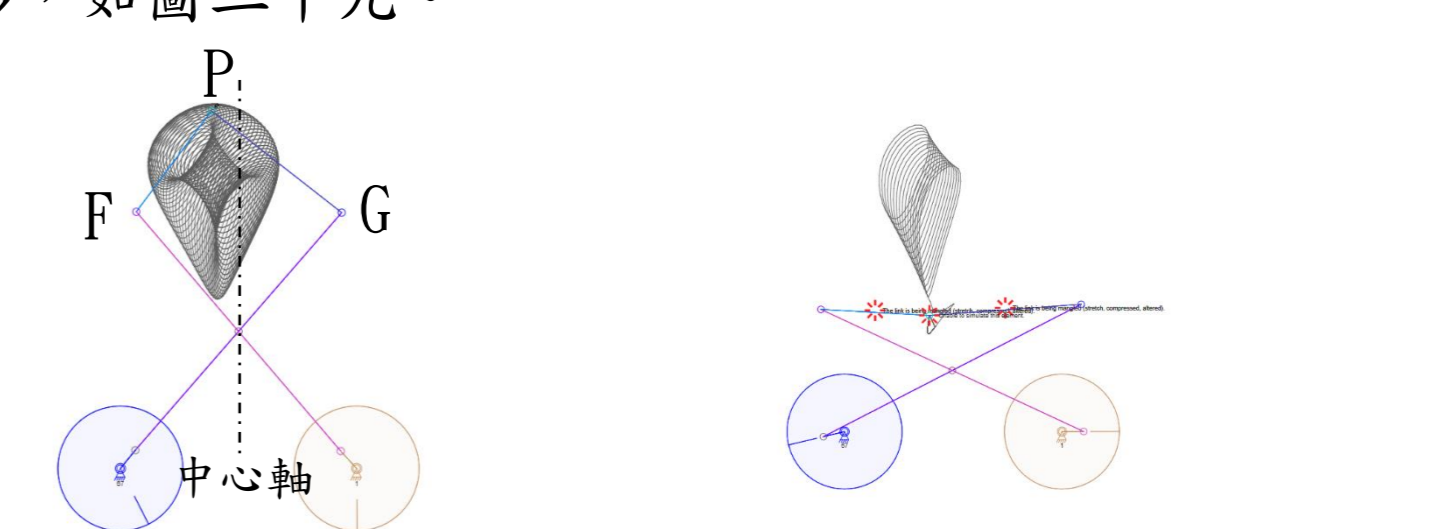
(4) 當 $\overline{FP}:\overline{GP}=18:18$ ，由上述中可知 $\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} > 18$ ，但 $\frac{\overline{FP} + \overline{GP}}{2} = 18 (\rightarrow \leftarrow)$ ，故無法順利繪製出圖形。



圖二十五 自Linkage軟體匯出 (示意圖，非正確比例) 圖二十六 自Linkage軟體匯出



圖二十七 自Linkage軟體匯出



圖二十八 自Linkage軟體匯出 圖二十九 自Linkage軟體匯出

(三)旋轉半徑

1. 改變 $\overline{AD}$ 的長度， $\overline{CE}$ 保持不變

我們讓 $\overline{AD}$ 的長度每次增加或減少1cm，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如作品說明書第19頁表九。

2. 令 $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，同時改變 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度

我們讓 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 長度每次增加或減少1cm，以速度比67:1進行研究。將 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 之間的長度比與繪製出來的圖形記錄如作品說明書第19頁表十。

發現與歸納

(1) 在表九中當 $\overline{AD}:\overline{CE}$ 前項的值越小，除了周圍的變形之外，中間重疊的區域也由右上到左下的細長狀變成從左上到右下的細長狀，當 $\overline{AD}:\overline{CE}=1:3$ 時甚至

產生中間有空隙的環狀。

(2) 當 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}=7:3$ 時，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，桿長需符合 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=\overline{d}=30$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{CE}=3$ 。

上述研究中令 $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，現在 $\overline{AD} \neq \overline{CE}$ ，故桿長的限制需進行修正， $\overline{AB} > \frac{d}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{CE}}{2}$ ， $\overline{AB} > \frac{30}{2} + \frac{7+3}{2}$ ， $\overline{AB} > 20$ ，已知 $\overline{AB}=20 (\rightarrow \leftarrow)$

故無法順利繪製出圖形，如圖三十。

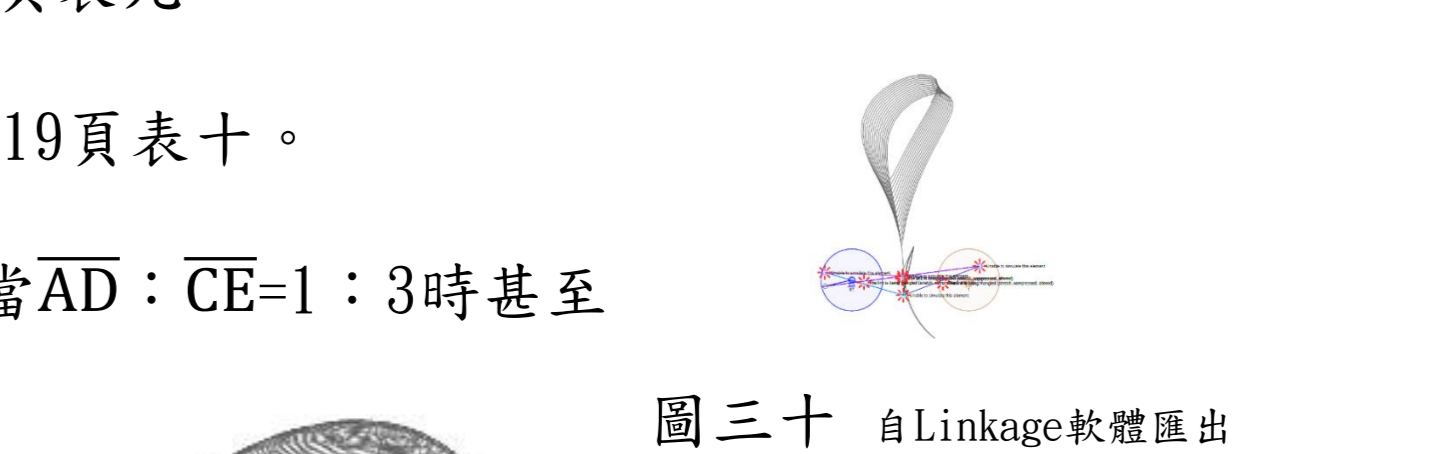
(3) 觀察表九中，圖形愈左邊， $\overline{AD}:\overline{CE}$ 前項的值越大，中間重疊的區域也變成從右上到左下的細長狀，有可能產生中間有空隙的環狀，但 $\overline{AD}:\overline{CE}=7:3$ 已無法順利繪製出圖形，我們讓 $\overline{CE}$ 的值變小，使得 $\overline{AD}:\overline{CE}=7:2$ 。 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{CE}}{2}$ ， $\overline{AB} > \frac{30}{2} + \frac{7+2}{2}$ ，

$\overline{AB} > 19.5$ ， $\overline{AB}=20 > 19.5$ ，符合桿長限制，繪製出來的圖形果然產生中間有空隙的環狀，如圖三十一。

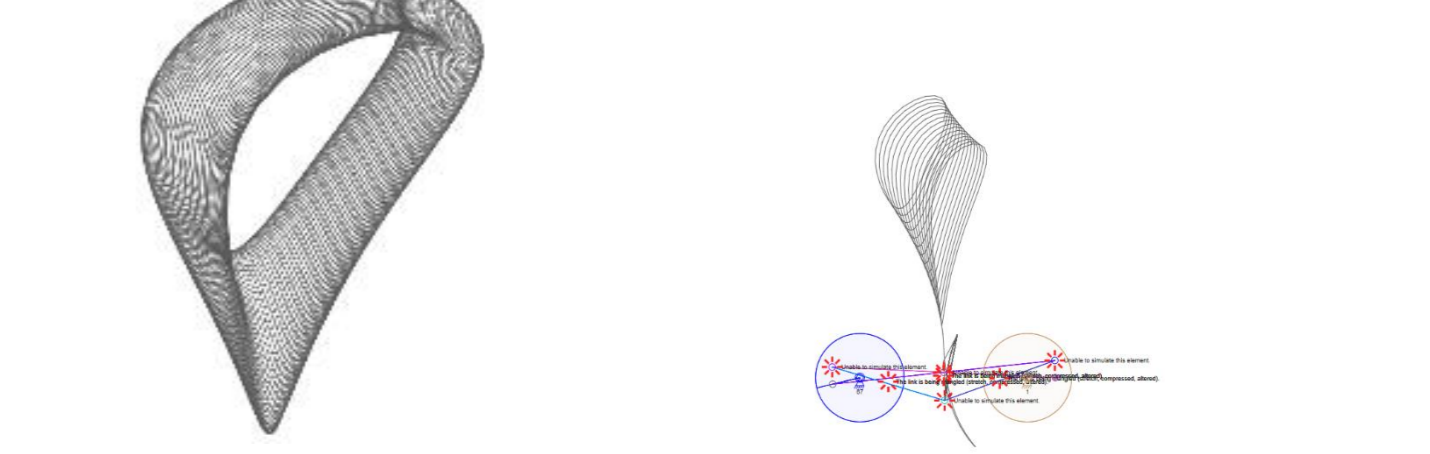
(4) 觀察表十中， $\overline{AD}=\overline{CE}$ ，同時改變 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度， $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 的長度越長，圖形呈現細長形狀；反之呈現矮寬形狀。

(5) 當 $\overline{AD}:\overline{CE}=5:5$ 時，依研究過程三-(三)桿長的限制研究結果，桿長需符合 $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=\overline{d}=30$ ， $\overline{AD}=\overline{CE}=5$ 。

$\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$ ， $\overline{AB} > \frac{30}{2} + 5$ ， $\overline{AB} > 20$ ，已知 $\overline{AB}=20 (\rightarrow \leftarrow)$ ，故無法順利繪製出圖形，如圖三十二。



圖三十 自Linkage軟體匯出



圖三十一 自Linkage軟體匯出 圖三十二 自Linkage軟體匯出

## 六、改良現有連動桿繪圖機

我們市面上找到一款連動桿繪圖機，用馬達帶動齒輪，連桿齒輪齒數分別為28與30，以固定30：28的旋轉速度比來繪製圖形，如圖三十三，因其速度比、桿件長及旋轉半徑都固定，故只能繪製出一種圖形，如圖三十四。

依照上述的研究結果，我們想要改變的變數有轉速比、旋轉半徑以及連桿長度。

我們使用雷切軟體Beam Studio，雷切出一片板子，將市售的連動桿繪圖機的馬達齒輪拆下裝在板子上，並在板子上切出溝槽，讓馬達齒輪可以在上面移動。另外雷切出兩根木長條，供中繼的齒輪移動，如圖三十五。

利用網路上的齒輪繪製器(Rainer[4])，如圖三十六，製作出不同齒數的連桿齒輪，以改變旋轉速度。為了改變旋轉半徑，在齒輪上距離圓心每0.5cm打1個洞，如圖三十七。要使每個齒輪能彼此咬合，我們讓齒輪繪製器上每個齒輪的參數相同(圓螺距7、壓力角28、間隙0.01、齒隙0.03)。為了改變桿長，在連動桿上每0.5cm打1個洞，如圖三十八。

馬達齒輪以順時針方向旋轉並帶動中繼齒輪，中繼齒輪再帶動不同齒數比的連桿齒輪，帶動整組的連動桿開始繪圖。兩個中繼齒輪可以帶動兩個連桿齒輪反向旋轉，一個中繼齒輪可以帶動兩個連桿齒輪同向旋轉，藉此產生正負兩種的速度比，如圖三十九。



圖三十三  
指導老師拍攝

圖三十四  
指導老師拍攝

圖三十五  
指導老師拍攝

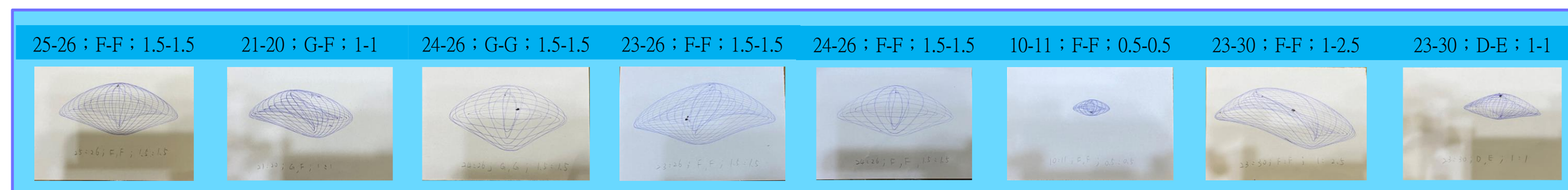
圖三十六  
指導老師拍攝自  
Involute Spur Gear Builder  
v2.0. (2020) (Rainer[4])

圖三十七  
指導老師拍攝

圖三十八  
指導老師拍攝

圖三十九  
指導老師拍攝

運用我們改良的繪圖機，就可以繪製出多變的圖形，我們將連桿上的孔洞由上至下分別編代號A-Q。自編代號如「18-23；D-G；1.5-1」，其中18-23：前項代表左側連桿齒輪齒數，後項表示右側連桿齒輪齒數<sup>註</sup>；D-G：前面的D表示左邊連桿相連結的孔洞，後面的G表示右邊連桿相連結的孔洞；1.5-1：前項1.5表示左側連桿齒輪距離圓心1.5cm與連桿相接，後項1表示右側連桿齒輪距離圓心1cm與連桿相接。順利繪製出不同變數的圖形，如下表。更完整的繪製圖形請參閱附件二。(註：齒輪齒數越多轉得越慢，齒輪齒數與轉速成反比，齒輪齒數比=a：b，則轉速比=b：a。)



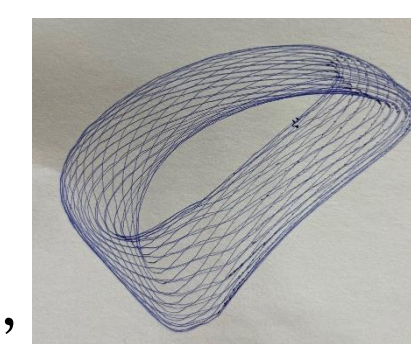
## 七、Linkage機構模擬軟體與自行改良繪圖機繪製圖形之比較

我們用Linkage機構模擬軟體可以繪製出各種變數的圖形，利用自行改良繪圖機也能依照我們設定的變數來繪製圖形，那麼兩種繪圖機若是設定相同的變數，繪製出來的圖形會相同嗎？自行改良繪圖機各變數有現實上機器的限制，但是Linkage機構模擬軟體的變數可以自行依照需要任意輸入數值，所以我們將自行改良繪圖機可以繪製出圖形的變數來輸入Linkage機構模擬軟體中。

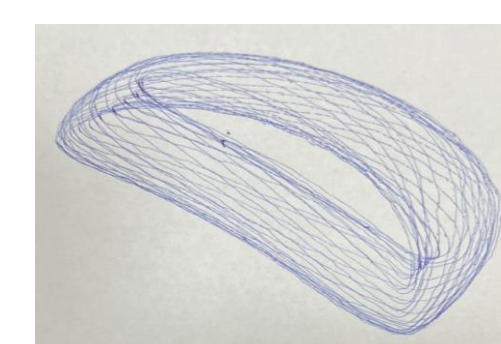
我們先量測自行改良繪圖機的各個部位的長度， $DE=6.5$ ， $AG=CF=9.5$ ， $FP=GP=3.5$ ，來設定Linkage機構模擬軟體各桿件的相對比例。將自行改良繪圖機和Linkage機構模擬軟體所繪製的圖形整理如作品說明書第24頁表十二。因為齒輪齒數比與速度比成反比，故在代號中齒輪齒數比為a：b，在Linkage機構模擬軟體中輸入的速度比須為b：a。

## 八、利用自行改良的繪圖機繪製出想要的圖形

在旋轉半徑的研究中，當左右兩邊的旋轉半徑 $AD：CE=7：2$ 時會產生中空圖形。我們覺得這個圖形相當好看而且特別，但是在我們利用自行改良繪圖機所繪製出來的圖形中(請參閱附件二)，卻沒有一張圖是呈現中空的現象，可見這種圖形不易繪製出來。我們想利用已研究出來的成果，來讓自行改良的繪圖機也能繪製出如此好看的中空圖形。我們觀察旋轉半徑的研究，在旋轉半徑 $AD$ 與旋轉半徑 $CE$ 兩線段長度相差較大時，較容易產生中空圖形，經由多次的嘗試，終於成功繪製出中空圖形，其圖形代號為26-25；H-H；2-0.5。如圖四十。我們也順利繪製出 $AD < CE$ 中空圖形，其圖形代號為23-24；H-G；0.5-2，如圖四十一。



圖四十  
指導老師拍攝



圖四十一  
指導老師拍攝

## 肆、研究結果

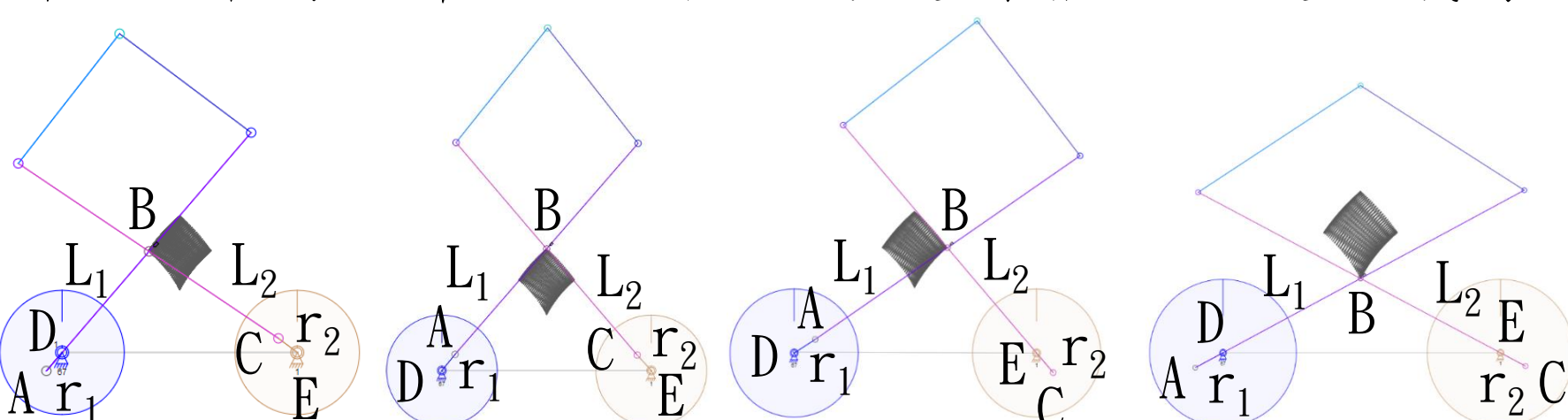
- 一、順利找出繪圖機桿長的限制， $\overline{AB} > \frac{d}{2} + r$  以及  $\overline{FP} > \frac{\sqrt{BF^2 + BG^2 - 2BF \times BG \cos \theta}}{2}$ ，其中d為 $\overline{DE}$ 長度，r為旋轉半徑， $\theta$ 為 $\angle ABC$ 的夾角， $\cos \theta = \frac{2L^2 - (d+2r)^2}{2L^2}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = L$ 。
- 二、找出繪製圖形的形狀，點B必定在以點D為圓心， $L_1 + r_1$ 及 $L_1 - r_1$ 為半徑的環形與以點E為圓心， $L_2 + r_2$ 及 $L_2 - r_2$ 為半徑的環形所重疊的區塊。也找出點B和點P的極值。
- 三、探討出轉盤的旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑對於繪製出來圖形的影響。
- 四、改良現有的繪圖機，並且以改變旋轉速度、連桿長度以及旋轉半徑三個變數來繪製出不同的圖形。
- 五、依照研究的成果來改變繪圖機的變數，順利繪製出想要的圖形。

## 伍、討論

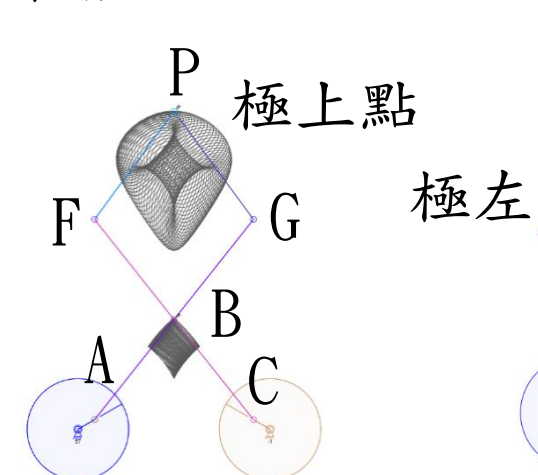
### 一、點B和點P的極點分別在不同的旋轉位置產生

繪圖機在運作時，點B的位置取決於旋轉點A及旋轉點C兩點的帶動，當 $\overline{BD} = L_1 - r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$ 時點B會有極左點；當 $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$ 時點B會有極上點；當 $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 - r_2$ 時點B會有極右點；當 $\overline{BD} = L_1 - r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 - r_2$ 時點B會有極下點，如圖四十二。

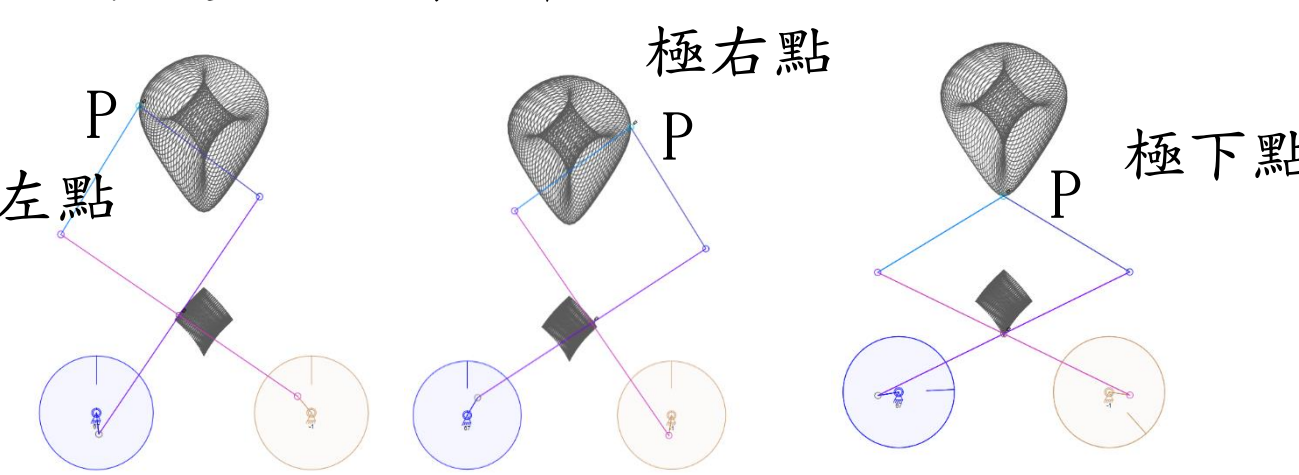
點B的位置取決於 $\triangle BED$ 中 $\overline{BD}$ 和 $\overline{BE}$ 的長度，而點P的位置除了受 $\triangle BED$ 的邊長的影響外，還取決於四邊形PGBF的內角角度。以極上點為例，點B在 $\overline{BD} = L_1 + r_1$ ， $\overline{BE} = L_2 + r_2$ 時會有極上點，若點A和點C繼續向內旋轉，雖然點B會被往下帶，但是 $\angle ABC$ 角度會變小，四邊形PGBF反而會往上延伸，故點P的位置同時受 $\triangle BED$ 的邊長和 $\angle ABC$ 角度的影響，如圖四十三。所以無法單純以點A和點C的位置來推論點P位置，我們改以座標來推論點P四個極點的位置，如圖四十四。



圖四十二 自Linkage軟體匯出



圖四十三 自Linkage軟體匯出



圖四十四 自Linkage軟體匯出

### 二、 $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 的角度

#### (一) $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 角度計算

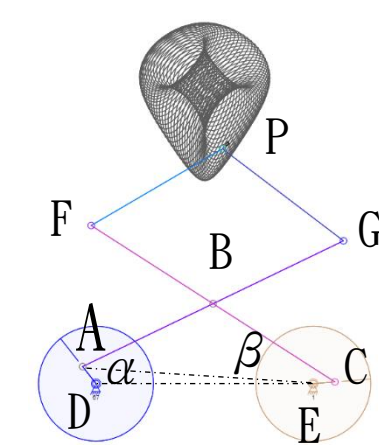
已知 $D(0, 0)$ 、 $E(30, 0)$ 以及旋轉點A、旋轉點C的座標，計算 $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 的角度。已知 $D(0, 0)$ 、 $E(30, 0)$ ，令 $A(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ ，在 $\triangle AED$ 中， $\overline{DE} = 30$ ，由畢氏定理， $\overline{AD} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ， $\overline{AE} = \sqrt{(30-x_1)^2 + y_1^2}$ ，如圖四十五。由餘弦定理可知 $\cos \alpha = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2\overline{AD} \times \overline{DE}}$ ，其中 $\alpha = \angle ADE$ 。 $\cos \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 900 - \sqrt{(30-x_1)^2 + y_1^2} \times 30}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \times 30}$ ， $\cos \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 900 - (900 - 60x_1 + x_1^2 + y_1^2)}{60\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ ， $\cos \alpha = \frac{60x_1}{60\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ ， $\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ ， $\alpha = \angle ADE = \cos^{-1} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 。同理可推得 $\beta = \angle CED = \cos^{-1} \frac{30-x_2}{\sqrt{(30-x_2)^2 + y_2^2}}$ 。

#### (二) $\angle ADE$ 和 $\angle CED$ 角度限制

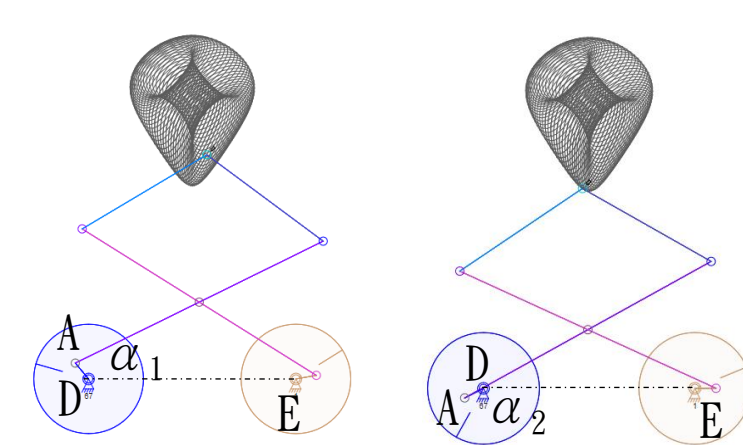
$\angle ADE$ 的角度取決於旋轉點A，當點A在 $\overline{DE}$ 的上方，即點A的y座標為正值時， $\angle ADE = \alpha_1$ ；當點A在 $\overline{DE}$ 的下方，即點A的y座標為負值時，則 $\angle ADE = \alpha_2$ ，如圖四十六，故 $\angle ADE \leq 180^\circ$ ；同理可知 $\angle CED \leq 180^\circ$ 。

### 三、改良的繪圖機沒有將 $\overline{FP}$ 及 $\overline{GP}$ 的桿長做為改變的因素

在研究過程五-(二)我們發現改變 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 的連桿長度，不管 $\overline{FP}$ 與 $\overline{GP}$ 是否相等，僅會使圖形呈現細長形狀或矮寬形狀的變化(參閱表七、表八)。而這樣的變化改變 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BG}$ 連桿的長度即可達到，而且在 $AB \neq BC$ 時還會讓繪製出來的圖形產生偏斜的狀態，更有變化性(參閱表五、表六)，所以我們改良的繪圖機只有在 $\overline{AG}$ 和 $\overline{CF}$ 的桿件上打洞做為變數，沒有將 $\overline{FP}$ 及 $\overline{GP}$ 的桿長做為改變的因素，如圖四十七。



圖四十五  
自Linkage軟體匯出



圖四十六  
自Linkage軟體匯出

## 陸、結論

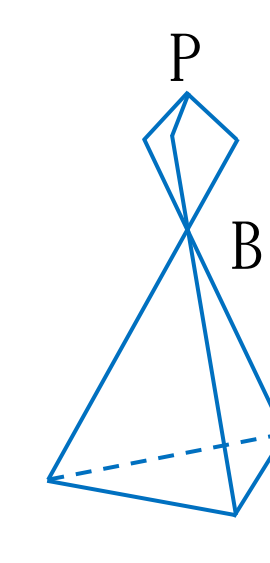
- 一、這次的研究中，我們從自然教室的角落發現多年前遺留下來的繪圖機玩具出發，經由書籍的查閱、網路資料的搜尋、公式的推導、自製的木板和齒輪、組裝機器...等等的過程中遇到了許多困難，常常看著繪圖機反覆的旋轉，一圈一圈的畫出看似有規則的圖形，卻毫無頭緒，不免想要放棄，但在同學的互相勉勵、老師的鼓勵下，終於走到了最後，完成這個研究，讓我們感到非常開心。
- 二、在研究過程中我們發現找尋答案方法有很多種，有時這條路走不通可以試試別的方法，各方法間也可以彼此驗證結果的正確性。推導出桿長限制的公式後，在實作時也能加以驗證，甚至能在紙上畫出研究的成果，讓我們深深的感受到數學之美。
- 三、在研究中我們發現耐心與細心非常重要，研究過程有許多的計算和公式推導，靜下心來仔細的思考，才能順利推論出正確的結果，看到改良的繪圖機依照我們給的變數順利畫出多變的圖形，一切的辛苦都化為喜悅和滿足。
- 四、未來發展方向：

目前我們已找出繪圖機桿長的限制公式、繪圖的範圍、了解改變繪製出來圖形的變數，並依照這些變數改良現有的繪圖機。但是基於現在我們的能力有限，還有一些疑問尚未解決，若改變旋轉中心的位置圖形將會如何改變呢？如何描述畫圖的軌跡呢？是否有更簡便的機器可以畫出更漂亮的圖形？

我們所研究的是平面的繪圖機，有朝一日若有足夠的能力和技術，是否能開發出立體的繪圖機呢？將三個旋轉點分別置於正三角錐底面的三個頂點，繪圖點B位於角錐上方的頂點，角錐的三個側邊往上繼續延伸並折向中心交於繪圖點P，如圖四十八這樣的立體繪圖機。平面繪圖機點B所繪製出來的圖形是兩個環形重疊的區塊，立體繪圖機點B所繪製出來的圖形會是三個空心球體所交會的區域嗎？平面繪圖機點P所繪製出來的圖形是水滴形，立體繪圖機點P所繪製出來的圖形會是立體的冰球形嗎？這些想像出來的可能性將是未來可以研究的方向。



圖四十七 指導老師拍攝



圖四十八 第一作者繪製

## 柒、參考資料

- 一、Ashton, A. (2003). *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*. Bloomsbury USA, New York
- 二、林允涵 (2019年6月17日) · 自造筆記齒輪連桿繪圖機。取自<https://vmaker.tw/archives/36818>
- 三、數學能力開發研究會 (2017) · *史上最強圖解數學* · 新北市：漢湘。
- 四、Involute Spur Gear Builder v2.0. (2020). Rainer Hessmer. Retrieved January 10, 2024, from <https://hessmer.org/gears/InvoluteSpurGearBuilder.html>