

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 物理科

佳作

080103

魔戒三部曲~以物理模型和 tracker 分析翻轉落體的運動模式

學校名稱： 高雄市三民區東光國民小學

作者： 小五 劉洛言 小五 葉宥彤 小五 莊凱心 小五 陳東宥 小五 官凱立 小五 柳橋緯	指導老師： 宋欣蓉 謝甫宜
---	-----------------------------

關鍵詞： 鏈與環、翻轉落體運動、物理模型

魔戒三部曲~以物理模型和 tracker 分析翻轉落體的運動模式

摘要：鏈與環魔術簡稱為魔戒，本研究將魔術 tricks 藉物理模型與 tracker 軟體分析，化成探討翻轉落體運動物理模式。發展四種物理模型進行實驗、攝影與截圖、tracker 分析其 S-t、v-t 圖和相關物理量，解釋環套鏈成因。包括：1.環套鏈物理模式分為翻面落體期、立環直落期、翻鏈套環期與鏈環彈跳期等階段；2.翻鏈套環期決定環能否套入鏈；3.環套入鏈變因與影響程度為：鏈單位長度重量>環質量>鏈長度>環直徑；4.鏈愈輕、環愈重、環直徑愈大時，環可套入鏈長範圍愈大；5.鏈愈長，第二階段立環直落期時間也愈長，其他階段幾乎相同；6.環重遠大於鏈重時，鏈長會糾纏成多個套結，鏈短則形成半個套結；7.經鐵環兩點雙 track 過程，得知環翻轉運動軌跡。亦發現，一節節鏈設計亦為環能套入鏈成因之一。

關鍵字:鏈與環、翻轉落體運動、物理模型

本研究所使用圖片、照片均為研究者自行繪製及拍攝

壹、前言

一、研究動機

某一堂資優班社團活動時，老師秀了一手稱為「魔戒」的傳統魔術，同學們好奇的是「為什麼手放開鐵環後，鐵環沒有垂直落到地面，卻套入珠鏈之中呢？」就在大家嘖嘖稱奇的時候，老師讓任何嘗試挑戰的同學玩魔戒，卻沒有人像老師順手就將鐵環套入珠鏈中。到底是什麼因素影響魔戒的成敗呢？

我們仔細觀察後發現，原來是「鐵環翻轉了！」而且不是轉一整圈喔！影響魔戒成功操作的因素除了個人技巧和鐵環轉動之外，是否還包括摩擦力、轉動慣量、珠鏈長和鐵環重量等因素呢？是否有可能經過「實驗設計」研究魔戒的物理機制？又如何測量魔戒有關的各項物理量呢？

因此，我們六個志同道合的同學集思廣益，希望可以一起發展排除人為等因素，建立物理模型以探討和測量各項影響魔戒成敗之物理量。

二、研究目的與研究問題

- 研究問題 1、鐵環套入珠鏈的過程是否為一種特定的物理模式？
- 研究問題 2、以物理公式和數據能否驗證鐵環套入珠鏈的物理模式？
- 研究問題 3、以 trackers 軟體分析能否驗證鐵環套入珠鏈的物理模式？
- 研究問題 4、珠鏈對於翻轉而落下的鐵環之影響為何？
- 研究問題 5、如何建構合適的物理模型探討鐵環套入珠鏈的現象？
- 研究問題 6、珠鏈長度、珠鏈重量和鐵環重量對環套鏈之影響為何？
- 研究問題 7、環與鏈可能產生哪些套結的異例與其成因為何？
- 研究問題 8、以雙 trackers 分析鏈與環的鐵環運動軌跡為何？

三、文獻回顧

(一)鐵鏈套環的演示

鐵鏈拴環表演效果：鏈子會拴住鐵圈，鐵圈不會掉下來。魔戒常見的操作手法如圖 1 與以下操作步驟所示。

- 步驟 1、左手大拇指與食指撐開鏈子，讓鏈子穿進右手鐵環中央；
- 步驟 2、試著快速移開左手食指，讓鐵圈一端翻滾而下；
- 步驟 3、鐵環只要不是水平下墜，鐵圈即被鏈子拴住。

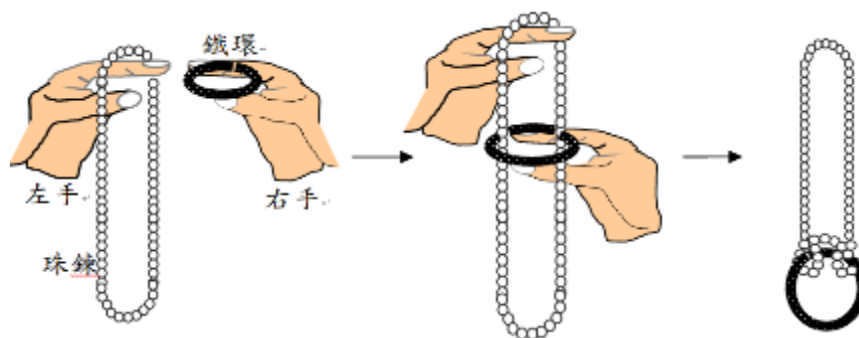


圖 1. 魔戒常見的操作手法

市售的「鏈與環」魔術道具之珠鏈長度固定為 34 cm，而都是鋼製的鐵環與珠鏈都很光滑，如果不計鐵環掉落過程中與珠鏈之間的摩擦力，根據自由落體公式 $h = gt^2/2$ 進行計算， $h = 0.34 \text{ m}$ 、我們用手機的 phyphox 軟體中「含重力之加速度」，測得當時重力加速度 $g = 9.6 \text{ m/s}^2$ ，鐵環掉落到套入珠鏈所需時間 t 只有 0.267 s。也就是說，鐵環從掉落到套入珠鏈的時間不到 0.3 秒，難怪我們都無法看到鐵環是怎麼套入珠鏈中的啊！

因此，我們想採用手機錄影的「慢動作」功能，先初步探索鐵環如何套入珠鏈中的過程，接著就是想辦法儘量排除個人操作技巧與減少手的摩擦力等方式，建立一個適合探討鏈與環的物理模型，以我們建立的物理模型再來探討鐵環和珠鏈的重量、珠鏈長度、鐵環直徑、以及主要影響鐵環套入珠鏈的變因。

(二) 鐵環套入鏈條之魔戒操作手法的探討

1. 只要在環落下的過程中，給它的一邊敲到物體，它就會翻轉了。
2. 把環往上提到定位的位置後，當食指和大姆指放開時，環下落下的過程中就會打到中指而進行翻轉。

討論：

採用上述的操作方式屬於魔術手法，不利於進行鐵環和鏈長等變因的探索，因為利用手指去敲擊鐵環的方式，不僅無法確認敲擊點而增加像是撞擊力道、敲擊鐵環的不同位置、是否敲擊會影響鐵鏈等不確定因素之外，人為因素的操作的技巧性與手指的靈活度影響實驗結果也很大。

因此，我們為了更精確地探索魔戒的各項物理量與變因之間的關係，捨棄上述兩種操作方法，想要另闢蹊徑來儘量屏除人為因素或外界環境干擾對於實驗結果的影響。

- (三) 我們查詢許多關於這類「鏈與環」的相關研究，而多數關於這種稱為「鏈與環」或是「魔戒」的表演最多僅是「破解」魔術，結論都千篇一律指出：鐵環轉了 2~3 圈、或是鐵環轉動 1/4 圈落入鐵鏈，而沒有深入探討鐵環或珠鏈重量、珠鏈長度等變因對於魔術成敗的影響、有些則是很粗淺地探索一或兩項變因，仍然停留在「魔術成敗的機率問題」，我們尚未找到一個深入探索又值得參考的文獻。

因此，對於充滿好奇心又喜歡追根究底的我們團隊，很想進一步探索這項魔術的各項物理量對於成敗的影響，究竟怎樣的鏈與環、以及如何擺放才能達到百分百將鐵環成功地套入鐵鏈？

我們想要排除因為魔術師個人的操作技巧、與鐵環和珠鏈之間摩擦力的影響，而建立一個物理模型。建立模型之目的即提供我們藉由簡化變因之模型，進一步理解模型所模擬的自然現象背後發生的機制。亦即，透過建構模型的過程，可以簡化和蒐尋影響自然現象發生的主要變因，以及探索變因與變因之間的關係！通常科學家透過思維實驗或建構模型，採用較精確的儀器來建構與驗證科學模型或假說。魔戒的建模過程就是探索鐵環套入珠鏈的探究實作歷程，究竟鐵環掉落時和珠鏈之間產生什麼關聯？以下便是我們建立模型、設計實驗與結果分析。

貳、研究設備及器材

一、實驗器材與儀器

珠鏈與鐵環的種類分別如圖 2 與圖 3 所示。以電子天平測量鐵環或珠鏈之重量，游標尺測量鐵環或珠鏈之線徑和直徑，如圖 4、表 1 和表 2 所示。

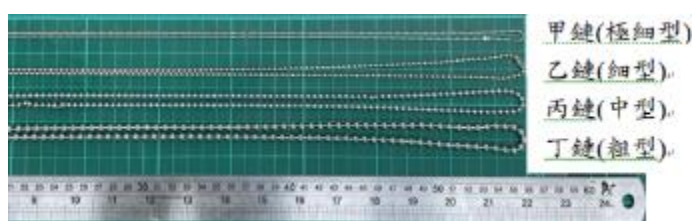


圖 2. 珠鏈的種類



圖 3. 鐵環的種類

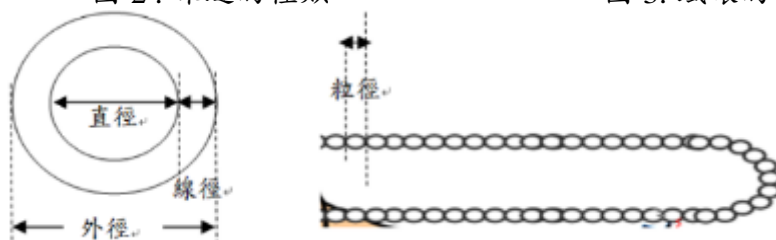


圖 4. 鐵環與珠鏈的名詞定義

表 1. 鐵環類型與物理量

環的類型	質量 M(gw)	線徑(cm)	直徑 R(cm)
A 環	1.88	0.2	2.0
B 環	3.25	0.5	4.8
C 環	4.14	0.1	4.1
D 環	9.22	0.2	4.3
E 環	14.97	0.3	5.0
F 環	16.72	0.3	5.5
G 環	27.00	0.3	5.0

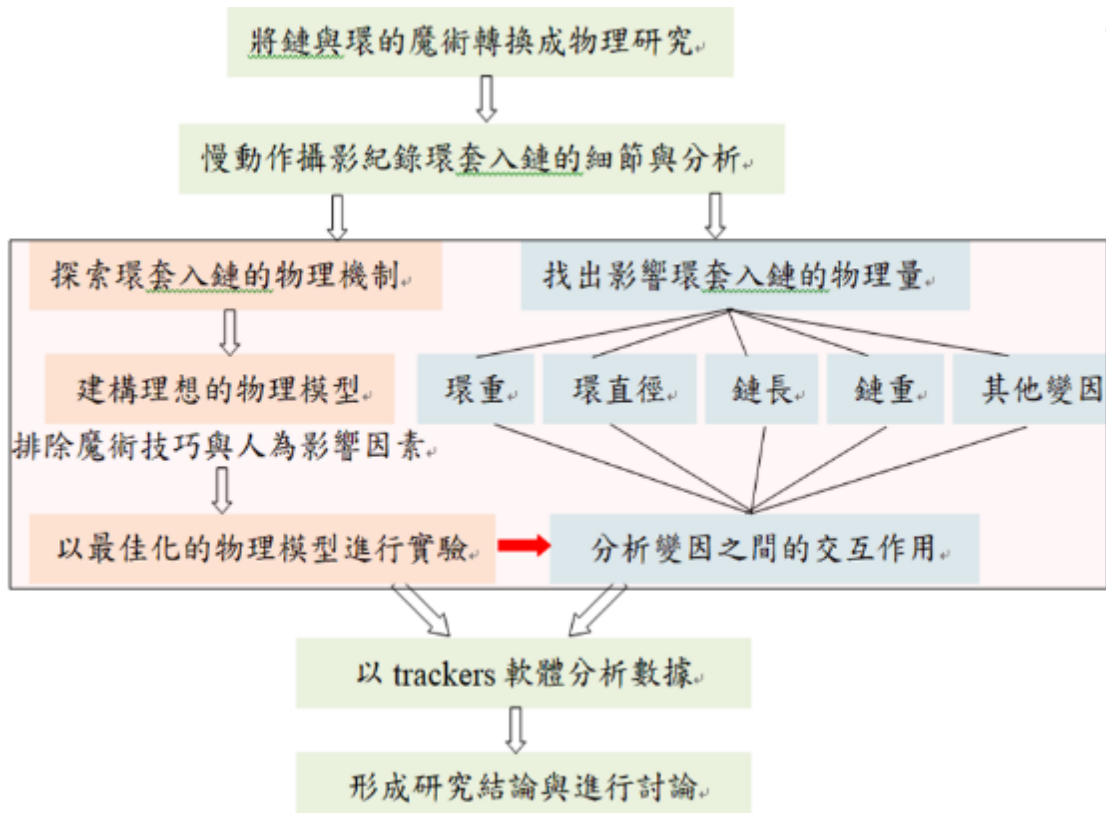
表 2. 珠鏈類型與物理量

珠鏈編號	名稱	粒徑(mm)	重量 W(g)	總長 L(cm)	單位長度之質量(g/cm)
甲鏈	極細鏈	8	15.71	122	0.13
乙鏈	細鏈	12	13.46	70	0.19
丙鏈	中型鏈	20	24.62	95	0.26
丁鏈	粗鏈	26	116.65	372	0.31

參、研究過程與研究方法

一、研究流程

根據我們對於鏈與環魔術的理解，首先探索鐵環如何套入珠鏈的物理「模式(pattern)」，以及鐵環套入珠鏈各種變因的猜測和變因之間的相互影響，並試著排除魔術技巧等因素，建構一個適合探討魔戒的物理「模型(models)」，再用合適的軟體蒐集數據、分析、形成結論、與進一步討論，研究流程如圖 5 所示。



二、研究方法

依據「鏈與環」相關的文獻探討，以及初步探索「鏈與環」的心得，我們從五金行購買許多不同的大小和重量的鐵環、整網粗細不同的珠鏈，並以游標尺和電子天平測量珠鏈與鐵環的重量、以及珠鏈的鏈徑。

我們的研究方法包括：採用相機「慢動作攝影功能」和照片截圖、蒐集的數據和物理公式進行歸納、建構適合探討鏈與環之四種物理模型進行實驗、配合 trackers 軟體分析影片，最後以我們建構的最佳物理模型，進行探討鏈長、鏈重與環重對於鐵環套入珠鏈的影響，以及這些變因之間的交互作用。分別述如下：

1. 首先我們先採用手機中的相機「慢動作攝影功能」和照片截圖，並且每隔 1 cm 繪製在瓦楞紙板作為記錄鐵環落下的高度，初步判斷可能具有的「環套鏈的物理模式」；
2. 逐格撥放影片與截圖的照片，以蒐集的數據和物理公式試著歸納出「環套鏈的物理模式」；
3. 採用 trackers 軟體分析影片，得到落下高度與時間關係圖、速度與時間關係圖(即 y-t 圖與 v-t 圖)等物理量，驗證與修正上述的物理模式。
4. 設計物理模型：我們集思廣益想出各種能夠屏除「個人」操作技巧、降低「手」和鐵環之間的摩擦力、減少因「手」執珠鏈所造成的晃動等人為干擾的因素而試

圖發展最佳化的「鏈與環物理模型」。

此外，我們每發展一套物理模型的過程中，也同時驗證「環套鏈的物理模式」是否合適？是否需要修正或矛盾之處？

- 5.最後，利用我們所建構最佳化的物理模型並配合 trackers 軟體分析影片，探討鐵環與珠鏈之間的交互作用，並探討鐵環套入珠鏈的可能套結型式。

三、實驗過程與討論

(一)研究 1、以慢動作攝影探討「環套鏈的物理模式」

進行實驗設計之前，先採用一般的魔術手法即手動操作，以手機的相機「慢動作」功能攝影方式，試著先探索「鐵環是如何套入珠鏈之中」，接著再一起想辦法盡量排除「手持的珠鏈晃動」、「手和鐵環之間的摩擦力」和「個人操作的技巧」等干擾因素，以便發展適合的物理探究模型進一步測量各項物理量。

雖然觀察過許多魔術師採用不同方式演示魔戒的影片，但是，在特定長度的珠鏈下，只要能讓鐵環翻轉都能讓鐵環套入珠鏈中。但是，究竟鐵環是如何套入珠鏈中的呢？

我們採取以下方式簡化實驗、也能增加實驗結果的一致性：

- 1.為了簡化鐵環套入珠鏈的複雜度，每次我們釋放鐵環之前，都將鐵環放在兩條平行珠鏈的中間位置，也就是兩條平行的珠鏈恰好通過鐵環的圓心，可以避免因為鐵環位置偏差而影響實驗結果。
- 2.每次實驗都讓兩條通過鐵環中心位置的珠鏈，能夠「恰好碰觸鐵環」，避免珠鏈過於緊靠著鐵環而使得鐵環還沒掉落到套住之前，先被珠鏈給「撐住」而影響實驗結果。
- 3.固定左手的大拇指和食指撐住兩條平行的珠鏈、右手大拇指和食指的「指尖」稍微撐住鐵環的兩端，只讓鐵環不要掉落即可，儘量減少鐵環與兩根手指之間摩擦力的影響。



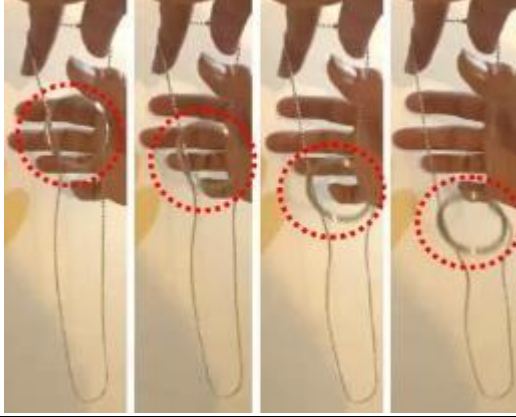

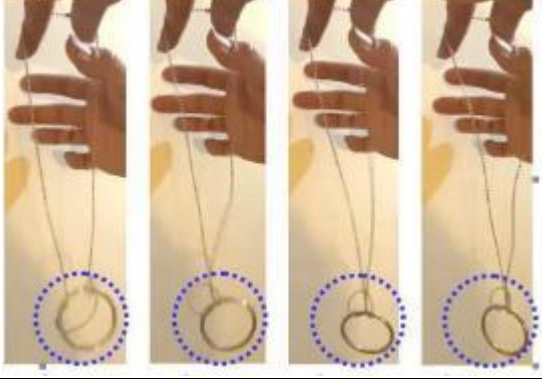
我們先以市售魔術的道具「D 環 9.22 g、乙鏈 34.0 cm」進行測試，找出最手巧的一位組員，用她左手的大拇指和食指撐開珠鏈並且固定不動，而右手的大拇指和食指放上一個鐵環，兩條平行的珠鏈靠著鐵環並穿過鐵環，我們以手機的相機「慢動作」攝影方式拍攝，逐格撥放影格後截圖，彙整這些相片並擺在一起後發現了「魔戒的秘密」其實就是一種「物理模式」！

可是這些截圖下來的一張張照片很多，哪一些照片是鐵環的轉折點？又要如何分類呢？經過組員們仔細討論後，依據以下原則初步比較這些「關鍵照片」進行分類和擺放在一起：

- 原則 1.「鐵環翻轉角度的改變」：鐵環與珠鏈平行的水平狀態，逐漸翻轉成直立狀態，或是鐵環從直立狀態又翻轉成其他角度；
- 原則 2.「珠鏈的變化」：鐵環一邊翻轉、一邊垂直落下，直到套入珠鏈時，原先兩條平行的珠鏈形狀也會隨著改變。

我們比較這些截圖的關鍵相片與上述分類原則，暫時分成 4 個階段進行分析，如表 3 所示。

表 3. 鐵環套入珠鏈的各階段

起手式	階段 1	階段 2
		
<p>1.左手撐開珠鏈，右手放鐵環，兩平行珠鏈穿過鐵環中央。</p>	<p>2.移開右手食指，原來呈現水平狀態的鐵環開始翻轉成直立狀態，起初鐵環一邊翻轉、一邊掉落。</p>	<p>3.鐵環像是「被珠鏈限制住」幾乎都維持直立狀態掉落，幾乎不翻轉；而且鐵環也撐開原先平行的兩條珠鏈，使珠鏈不再平行了。</p>
階段 3		階段 4
		
<p>4.鐵環將珠鏈翻起來，珠鏈被鐵環擠開形成較大「套圈」使鐵環套入珠鏈中。</p>		<p>5.隨著鐵環套入珠鏈之後，珠鏈逐漸縮小套圈並鎖緊鐵環，直到晃動的鐵環靜止。</p>

垂直掉落的鐵環能夠套入珠鏈的原因分析：

- 1.階段 1，移開右手食指，原來呈現水平狀態的鐵環失去平衡而開始翻轉；
- 2.階段 2，鐵環逐漸翻轉成正面，鐵環被珠鏈限制住幾乎都維持正面掉下；
- 3.階段 3，鐵環竟然將珠鏈翻起來並「套入」珠鏈中；
- 4.階段 4，隨著鐵環套入，珠鏈逐漸「鎖緊」鐵環直到靜止。

我們發現，因為將珠鏈改成較重的粗線時，鐵環在最後「階段 3」會將整段粗線「掀」起來，便無法讓鐵環套入粗線中。因此，一顆顆串聯起來的小珠子構成「巧妙的珠鏈設計」可視為「獨立的珠子」，亦為鐵環能翻轉「一段珠鏈」後、「撐開軟 Q 的珠子」、鐵環再套入珠鏈所形成的「套圈」，而不是「鐵環掀起一整條珠鏈」。

為說明上述發現，我們根據鐵環套入珠鏈的過程簡化成四個階段，如圖 6~8 所示。最關鍵的是第三階段「環套入鏈」的過程，又可分解成三個小步驟加以分析和解釋，如圖 9~11 所示。

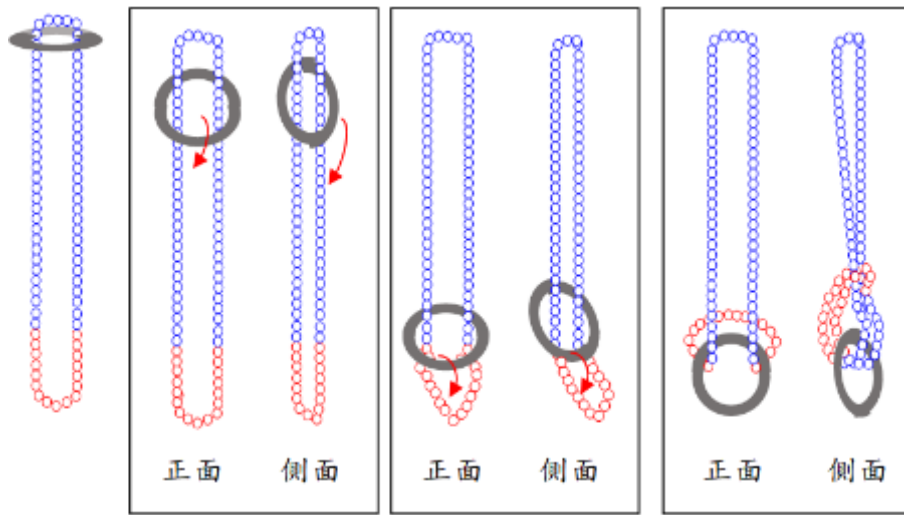


圖 6

圖 7

圖 8

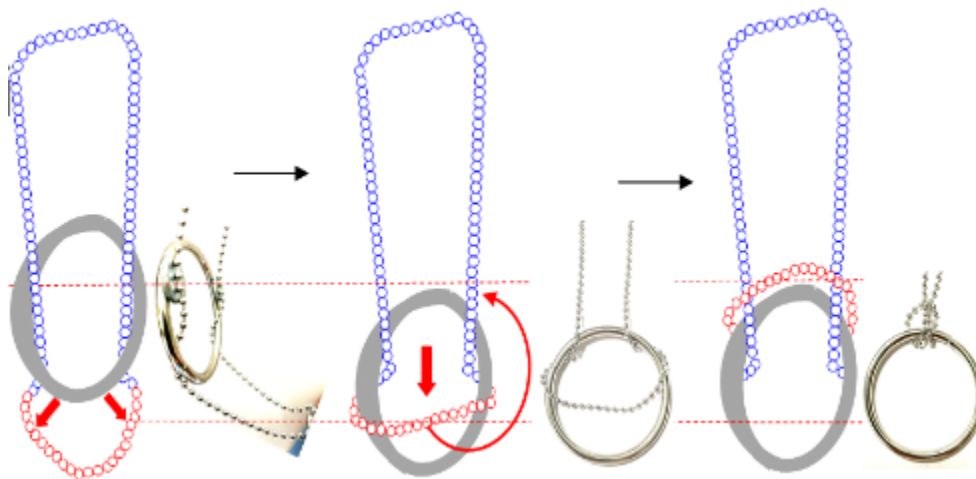


圖 9

圖 10

圖 11

分析與討論:

根據此過程，進一步分析如下:

1. 從鐵環邊掉落且邊翻轉的第 2 階段進入第 3 階段，鐵環翻轉「套入」珠鏈時，如圖 9 的箭頭所示：
 - (1) 鐵環瞬間將珠鏈「撐開」形成一個「比環的直徑還要大」的「套圈」；
 - (2) 珠鏈也隨著鐵環進入「套圈」中而向上甩動。
2. 鐵環一端「轉進、套入」上述「套圈」中並繼續往下掉落，如圖 10 所示；
3. 鐵環套入珠鏈後，珠鏈繞著鐵環「向上甩」至鐵環上端，最終套入鐵環而形成一個「活結」，如圖 11 所示。
4. 在圖 11 中，珠鏈尾端也會因鐵環愈重，甩動幅度愈大，撐開珠鏈所形成的「套圈」也愈寬，魔戒成功率也愈大。

由上述的分析與結論中，我們便想要再探索並且量化，究竟鐵環與珠鏈之重量、珠鏈長度、珠鏈「兩鏈間之寬度」對於魔戒成敗的影響，以及鐵環翻轉落入珠鏈的每一個階段的位移、速率、轉動慣量、動能之重要物理量。因此，我們開始發想許多合適的科學模型進行探討。

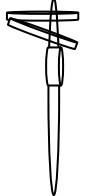
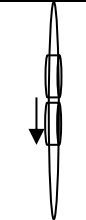
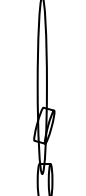

(二) 研究 2、以數據和公式推論「環套鏈的物理模式」

我們以甲環套入 47.0 cm 細鏈為例，試著找到合適的物理模式，先採用自由落體公式進行推導如下：

根據自由落體公式 $h=gt^2/2$ ，同一高度下的自由落體，落體的質量與體積理論上不會影響落地的時間，亦即如果鐵環不受珠鏈影響而進行自由落體時，以本實驗為例，鐵環從高度 0.47 m 自由落下，我們再度採用手機的 App 軟體 Phyphox「含重力之加速度」測得重力加速度為 $g=9.5\text{ m/s}^2$ ，因此： $h=gt^2/2$ ， $0.47=9.5\times t^2/2$ ， $t=0.315\text{ s}$ 。

綜上所述，我們將鐵環套入珠鏈的物理模式，暫時以鐵環掉落的四個階段進行分析，如表 4 所示。

表 4、D 環套入 47.0 cm 細鏈的物理模式與數據分析

魔戒 4 階段	鐵環套入珠鏈的過程描述	落下高度(cm) /時間(s)	鐵環側面 圖示
第 1 階段 翻面落體期	從釋放吸附鐵環的強力磁鐵之一端開始，直到鐵環「翻轉成垂直落下狀態」為止。 鐵鏈經鐵環落下而碰觸會稍微移動，但大致上仍維持垂直地面。	12 cm / 0.1 s	
第 2 階段 立環直落期	從鐵環翻轉成直落狀態開始，鐵環維持直立落下，直到鐵環將開始套入珠鏈之前為止。 鐵鏈因鐵環碰觸會稍微移動，大致上仍維持垂直地面。	6.0 cm / 0.08 s	
第 3 階段 翻鏈套環期	此階段決定鐵環是否可將珠鏈翻起來並卡入珠鏈中，為最關鍵的階段。 此段時間記錄從鐵環套入珠鏈達到最低點、瞬間速率為零並「拉直珠鏈」止。	29.0 cm / 0.13 s	
第 4 階段 鏈環彈跳期	此段時間記錄，是從鏈環一起達到最低點開始，經反覆彈跳又落於最低點為止。		
合計	落體總高度 47.0 cm/ 落體總時間 0.31 s		

從第一、二階段，速度 $v=0$ 開始，愈掉愈快，當鐵環套入珠鏈的第三階段又愈掉愈慢達到最低點，回復到速度 $v=0$ ，進入第四階段時，鐵環反覆彈跳起來再掉下來，最終又到達最低點而靜止！因為階段 4 屬於鐵環掉落到最低點之後，又反彈到一定高度，但是鐵環在第 3 階段就已經套入鏈條了，所以第 4 階段僅為參考，不列入落下總高度和總時間的計算。

實驗結果：

我們反覆觀察慢速攝影的影片發現，「鐵環瞬間掉落後，經過前三個階段，在第四階段「鏈環彈跳期」從鐵環套入珠鏈而卡緊會達到「最低點拉直珠鏈」為止計算落體時間，以手機「慢動作攝影」所測得的落體時間約為 0.31 s，與上述採用自由落體公式推導的結果幾乎相同。

(三) 研究 3、以 trackers 軟體分析與驗證「環套鏈的物理模式」

為了進一步驗證「鐵環套入珠鏈的物理模式分成四個階段」是否合適，我們採用 trackers 軟體進行分析鐵環運動軌跡，將這些 $y-t$ 與 $v-t$ 圖形呈現在電子白板的屏幕上一起討論，根據這些圖形中數據和曲線的差異和共通性，作為下一步實驗的參考和改進，如圖 12 與圖 13 所示。



圖 12. 組員討論鐵環運動軌跡

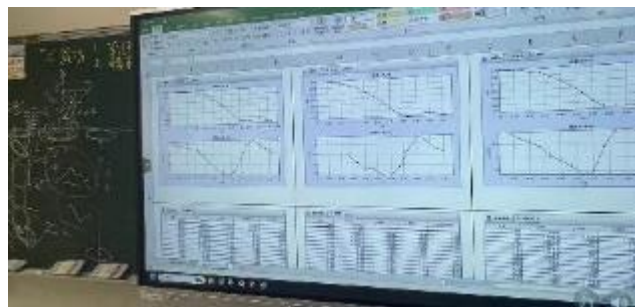


圖 13. 比較每次實驗與 trackers 分析結果

採用 trackers 軟體進行分析鐵環運動軌跡時發現，鐵環套入珠鏈之前有些問題必須優先解決。例如珠鏈必須固定不動並維持兩條平行狀態、鐵環必須完全水平擺放(平行地面)以及對準刻度、鐵環和珠鏈必須恰好接觸，否則這些誤差都會影響 trackers 軟體的分析結果。我們解決這些問題的方法如下：

1. 採用兩塊大壓克力板，以四根粗的螺絲鐵棍鎖住和固定，如圖 14 所示；
2. 將這個裝置連同我們繪製每隔 1 cm 畫線的刻度板一起靠著牆壁；
3. 上面大壓克力板鑽洞，使珠鏈可以穿過小洞口固定珠鏈，如圖 15 所示；
4. 操作時，將鐵環放在大拇指和食指上，移開食指後鐵環就會翻轉套上珠鏈了！



圖 14. 貼牆固定支架



圖 15. 鑽孔穿入珠鏈並固定

我們暫時解決以上問題後發現，這樣的裝置比較穩固，不僅解決手持珠鏈與鐵環的搖晃問題、也能讓穿過鐵環的兩條珠鏈維持一直平行。接著就先以「C 環套入 30.0 cm 的細珠鏈丙」進行實驗，而蒐集和分析數據， y 表示鐵環 t 秒時的垂直落下高度、 v 表示鐵環 t 秒時的瞬時速度，實驗結果如圖 16 所示。

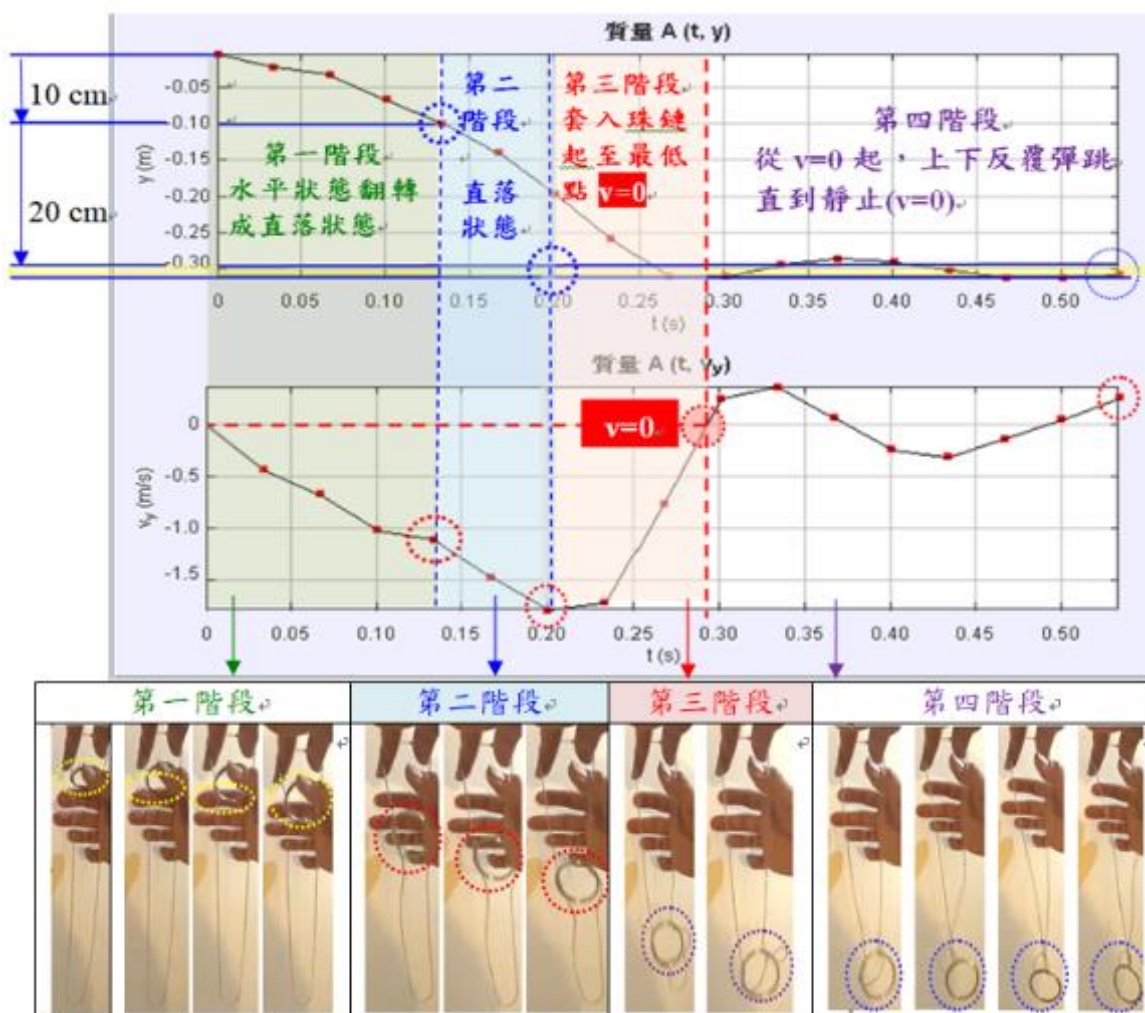


圖 16. 鐵環套入珠鏈之 $y-t$ 、 $v-t$ 圖與各階段狀態

根據圖 16 之「落下高度 y 與時間的關係 $y-t$ 圖」與「速度 v 與時間的關係圖 $v-t$ 圖」，我們進行以下解釋與討論。

1. 各階段的區分標準與方法

第一階段:「鐵環從水平狀態至翻轉成直立狀態」剛好落下 10 cm，歷時 0.14 s；

第二階段: 從 $v-t$ 圖斜率固定，即鐵環「加速度相同」得知，鐵環維持直立落下約歷時 0.06 s (0.14 s ~ 0.20 s) 垂直落下 10 cm (10 cm ~ 20 cm)；

第三階段: 從 $v-t$ 圖斜率改變，即鐵環「加速度不同」得知，鐵環套入珠鏈摩擦力變大，鐵環到達最低點速度為 0，如圖 16 中 $v=0$ 標示，歷時 0.09 s (0.20 s ~ 0.29 s) 垂直落下 10 cm (20 cm ~ 30 cm)；

第四階段: 鐵環從最低點的速率 0 開始反覆彈跳，速度時正、時負，直到鐵環靜止。此階段並非鐵環套入珠鏈的關鍵部分，故僅描述現象。

2. 各階段的鐵環平均速度 v 與平均加速度 a 之比較:

(1) 各階段鐵環的「平均速度 v 」比較如下:

$$v_{\text{第一階段}} = 10 \text{ cm} / 0.14 \text{ s} = 71.43 \text{ cm/s}$$

$$v_{\text{第二階段}} = 10 \text{ cm} / 0.06 \text{ s} = 166.67 \text{ cm/s}$$

$$v_{\text{第三階段}} = 10 \text{ cm} / 0.09 \text{ s} = 111.11 \text{ cm/s}$$

$$\text{即 } v_{\text{第二階段}} > v_{\text{第三階段}} > v_{\text{第一階段}} > v_{\text{第四階段}}$$

(2) 各階段鐵環的「平均加速度 a 」比較如下:

$$a_{\text{第一階段}} = (1.1 - 0) \text{ cm/s} / 0.14 \text{ s} = 7.86 \text{ cm/s}^2, \text{ 速度與加速度同向, 愈來愈快;}$$

$a_{\text{第二階段}} = (1.8 - 1.1) \text{ cm/s} / 0.06 \text{ s} = 11.67 \text{ cm/s}^2$ ，速度與加速度同向，愈來愈快；
 $a_{\text{第三階段}} = (0 - 1.8) \text{ cm/s} / 0.09 \text{ s} = -20.0 \text{ cm/s}^2$ ，速度與加速度反向，愈來愈慢；
 即四階段的「加速度大小」比較： $a_{\text{第三階段}} > a_{\text{第二階段}} > a_{\text{第一階段}} > a_{\text{第四階段}}$

從上述(1)與(2)數據計算與分析，驗證我們先前的觀察和假設，即鐵環從靜止狀態到翻轉成直立的第一階段，以及第二階段都愈掉愈快；當鐵環有足夠速度或動能就能進入第三階段套入珠鏈，此時加速度最大且與速度反向，所以愈掉愈慢，到達最低點速度 $v=0$ ，進入第四階段鐵環反覆彈跳期，最終靜止！

3.此外，圖 16 中，為何 trackers 軟體分析後「落下高度 y 與時間的關係 $y-t$ 圖」之中會有一塊超過 30 cm 的黃底藍線長條形部分呢？

主要原因為鐵環套入珠鏈而糾纏在一起，「不僅造成珠鏈縮短，卻又多了鐵環直徑的長度」，trackers 軟體分析的是「鐵環的軌跡」，因此垂直總高度 $> 30 \text{ cm}$ 的珠鏈長度所致。

綜上所述，從 trackers 軟體分析與各階段區分標準和討論得知，「鏈與環」的物理模式即此「四個階段的鐵環運動過程」。

為求實驗的一致性，我們同樣以「C 環套入 30.0 cm 的細珠鏈丙」重新進行物理模型的實驗操作、錄製影片、以 trackers 進行數據分析後發現，所有的 $S-t$ 與 $v-t$ 圖形都極其相似具有「可區分成四個階段的物理模式」，如圖 17~19 所示。

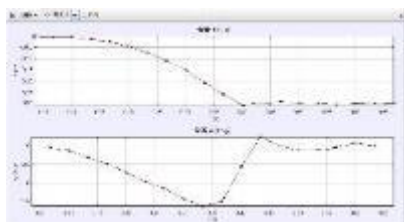


圖 17. 實驗 1

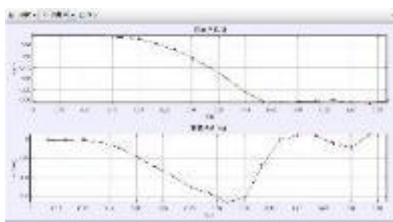


圖 18. 實驗 2

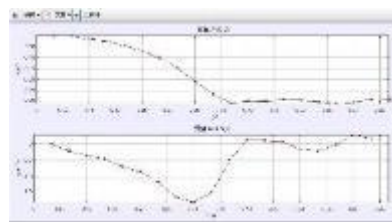


圖 19. 實驗 3

我們想探討同一個鐵環假設都能套入不同長度的珠鏈時，是否都符合四個階段的物理模式？而其他型號的鐵環套入不同長度的珠鏈時，是否其 $S-t$ 與 $v-t$ 圖形也符合四個階段的物理模式呢？

我們推論如下：

因為第一階段鐵環只是「從水平狀態翻轉成直立狀態」的翻面，我們推論，珠鏈型號與長度應該不會影響？第二階段鐵環「從直立狀態沿著珠鏈向下運動」，珠鏈長度愈長，向下掉落所花費時間應該愈長、末速愈快？第三階段「鐵環套入珠鏈」就在短時間完成並達到最低點，珠鏈型號與長度應該也不會影響？第四階段「鐵環與珠鏈」反覆上下跳動，珠鏈型號與長度應該也不會影響？

因此，我們選擇 30 cm、60 cm、90 cm 的極細珠鏈以 trackers 軟體分析，與同一個 D 環進行實驗，再將數據放在一起比較。我們推測，「不論珠鏈長短，凡是可套入珠鏈者，大致上都符合四個階段的物理模式，唯一的差異性只是「珠鏈愈長，第二階段的時間較長而已，第一階段與第三階段鐵環運動時間應該差不多。」

實驗結果根據 trackers 所蒐集的數據進行分析如圖 20 與表 5 所示。

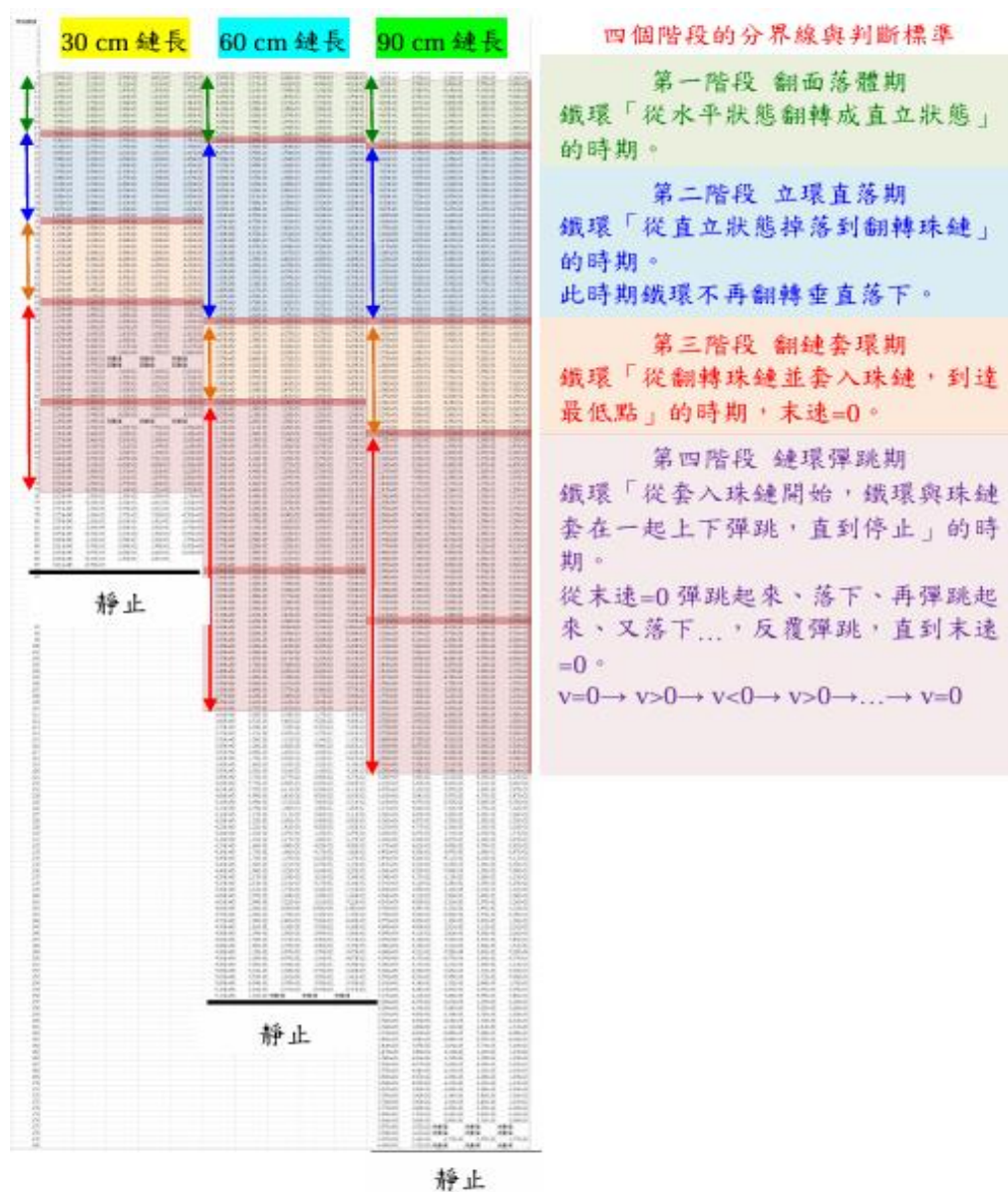


圖 20. D 環套入不同鏈長 trackers 蒐集的數據與分析

採用同一個 D 環分別套入 30 cm、60 cm、80 cm 的同一種甲鏈時，從圖 20 獲得以下結論：

1. 共同點

- (1) 不論珠鏈長短，都符合「翻面落體期、立環直落期、翻鏈套環期、鏈環彈跳期共四個階段的物理模式」。
- (2) 不論珠鏈長短，第一階段「翻面落體期」與第三階段「翻鏈套環期」之落下高度和花費時間幾乎相同。

2. 相異點

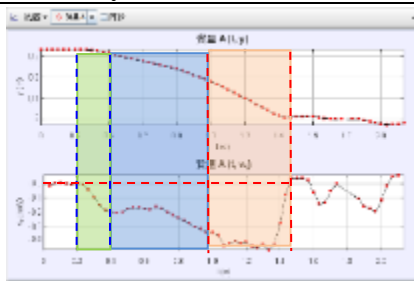
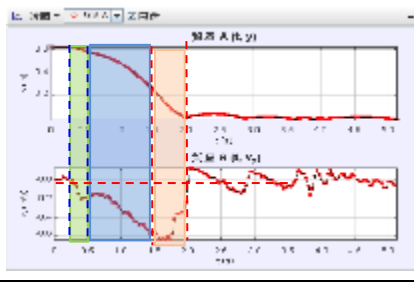
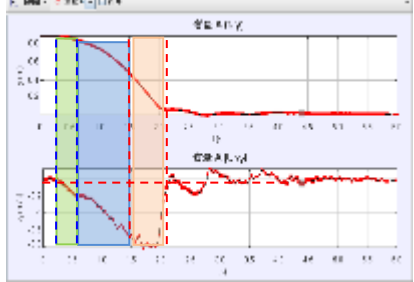
- (1) 珠鏈愈長，第二階段「立環直落期」與第四階段「鏈環彈跳期」之落下高度愈大和花費時間愈長。
- (2) 珠鏈愈長，第四階段「鏈環彈跳期」中鐵環套住珠鏈後，兩者一起上下彈跳的震動幅度愈小，但是兩者震動次數明顯較多。

根據上述第 2 點(2)，我們的推論為：珠鏈愈長，鐵環在最高起始點所具有的重力位能愈大，最終套入珠鏈後的動能也愈大，但是，「整條長長的珠鏈」也會跟著「合體的鏈與環」一起擺動，相當於珠鏈愈長，「合體的鏈與環」慣性也愈大，所以，較大的動能牽引著慣性較大的「鏈與環」時，轉換成擺動的能量就比較短的珠鍊較慢釋放，造成「上下震動幅度小、震動次數多的現象」。

反之，珠鏈愈短，鐵環最終套入珠鏈後的動能愈小，「合體的鏈與環」慣性也愈小，較小的動能牽引著慣性較小的「鏈與環」，轉換成擺動的能量就比較快釋放，造成「上下震動幅度大、震動次數少的現象」。

根據 tracker 軟體所分析 y-t 圖與 v-t 圖，也能說明和解釋第四階段「珠鏈愈長，上下震動幅度小而震動次數多的現象」，如表 5 所示。

表 5. 鐵環套入不同鏈長 trackers 蒐集的數據與分析

鏈長	y-t 圖與 v-t 圖	第一階段	第二階段	第三階段	第四階段
30 cm		0.33~0.28 m 0.27~0.57 s $h_1=0.05$ m $t_1=0.3$ s $\bar{v}=0.167$ m/s	0.28~0.17 m 0.57~1.03 s $h_2=0.12$ m $t_2=0.47$ s $\bar{v}=0.255$ m/s	0.17~0.001 m 1.03~1.47 s $h_3=0.16$ m $t_3=0.33$ s $\bar{v}=0.485$ m/s	振動幅度 第 1 次 $h_4=0.024$ m $t_4=0.567$ s 第 2 次 $h_5=0.028$ m $t_5=0.584$ s
60 cm		0.62~0.57 m 0.27~0.60 s $h_1=0.049$ m $t_1=0.33$ s $\bar{v}=0.148$ m/s	0.57~0.22 m 0.60~1.57 s $h_2=0.35$ m $t_2=0.97$ s $\bar{v}=0.361$ m/s	0.22~0.02 m 1.57~2.00 s $h_3=0.21$ m $t_3=0.43$ s $\bar{v}=0.488$ m/s	振動幅度 第 1 次 $h_4=0.030$ m $t_4=0.902$ s 第 2 次 $h_5=0.02$ m $t_5=0.71$ s
80 cm		0.88~0.83 m 0.30~0.63 s $h_1=0.046$ m $t_1=0.33$ s $\bar{v}=0.139$ m/s	0.83~0.43 m 0.63~1.57 s $h_2=0.40$ m $t_2=0.93$ s $\bar{v}=0.430$ m/s	0.43~0.08 m 1.57~2.17 s $h_3=0.35$ m $t_3=0.60$ s $\bar{v}=0.583$ m/s	振動幅度 第 1 次 $h_4=0.022$ m $t_4=0.99$ s 第 2 次 $h_5=0.02$ m $t_5=0.8$ s

註: h_1 、 h_2 、 h_3 表示鐵環分別在各階段落下的高度； t_1 、 t_2 、 t_3 表示鐵環分別在各階段通過的時間； \bar{v} 表示鐵環在各階段的平均速度(m/s)。

依據表 5 「D 環分別套入 30 cm、60 cm、80 cm 的鏈長」之物理量與數據分析，可獲得以下結論：

1. 第一階段「翻面落體期」

- (1) 落下的高度 h (m) 分別為 $h_{30\text{cm}}=0.05$ 、 $h_{60\text{cm}}=0.049$ 、 $h_{80\text{cm}}=0.046$ ；
- (2) 花費時間 t (s) 分別為 $t_{30\text{cm}}=0.3$ 、 $t_{60\text{cm}}=0.33$ 、 $t_{80\text{cm}}=0.33$ 。

因此，兩種物理量幾乎完全相同，也驗證先前對於圖 20 的說明和解釋。

2. 第二階段「立環直落期」

- (1) 落下高度 h (m) 比較: $h_{80\text{cm}}=0.40 > h_{60\text{cm}}=0.35 > h_{30\text{cm}}=0.12$ ，表示「珠鏈愈長，落下高度愈大」是合理的現象。
- (2) 花費時間分別為 $t_{30\text{cm}}=0.47$ 、 $t_{60\text{cm}}=0.97$ 、 $t_{80\text{cm}}=0.93$ 。為何 $t_{60\text{cm}} > t_{80\text{cm}}$ 呢？

我們發現，第二階段中三者平均速度 v (m/s): $\bar{v}_{80\text{cm}}=0.430 > \bar{v}_{60\text{cm}}=0.361 > \bar{v}_{30\text{cm}}=0.255$ ，亦即 80 cm 珠鏈的鐵環落下的平均速度，大於 60 cm 和 30 cm 珠鏈之鐵環落下的平均速度，「珠鏈愈長，落下的速度或平均速度也愈大」是合理的現象，而當平均速度愈大，

落下相同高度所花費的時間就會愈短。但是，三者第二階段所落下的高度卻不同，而且 $t_{60\text{cm}}=0.97$ 、 $t_{80\text{cm}}=0.93$ 也非常接近，仍可合理解釋此現象。

3. 第三階段「翻鏈套環期」

(1) 落下高度 $h(\text{m})$: $h_{80\text{cm}}=0.35 > h_{60\text{cm}}=0.21 > h_{30\text{cm}}=0.16$;

(2) 花費時間 $t(\text{s})$: $t_{80\text{cm}}=0.60 > t_{60\text{cm}}=0.43 > t_{30\text{cm}}=0.33$;

(3) 平均速度 $v(\text{m/s})$: $\bar{v}_{80\text{cm}}=0.583 > \bar{v}_{60\text{cm}}=0.488 > \bar{v}_{30\text{cm}}=0.485$ 。

表示「珠鏈愈長，落下高度愈大、平均速度愈快、花費時間也愈長」屬於合理的現象。

4. 第四階段「鏈環彈跳期」

因鐵環套入珠鏈後彈跳多次，我們不討論數據，僅比較和解釋現象。

(1) 反覆震動的幅度趨勢: 不論鏈長，三者震動的幅度皆愈來愈小。但是，30 cm 震動幅度 $>$ 60 cm 震動幅度 $>$ 90 cm 震動幅度。

(2) 反覆震動的次數: 90 cm 震動次數 $>$ 60 cm 震動次數 $>$ 30 cm 震動次數。

上述結果與先前對圖 20 第四階段的觀察和解釋相同。

(四) 研究 4、探討珠鏈對於鐵環翻轉之影響

我們測得的時間 0.31 s 與上述採用自由落體公式推導的結果 $t=0.315$ s 幾乎相同，這是否意味著「自由落體與旋轉落體」的物理現象，兩者的落下時間、速度等物理量都相同呢？因此，我們進一步討論「研究 4、珠鏈對於鐵環翻轉之影響」。

以「鐵環沒有珠鏈限制下的自由翻轉」作為對照組，與「鐵環在珠鏈限制下翻轉」作為實驗組，比較兩種鐵環自由落下時的物理模式有何差異？

在同一高度 60.0 cm 下，我們以強力磁鐵分別吸附兩個完全相同的鐵環 D，「沒有珠鏈限制下自由翻轉的鐵環」代號 F、「鐵環在鏈長 43.0 cm 中翻轉」代號 G，同時移開一邊的強力磁鐵釋放鐵環的一端後，F 和 G 同時開始翻轉並以手機慢動作功能進行攝影與截圖，如圖 21 所示。

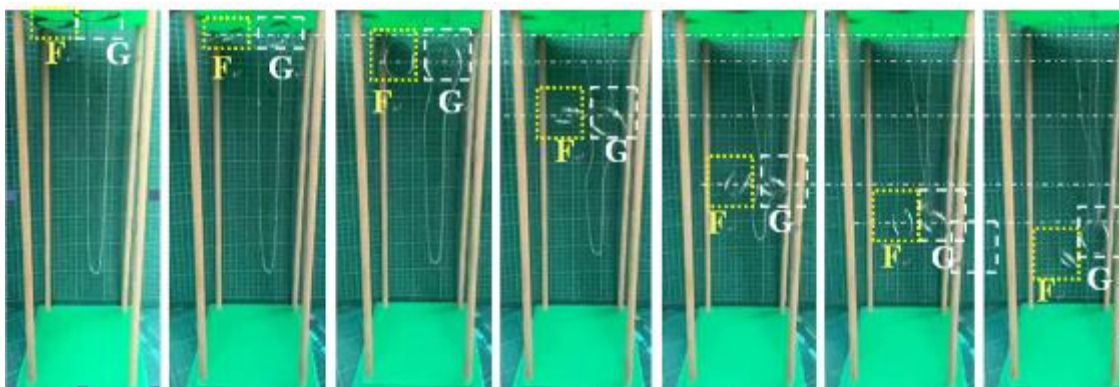


圖 21. 比較鐵環 F 和 G 分別翻轉自由落下與在珠鏈中翻轉落下

實驗結果與分析

1. G 套入珠鏈前，對照組 F 與實驗組 G 皆同時邊掉落、邊翻轉：

(1) 對照組 F 落地前共翻轉約 3 圈。

(2) 實驗組 G 約翻轉 1/4 圈成直立狀態就被珠鏈限制無法翻轉。

2. G 套入珠鏈前，對照組 F 與實驗組 Q 在相同時間內落下的垂直高度完全相同。

綜上所述，鏈與環的物理現象中，珠鏈只有限制鐵環的翻轉以及套住鐵環，對於鐵環套入珠鏈之前的落下時間、速度、加速度等物理量幾乎沒有影響，這也表示珠鏈與實驗組的鐵環 Q 之間摩擦力非常小，幾乎不影響落下的速度。

(五)研究 5、建立「魔戒探究模型」探討影響鏈與環的物理量

我們從上述的慢速攝影中，看到了「鐵環成功套入珠鏈的最重要關鍵因素」就是「鐵環翻轉」。但是，因為我們團隊中只有三人操作技巧很強，其他三人則是有時成功、有時失敗，除了個人操作技巧性的問題之外，而且還有「珠鏈也會跟著左手而晃動」、「鐵環和手之間的摩擦力」、即使站著拿珠鏈和鐵環操作實驗時珠鏈也無法太長等問題。

因此，我們想發展一個不會受到這些問題影響的物理模型，也方便我們進一步探索鐵環套入鐵鏈的物理量。經過不斷地討論、發想和改良之後，我們發展出四種「魔戒探究模型」，逐一介紹如下。

1.魔戒探究模型 1-釋壓抽放模型

有同學也學過這一項鏈與環的魔術，那是魔術師另一種玩魔戒的手法和技巧。首先，同樣將左手的食指和中指撥開並支撐珠鏈、右手的大拇指和食指壓住鐵環，重點是中指彎曲。當右手的大拇指和食指同時鬆開鐵環，鐵環自由落下的過程中，會先撞擊彎曲中指的關節處而造成鐵環翻轉，同樣可以將鐵環套入珠鏈中。

根據這類讓鐵環翻轉的手法，同樣為了避免採用左手持有珠鏈而晃動，我們改成一塊大的厚紙板、再插上兩根平行的筷子支撐珠鏈，接著伸出食指和中指，用食指頂住鐵環，使鐵環靜止不動，當食指稍微向後抽離便可讓鐵環落下，鐵環「卡到」中指，鐵環便會以中指指尖為支點開始翻轉，同樣可以套入珠鏈中，如圖 22 所示。

「釋壓抽放模型」實驗步驟操作如下所示：

- 實驗步驟 1、首先將鐵鏈固定在兩根插有竹筷的厚紙板並且靠著牆壁；
- 實驗步驟 2、用食指用力壓住鐵環一端靠著厚紙板，使鐵環不會掉落；
- 實驗步驟 3、抽出食指，鐵環一端會撞到中指指尖而翻轉並套入珠鏈中。
- 實驗步驟 4、置換不同鐵環、鐵環高度或珠鏈長度，重複進行實驗步驟 1~3。

我們同樣先以市售魔術的道具「D 環 9.22 g、乙鏈 34.0 cm」進行實驗，再更換其他型號的鐵環和珠鏈逐一測試，再採用手機的相機慢動作拍攝影片，逐格撥放影格和截圖，再將這些截圖的相片分成 4 個階段，如表 6 所示。

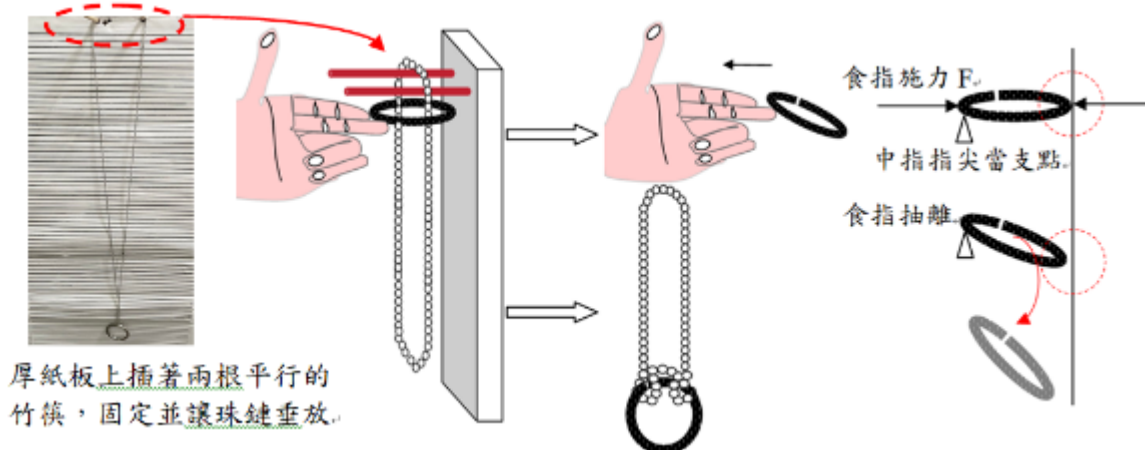

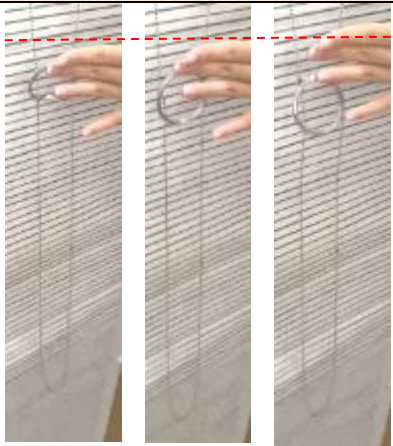
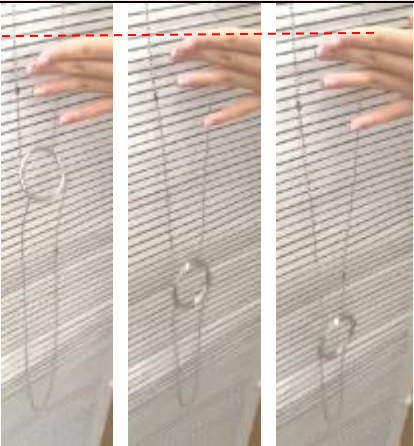

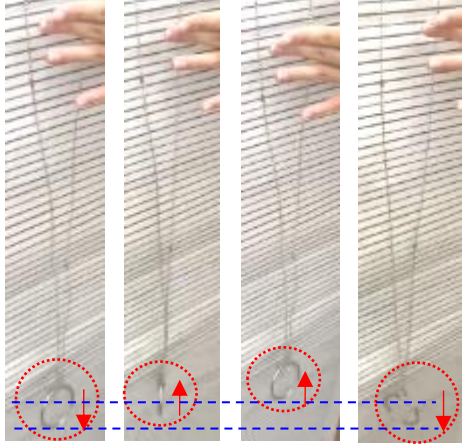


圖 22. 釋壓抽放模型

表 6. 釋壓抽放模型環套鏈的各階段

起手式	階段 1	階段 2
		
<p>1. 食指壓住鐵環，掛住兩平行珠鏈穿過鐵環。</p>	<p>2. 移開食指，鐵環原先呈現水平狀態繞著中指轉成「直立狀態」，邊翻轉、邊掉落。</p>	<p>3. 鐵環被珠鏈限制住，維持直立狀態掉落，幾乎不翻轉；鐵環撐開珠鏈而不再平行。</p>
階段 3		階段 4
		
<p>4. 鐵環翻起珠鏈並「擠開」珠鏈形成「套圈」使鐵環套入珠鏈。</p>		<p>5. 鐵環與珠鏈一起落到最低點，珠鏈收縮「套圈」、彈跳後直到鏈環靜止。</p>

「釋壓抽放模型」的實驗結果與問題討論

我們採用這種「釋壓抽放模型」進行實驗後發現，此實驗設計有以下優缺點：

優點：

1. 幾乎和前面的「斷線釋放模型」一樣也能 100 % 讓鐵環套入珠鏈中。
2. 材料便宜又方便準備，只要兩根筷子就能固定珠鏈，鐵環就用食指固定。
3. 操作比「斷線釋放模型」簡單，只要抽開食指就能釋放鐵環，讓鐵環翻轉。

缺點：

1. 食指太快抽離開鐵環時，鐵環無法碰到中指就不會翻轉而變成自由落體。
2. 食指太慢抽離開鐵環時，鐵環會掛在中指上面，就不會翻轉套入珠鏈了。
3. 中指與鐵環之間仍有摩擦力以及個人操作的技巧等問題存在。
4. 我們也經過多次練習和測試，才能成功地將鐵環套入珠鏈之中。

2. 魔戒探究模型 2-斷線釋放模型

「魔戒探究模型 1 / 斷線釋放模型」實驗設計如圖 23，實驗步驟操作如下。

實驗步驟 1、首先將珠鏈固定在鐵架「橫桿」上；

實驗步驟 2、將魔戒一端放置在鐵架的鐵環上，一端以細線綁住鐵環；

實驗步驟 3、以長柄打火機燒掉細線後，觀察鐵環翻轉與落下的情形。

實驗步驟 4、置換不同鐵環、鐵環高度或珠鏈長度，重複進行實驗步驟 1~3。

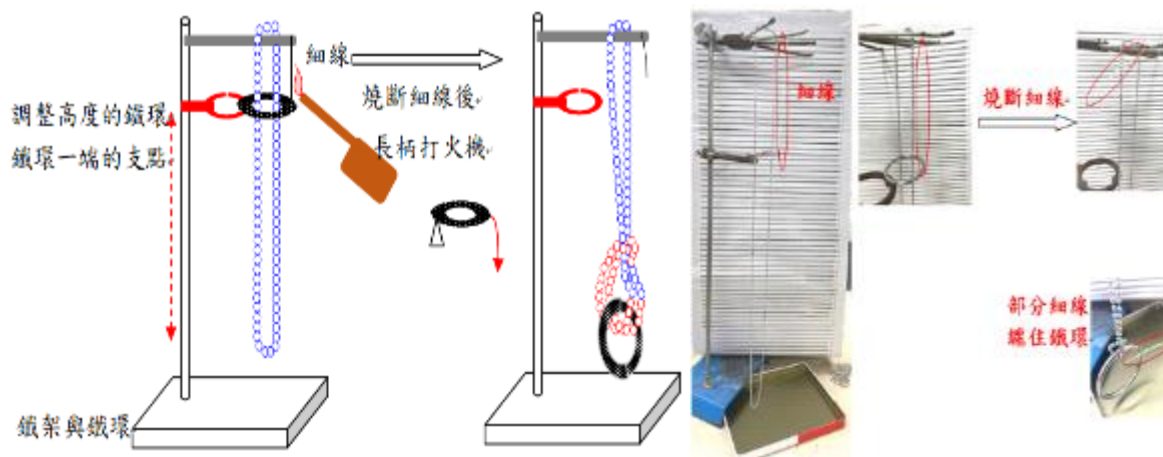


圖 23. 斷線釋放模型

「斷線釋放模型」的實驗結果與問題討論

經過我們多次實驗結果後發現，鐵環套入珠鏈的過程與表 6 幾乎相同，而此物理模型的實驗設計有以下優缺點：

優點：

1. 細線影響程度極小，幾乎排除個人技巧與手部和鐵環之間摩擦力等干擾因素。
2. 鐵環套入珠鏈的成功率幾乎達到 100%，給了我們極大的鼓舞和信心。
3. 可以調整珠鏈張開的寬度，幾乎所有鐵環都能夠進行實驗。

缺點：

1. 雖然點火燒斷細線能讓鐵環翻轉，但是重複操作測試魔戒時，必須重新綁線、再燒斷線較不方便。
2. 每次必須再測量和綁鐵環的細線長度較不一致。
3. 鐵環翻轉時，細線偶爾會纏繞到珠鏈而影響實驗結果。
4. 此實驗設計的最大缺點即鐵架高度有限，無法再增加珠鏈的長度。

因此，我們團隊集思廣益繼續研發更適合本研究的魔戒探究模型。

3. 魔戒探究模型 3-磁吸釋放模型

綜合上述討論，即使讓鐵環能翻轉，鐵環的另一端便不能移動或轉動，也就是這項魔術表演涉及到人為操作的技巧。因此，為了排除這些人為技巧而變成可予以量化進行探索的科學問題，我們共同設計而建構「魔戒的探究操作模型」。

後來因需要較長的鏈長，在製作大型的魔戒實體操作模型時，我們捨棄了吸盤而採用在壓克力板上鑽洞，讓珠鏈或鏈條能夠穿過，便可進一步簡化器材上的冗贅。

(1) 模型產生過程

我們發現手動操作時，會有很多因素干擾，所以嘗試思考模型的可行性，最先有同學提出，儘量減少手的干擾來操作魔戒的落體行為。

- a. 我們先繪製模型；
- b. 以瓦楞板和竹筷做初版模型並確定模型的可行性；
- c. 最後用壓克力板及鋼棒組合而成，後面也加上紙箱厚紙板製成的公分表。

(2) 模型操作過程

- a. 將鐵鏈長度測量好之後，用磁鐵或強力磁鐵固定。

b.將鐵環置放在壓克力板下方，壓克力板上方用磁鐵或強力磁鐵分兩邊吸住，使鐵環不會掉落，因為要讓鐵環落下時轉動，所以兩邊的強力磁鐵數目不一樣，當移開其中一邊的強力磁鐵後，磁鐵因支撐不住鐵環的重量，鐵環就會轉動落下。

(3)磁吸釋放模型操作說明

較重的鐵環在實驗時需要多個強力磁鐵才能吸住，但是它很小，所以磁鐵跟磁鐵之間的距離並不大。因此，磁鐵會相吸，如果發生這種現象，我們會使用膠帶來固定住磁鐵，以免影響實驗結果。

「磁吸釋放模型」如圖 23 所示，實驗步驟操作如下。

實驗步驟 1、首先將珠鏈固定在壓克力板下方；

實驗步驟 2、將鐵環放在壓克力板下方，壓克力板上方則分別用強力磁鐵吸附鐵環兩端，使鐵環不會掉落，如圖 24 所示；

實驗步驟 3、移開一端吸附鐵環的磁鐵，鐵環就會翻轉落下；

實驗步驟 4、置換不同鐵環或珠鏈重複進行實驗步驟 1~3。

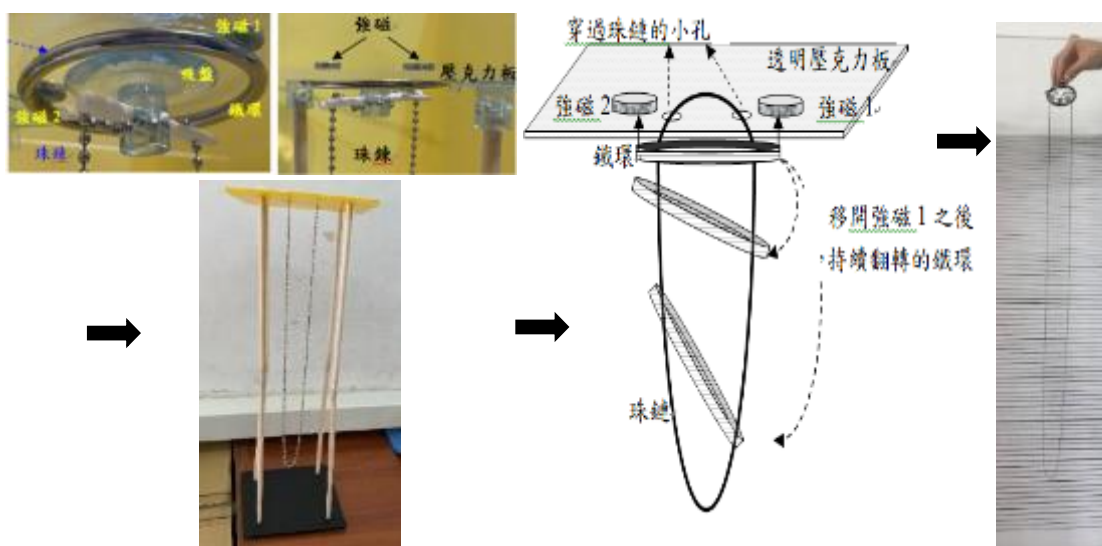


圖 24. 磁吸釋放模型

表 7. 磁吸釋放模型的環套入鏈過程

<p>圖 25. 強磁固定鐵環</p>	<p>圖 26. 釋放強磁而鐵環翻轉</p>
<p>壓克力板上方用磁鐵或強力磁鐵分兩邊吸住，使鐵環不會掉落(剩下的強力磁鐵要無法支撐鐵環的重量)</p>	<p>移開其中一邊的強力磁鐵後，強力磁鐵會因為無法支撐鐵環的重量，鐵環就會轉動落下</p>

根據圖 24 的實驗設計發現，如果磁力太強，磁鐵會牢牢吸住鐵環，便無法將磁鐵拿開而釋放鐵環的另一端造成鐵環旋轉；而磁力太弱，則磁鐵吸附不住鐵環！我們該如

何選擇適當的磁鐵，既能輕輕吸附住鐵環、又能從壓克力板上面拿開後讓鐵環的一端掉落造成旋轉呢？

我們這群智囊團設計以下釋放鐵環的操作方式，既能夠找到適合的磁鐵來吸附鐵環，又能夠較為精準測量出磁力對於鐵環的吸引力大小，如圖 27 所示。

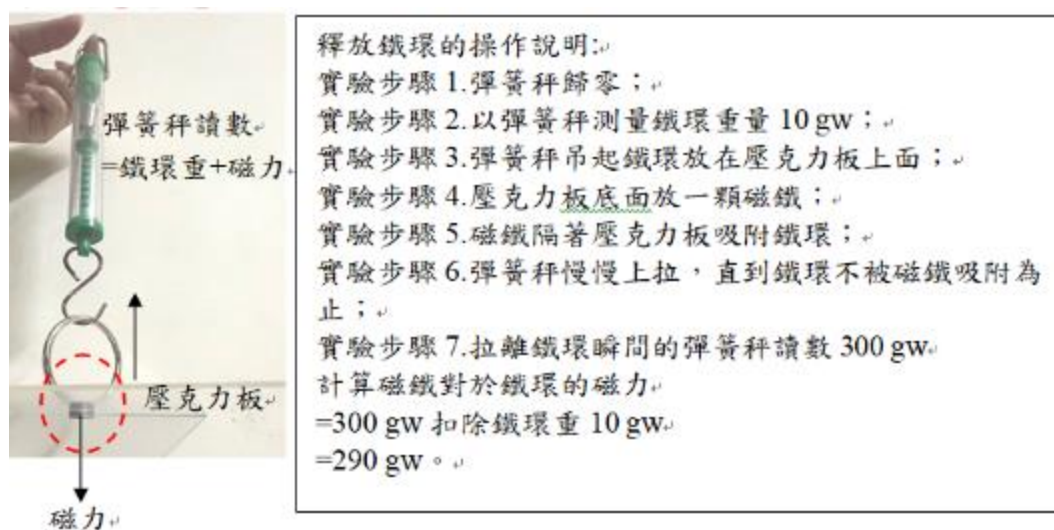


圖 27. 探討磁鐵對於鐵環磁力的影響

「磁吸釋放模型」實驗結果與討論

鐵環套入珠鏈的過程與表 3 和表 6 相同。此模型的優缺點分別說明如下。

優點:

- 1.可降低人為操作、魔術手法和技巧等因素對於實驗結果之影響。
- 2.方便更換與探索鐵環和珠鏈等來進行實驗。
- 3.在適當的鐵環與珠鏈長度等控制變因下，幾乎能百分之百讓鐵環套入珠鏈。
- 4.操作容易且適合控制變因，尤其是可以固定環與鏈的位置，有利於穩定地釋放鐵環、觀察轉動落體每一階段的落下高度和時間。

缺點:

- 1.強力磁鐵隔著壓克力板吸附鐵環，造成吸附鐵環的磁力較薄弱，只要換成較重的鐵環就不易吸住，必須採用更多強力磁鐵吸附，也很難將這些強力磁鐵控制在「剛好吸住鐵環」。
- 2.移開一端強力磁鐵時，另一端強力磁鐵仍吸附著鐵環，如果磁力太強會影響鐵環掉落狀態，而磁力太弱則吸不住鐵環，我們也常常調整很久。
- 3.必須快速移開一端強力磁鐵，否則鐵環兩端仍然同時受到強力磁鐵吸引，也會造成實驗上的誤差，也很難保證會不會有「殘磁」影響鐵環的掉落。

4.魔戒探究模型 4-電磁控制模型

我們有了前面「磁吸釋放模型」的成功經驗後，有同學進一步想到她家門口的「電磁門控開關」，那是一種「電磁鐵」可以透過通電吸附住鐵環，斷電後就會失去磁力而釋放鐵環的裝置。

經過「電磁門控開關」測試後，磁力不僅能夠吸住鐵環又簡便、容易連續操作，如圖 28 與圖 29 所示。因此，我們發展「電磁斷電模型」，實驗設計如圖 30 所示，實驗步驟操作如下。

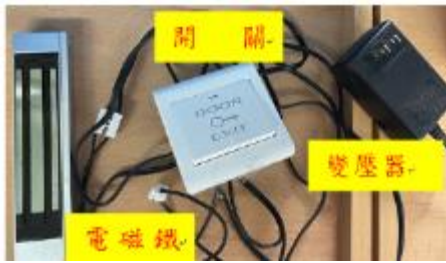


圖 28. 電磁門控開關

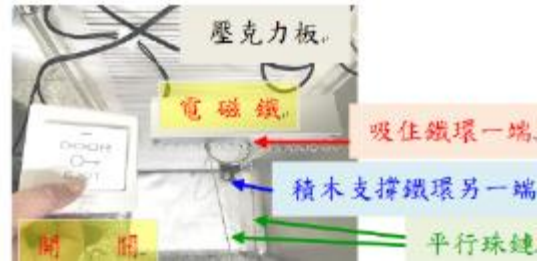


圖 29. 電磁控制斷電裝置應用

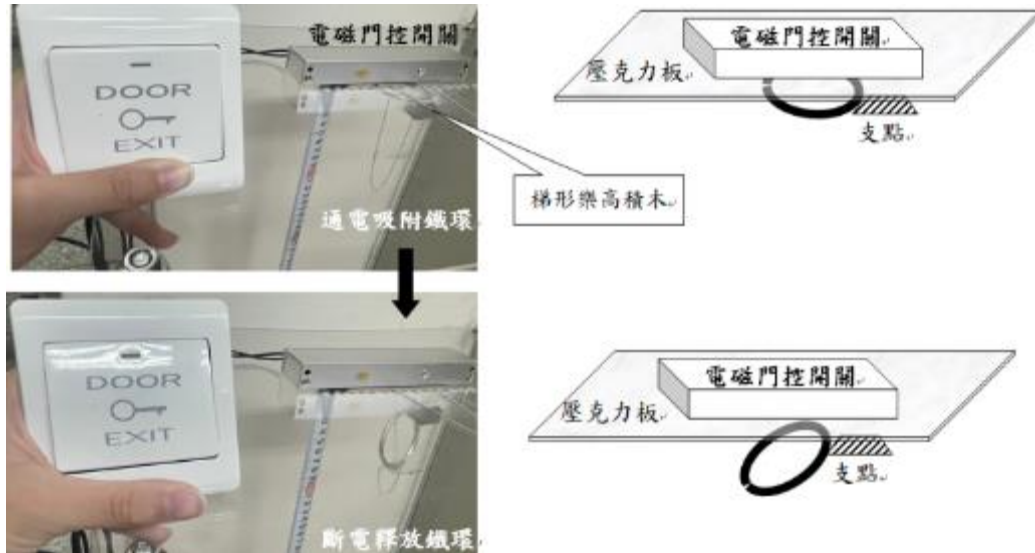


圖 30. 電磁控制模型

實驗步驟 1、首先將鐵鏈固定在壓克力板下方；

實驗步驟 2、將鐵環置於壓克力板下方，隔著壓克力板以「電磁門控開關」通電後可吸附鐵環一端，鐵環另一端用梯形的樂高積木支撐，使鐵環不會掉落；

實驗步驟 3、「電磁門控開關」斷電後，鐵環就會以樂高積木為支點翻轉落下；

實驗步驟 4、置換不同鐵環或珠鏈重複進行實驗步驟 1~3。

「魔戒探究模型 4／電磁控制模型」實驗結果與討論

這一項「電磁控制模型」是目前我們想到最佳的魔戒物理探究模型，不僅能夠排除個人操作技巧、鐵環與手指之間的摩擦力、不易控制吸住鐵環的磁力大小等問題，操作上也比前面的三種物理模型容易許多，鐵環套入珠鏈的過程也與表 3 和表 6 幾乎完全相同，如表 8 所示。

表 8. 電磁斷電模型測試(D 環-極細珠鏈 65 cm)

起手式	階段 1	階段 2
		
<p>1. 電磁鐵吸住鐵環，掛住兩平行珠鏈穿過鐵環。</p>	<p>2. 斷電時，鐵環失去磁力吸引而逐漸翻轉成「直立」狀態，鐵環邊翻轉、邊掉落。</p>	<p>3. 鐵環被珠鏈限制成維持「直立」掉落幾乎不翻轉；鐵環撐開珠鏈而不再平行。</p>
階段 3		階段 4
		
<p>4. 鐵環翻起珠鏈並擠開珠鏈形成「套圈」使鐵環套入珠鏈。</p>		<p>5. 鐵環套入珠鏈後落至最低點，並且上、下彈跳直到鐵環靜止。</p>

「電磁控制模型」的優缺點如下：

優點:

1. 可降低人為操作、魔術手法和技巧等因素對於實驗結果之影響。
2. 操作容易且適合控制變因，方便更換與探索鐵環和珠鏈等來進行實驗。
3. 在適當的鐵環與珠鏈長度等控制變因下，幾乎能百分之百讓鐵環套入珠鏈。
4. 有利於穩定地釋放鐵環、觀察轉動落體每一階段的落下高度和時間。

唯一的缺點就是強力磁鐵隔著壓克力板吸附鐵環，造成吸附鐵環的磁力較薄弱，只要換成較重的鐵環就不易吸住，必須加一顆很輕的磁鐵輔助吸附。因此，我們就以目前發展的最佳「電磁斷電模型」，以及 tracker 軟體蒐集數據與進行後續分析。

(六)研究 6、鏈長以及鏈重和環重對於環套鏈之影響

經過電磁斷電模型的實驗操作，以及 tracker 軟體蒐集數據與進行分析。實驗結果如表 9 與圖 31 所示。

表 9. 不同鐵環重量可以套入珠鏈長度的範圍

珠鏈(g/cm) 鏈重範圍(g) 環(質量、直徑)	甲鏈 極細(0.13 g/cm)	乙鏈 細(0.19 g/cm)	丙鏈 中型(0.26 g/cm)	丁鏈 粗(0.31 g/cm)
A (1.88 g、2.0 cm)	10~14 cm 鏈重 1.3~1.82	皆無法套入	皆無法套入	皆無法套入
B (3.25 g、4.8 cm)	9 套半圈~15 cm 鏈重 1.24~1.95	皆無法套入	皆無法套入	皆無法套入
C (4.14 g、4.1 cm)	6~40 cm 鏈重 0.78~5.2	6~24 cm 鏈重 1.14~4.56	皆無法套入	皆無法套入
D (9.22 g、4.3 cm)	8~54 cm 鏈重 1.04~7.02	10 套半圈~30cm 鏈重 1.9~5.7	皆無法套入	皆無法套入
E (14.97 g、5.0 cm)	11~75 cm 鏈重 1.43~9.75	10~59 cm 鏈重 1.9~11.21	10~28 cm 鏈重 2.6~7.28	皆無法套入
F (16.72 g、5.5 cm)	11~90 套兩圈 cm 鏈重 1.43~11.7	17~65 cm 鏈重 3.23~12.35	20~40 cm 鏈重 5.2~10.4	34~48 cm 鏈重 10.54~14.88
G (27.0 g、5.0 cm)	12~95 套兩圈 cm 鏈重 1.56~12.35	20~68 cm 鏈重 3.8~12.92	22~50 cm 鏈重 5.72~13.0	25 套半圈~45 cm 鏈重 7.75~13.95

實驗結果 1.鐵環重量對於可套入不同珠鏈之鏈長範圍的影響

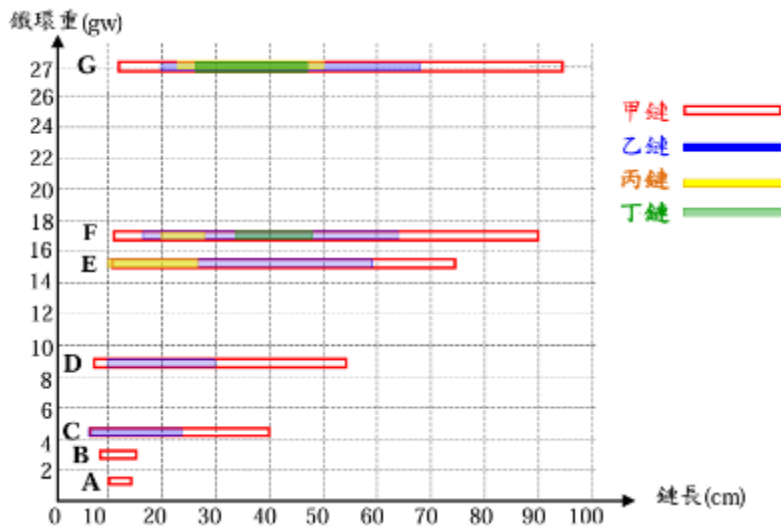


圖 31. 鐵環重量與可套入鏈長範圍關係圖

根據表 7 數據與圖 31，我們如果「僅考量鐵環的重量」，忽略鐵環直徑的影響時，可獲得以下結論：

- 珠鏈愈輕或愈細，鐵環能套入鏈長的範圍也愈大。例如：
 - A、B 環可套入極細的甲鏈中，無法套入較重的乙~丁鏈。
 - 隨著甲~丁鏈愈來愈重，鐵環可套入珠鏈的鏈長範圍愈來愈小。
- 鐵環愈重，鐵環能套入鏈長的範圍也愈大。例如：
 - A、B 環相對乙、丙、丁三種珠鏈太輕，無法套入較重又較粗的珠鏈。
 - A~G 環愈來愈重，分別套入甲~丁鏈的鏈長範圍有愈來愈大的趨勢。
- 可能是 C 環直徑小又足夠重、甲和乙珠鏈也較細，除了 C 環小於珠鏈重也能套入甲、乙兩種珠鏈之外，鐵環能套入珠鏈的重要條件之一：「環重>鏈重」。

4.不同類型的鐵環套入各類珠鏈時，也以下產生奇特的「異例」：

- (1)套半圈:如 B 環套入 9 cm 甲鏈、D 環套入 10 cm 乙鏈、G 環套入 25 cm 丁鏈，雖然都算是鐵環套入珠鏈中，卻只有套入一半；神奇的是 B 環套入 10 cm 甲鏈、D 環套入 11 cm 乙鏈、G 環套入 26 cm 丁鏈時，竟然鐵環都能整個轉入珠鏈之中。
- (2)套兩圈:如 F、G 環分別套入 90、95 cm 的甲鏈時，雖然都算是鐵環套入珠鏈中，卻讓甲鏈套了兩圈。

實驗結果 2.鐵環直徑對於可套入不同珠鏈之鏈長範圍的影響

從表 9 得知，只有甲鏈能夠讓本研究蒐集的 A~G 的七種鐵環全部套入，當鐵環能套入各種珠鏈時，探討「不同鐵環直徑對鏈長範圍的影響」，如圖 32~35 所示。

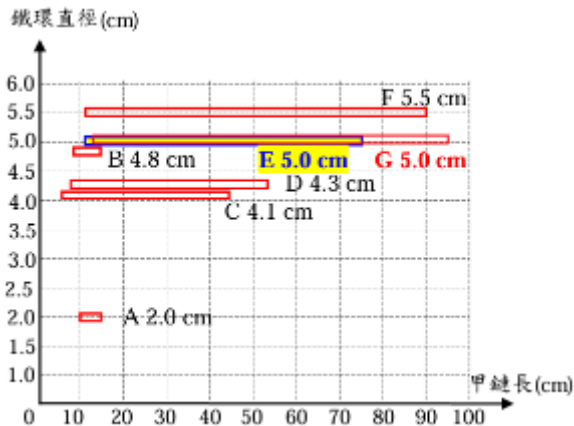


圖 32.鐵環直徑與甲鏈長範圍

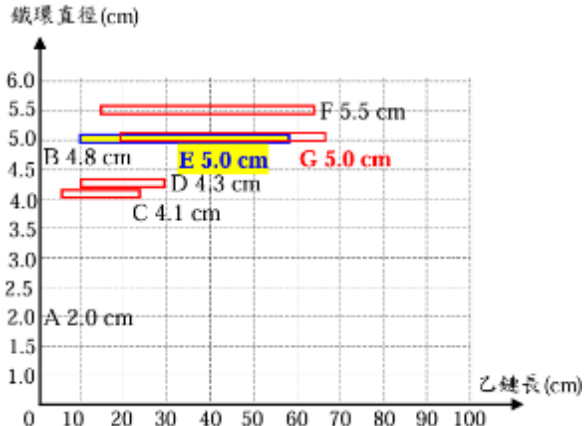


圖 33.鐵環直徑與乙鏈長範圍

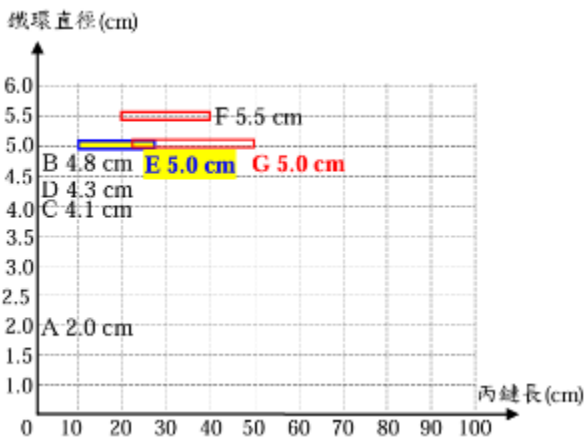


圖 34.鐵環直徑與丙鏈長範圍

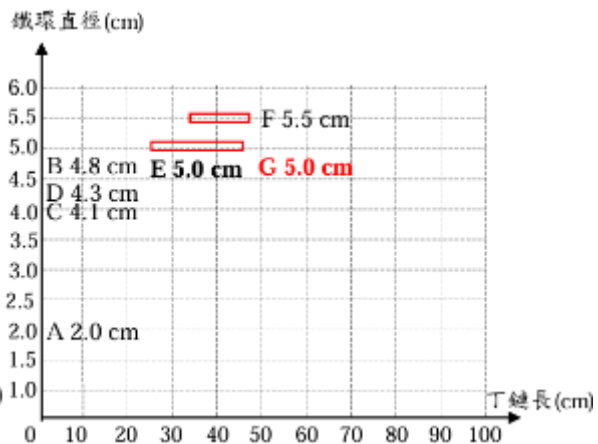


圖 35.鐵環直徑與丁鏈長範圍

根據圖 32~35 之結果分析與討論：

- 1.此四張圖形顯示，隨著珠鏈「單位長度的重量」愈重，能套入珠鏈的鐵環數量也愈少，且鐵環能套入珠鏈的長度範圍也愈短。此外：
 - (1)鐵環直徑愈大以及珠鏈「單位長度的重量」愈重，珠鏈必須足夠長，鐵環方可套入珠鏈之中。
 - (2)「珠鏈單位長度的重量 $W(\text{gw})$ 」，比「鐵環直徑 $R(\text{cm})$ 」和「鐵環質量 $M(\text{g})$ 」對於鐵環套入珠鏈長度範圍 $\bar{L}(\text{cm})$ 影響更大。
 例如:圖 32 與圖 35 中， $W_{\tau}=0.31 \text{ g/cm} \gg W_{\eta}=0.13 \text{ g/cm}$ ， $R_G=R_E=5.0$ ， $M_G=27.0 > M_F=16.72$ ，圖 32 $\bar{L}_G(12\sim95) > \bar{L}_F(11\sim90) > \bar{L}_G(25\sim45) > \bar{L}_F(34\sim48)$ 。
- 2.多數鐵環直徑 $R(\text{cm})$ 愈大，通常套入珠鏈長度之範圍 $\bar{L}(\text{cm})$ 也愈大，例如圖 32: $R_F=5.5 > R_E=5.0 > R_D=4.3 > R_C=4.1$ ， $\bar{L}_F > \bar{L}_E > \bar{L}_D > \bar{L}_C$ 。進一步討論如下：

- (1) 當鐵環質量 $M(g)$ 太小，鐵環直徑 R 即使較大，可套入之鏈長範圍卻極小，例如 $R_B=4.8>R_D=4.3>R_C=4.1$ ， $M_D=9.22>M_C=4.14>M_B=3.25$ ，而 $\bar{L}_D(8\sim54) > \bar{L}_C(6\sim40) \gg \bar{L}_B(9\sim15)$ 。
- (2) $R_G=R_E=5.0$ ，但是 $M_G=27.0>M_E=14.97$ ， $\bar{L}_G(12\sim95)>\bar{L}_E(11\sim75)$ 。
- (3) $R_F=5.5>R_G=5.0$ ，但是 $M_G=27.0>M_F=16.72$ ， $\bar{L}_G(12\sim95)>\bar{L}_F(11\sim90)$ 。
- 此表示「對於能套入鏈長範圍之影響程度」：鐵環質量 $>$ 鐵環直徑。

綜上所述，「珠鏈愈輕或愈細、鐵環愈重」，則鐵環套入珠鏈的鏈長範圍愈大；而對於「鐵環能否套入珠鏈之中」的影響程度比較為：

珠鏈單位長度的重量 $W >$ 鐵環質量 $M >$ 珠鏈長度 $L >$ 鐵環直徑 R 。

因此，對於魔戒的演示，應選用「珠鏈輕細與鐵環較重」作為素材，成功率會大幅增加。

此外，對於鐵環套入珠鏈所產生的「套半圈」和「套兩圈」兩種「異例」，我們在以下研究 7 再作深入的探討。

(七)研究 7、環套鏈產生多結與半結現象的異例分析

1.環套鏈的雙套結型式

實驗過程中，質量最大的 G 環達到 27.0 g，在套入長度 90.0 cm 的甲鏈後仍產生單結，如圖 36 所示；但是，當甲鏈長度達到約 95.0 cm 的極限值時， G 環卻很難從甲鏈中解開。我們發現，原來是 G 環與甲鏈形成雙結，如圖 37 所示。



圖 36.G 環套較短的甲鏈成單結 圖 37.G 環套很長的甲鏈成雙結

我們回放與觀察慢速錄影的影像後發現，環與鏈形成雙結的原因主要有兩個因素：

- 1.鐵環應比珠鏈重很多:環的重量造成較大的轉動慣量才能將輕鏈翻轉兩次；
- 2.鏈應也必須有足夠長度:鏈有較長的長度，方可讓環在鏈中持續翻轉而不會被限制在珠鏈中。

那麼鐵環是否能在珠鏈中連續翻轉 3 次而形成 3 個套結？或是形成更多套結呢？

我們的推論為「當鐵環重量，比珠鏈重量大很多，且珠鏈的長度足夠長」時，的確可能形成 3 個、甚至更多個套結！這又衍生另一項問題，鐵環套入珠鏈產生多個套結，那是否仍然符合我們驗證的「環套鏈四階段的物理模式」呢？

關於上述這個問題，我們觀看慢動作影片得知，當鐵環在珠鏈中不斷翻轉時，「環套鏈四階段的物理模式」中就缺少了「第二階段的立環直落期」，變成只有第一階段、第三階段與幣四階段而已。換言之，在鐵環極重、珠鏈既輕又很長時，「環套鏈的物理模式」就會變成第一階段「翻面落體期」、第二階段「翻鏈套環期」與第三階段「鏈環彈跳期」了。這種特殊情況的翻轉落體值得後續深入研究。

2.環套鏈的半套結型式

環套入鏈中，如以上討論，可能形成單結或雙結。進行 B 環套入 9 cm 的甲鏈時發現，鏈與環亦形成半結的現象。那麼何時會形成鏈與環產生半套結型式呢？

我們實驗過程中發現，如表 9 所示：

- (1) D 環套入乙鏈長 10.0 cm 時發現，鏈與環形成半結的現象，如圖 38 所示。
- (2) G 環套入丁鏈長 25.0 cm 時也發現，鏈與環形成半結的現象，如圖 39 所示。



圖 38. D 環與 10.0 cm 乙鏈形成半結 圖 39. G 環與 25.0 cm 丁鏈形成半結

在這種特殊的「鏈與環產生半套結型式」，於是又衍生另一項問題，鐵環套入珠鏈產生半個套結是否仍然符合我們驗證的「環套鏈四階段的物理模式」呢？

關於上述這個問題，我們觀看慢動作影片得知，當鐵環在較短的珠鏈中同樣符合「環套鏈四階段的物理模式」，只是「第二階段的立環直落期」變得很短暫，因為珠鏈長度太短、鐵環相對比珠鏈重很多、鐵環直徑又較長，當鐵環在第一階段的「翻面落體期」、甚至於來不及翻成「立環」，就直接到達第三階段「翻鏈套環期」與第四階段「鏈環彈跳期」了。

結論：

當「鐵環遠比珠鏈重」時，可能發生多個套結與半個套結，分別敘述如下：

1. 珠鏈輕且長，容易產生多個套結，「環套鏈的物理模式」變成第一階段翻面落體期、第二階段翻鏈套環期、與第三階段鏈環彈跳期。
2. 珠鏈輕且短，容易產生半個套結，「環套鏈的物理模式」仍維持四個階段。

3.鏈長超過極限值的環套鏈之異例

當我們找到 4.14 g 的 C 環可套入甲鏈長度範圍 6~40 cm 時，想說再怎麼長的甲鏈只要超過 40 cm，C 環不可能再套入甲鏈了吧？但是，一位 175 cm 的高個子同學索性拿起 C 環嘗試套 80 cm 的甲鏈時，C 環竟然可以套入甲鏈，而且鍊與環形成雙套結型式，更加神奇的是甲鏈長介於 41 cm~79 cm 之間，C 環都無法套入甲鏈！而且其他鐵環也無法超過表 9 的珠鍊長度範圍而套入珠鏈之中。

我們試著解釋這種奇特的「鏈長超過極限值的環套鏈現象」如下：

- (1) C 環質量 4.14 g、甲鏈單位長度之質量 0.13 g/cm，80 cm 甲鏈總質量 10.4 g，理論上，當 4.14 g 的 C 環質量無法翻轉 10.4 g 的甲鏈質量，可能 C 環在高度長達 80 cm 時具有足夠的轉動慣量與落下的動能才可套入甲鏈。
- (2) 如表 2 所示，七種鐵環中最小「線徑 0.1 cm」C 環，遠小於極細的甲鏈「鏈徑 0.8 cm」。所以，可能是「線徑」最小的 C 環「嵌入」甲鏈「珠子與珠子之間的縫隙」所致。

至於上述「鏈長超過極限值的環套鏈異例」的推論，有待後續研究進一步進行實驗來加以驗證。

(八)研究 8、以雙 trackers 分析鏈與環的套結現象

我們進一步思考是否能以 trackers 分析鐵環套入珠鏈的運動軌跡為何？因此，將 D 環套極細的甲鏈時，我們將 D 環的前後兩端標註 A 和 B 兩點，如圖 40 所示。當鐵環從第一個階段開始掉落，直到第四階段鐵環套入珠鏈並反覆彈跳，都能觀察到 A、B 兩點的移動和速度變化，如表 10、圖 41 和 42 所示。

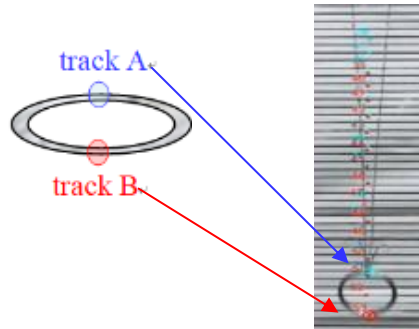


圖 40. 鐵環前後兩端的運動軌跡

表 10. 鐵環兩端的雙 track 過程

鐵環套入珠鏈影片、y-t 圖、v-t 圖	鐵環狀態描述	鐵環的 A、B 兩端
	第一階段翻面落體期 鐵環平放，失去平衡 後開始翻轉	第一階段，A 端作為支點，B 端開始翻轉並掉落，因此： 位移與速度： $B > A$
	第二階段立環直落期 鐵環立起後不再翻轉，直到套入珠鏈。	第二階段，A 端與 B 端一起掉落，因此： 位移與速度： $A = B$
	第三階段翻鏈套環期 鐵環套入珠鏈，在最低點時速度達到最大，瞬間又變成零。	第三階段，B 端比 A 端先套入珠鏈，但是，位移與速度： $A = B$
	第四階段鏈環彈跳期 鐵環與珠鏈一同上下彈跳，直到速度為零。	第四階段，A 端與 B 端與珠鏈一起彈跳，位移與速度： $A = B$

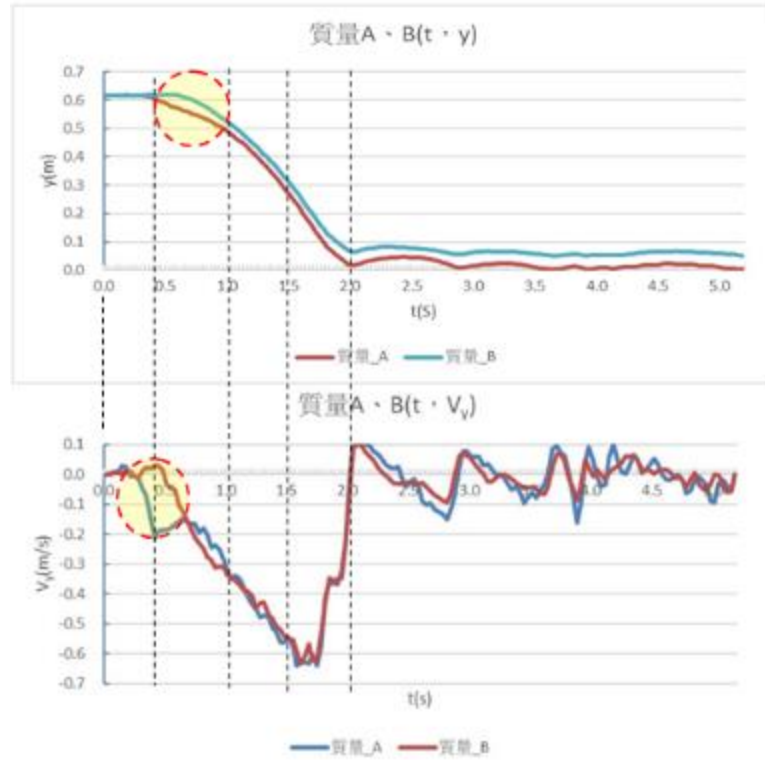


圖 41. 鐵環 A、B 兩端的位置與速度變化

從圖 41 得知，鐵環在珠鏈之中開始翻轉的第一階段約 0.4 s 時，鐵環 A、B 端： $v_B > v_A$ ，然後到了第二階段立環直落期、乃至第三階段與第四階段，A、B 兩端的間距恰好為鐵環的直徑，A、B 的 $v-t$ 圖也幾乎重疊，這也說明鏈與環的鐵環運動軌跡，在一開始的「第一階段翻面落體期」之後，鐵環就幾乎以直落方式套入珠鏈。

肆、研究結果

「鏈與環魔術」可視為一種翻轉落體運動的物理模式，本研究發展四種鏈與環的物理模型試著排除人為操作技巧與摩擦力等因素，採用慢動作攝影、以及 trackers 軟體分析影片，再以 y-t 和 v-t 圖解釋各項物理量。主要研究結果包括以下 6 點：

1. 鏈與環魔術的物理模式，可分為翻面落體期、立面直落期、翻鏈套環期、與鏈環彈跳期共 4 個階段進行分析和解釋。
2. 第 3 階段的翻鏈套環期，為影響鐵環是否套入珠鏈的關鍵階段，鐵環大約翻轉 1/4 圈套入珠鏈。
3. 鏈與環魔術之各項變因的影響程度分別為：單位長度的鏈重 > 環重 > 鏈長 > 環的直徑。當鐵環愈重或直徑愈大、單位長度之鏈重愈重，鐵環在翻鏈套環期愈容易套入珠鏈。
4. 本研究設計「無珠鏈時」的物理模型作為「對照組」，與鐵環套入珠鏈作為實驗組進行比較之實驗結果如下：
 - (1) 對照組在無珠鏈時，鐵環掉落過程中因無珠鏈的「限制」而一邊翻轉、一邊掉落，與同高度的自由落體之末速和落下時間相同。
 - (2) 實驗組與對照組的鐵環在同樣高度落下時，實驗組的鐵環速度也與對照組落下的鐵環速度幾乎相同，顯示鏈與環之間的摩擦力對於鐵環的落體速度極小、摩擦力可忽略不計。
5. 本研究所發展的四種「鏈與環的物理模型」分別為：釋壓抽放模型、斷線釋放模型、磁吸釋放模型、電磁斷電模型，配合 trackers 軟體分析，都能合理解釋與驗證本研究所提出的「鏈與環的物理模式」，實驗結果與數據分析相同。
6. 當「鐵環重量遠大於珠鏈重量」時，鏈與環之物理模式產生兩種「異例」：
 - (1) 珠鏈過長，鐵環易多於一圈翻轉才套入珠鏈，形成雙或多套結型式。
 - (2) 珠鏈過短，鐵環易少於 1/4 圈翻轉就套入珠鏈，形成半套結型式。但是，不論半套結與多套結，仍然可以採用「鏈與環的物理模式」進行解釋。
7. 經雙 tracker 鐵環兩端時發現，鐵環在第一階段翻轉之後，接下來的第二與第三兩階段幾乎都維持「立環」形式，直到套入珠鏈並與珠鏈一起彈跳。

伍、結論與討論

我們將本研究對於鏈與環的探索過程稱為「魔戒三部曲」，說明如下：

魔戒首部曲：以慢動作攝影和截圖發現，鏈與環具有的「物理模式」(pattern)，鐵環套入珠鏈之中包括四個階段，第一階段翻面落體期、第二階段立環直落期、第三階段翻鏈套環期、與第四階段鏈環彈跳期。

魔戒第二部：發展「物理模型」(model)，為了探索「鏈與環的物理模式」而發展簡化許多變因的模型，包括：釋壓抽放模型、斷線釋放模型、磁吸釋放模型、電磁控制模型。

魔戒第三部：選擇適合探索和分析模型的 tracker 軟體，透過數據收集與分析，解釋鏈與環的「物理模式」與驗證「物理模型」。

(一) 結論

結論 1. 鏈與環的魔術可視為一種翻轉落體運動，以本研究發展的物理模型配合 trackers 軟體分析，可將鐵環的運動軌跡區分為翻面落體期、立環直落期、翻鏈套環期、與鏈環彈跳期，共四個階段的物理模式。

結論 2. 翻鏈套環期的第 3 階段為影響環套入鏈中的關鍵時段，且珠鏈僅是限制鐵環的翻轉直到套住鐵環，鐵環與珠鏈幾乎無摩擦力，不影響鐵環落下的速度。

結論 3. 鐵環能否套入珠鏈之變因與其影響程度為：珠鏈單位長度之重量 > 鐵環質量 > 珠鏈長度 > 鐵環直徑，這些變因間也彼此交互影響。

- 1.鐵環愈重、或鐵環直徑愈大、或珠鏈的單位長度之重量愈小時，鐵環可套入珠鏈長度之範圍愈大。
 - 2.鐵環直徑愈大，則鏈長應愈長，鐵環方可套入珠鏈之中。
 - 3.珠鏈的單位長度質量愈大，則環的質量與鏈長應愈大方可套入。
- 結論 4.珠鏈為一顆顆鐵珠構成，也是鏈與環魔術的巧妙設計之一。
- 結論 5.珠鏈對於邊翻轉邊落下的鐵環，第一階段的鐵環只轉了約四分之一圈，珠鏈僅限制鐵環再度翻轉，而鏈與環之間也幾乎沒有摩擦力。
- 結論 6.鐵環重 $>$ 珠鏈重，且鐵環直徑愈大，鐵環套入鏈長的範圍愈大。
- 結論 7.環套入鏈中產生「多結」的條件，包括(1)環應比鏈重很多：環的重量或轉動慣量夠大，才能將較輕的鏈翻轉兩次；(2)鏈長必須超過 80.0 cm：較長長度的鏈，方可讓較重的環在鏈中持續翻轉。
- 結論 8.環套入鏈中產生「半結」的條件，包括(1)鐵環應比珠鏈重很多，鐵環將較輕的珠鏈略為翻轉便套入一半或更小長度；(2)珠鏈長度較短，剛好讓鐵環「卡住」珠鏈而無法套入。
- 結論 9.雙 tracker 鐵環兩端發現，第一階段翻轉後，第二、第三兩階段鐵環幾乎都維持「立環」形式，直到套入珠鏈並與珠鏈一起彈跳。

(二)討論

- 討論 1.鏈與環「魔術」需要高度的操作技巧，我們發展四種物理模型進行探討發現，四種模型雖然都能驗證鏈與環的物理模式，但是，與魔術操作的手法和探討鐵環套入珠鏈「鏈長範圍」時，卻有著些微的差異。
- 討論 2.我們最後發展的第四種「電磁控制模型」不僅能排除個人操作鏈與環的技巧、鐵環與手之間的摩擦力、以及鐵環可以完全不受磁鐵影響，但是，壓克力板具有厚度，較重的鐵環仍須使用強力磁鐵吸附再釋放。
- 討論 3.研究過程中發現，鐵環如果沒有放在「珠鏈的正中間」，會影響環套入鏈的結果。至於此影響有多大？有待進一步深入研究。
- 討論 4.鐵環大約轉 1/4 圈套入珠鏈，其實應該比 1/4 圈再多一些，因為直立的鐵環不可能套入珠鏈，這才會有第三階段「翻鏈套環」的過程。至於鐵環究竟轉了幾分之幾圈？有待進一步深入研究。
- 討論 5.C 環 4.14 g 可套入甲鏈之長度範圍 6~40 cm，但是，當甲鏈長達 80 cm 時，C 環又可以套入甲鏈，而甲鏈長 50~79 cm 卻無法讓 C 環套入，此有待進一步研究和討論。

陸、參考文獻

- Kate E., Mike L. (2018)。魔術專賣店 4：消失的魔術師。原文 The Disappearing Magician，謝靜雯翻譯，新世界出版社。
- 劉光行(2009)。我是魔術師：易學易玩的 365 個小魔術，新世界出版社。
- 張名尚、蕭暉堃、林軒誠、高崇澤、廖惇傑、廖敏翰，別叫我魔術(2011)。喜結良緣物理學轉動慣量的解碼，中華民國第 51 屆中小學科學展覽會參展作品集。

【評語】 080103

鏈條的運動狀態一直是一個非常吸引人的物理問題，其中蘊含著多題凝態物理的原理，其實是一個相當複雜而艱難的問題。該實驗透過高速攝影機研究了鐵鏈與套環之間的交互作用以及運動過程，將該運動建立了質性分期的描述模型，以分析整個運動狀態的過程。找到了在釋放過程中所引發的不確定所造成的結果上的不同。相當成功展示了一個優秀的物理過程的科學描述，顯示了執行者優秀的分析技巧。如果能夠再適當地引入一些基礎的基本物理概念，例如轉動動量，可以進一步精進量化分析。這也將有助於從諸多複雜的數據中統合出一個比較具有結論性的觀察，這將使整個實驗更為完整。

作品簡報



魔戒三部曲～

以物理模型和tracker分析

翻轉落體的運動模式

摘要

鏈與環魔術簡稱為魔戒，本研究目的是將魔術tricks藉由合適的物理模型與tracker軟體分析，轉化成探討翻轉落體運動的物理模式。我們發展四種物理模型進行實驗、攝影與截圖、tracker分析其S-t、v-t圖和相關物理量，合理解釋環套鏈的成因。研究結果包括:1.環套鏈的物理模式可分為**翻面落體期**、**立環直落期**、**翻鏈套環期**與**鏈環彈跳期**等四個階段；2.**翻鏈套環期決定環能否套入鏈**；3.環套入鏈之變因與影響程度為： $\text{珠鏈單位長度重量} > \text{鐵環質量} > \text{珠鏈長度} > \text{鐵環直徑}$ ；4.鏈愈輕、環愈重、環直徑愈大時，環可套入鏈長範圍愈大；5.鏈愈長，第二階段立環直落期的時間也愈長，而其他階段幾乎皆相同；6.環重若遠大於鏈重時，鏈很長會糾纏成多個套結，鏈較短則形成半個套結；7.經鐵環兩點的雙track過程，得知鐵環翻轉的運動軌跡。本研究亦發現，一節節珠鏈的設計亦為鐵環能套入珠鏈的成因之一。

壹、前言

一、研究動機

上課時，老師秀了一手稱為「魔戒」的傳統魔術，同學們好奇的是「為什麼手放開鐵環後，鐵環沒有垂直落到地面，卻套入珠鏈之中呢？」到底是什麼因素影響魔戒的成敗呢？我們仔細觀察後發現，原來是「**鐵環翻轉了！**」影響魔戒成功操作的因素除了個人技巧和鐵環轉動之外，是否還包括**摩擦力**、**轉動慣量**、**珠鏈長和鐵環重量**等因素呢？是否有可能經過「實驗設計」研究魔戒的物理機制？又如何測量魔戒有關的各項物理量呢？我們六個志同道合的同學集思廣益，希望可以一起發展排除人為等因素，建立**物理模型**以探討和測量各項影響魔戒成敗之物理量。

二、研究目的與研究問題

- 1、**鐵環套入珠鏈的過程**是否為一種特定的物理模式？
- 2、以**物理公式和數據能否驗證**鐵環套入珠鏈物理模式？
- 3、以**trackers軟體分析**驗證鐵環套入珠鏈物理模式？
- 4、**珠鏈對於翻轉而落下的鐵環之影響**為何？
- 5、如何**建構合適的物理模型**探討鐵環套入珠鏈的現象？
- 6、**珠鏈長度、珠鏈重量和鐵環重量**對環套鏈影響為何？
- 7、**環與鏈**可能產生哪些**套結的異例**與其成因為何？
- 8、以**雙trackers分析**鏈與環的鐵環運動軌跡為何？

三、文獻回顧

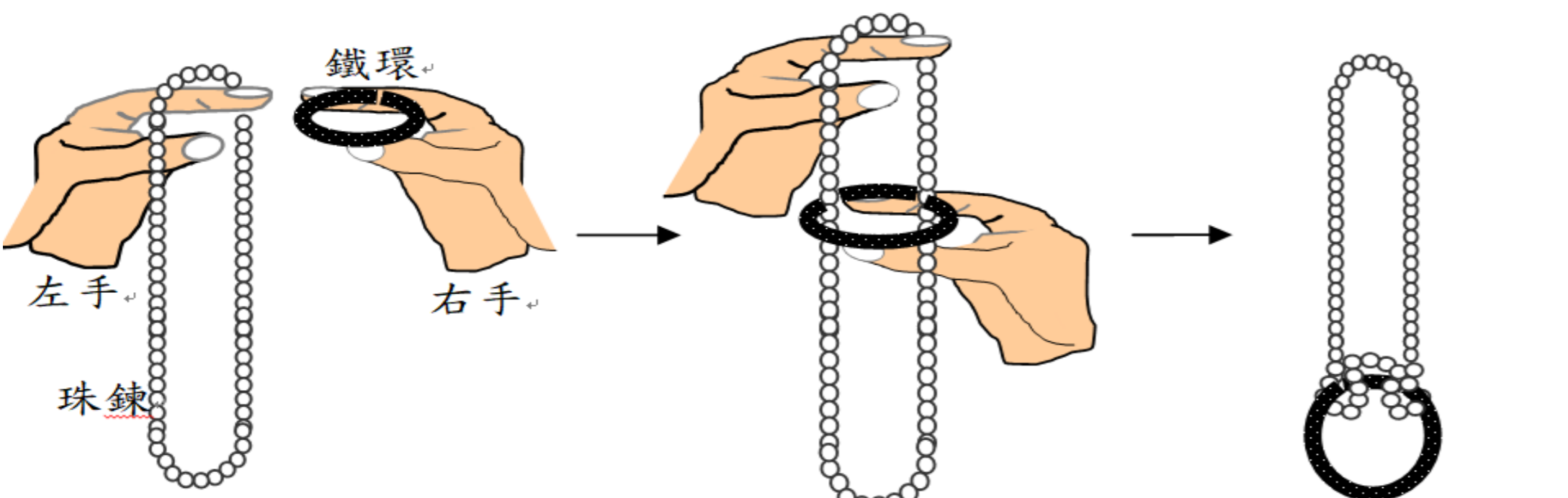


圖1. 魔戒常見的操作手法

貳、研究設備器材

一、實驗器材與儀器

我們以電子天平測量鐵環或珠鍊之重量，游標尺測量鐵環或珠鍊之線徑和直徑，如圖2、圖3、圖4，經測量結果表1和表2所示。

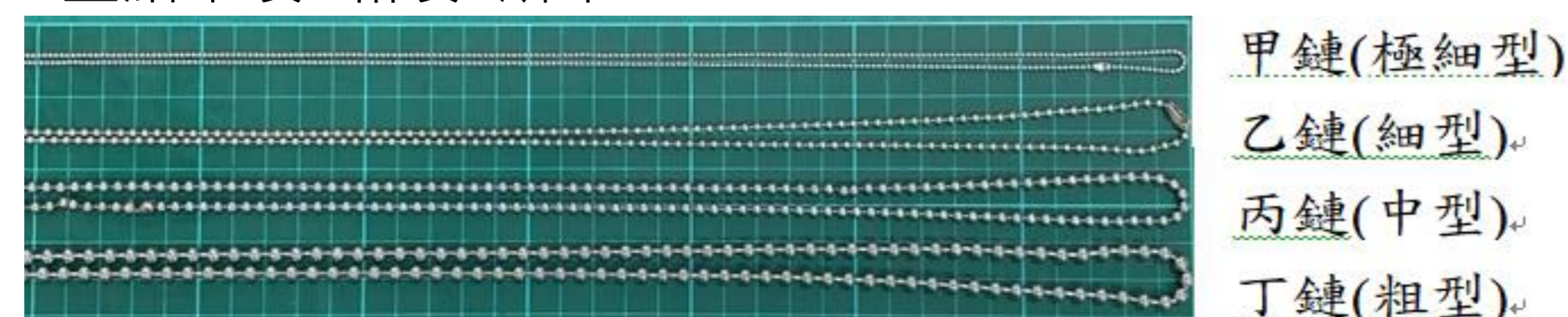


圖2. 珠鏈的種類



環的類型	質量 M(gw)	線徑 (cm)	直徑 R(cm)
A環	1.88	0.2	2.0
B環	3.25	0.5	4.8
C環	4.14	0.1	4.1
D環	9.22	0.2	4.3
E環	14.97	0.3	5.0
F環	16.72	0.3	5.5
G環	27.00	0.3	5.0

圖3. 鐵環的種類

表1. 鐵環類型與物理量

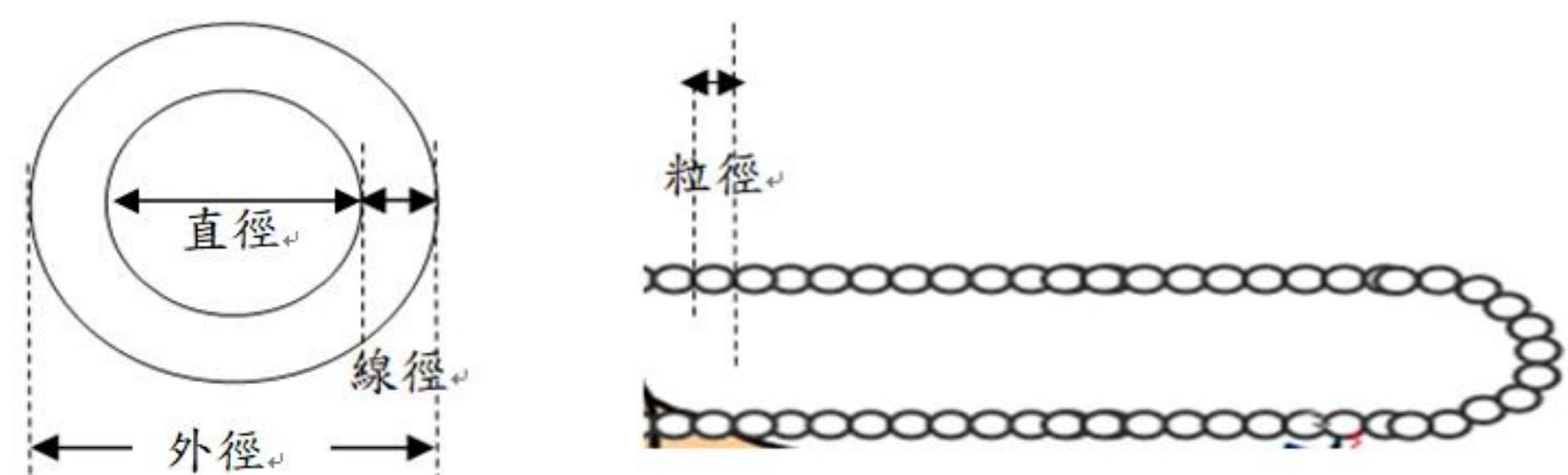


圖4. 鐵環與珠鏈的名詞定義

珠鏈編號	名稱	粒徑(mm)	重量W(g)	總長L(cm)	單位長度之質量(g/cm)
甲鏈	極細鏈	8	15.71	122	0.13
乙鏈	細鏈	12	13.46	70	0.19
丙鏈	中型鏈	20	24.62	95	0.26
丁鏈	粗鏈	26	116.65	372	0.31

表2. 珠鏈類型與物理量

參、研究過程或方法

一、研究流程

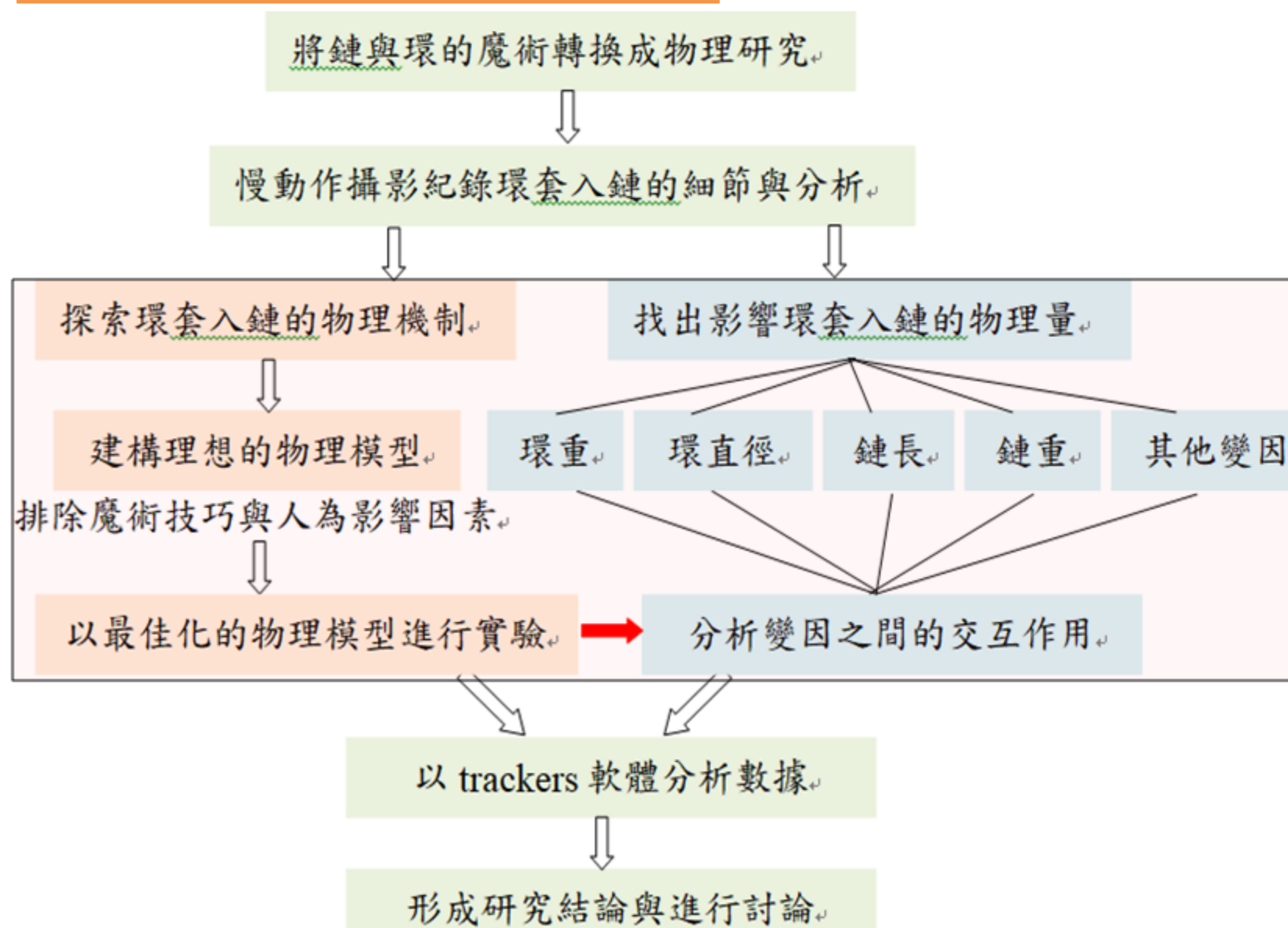


圖5. 研究流程圖

二、研究方法

採用相機「慢動作攝影功能」和照片截圖、蒐集的**數據和物理公式**進行歸納、建構適合探討鏈與環之四種物理模型進行實驗、配合trackers軟體分析影片，建構的最佳物理模型，探討鏈長、鏈重與環重對於鐵環套入珠鏈的影響，以及這些變因之間的交互作用。

1. 首先我們先採用手機中的相機「慢動作攝影功能」和照片截圖，初步判斷可能具有的「環套鏈的物理模式」；
2. **逐格撥放**影片與截圖的照片，以蒐集的數據和物理公式試著歸納出「環套鏈的物理模式」；
3. 採用**trackers軟體分析**影片，得到落下高度與時間關係圖、速度與時間關係圖(即y-t圖與v-t圖)等物理量，驗證與修正上述的物理模式。
4. 設計物理模型
5. 最後，建構最佳化的物理模型

三、實驗過程與討論

(一) 研究1、以慢動作攝影探討「環套鏈的物理模式」

我們以手機的相機「慢動作」攝影方式拍攝，逐格撥放影格後截圖，彙整這些相片並擺在一起後發現了「魔戒的秘密」其實就是一種「物理模式」！經過組員們仔細討論後，依據以下原則初步比較這些「關鍵照片」進行分類和擺放在一起：

- 原則1. 「**鐵環翻轉角度的改變**」：鐵環與珠鏈平行的水平狀態，逐漸翻轉成直立狀態，或是鐵環從直立狀態又翻轉成其他角度；
- 原則2. 「**珠鏈的變化**」：鐵環一邊翻轉、一邊垂直落下，直到套入珠鏈時，原先兩條平行的珠鏈形狀也會隨著改變。

我們比較截圖的關鍵相片與上述分類原則，暫時分成4個階段進行分析，如表3所示。

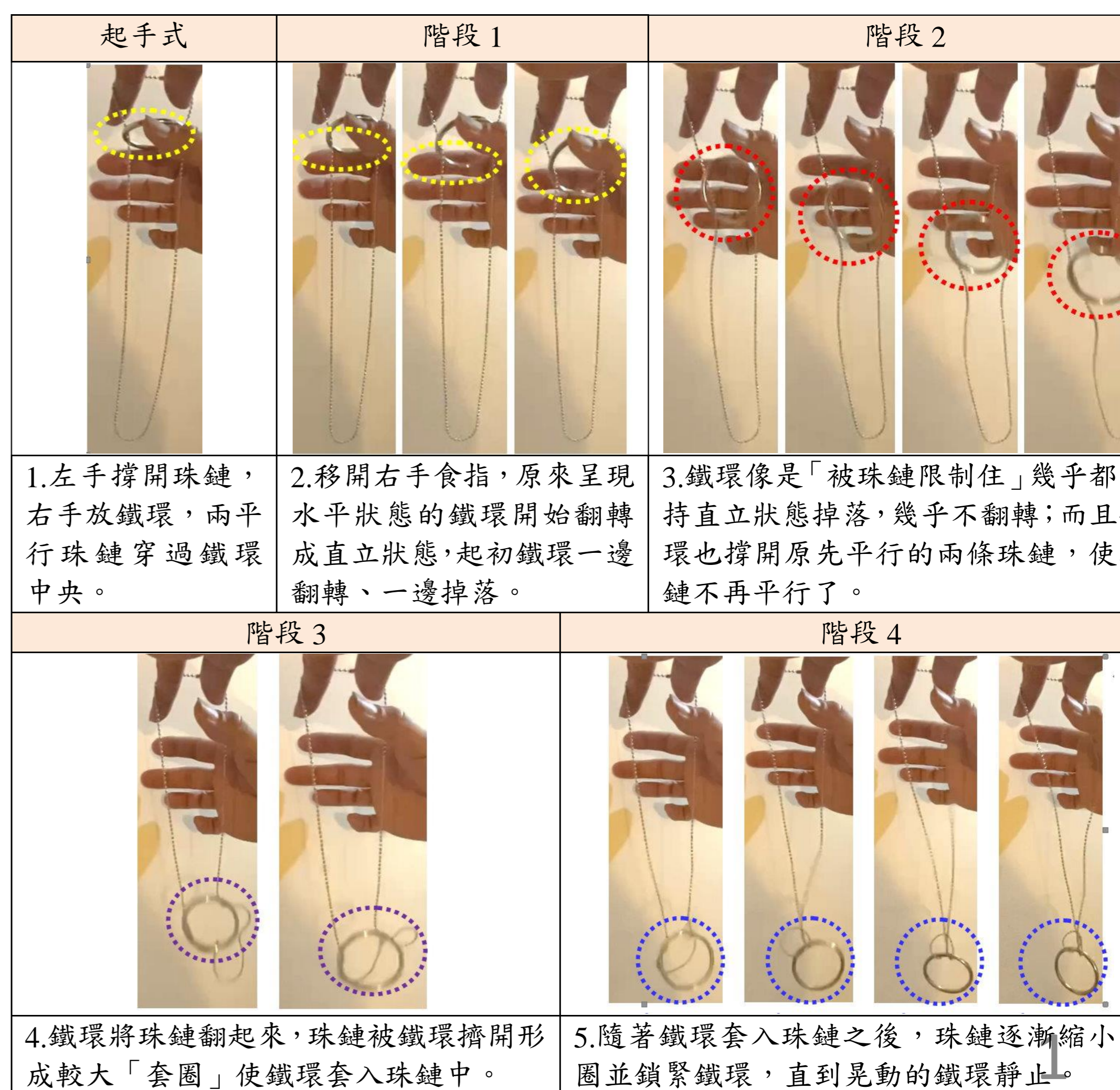


表3. 鐵環套入珠鏈的各階段

「環套入鏈」的過程，又可分解成三個小步驟加以分析和解釋，如圖9~11所示。為說明上述發現，我們根據鐵環套入珠鏈的過程簡化成四個階段，如圖6~8所示。最關鍵的是第三階段

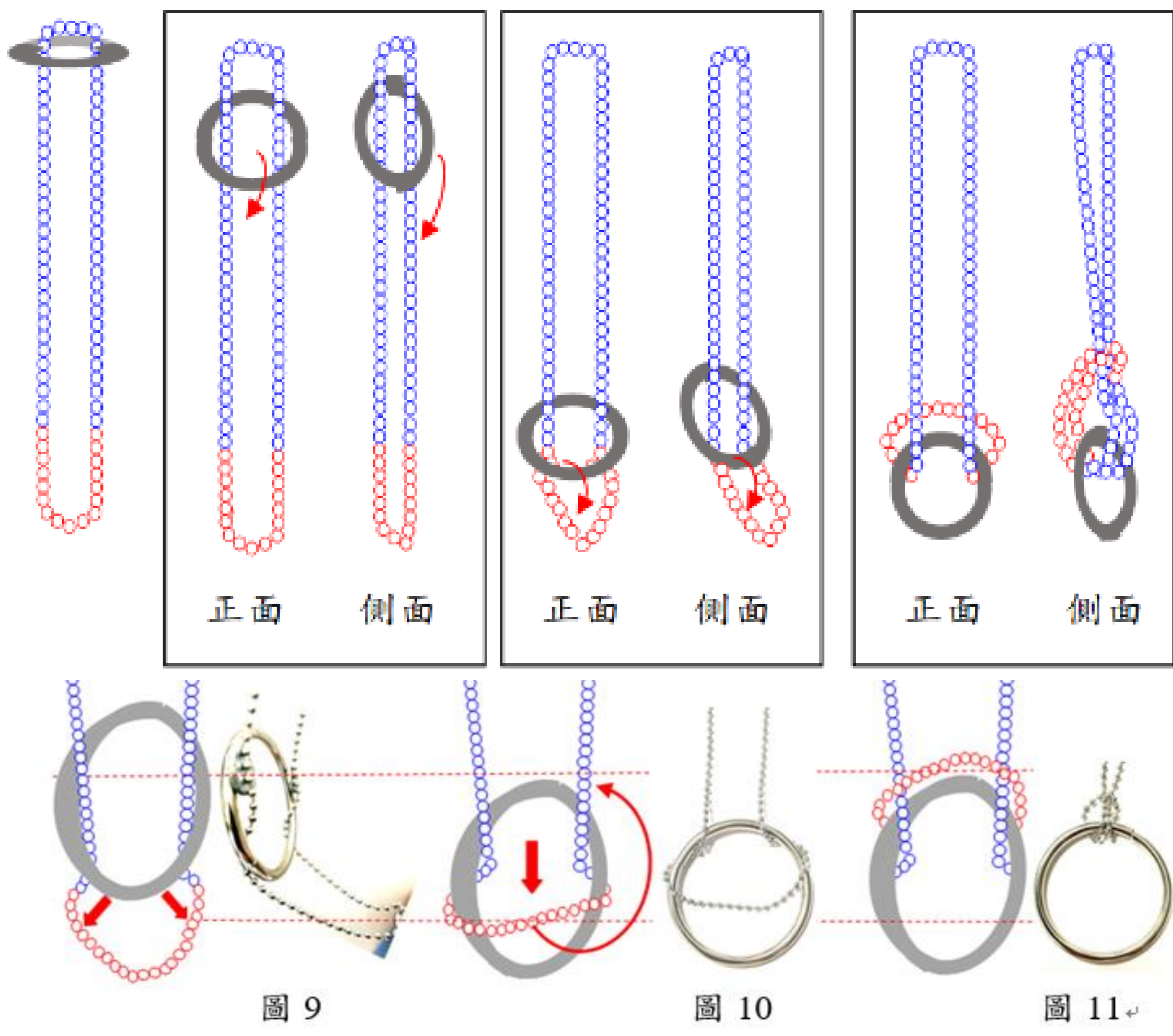


圖9 圖10 圖11

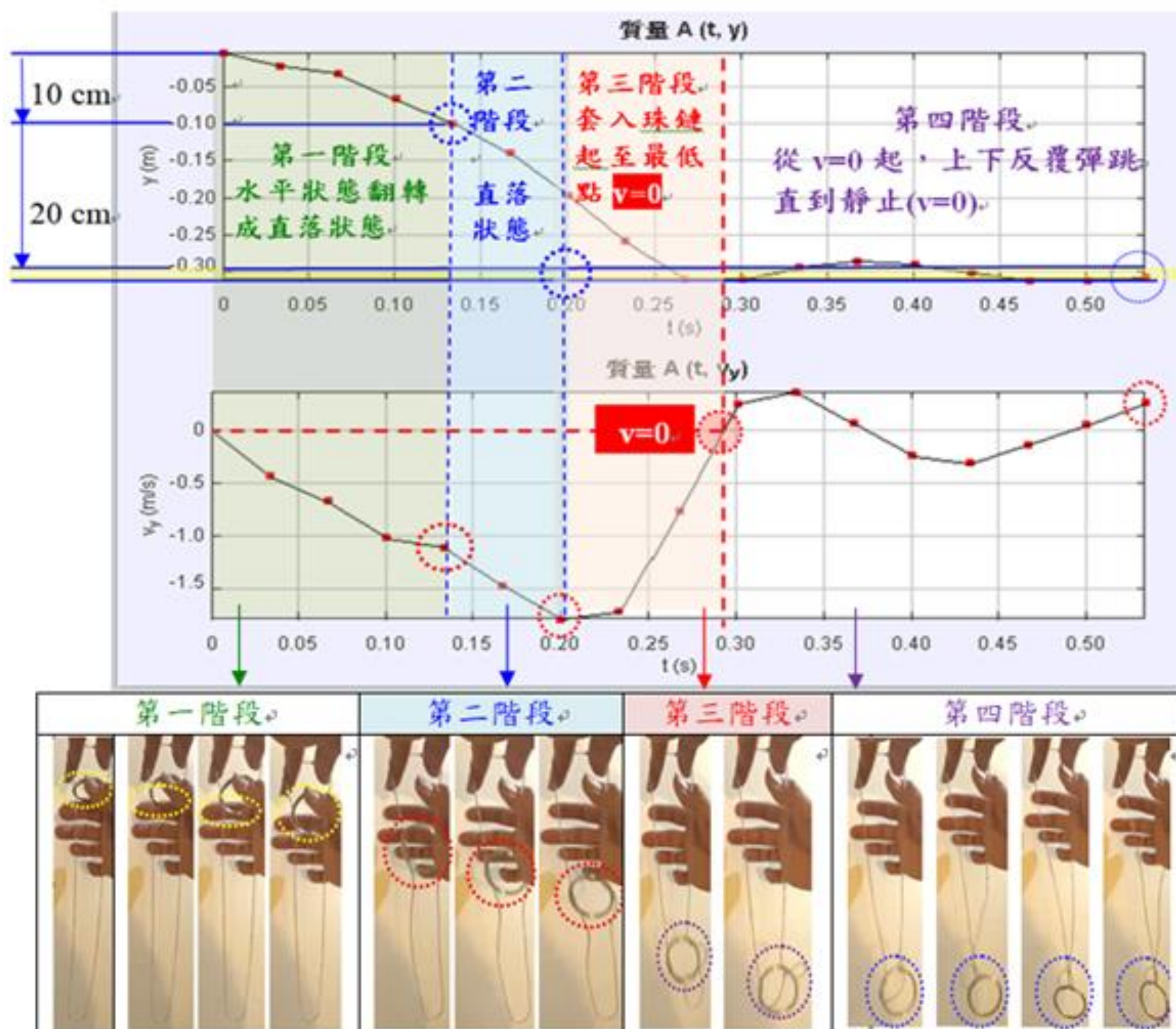
(二) 研究2、以數據和公式推論「環套鏈的物理模式」

根據自由落體公式 $h=gt^2/2$ ，同一高度下的自由落體，落體的質量與體積理論上不會影響落地的時間，亦即如果鐵環不受珠鏈影響而進行自由落體時，以本實驗為例，鐵環從高度0.47 m自由落下，我們用手機App軟體Phyphox「含重力之加速度」測得重力加速度為 $g=9.5\text{ m/s}^2$ ，因此： $h=gt^2/2$ ， $0.47=9.5t^2/2$ ， $t=0.315\text{ s}$ 。
實驗結果：

我們發現，「鐵環瞬間掉落後，經過前三個階段，在第四階段「鏈環彈跳期」從鐵環套入珠鏈而卡緊會達到「最低點拉直珠鏈」為止計算落體時間，以手機「慢動作攝影」所測得的落體時間約為0.31 s，與上述採用自由落體公式推導的結果幾乎相同。

(三) 研究3、以trackers軟體分析與驗證「環套鏈的物理模式」

進行實驗蒐集和分析數據，y表示鐵環t秒時的垂直落下高度、v表示鐵環t秒時的瞬時速度，實驗結果如圖16所示。



為求實驗的一致性，同以「C環套入30.0 cm的細珠鏈內」重新進行物理模型的實驗操作、錄製影片、以trackers進行數據分析後發現，所有的S-t與v-t圖形都極其相似具有「可區分成四個階段物理模式」，如圖17~19所示。

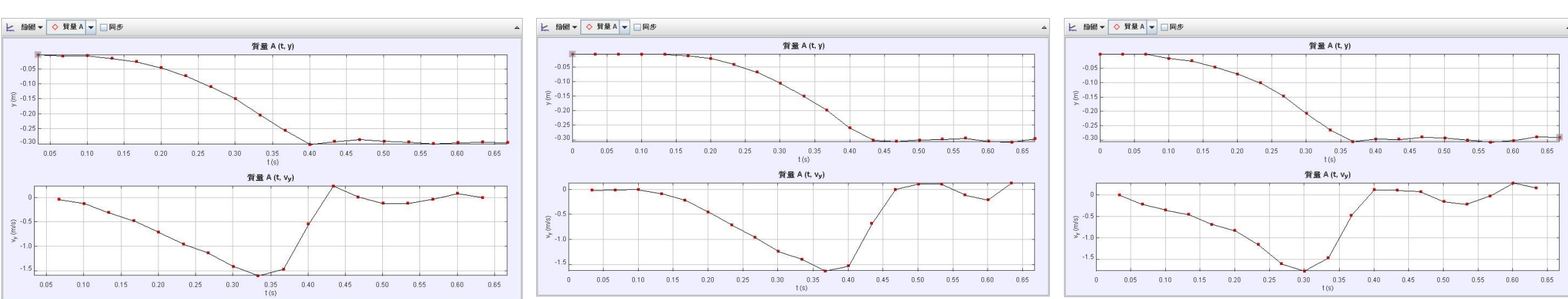


圖17. 實驗1

圖18. 實驗2

圖19. 實驗3

(四) 研究4、探討珠鏈對於鐵環翻轉之影響

「沒有珠鏈限制下自由翻轉的鐵環」代號F、「鐵環在鏈長43.0 cm中翻轉」代號G，F和G同時開始翻轉並以手機慢動作功能進行攝影與截圖，如圖21所示。

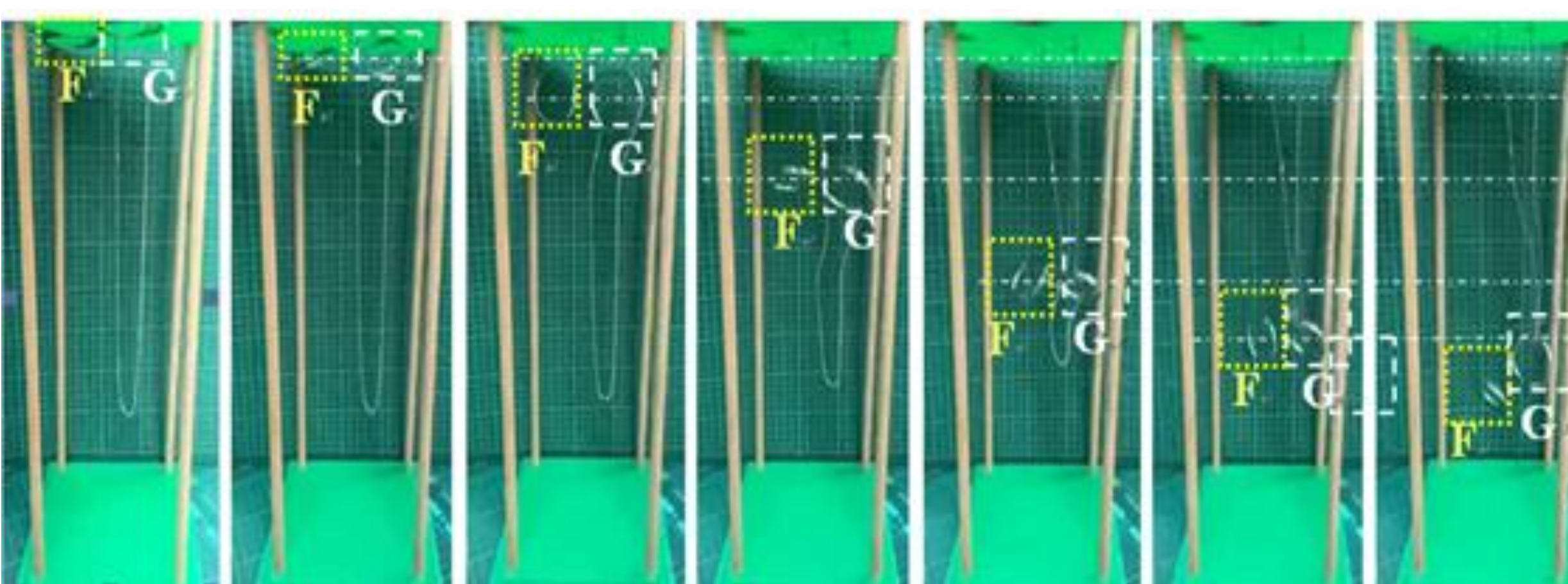


圖21. 比較鐵環F和G分別翻轉自由落下與在珠鏈中翻轉落下

綜上所述，鏈與環的物理現象中，珠鏈只有限制鐵環的翻轉以及套住鐵環，對於鐵環套入珠鏈之前的落下時間、速度、加速度等物理量幾乎沒有影響，這也表示珠鏈與實驗組的鐵環G之間摩擦力非常小，幾乎不影響落下的速度。

(五) 研究5、建立「魔戒探究模型」探討影響鏈與環的物理量

經過不斷地討論、發想和改良之後，我們發展出四種「魔戒探究模型」，逐一介紹如下。

1. 魔戒探究模型1-釋壓抽放模型

根據這類讓鐵環翻轉的手法，同樣為了避免採用左手持有珠鏈而晃動，我們改成一塊大的厚紙板，再插上兩根平行的筷子支撐珠鏈，接著伸出食指和中指，用食指頂住鐵環，使鐵環靜止不動，當食指稍微向後抽離便可讓鐵環落下，鐵環「卡到」中指，鐵環便會以中指指尖為支點開始翻轉，同樣可以套入珠鏈中，如圖22所示。

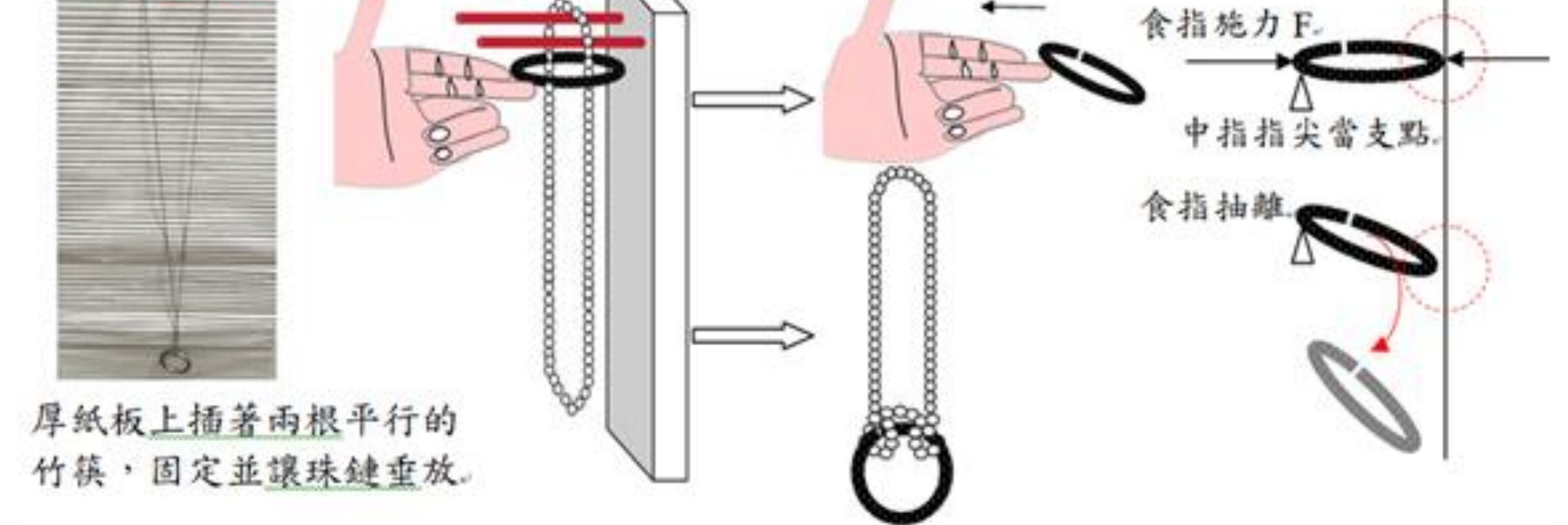


圖22. 釋壓抽放模型

2. 魔戒探究模型2-斷線釋放模型

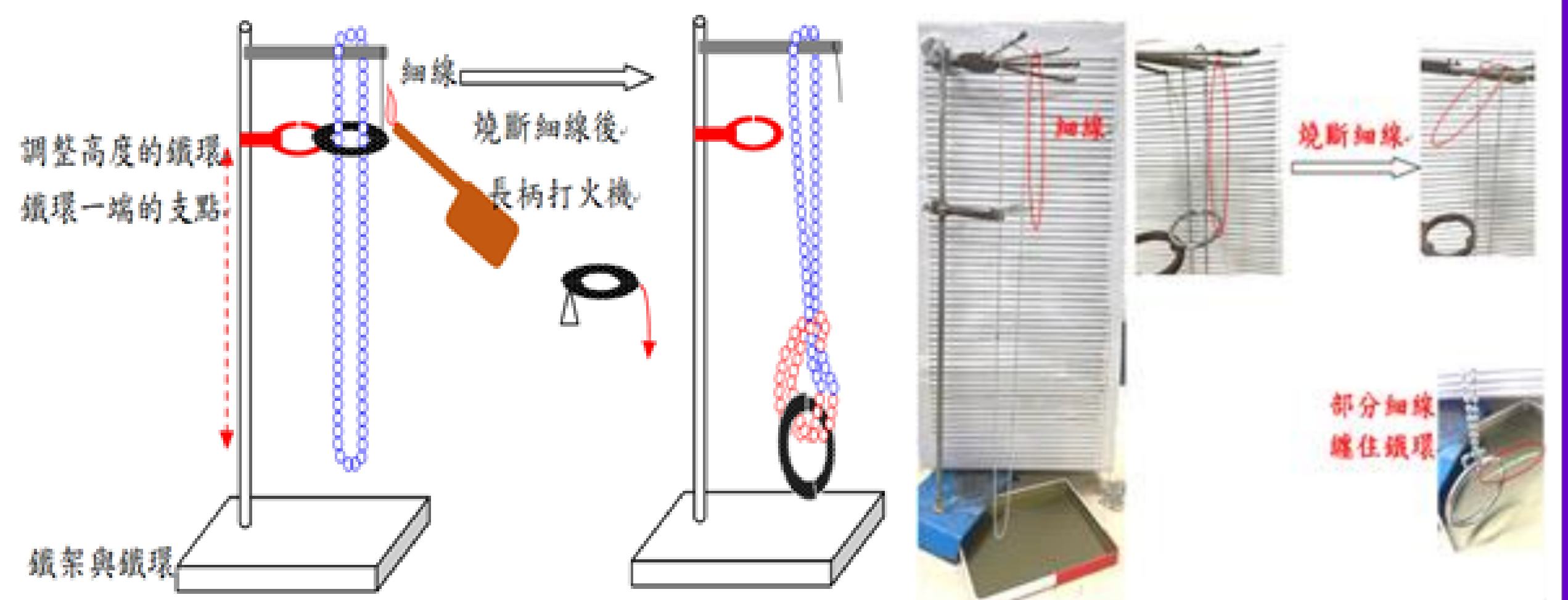


圖23. 斷線釋放模型

3. 魔戒探究模型3-磁吸釋放模型

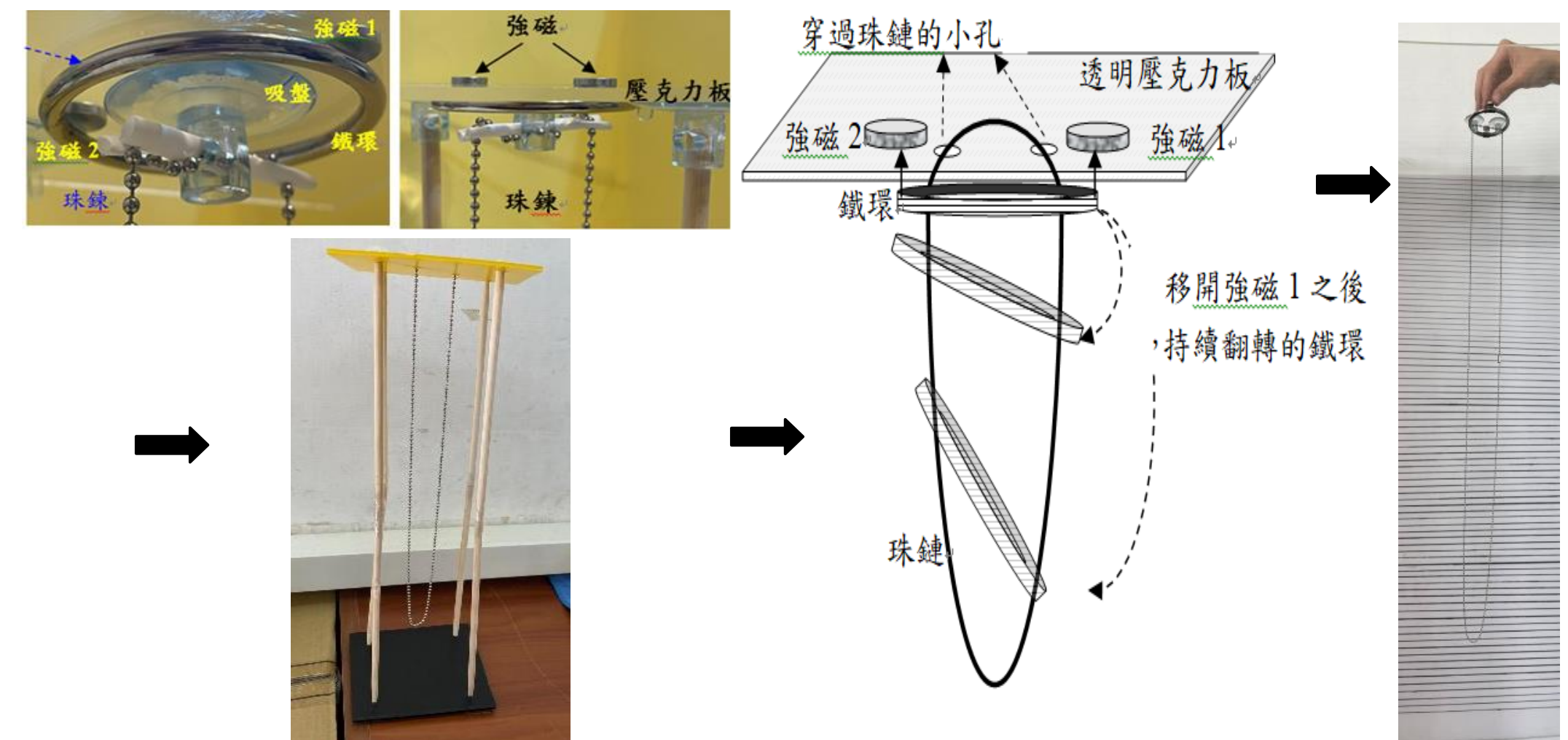


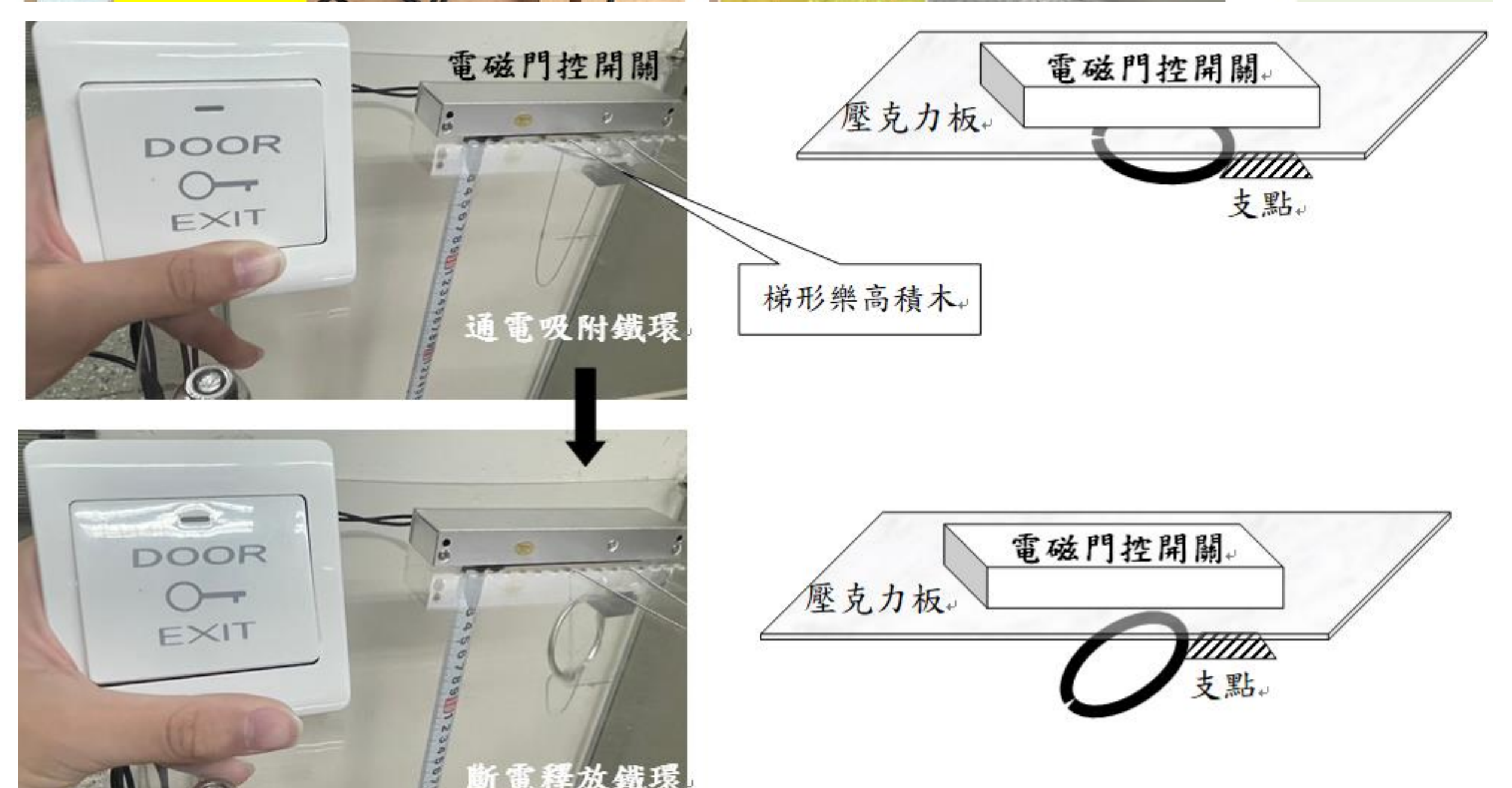


圖24. 磁吸釋放模型

表 7. 磁吸釋放模型的環套入鏈過程。

	
圖 25. 強磁固定鐵環。	圖 26. 釋放強磁而鐵環翻轉。
壓克力板上用磁鐵或強力磁鐵分兩邊吸住，使鐵環不會掉落(剩下的強力磁鐵要無法支撐鐵環的重量)。	移開其中一邊的強力磁鐵後，強力磁鐵會因為無法支撐鐵環的重量，鐵環就會轉動落下。

4. 魔戒探究模型4-電磁控制模型



「電磁控制模型」的優缺點如下：

優點：

1. 可降低人為操作、魔術手法和技巧等因素對於實驗結果之影響。
2. 操作容易且適合控制變因，方便更換鐵環和珠鏈等來進行實驗。
3. 在適當控制變因下，幾乎能百分之百讓鐵環套入珠鏈。
4. 有利穩定地釋放鐵環、觀察轉動落體每一階段落下高度和時間。

(六) 研究6、鏈長以及鏈重和環重對於環套鏈之影響

經過電磁斷電模型的實驗操作，以及tracker軟體蒐集數據與進行分析。實驗結果如表9與圖31所示。

珠鏈(g/cm) 鏈重範圍(g) 環(質量、直徑)	甲鏈 極細(0.13 g/cm)	乙鏈 細(0.19 g/cm)	丙鏈 中型(0.26 g/cm)	丁鏈 粗(0.31 g/cm)
A (1.88 g、2.0 cm)	10~14 cm 鏈重 1.3~1.82	皆無法套入	皆無法套入	皆無法套入
B (3.25 g、4.8 cm)	9套半圈~15 cm 鏈重 1.24~1.95	皆無法套入	皆無法套入	皆無法套入
C (4.14 g、4.1 cm)	6~40 cm 鏈重 0.78~5.2	6~24 cm 鏈重 1.14~4.56	皆無法套入	皆無法套入
D (9.22 g、4.3 cm)	8~54 cm 鏈重 1.04~7.02	10套半圈~30 cm 鏈重 1.9~5.7	皆無法套入	皆無法套入
E (14.97 g、5.0 cm)	11~75 cm 鏈重 1.43~9.75	10~59 cm 鏈重 1.9~11.21	10~28 cm 鏈重 2.6~7.28	皆無法套入
F (16.72 g、5.5 cm)	11~90套兩圈 cm 鏈重 1.43~11.7	17~65 cm 鏈重 3.23~12.35	20~40 cm 鏈重 5.2~10.4	34~48 cm 鏈重 10.54~14
G (27.0 g、5.0 cm)	12~95套兩圈 cm 鏈重 1.56~12.35	20~68 cm 鏈重 3.8~12.92	22~50 cm 鏈重 5.72~13.0	25套半圈~45 cm 鏈重 7.75~13

表9. 不同鐵環重量可以套入珠鏈長度的範圍

實驗結果1. 鐵環重量對於可套入不同珠鏈之鏈長範圍的影響

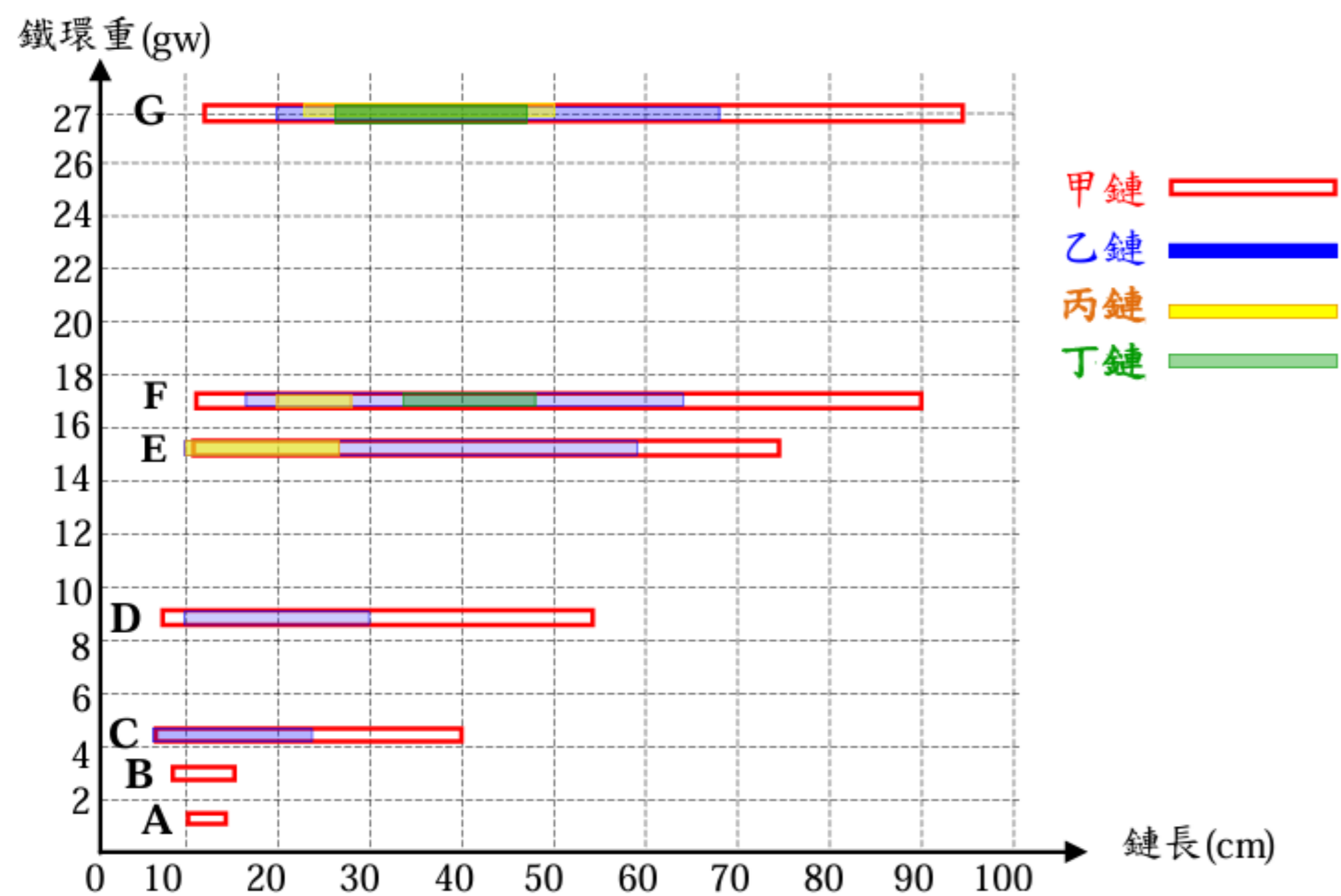


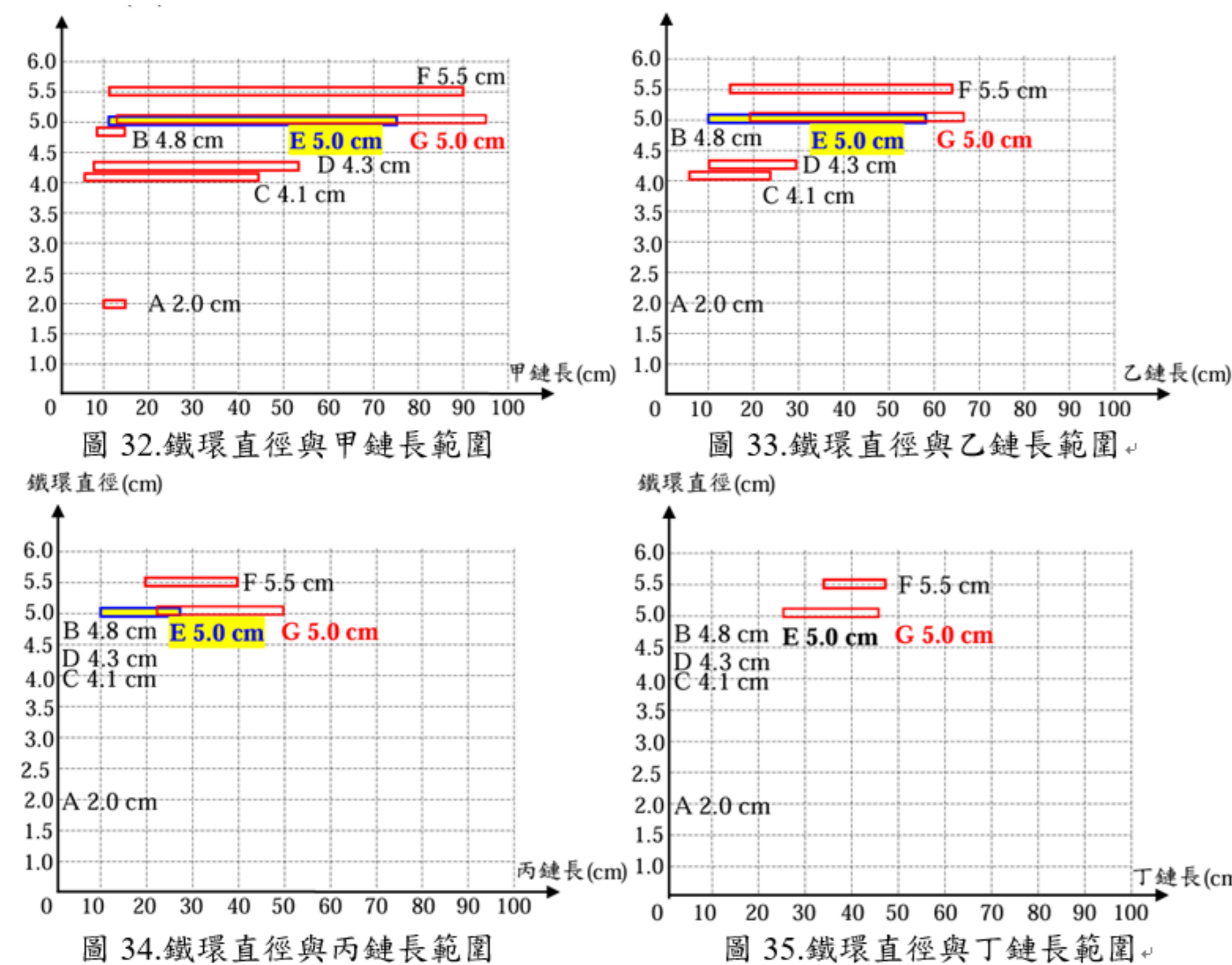
圖31. 鐵環重量與可套入鏈長範圍關係圖

根據表7數據與圖31，可獲得以下結論：

1. 珠鏈愈輕或愈細，鐵環能套入鏈長的範圍也愈大。
2. 鐵環愈重，鐵環能套入鏈長的範圍也愈大。
3. 可能是C環直徑小又足夠重、甲和乙珠鏈也較細，除了C環小於珠鏈重也能套入甲、乙兩種珠鏈之外，鐵環能套入珠鏈的重要條件之一：「環重>鏈重」。
4. 不同類型的鐵環套入各類珠鏈時，也以下產生奇特的「異例」：(1)套半圈 (2)套兩圈。

實驗結果2. 鐵環直徑對於可套入不同珠鏈之鏈長範圍的影響

從表9得知，只有甲鏈能夠讓本研究所蒐集的A~G的七種鐵環全部套入，當鐵環能套入各種珠鏈時，探討「不同鐵環直徑對鏈長範圍的影響」，如圖32~35所示。



綜上所述，「珠鏈愈輕或愈細、鐵環愈重」，則鐵環套入珠鏈的鏈長範圍愈大；而對於「鐵環能否套入珠鏈之中」的影響程度比較為：

珠鏈單位長度重量 $W >$ 鐵環質量 $M >$ 珠鏈長度 $L >$ 鐵環直徑 R 。

因此，對於魔戒的演示，應選用「珠鏈輕細與鐵環較重」作為素材，成功率會大幅增加。

(七) 研究7、環套鏈產生多結與半結現象的異例分析

1. 環套鏈的雙套結型式

G環27.0 g，長度90.0 cm的甲鏈後仍產生單結，如圖36所示；當甲鏈長度達到約95.0 cm的極限值時，G環卻很難從甲鏈中解開。我們發現，原來是G環與甲鏈形成雙結，如圖37所示。



圖36. G環套較短的甲鏈成單結 圖37. G環套很長的甲鏈成雙結

2. 環套鏈的半套結型式

環套入鏈中，如以上討論，可能形成單結或雙結。進行D環套入10 cm的乙鏈時發現，鏈與環亦形成半結的現象。



圖38. D環與10.0 cm乙鏈形成半結 圖39. G環與25.0 cm丁鏈形成半結

(八) 研究問題8、以雙trackers分析鏈與環的套結現象

將D環套極細的甲鏈時，我們將D環的前後兩端標註A和B兩點，如圖40所示。

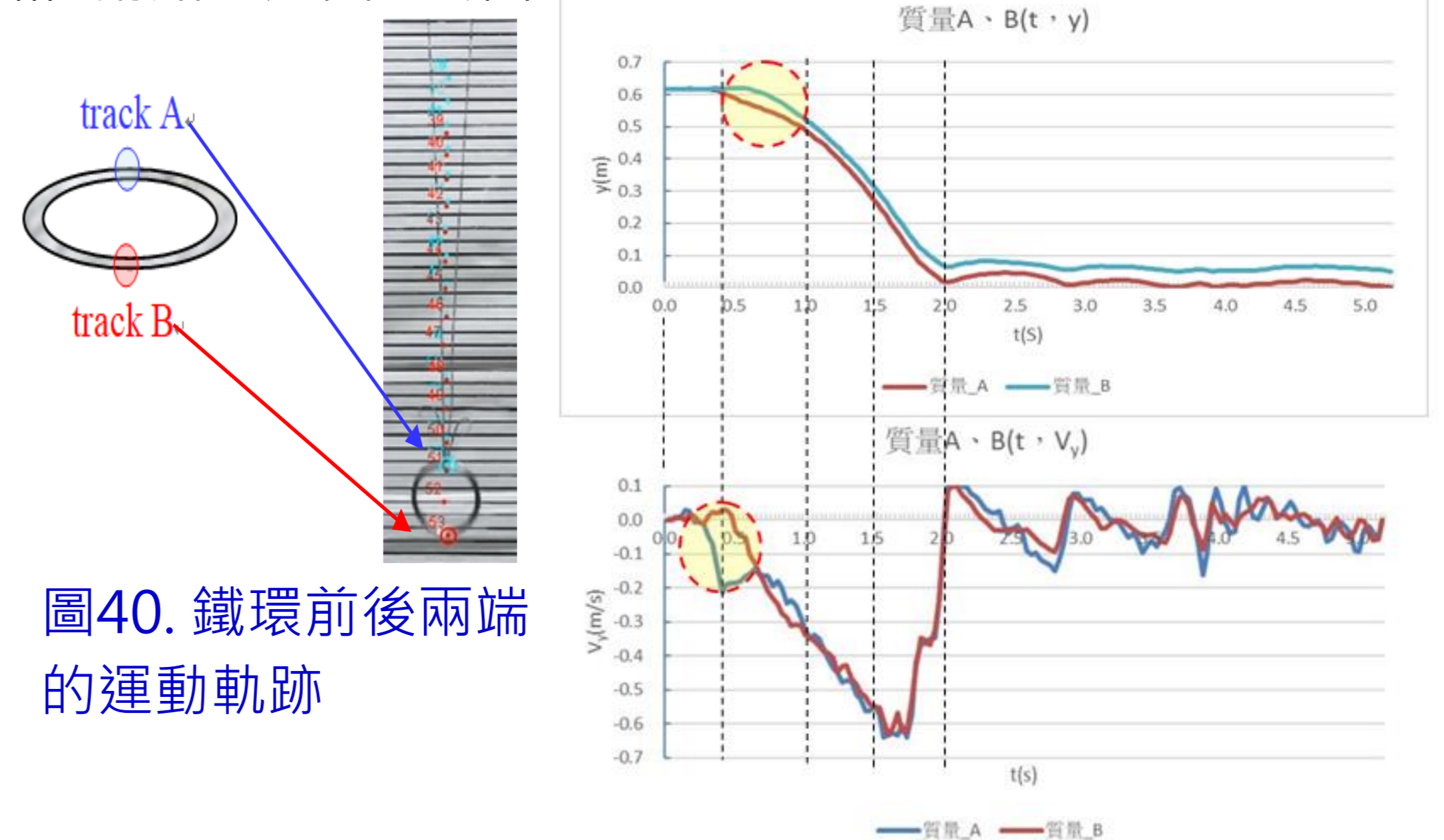


圖40. 鐵環前後兩端的運動軌跡 圖41. 鐵環A、B兩端的位置與速度變化

從圖41得知，鐵環在珠鏈之中開始翻轉的第一階段約0.4 s時，鐵環A、B端： $v_B > v_A$ ，然後到了第二階段立環直落期、乃至第三階段與第四階段，A、B兩端的間距恰好為鐵環的直徑，A、B的v-t圖也幾乎重疊，這也說明鏈與環的鐵環運動軌跡，在一開始的「第一階段翻面落體期」之後，鐵環就幾乎以直落方式套入珠鏈。

肆、研究結果

「鏈與環魔術」可視為一種翻轉落體運動的物理模式。本研究發展四種鏈與環的物理模型，試著排除人為操作技巧與摩擦力等因素，採用慢動作攝影、以及trackers軟體分析影片，再以y-t和v-t圖解釋各項物理量。研究結果：

1. 鏈與環魔術的物理模式，可分為翻面落體期、立環直落期、翻鏈套環期、與鏈環彈跳期共4個階段。
2. 第3階段的翻鏈套環期，是關鍵階段，鐵環大約翻轉1/4圈套入珠鏈。
3. 鏈與環魔術之各項變因的影響程度分別為：單位長度的鏈重>環重>鏈長>環的直徑。
4. 本研究設計「無珠鏈時」的物理模型作為「對照組」，與鐵環套入珠鏈作為實驗組進行比較。
5. 本研究所發展的四種「鏈與環的物理模型」分別為：釋壓抽放模型、斷線釋放模型、磁吸釋放模型、電磁斷電模型，配合trackers軟體分析，都能合理解釋與驗證本研究所提出的「鏈與環的物理模式」。
6. 不論半套結與多套結，仍然可用「鏈與環的物理模式」進行解釋。
7. 經雙tracker鐵環兩端時發現，鐵環在第一階段翻轉之後，接下來的第二與第三兩階段幾乎都維持「立環」形式，直到套入珠鏈並與珠鏈一起彈跳。

伍、結論與討論

本研究對於鏈與環的探索過程稱為「魔戒三部曲」，說明如下：

魔戒首部曲:以慢動作攝影和截圖發現，鏈與環具有的「物理模式」(pattern)，鐵環套入珠鏈之中包括四個階段，第一階段翻面落體期、第二階段立環直落期、第三階段翻鏈套環期、與第四階段鏈環彈跳期。

魔戒第二部:發展「物理模型」(model)，為了探索「鏈與環的物理模式」而發展簡化許多變因的模型，包括：釋壓抽放模型、斷線釋放模型、磁吸釋放模型、電磁控制模型。

魔戒第三部:選擇適合探索和分析模型的tracker軟體，透過數據收集與分析，解釋鏈與環的「物理模式」與驗證「物理模型」。

(二) 討論

- 討論1. 我們發展四種物理模型發現，與魔術操作手法和探討鐵環套入珠鏈「鏈長範圍」時，有些微差異。
- 討論2. 我們最後發展的第四種「電磁控制模型」的壓克力板具有厚度，較重的鐵環須用磁鐵吸附再釋放。