

# 中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

第二名

051815

探討特殊震動頻率下的倒立擺自主校正運動

學校名稱： 新北市立板橋高級中學

作者：  高二 歐東霖  高二 楊勛誠  高二 陳靖	指導老師：  曾筱嵐  褚勵丞
--	-----------------------------

關鍵詞： 倒立擺、渾沌擺、自主校正

## 摘要

本研究探討倒立擺在不同鉛直振動頻率下的擺動軌跡、擺動時間、擺動範圍及自主校正之情形。我們發現單一倒立擺是否能夠達成穩定自主校正主要受鉛直振動頻率影響，且隨著鉛直振動頻率增加，倒立擺擺動範圍會縮小。當倒立擺的長度增加時，擺達穩定所需之角頻率上升，相同頻率下的擺動範圍增加。接著再將不同長度的擺頭尾以螺絲相連組合，觀察雙擺之運動情形，我們發現在雙擺的情形下，下擺與上擺的長度會影響擺是否能穩定，在上下長度相同與下長上短時，擺在適當頻率下即可達成平衡，但在下短上長的狀況下，下擺及上擺長度則須達特定比例才可平衡。

## 壹、研究動機

我們於《物理馬戲團》此書中看到一裝置，高速鉛直振動下的倒立擺不會因重力落下，而是維持在中線附近擺動，我們想探討鉛直振動頻率及倒立擺各屬性對倒立擺各項運動情形之影響，並找出能使倒立擺擺動最穩定之情形，使之維持在一個能克服重力而保持豎立的狀態。並增加擺的數量形成雙擺，觀察各變因對雙擺的影響。

## 貳、研究目的

- (一) 實驗一：探討相同擺長單一倒立擺在不同振動頻率下的運動情形
- (二) 實驗二：探討不同擺長單一倒立擺達穩定所需之最低頻率
- (三) 實驗三：探討單一擺長倒立擺在不同振動頻率下達穩定後的平均擺動範圍
- (四) 實驗四：探討雙擺在上下長度相同之組合下的運動情況
- (五) 實驗五：探討雙擺在上下長度不相同之組合下的的運動情況
- (六) 實驗六：比較倒立擺在穩定與不穩定情況下的 FFT 頻譜圖差異

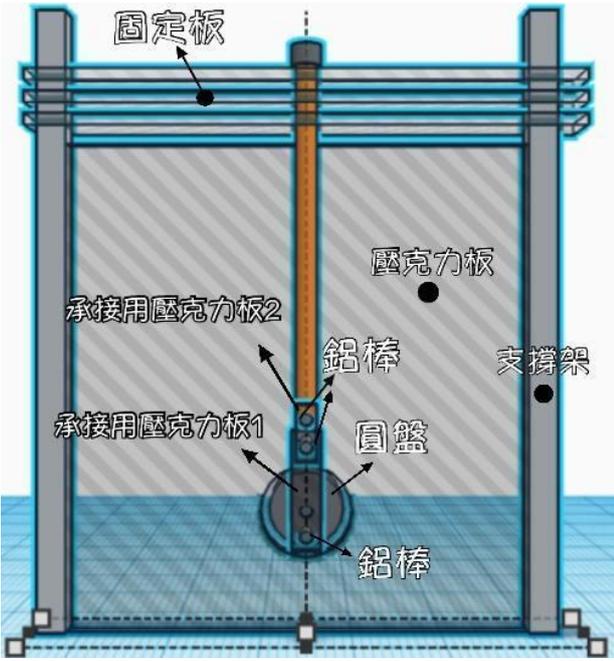
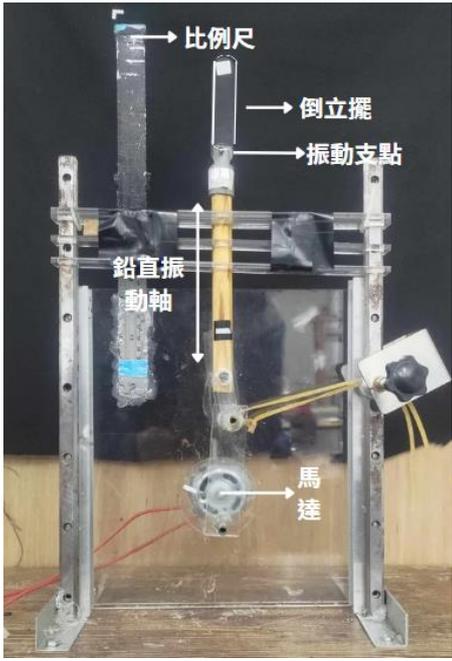
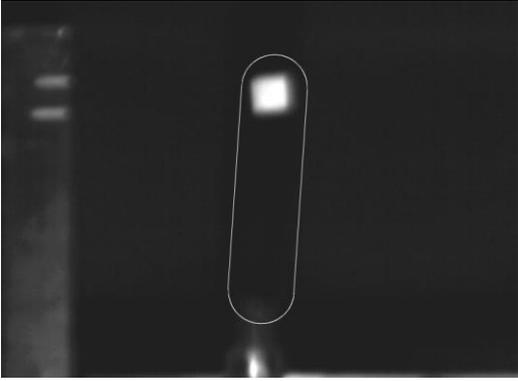
## 參、研究設備及器材

### 一、實驗器材與裝置圖

表 1 實驗器材

<p>直流馬達                  (T 電子 24V/15A                  895 直流馬達)                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>		<p>水平儀                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>	
<p>電源供應器                  (TOKYOMAEEKAW                  ABK-5A)                  直流電 0~15V 5A                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>		<p>高速攝影機                  (MEGA SPEED                  HHC X1 最高可達每                  秒 500 幀)                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>	
<p>閃頻儀                  (LUTR ON DT-                  2639A)                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>		<p>鋁質支架                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>	
<p>手提式線鋸機                  (AS56K)                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>		<p>Excel 軟體                  (照片由第三作者拍                  攝)</p>	
<p>Thonny 軟體                  (照片由第一作者拍                  攝)</p>		<p>Tracker 軟體                  (照片由第一作者拍                  攝)</p>	

表 2 實驗裝置圖

	
<p>(a) 實驗裝置基座組合完成 3D 圖 (照片由第一作者拍攝)</p>	<p>(b) 驗裝置組合完成實際圖 (照片由第三作者拍攝)</p>
	
<p>(c) 高速攝影機下的倒立擺 (單擺) (照片由第一作者拍攝)</p>	<p>(d) 雙擺裝置圖 (螺絲以下為基座) (照片由第三作者拍攝)</p>

## 肆、研究過程或方法

### 一、本實驗中的名詞解釋

- (一) 倒立擺：將一質量均勻的壓克力擺倒放，如表 2- (b)。
- (二) 雙擺：將兩個倒立擺以輕量螺絲組合，如表 2- (d)。
- (三) 自主校正運動：定義倒立擺在特定鉛直振動頻率下不會因重力影響而傾倒並能自主維持在中線附近擺動的現象。
- (四) 平均擺動範圍：待倒立擺達穩定後，會於中線附近左右擺動，其擺動角度會有一個區間，我們測量其擺動範圍（如下方圖 1）後，計算平均值。

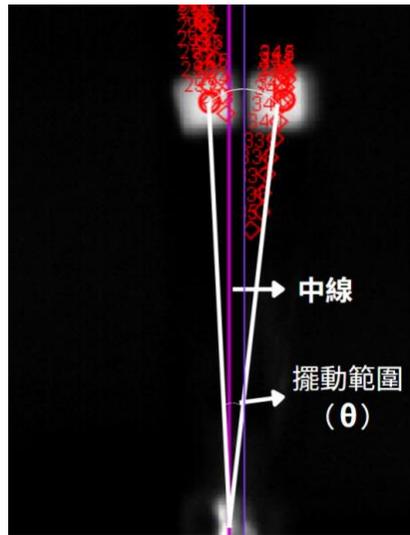


圖 1 倒立擺之擺動範圍（照片由第三作者拍攝）

- (五) 最大擺角  $\cos \theta_{MAX}$ ：擺在擺動過程中距中線最遠時與中線的夾角。
- (六) 組合擺的長度表示方法為：若下擺長度為 5cm，上擺長度為 6cm，則記為 5+6。

### 二、實驗方法

- (一) 首先將反光條黏貼於擺中線之頂部的固定位置，並將擺安裝於器材上。
- (二) 為確保軸水平，訂定座標軸原點在擺基部的固定部件上。
- (三) 使用閃頻儀輔助調整至待測頻率後，將固定板拿起令擺從中線開始運動，並以高速攝影機錄影後利用 Tracker 軟體追蹤擺頂端之反光條，得到 x 及 y 分量與時間的關係，進而分析確切頻率、擺的運動軌跡、擺動時長及擺動範圍。

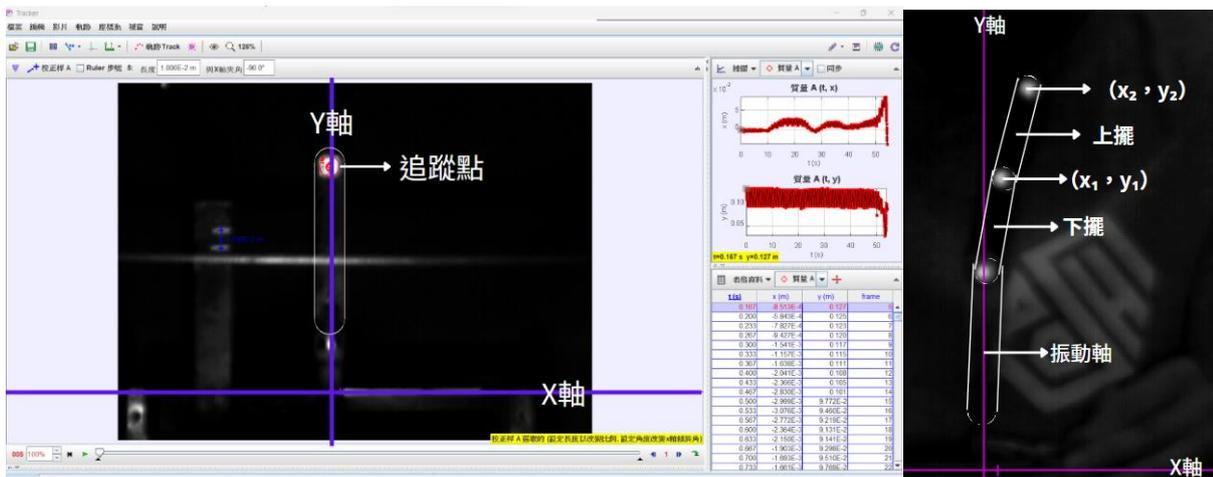


圖 2 (a) 左、2 (b) 右 Tracker 追蹤方法示意圖 (照片由第三作者拍攝)

(四) 另外，將數據利用 Thonny 軟體 (Python 程式) 進行快速傅立葉變換 (FFT) 後可得到頻譜圖，藉由頻譜圖觀察主要影響頻率、其強度及頻率分布。

```

1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.fft import fft
5 import pandas as pd
6
7 def plot_fourier_transform(file_name, freq_min=None, freq_max=None, strength_min=None, strength_max=None):
8     # Read the data from the file
9     data = pd.read_csv(file_name, delim_whitespace=True, header=None)
10
11     # Assuming the file has three columns: time, Y1, and Y2
12     time = data[0].values
13     y1 = data[1].values
14     y2 = data[2].values
15
16     # Perform Fourier transformation
17     y1_fft = fft(y1)
18     y2_fft = fft(y2)
19     freqs = np.fft.fftfreq(len(y1), (time[1] - time[0]))
20
21     # Compute the power spectral density (strength)
22     y1_strength = np.abs(y1_fft)
23     y2_strength = np.abs(y2_fft)
24
25     # Determine the frequency range in data
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100
2101
2102
2103
2104
2105
2106
2107
2108
2109
2110
2111
2112
2113
2114
2115
2116
2117
2118
2119
2120
2121
2122
2123
2124
2125
2126
2127
2128
2129
2130
2131
2132
2133
2134
2135
2136
2137
2138
2139
2140
2141
2142
2143
2144
2145
2146
2147
2148
2149
2150
2151
2152
2153
2154
2155
2156
2157
2158
2159
2160
2161
2162
2163
2164
2165
2166
2167
2168
2169
2170
2171
2172
2173
2174
2175
2176
2177
2178
2179
2180
2181
2182
2183
2184
2185
2186
2187
2188
2189
2190
2191
2192
2193
2194
2195
2196
2197
2198
2199
2200
2201
2202
2203
2204
2205
2206
2207
2208
2209
2210
2211
2212
2213
2214
2215
2216
2217
2218
2219
2220
2221
2222
2223
2224
2225
2226
2227
2228
2229
2230
2231
2232
2233
2234
2235
2236
2237
2238
2239
2240
2241
2242
2243
2244
2245
2246
2247
2248
2249
2250
2251
2252
2253
2254
2255
2256
2257
2258
2259
2260
2261
2262
2263
2264
2265
2266
2267
2268
2269
2270
2271
2272
2273
2274
2275
2276
2277
2278
2279
2280
2281
2282
2283
2284
2285
2286
2287
2288
2289
2290
2291
2292
2293
2294
2295
2296
2297
2298
2299
2300
2301
2302
2303
2304
2305
2306
2307
2308
2309
2310
2311
2312
2313
2314
2315
2316
2317
2318
2319
2320
2321
2322
2323
2324
2325
2326
2327
2328
2329
2330
2331
2332
2333
2334
2335
2336
2337
2338
2339
2340
2341
2342
2343
2344
2345
2346
2347
2348
2349
2350
2351
2352
2353
2354
2355
2356
2357
2358
2359
2360
2361
2362
2363
2364
2365
2366
2367
2368
2369
2370
2371
2372
2373
2374
2375
2376
2377
2378
2379
2380
2381
2382
2383
2384
2385
2386
2387
2388
2389
2390
2391
2392
2393
2394
2395
2396
2397
2398
2399
2400
2401
2402
2403
2404
2405
2406
2407
2408
2409
2410
2411
2412
2413
2414
2415
2416
2417
2418
2419
2420
2421
2422
2423
2424
2425
2426
2427
2428
2429
2430
2431
2432
2433
2434
2435
2436
2437
2438
2439
2440
2441
2442
2443
2444
2445
2446
2447
2448
2449
2450
2451
2452
2453
2454
2455
2456
2457
2458
2459
2460
2461
2462
2463
2464
2465
2466
2467
2468
2469
2470
2471
2472
2473
2474
2475
2476
2477
2478
2479
2480
2481
2482
2483
2484
2485
2486
2487
2488
2489
2490
2491
2492
2493
2494
2495
2496
2497
2498
2499
2500
2501
2502
2503
2504
2505
2506
2507
2508
2509
2510
2511
2512
2513
2514
2515
2516
2517
2518
2519
2520
2521
2522
2523
2524
2525
2526
2527
2528
2529
2530
2531
2532
2533
2534
2535
2536
2537
2538
2539
2540
2541
2542
2543
2544
2545
2546
2547
2548
2549
2550
2551
2552
2553
2554
2555
2556
2557
2558
2559
2560
2561
2562
2563
2564
2565
2566
2567
2568
2569
2570
2571
2572
2573
2574
2575
2576
2577
2578
2579
2580
2581
2582
2583
2584
2585
2586
258
```

## 伍、研究結果

一、在實驗一中，測得倒立擺在不同鉛直振動頻率下的  $x$  及  $y$  分量後對時間作圖，以計算其確切振動頻率及平均擺動範圍。

以下範例為 8 公分倒立擺在閃頻儀測定 600rpm 下的  $x-t$ 、 $y-t$  圖。

其中，橫軸為  $t$ （單位為秒  $s$ ），縱軸為  $x$  或  $y$ （單位為公尺  $m$ ）。

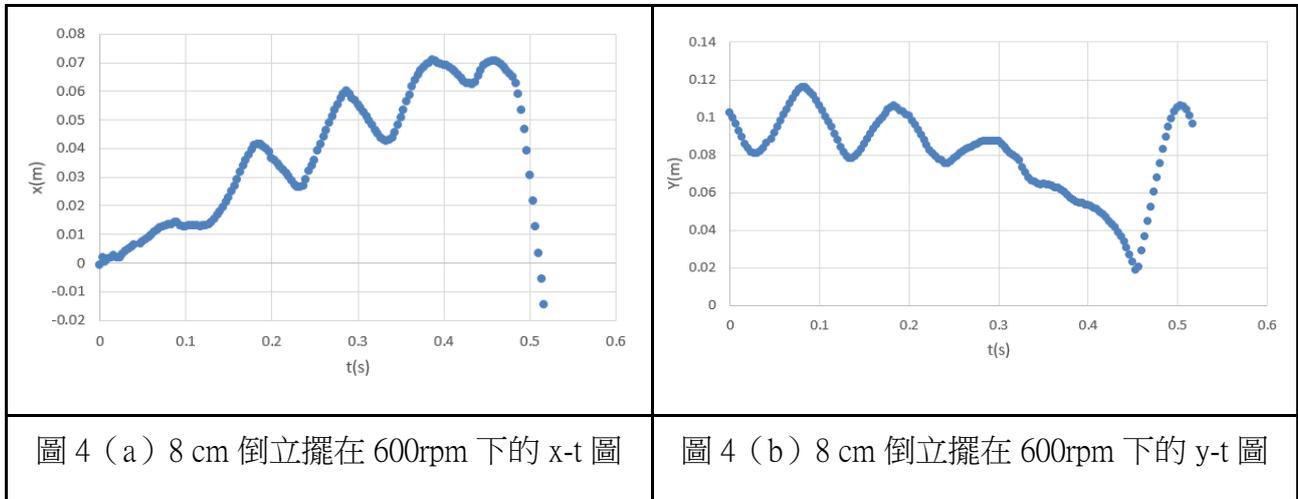


圖 4 (a) 8 cm 倒立擺在 600rpm 下的  $x-t$  圖

圖 4 (b) 8 cm 倒立擺在 600rpm 下的  $y-t$  圖

二、實驗二探討不同擺長恰達穩定所需之鉛直振動頻率

表 3 倒立擺達穩定之情況

擺長 (cm)	施加頻率 1 (r.p.m.)	施加頻率 2 (r.p.m.)	施加頻率 3 (r.p.m.)
8	660	690	720
9	660	690	720
10	未穩定	690	720
11	未穩定	690	720

依據表 3，我們將 10cm 單一倒立擺的穩定頻率記為 690rpm，再改變擺長，做出穩定頻率  $f$  對擺長關係圖。

穩定頻率 f 對擺長關係圖

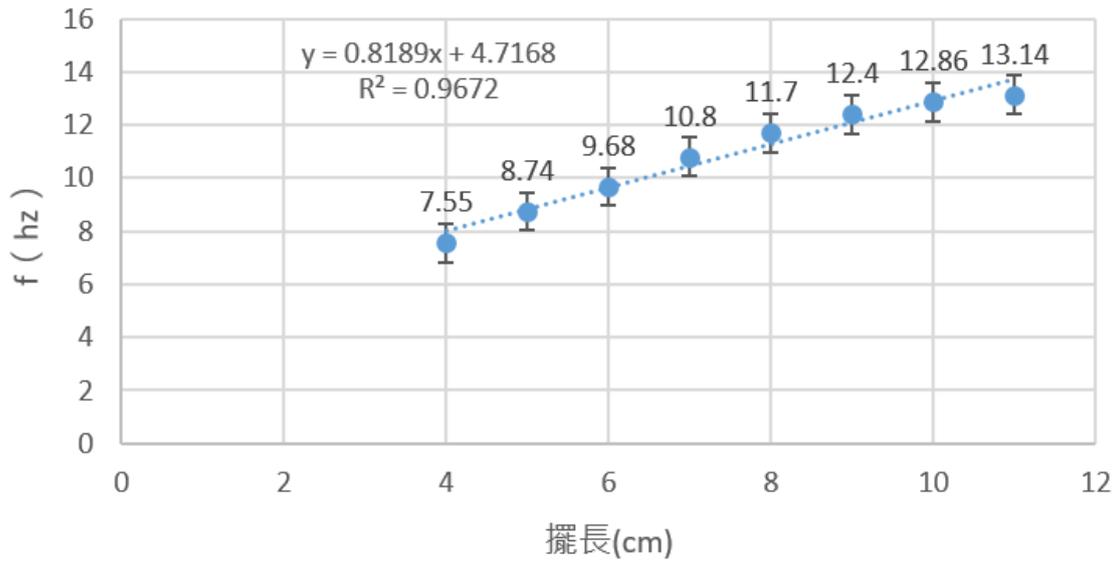


圖 5 穩定頻率 f 對擺長關係圖

三、實驗三探討單一擺長倒立擺在不同振動頻率下達穩定後的平均擺動範圍

(選擇 8 及 9 公分是因為在裝置可負荷的極限下，8 及 9 公分能夠達到穩定的頻率較多)

相同擺長倒立擺在不同頻率下的平均擺動範圍

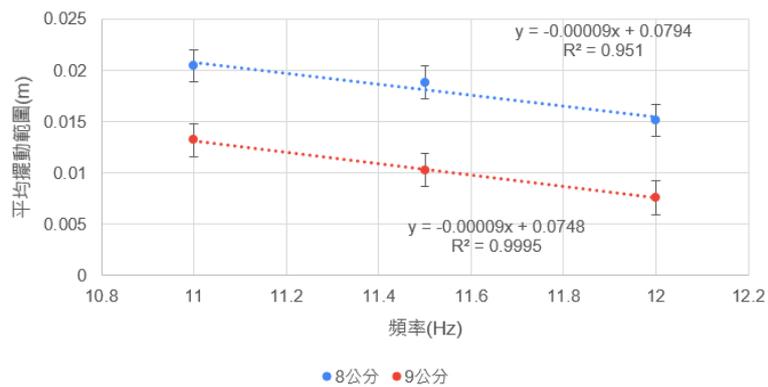


圖 6 同擺長在不同振動頻率下穩定後的平均擺動範圍

四、實驗四及實驗五，探討雙擺在上、下擺各種長度之組合下的運動情況

以下以 5+5 雙擺為例，我們分別追蹤上擺及下擺的頂點繪出 x-t 與 y-t 圖。

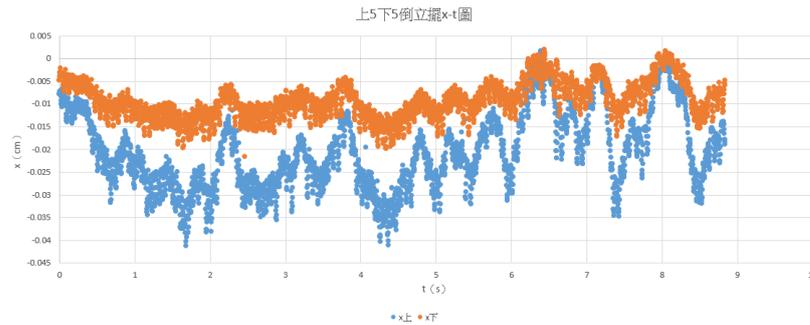


圖 7 5+5 雙擺 x-t 圖

(圖中上方波為上擺，下方波為下擺)

由圖 7 可看出，x 值的正負代表擺在某瞬間位於中線的左側或右側，由圖 7 可知擺偏向左側。

五、比較倒立擺在穩定與不穩定情況下的 FFT 頻譜圖差異

以下為 8cm，630rpm 的倒立擺暫時穩定期間與倒下期間之 FFT 頻譜圖與實際影像。

<p>圖 8 (a) 8cm，630rpm 暫時 穩定期間頻譜圖</p>	<p>圖 8 (b) 8cm，630rpm 自穩 定到出現倒下趨勢頻譜圖</p>	<p>圖 8 (c) 8cm，630rpm 出現 倒下趨勢至倒下頻譜圖</p>
<p>圖 8 (d) 8cm，630rpm 暫時 穩定期間 Tracker 影像</p>	<p>圖 8 (e) 8cm，630rpm 自穩 定到出現倒下趨勢 Tracker 影 像</p>	<p>圖 8 (f) 8cm，630rpm 出現 倒下趨勢至倒下 Tracker 影像</p>

(圖 8(d)(e)(f)照片由第三作者拍攝)

## 陸、討論

### 一、數據判讀

(一) 以 12 公分，720rpm 的倒立擺數據為例，擺會倒下時的  $x$ - $t$ 、 $y$ - $t$  圖

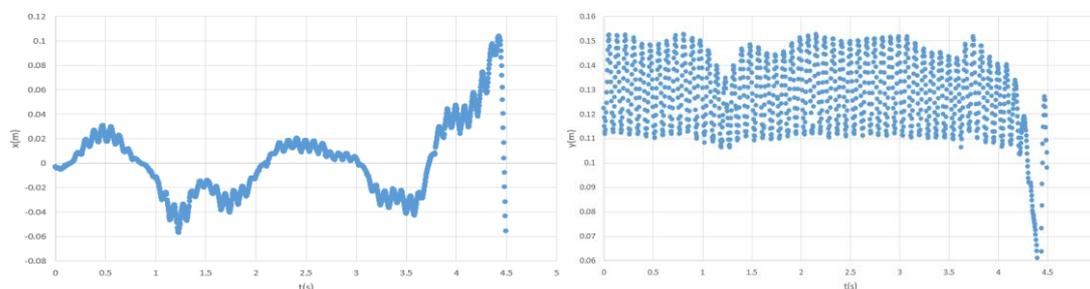


圖 9 (a) 12cm，720rpm  $x$ - $t$  圖

圖 9 (b) 12cm，720rpm  $y$ - $t$  圖

可以看到圖 9 (a) 中約 4s 的地方， $x$  值開始有上升之趨勢，對應到圖 9 (b) 中的  $y$  值則是開始下降，代表擺未能達成穩定而傾倒，約 4.4s 後擺倒下撞到器材反彈，與實驗無關。

(二) 以 10 公分，690rpm 的倒立擺數據為例，擺會穩定時的  $x$ - $t$ 、 $y$ - $t$  圖

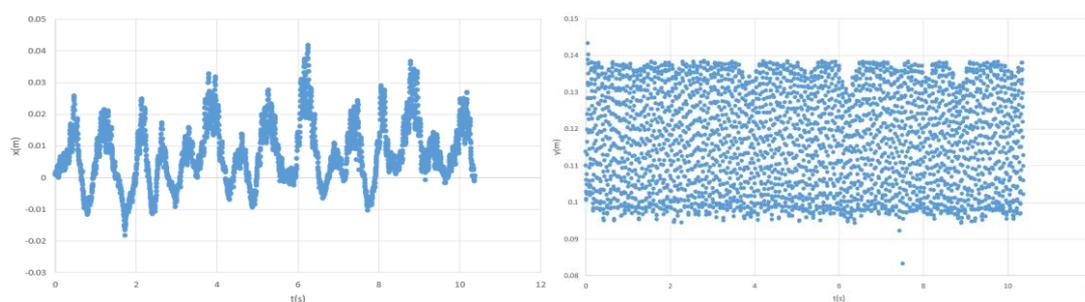


圖 10 (a) 10cm 690rpm  $x$ - $t$  圖

圖 10 (b) 10cm 690rpm  $y$ - $t$  圖

圖 10 (a) 及圖 10 (b) 中， $x$  與  $y$  一直維持穩定振盪沒有顯著變化，即代表擺未傾倒能在該頻率下達成穩定。

(三) 雙擺的 x-t、y-t 圖，以 5+5 上擺數據為例

雙擺的 x-t、圖 y-t 圖與單一倒立擺類似，可看出 y 方向有一穩定振動，x 方向有週期性擺蕩。

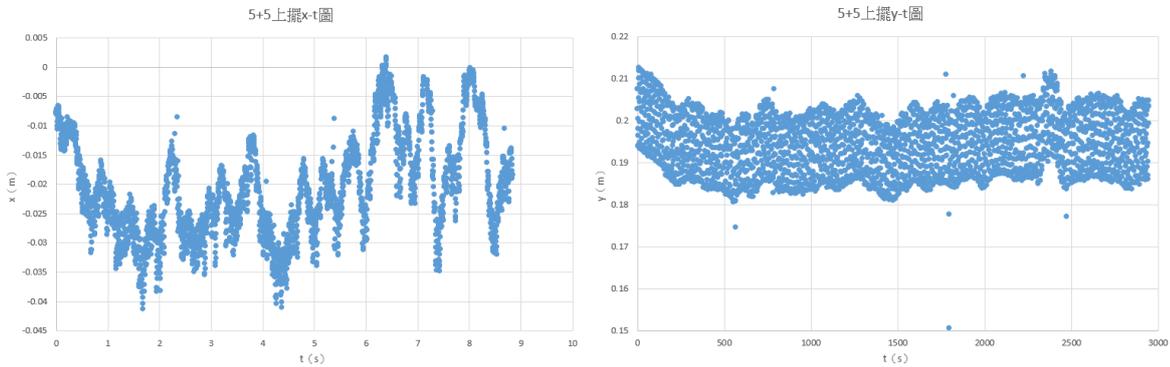


圖 11 (a) 左及圖 11 (b) 右 5+5 上擺 x-t、y-t 圖

(四) 以 FFT 頻譜圖分析倒立擺的運動，以 8 公分，630rpm 數據為例

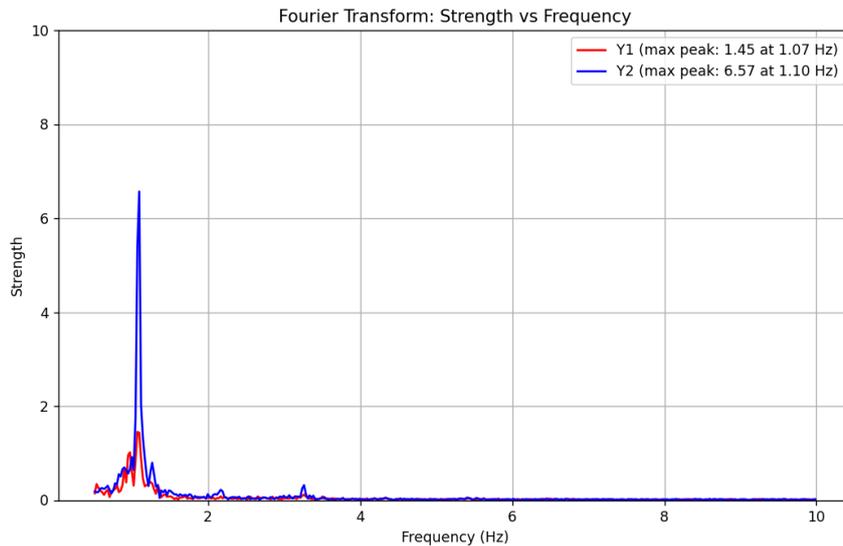


圖 12 8 公分 630rpm FFT 頻譜圖

圖中  $y_1$  及  $y_2$  分別為倒立擺之 x 軌跡及 y 軌跡進行 FFT 分析後得出的頻譜圖，圖中的峰值即為振動主頻率，右上角可讀出 x 及 y 主頻率的數值與強度，分析雙擺時，我們會分別對上擺和下擺作處理。

## 二、力學分析

### (一) 單一倒立擺力學分析

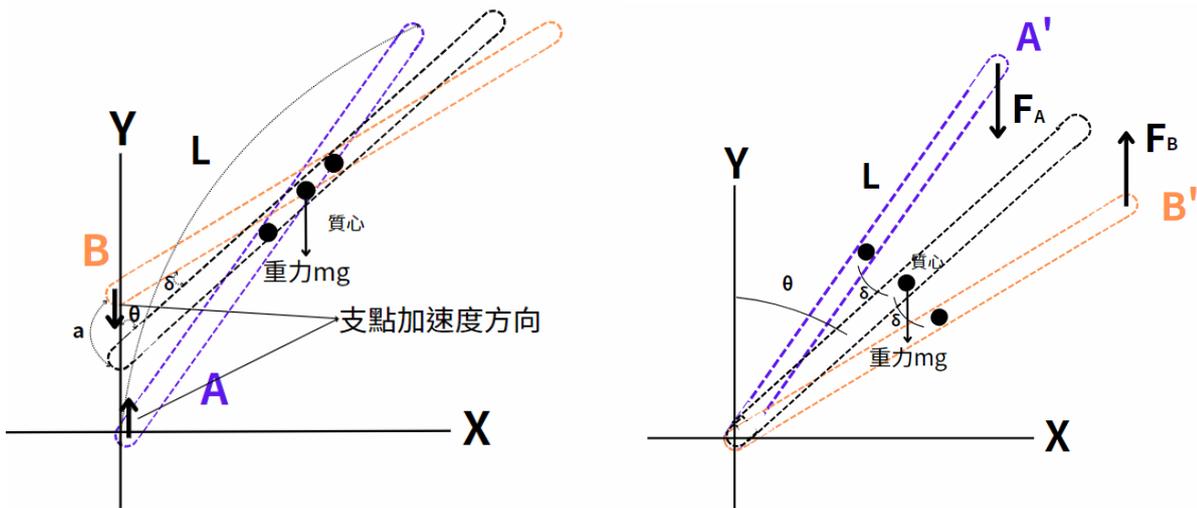


圖 13 (a) 慣性坐標系擺動過程力學圖      圖 13 (b) 非慣性坐標系擺動過程力學圖

考慮一長度為  $L$  的均勻壓克力擺，因受支點處的鉛直振動影響而能達成不穩定平衡，我們試著以振動點為參考點，探討非慣性座標下的倒立擺運動狀況。圖 13 (b) 所示為以圖 2 (a) 中的座標原點為參考點時觀察到的倒立擺運動狀況，圖 13 (b) 則是以圖 13 (a) 中倒立擺振動點為參考點時畫出的倒立擺運動狀態。

在非慣性座標中倒立擺除了受重力  $mg$  外，還會有一額外的假想慣性力  $F=-ma$ ，此力施加在擺的質心上，假想力與系統的加速度方向相反因此加一個負號。今參考點沿著鉛直線進行簡諧振動，角頻率： $\omega$ ，振幅： $a$ ，可以由以下方程式描述參考點運動方式：

$$y(t) = a \cos(\omega t)$$

所以假想慣性力  $F$ ，

$$F = -ma = -m[-a\omega^2 \cos(\omega t)] = m\omega^2 y(t)$$

由圖 13 (a) 可知，參考點在點 A 和 B 間上下振動，對應到圖 13 (b) 中後，點 A 與點 B 分別為圖上的點 A' 和點 B'，且產生的慣性力  $F_A$ 、 $F_B$  方向如圖所示。

(二) 關於假想慣性力造成之力矩的詳細分析

由圖 13 (a) 可知擺相對於鉛直線的瞬時偏角  $\varphi(t) = \theta(t) + \delta(t)$ 。 $\theta(t)$  為為低振盪頻率的角度變化， $\delta(t)$  為高振盪頻率造成的小角度變化。且這個小角度  $\delta(t)$  以受到下方振動影響之高頻率  $\omega$  振動，在一個振動週期內的平均值為零。

因為  $\delta(t) = (y(t)L) \sin \theta$  使擺在振盪時產生一個位移： $L\delta(t)$ ，造成假想慣性力有一力臂  $L\delta(t) \cos \theta = y(t) \sin \theta \cos \theta$ 。

因此由  $L\delta(t)$  造成的力矩：

$$\tau_1(t) = F(t)y(t) \sin \theta \cos \theta = m\omega^2 y^2(t) \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

將 (1) 式在參考點快速振動的一次週期  $T = 2\pi/\omega$  的區間內進行平均（假設低振盪頻率造成的角度變化在這個短週期內不變）

因為  $\langle y^2(t) \rangle = \frac{a^2}{2}$ ，可得慣性力平均值  $\langle \tau_1(t) \rangle$ ：

$$\langle \tau_1(t) \rangle = \frac{m\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta}{2} = \frac{m\omega^2 a^2 \sin(2\theta)}{4} \quad (2)$$

當擺角  $\theta$  小於  $\frac{\pi}{2}$  時，擺與向上鉛直方向成銳角，慣性力矩的平均值會使擺傾向向上轉動。反之，如果  $\theta$  大於  $\frac{\pi}{2}$ ，則平均力矩會使擺向下轉動。

現在討論另一部分由低震盪頻率產生的角度  $\theta(t)$  產生（非高速振動影響）的力臂，由圖 13 (b) 可知，力臂等於  $L \sin \theta$ ，在快速振動的一個週期  $T$  期間內可視為保持不變。因此，與這個力臂造成的假想慣性力力矩為

$$\tau_2(t) = F(t)L \sin \theta(t)m\omega^2 y(t)L \sin \theta(t) ,$$

因為  $\langle y(t) \rangle = 0$ ，故  $\langle \tau_2(t) \rangle$  平均值為零。

現在來考慮重力的影響， $\tau \langle g(t) \rangle = mgL \sin \theta(t)$ ，它傾向於使擺向下傾斜。

同時考慮重力與慣性力的力矩的影響，在離鉛直方向很小的偏差時（即  $\theta$  極小），

$\sin \theta \sim \theta$ 。因此：

$$\langle l(t) \rangle \approx \frac{m\omega^2 a^2 \theta}{2} , \quad \tau \langle g(t) \rangle \approx mgL\theta$$

比較兩力矩，我們發現在  $\theta$  極小時，平均慣性力矩  $\langle l(t) \rangle$  的大小應大於重力造成的力矩（偏離鉛直的小角度），故滿足下列關係式：

$$a^2 \omega^2 > 2gL \dots\dots (3)$$

而當我們要討論在不同振盪頻率下倒立擺能達到穩定時最大的擺盪角度時，

再將(3)式修正：

$$\frac{m\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta}{2} > mgL \sin \theta$$

$$a^2 \omega^2 \cos \theta > 2gL$$

擺盪角度關係式為：

$$\cos \theta > \frac{2gL}{\omega^2 a^2} \quad (4)$$

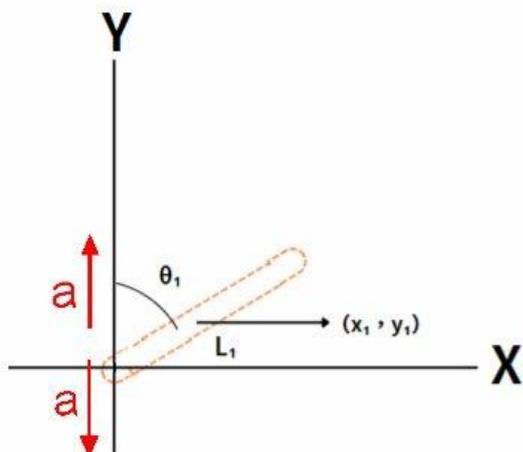
由上式可得出倒立擺所能達到之最大擺動角度：

$$\cos \theta_{MAX} = \frac{2gL}{\omega^2 a^2}$$

## (一) 拉格朗日力學分析

由於原力學分析方法難以應用於雙擺，我們接著採用歐拉-拉格朗日方程式（Euler-Lagrange equation）對雙擺之運動模式進行分析，同時也追加了單擺部分。

### 1. 單擺:



$L$  : 擺長  
 $a$  : 振動振幅  
 $\omega$  : 振動角頻率  
 $\theta_1$  : 為下擺與鉛直線偏移角度  
 $(x_1, y_1)$  : 擺質心座標

圖 14 單擺在慣性坐標系擺動過程力學圖

本擺質量為  $m_1$  質量分布均勻，質心位於擺中心點，

首先定義擺的支點為加速度坐標系的原點，下擺之頂點位置函數為  $X_1$  及  $Y_1$ ，

其中，由於支點受簡諧運動影響，可列

$$X_1 = \frac{L_1 \sin \theta_1}{2}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 \cos \theta_1}{2} + a \cos(\omega t)$$

$$L = \frac{m_1}{2} \left( \frac{L_1^2}{4} \cos^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{L_1^2}{4} \sin^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 + a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + L_1 a \omega \sin \theta_1 \sin(\omega t) (\dot{\theta}_1) \right) + \frac{m_1 L_1^2}{24} (\dot{\theta}_1)^2 - m_1 g \left( \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 + a \cos(\omega t) \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{L_1^2 (m_1) \dot{\theta}_1}{4} + \frac{L_1 a \omega^2 m_1 \sin \theta_1 \sin(\omega t)}{2} + \frac{m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1}{12}$$

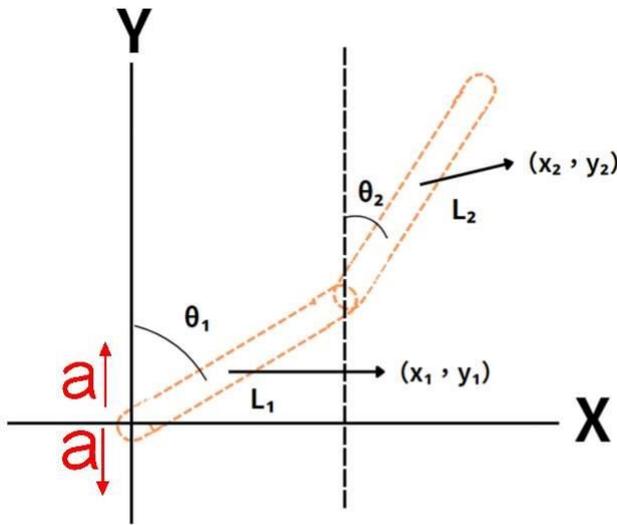
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{-L_1^2 a \omega m_1 \sin(\omega t) \sin \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (\dot{\theta}_1)}{4} + \left(\frac{m_1}{2}\right) g L_1 \sin \theta_1$$

可得倒立擺的運動方程式為：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{L_1^2 (m_1) \ddot{\theta}_1}{4} + \frac{L_1 a \omega^3 \sin \theta_1 \cos \omega t (m_1)}{2} + \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{L_1^2 a \omega \sin \omega t (m_1) \cos \theta_1 (\dot{\theta}_1)}{4} - \left(\frac{m_1}{2}\right) g L_1 \sin \theta_1$$

## 2. 雙擺



- $L_1$  : 下擺擺長
- $L_2$  : 上擺擺長
- $a$  : 振動振幅
- $\omega$  : 振動角頻率
- $\theta_1$  : 為下擺與鉛直線偏移角度
- $\theta_2$  : 為上擺與鉛直線偏移角度
- $(x_1, y_1)$  : 下擺質心座標質心座標
- $(x_2, y_2)$  : 上擺質心座標質心座標

圖 15 雙擺在慣性坐標系擺動過程力學圖

上、下擺質量分別為  $m_1$  及  $m_2$ ，質量分布均勻，質心分別位於擺中心點，我們首先定義下擺的支點為加速度坐標系的原點，下擺之頂點位置函數為  $X_1$  及  $Y_1$ ，其中，由於支點受簡諧運動影響，可列

$$X_1 = \frac{L_1 \sin \theta_1}{2}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 \cos \theta_1}{2} + a \cos \omega t$$

而上方擺之頂點位置函數為  $X_2$  及  $Y_2$ ，

其中

$$X_2 = L_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2 \sin \theta_2}{2}$$

$$Y_2 = L_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2 \cos \theta_2}{2} + a \cos \omega t$$

計算系統之總動能  $T$  為上下兩個擺分別的線動能與旋轉動能之和：

$$T = \frac{m_1}{2} \left[ (\dot{X}_1)^2 + (\dot{Y}_1)^2 \right] + \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (\dot{X}_2)^2 + (\dot{Y}_2)^2 \right] + \frac{I_2 \dot{\theta}_2^2}{2}$$

$$I_1 = \frac{m_1 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2}{3}$$

$$I_2 = \frac{m_2 \left(\frac{L_2}{2}\right)^2}{3}$$

$I_1$ 、 $I_2$  分別為上擺與下擺的轉動慣量

計算系統之總位能  $U$  為上下兩個擺分別的位能之和：

$$U = m_1 g Y_1 + m_2 g Y_2$$

由  $L = T - U$

$$\begin{aligned} L = & \frac{m_1}{2} \left( \frac{L_1^2}{4} \cos^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{L_1^2}{4} \sin^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 + a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + L_1 a \omega \sin \theta_1 (\dot{\theta}_1) \sin(\omega t) \right) \\ & + \frac{m_2}{2} \left[ L_1^2 \cos^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{L_2^2}{4} \cos^2 \theta_2 (\dot{\theta}_2)^2 + L_1 L_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2) + L_1^2 \sin^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1)^2 \right. \\ & \left. + \frac{L_2^2}{4} \sin^2 \theta_2 (\dot{\theta}_2)^2 + a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + L_1 L_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1) (\dot{\theta}_2) \right. \\ & \left. + L_1 a \omega \sin \theta_1 \sin(\omega t) (\dot{\theta}_1) + L_2 a \omega \sin \theta_2 \sin(\omega t) (\dot{\theta}_2) \right] + \frac{m_1 L_1^2}{24} (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2 L_2^2}{24} (\dot{\theta}_2)^2 \\ & - m_1 g \left[ \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 + a \cos(\omega t) \right] - m_2 g \left( L_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 + a \cos(\omega t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & \frac{L_1^2 (m_1 + 4m_2) \dot{\theta}_1}{4} + \frac{L_1 a \omega^2 \sin \theta_1 \sin(\omega t) (m_1 + m_2)}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{2} \\ & + \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \sin \theta_1}{2} + \frac{m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & \frac{L_1 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1}{2} - \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{2} \\ & + \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1}{2} + \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2}{4} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{2} + \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \sin \theta_2}{2} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2}{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1}{2} + \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{2} + \frac{m_2 g L_2 \sin \theta_2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

因此上擺的運動方程式為：

$$\begin{aligned} & \frac{L_1^2 (m_1 + 4m_2) \ddot{\theta}_1}{4} + \frac{L_1 a \omega^3 \sin \theta_1 \cos(\omega t) (m_1 + m_2)}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2} \\ & + \frac{m_2 a \omega^2 \cos(\omega t) \sin \theta_1}{2} + \frac{m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1}{12} - \frac{L_1 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1}{2} \\ & + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1}{2} - \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{2} - \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1}{2} \\ & - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{且 } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

下擺的運動方程式為◆：

$$\begin{aligned} & \frac{m_2 L_2 \ddot{\theta}_2}{4} + \frac{m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2} + \frac{m_2 a \omega^2 \cos \omega t \sin \theta_2}{2} + \frac{m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2}{12} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{2} \\ & - \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1}{2} - \frac{m_2 a \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{2} - \frac{m_2 g L_2 \sin \theta_2}{2} = 0 \end{aligned}$$

#### 四、以上述理論驗證實驗結果

(一) 實驗一中，我們發現倒立擺 x 分量位置存在小角度與大角度週期性變化現象，倒立擺之擺動軌跡在鉛直方向穩定振盪下會呈現週期性函數。以 10 公分，690rpm 為例：

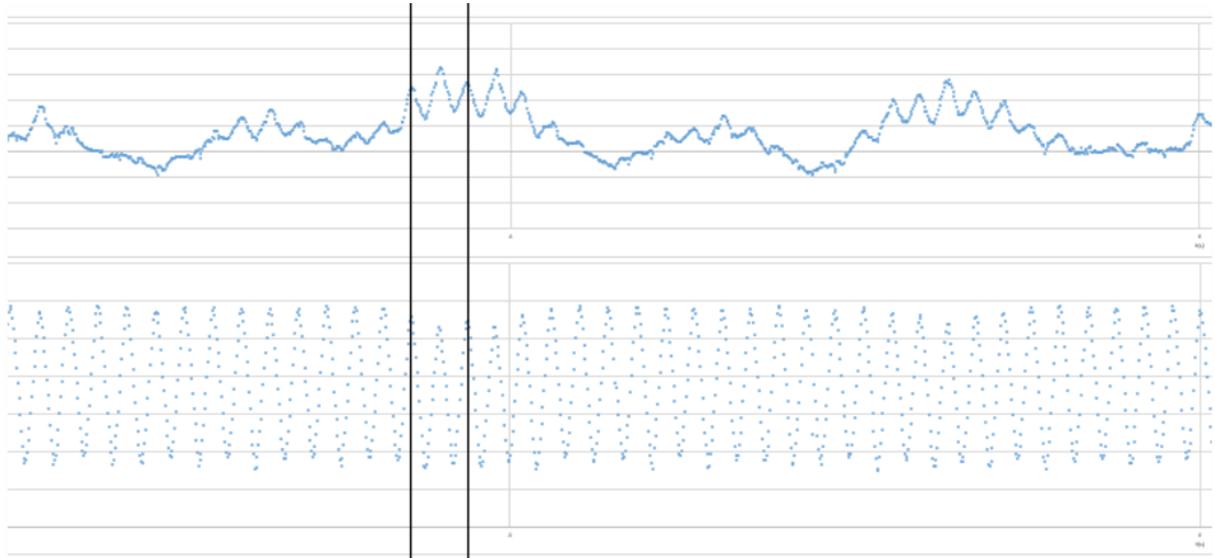


圖 16 10 公分擺長在 690rpm 下的 x-t (上) 及 y-t (下) 對照圖

由 x-t 圖可看到倒立擺除了頻率較低的大週期振盪外還有頻率較高的小週期振盪，同時觀察 x-t 和 y-t 圖發現在同個時刻的波峰波谷會相互對應，我們將影響倒立擺振盪的角度分為兩角度  $\theta$  及  $\delta$ ， $\theta(t)$  為擺盪角度， $\delta(t)$  則為鉛直振動造成的小角度變化。

(二) 實驗二，由圖 5 可看出擺長增加要達到穩定所需的頻率也會跟著上升，由理論分析式我們將實驗結果與預測值對比來做圖。

表 4 由不同擺長達穩定所需之鉛直振動頻率實際值

擺長 (cm)	4	5	6	7	8	9	10	11
實驗結果 f (Hz)	7.55	8.74	9.68	10.8	11.87	12.4	12.86	13.14

由於倒立擺在左右擺動時，其擺動角度會有一極大值，我們想驗證式 (4)  $\cos \theta > \frac{2gL}{\omega^2 a^2}$  與實驗結果是否吻合，將式 (4) 改成：

$$f > \sqrt{\frac{2g}{(2\pi)^2 a^2 \cos \theta}} \sqrt{L} \quad (5)$$

在實驗中測出倒立擺達穩定後的最大擺動角度後，代入式(5)算出在特定長度下達成穩定所需的頻率預測值，再與實際測量值互相比較。

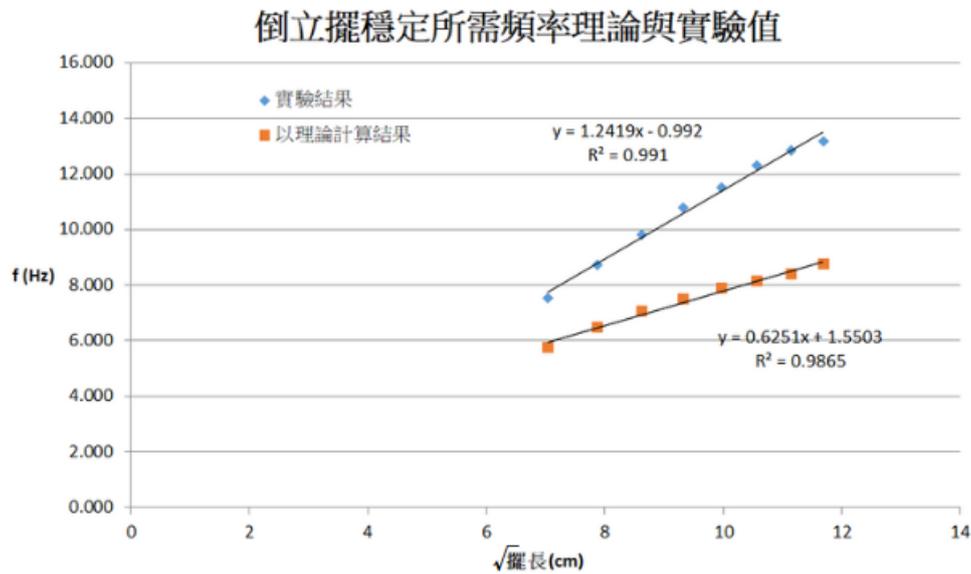


圖 17 倒立擺穩定所需頻率預測值與實際值

由上圖可看出， $f$  與  $\sqrt{L}$  不論是實際測量值或預測值皆呈現線性增加的趨勢，但實際實驗時所需的穩定頻率會高於理論預測值。

### (三) 實驗三

由圖 6 可知在支點振動頻率增加時，倒立擺達穩定時的平均擺動範圍會減少，依據理論分析式 (4)  $\cos \theta > \frac{2gL}{\omega^2 a^2}$ ，可驗證在擺長固定的情況下，振動頻率越高擺動角度會越小。

(四) 實驗四探討雙擺在上、下長度相同之組合下的運動情況。

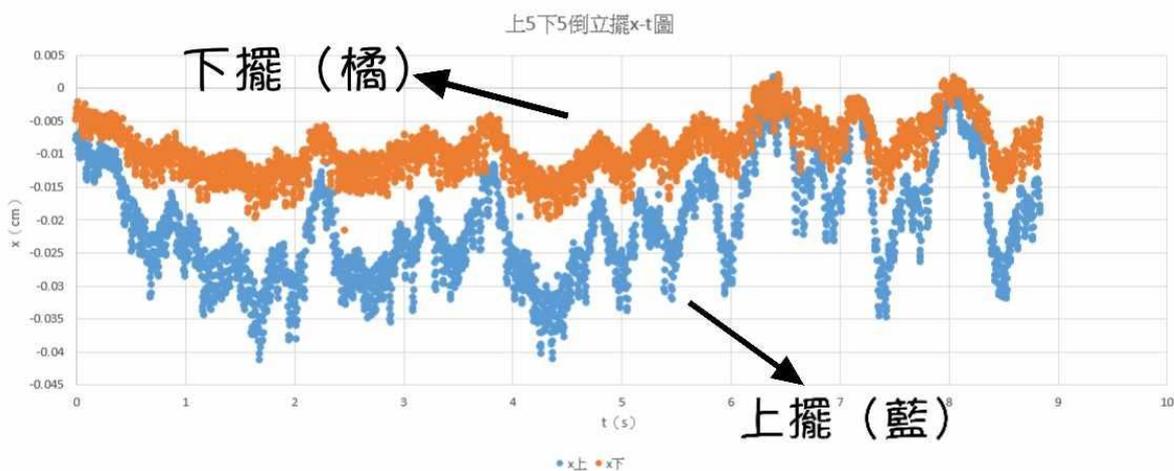


圖 18 5+5 倒立擺 x-t 圖 (藍色為上擺，橘色為下擺)

在上、下長度相同的組合下，下擺與上擺的 x-t 運動模式相近。再使用 FFT 頻譜分析。

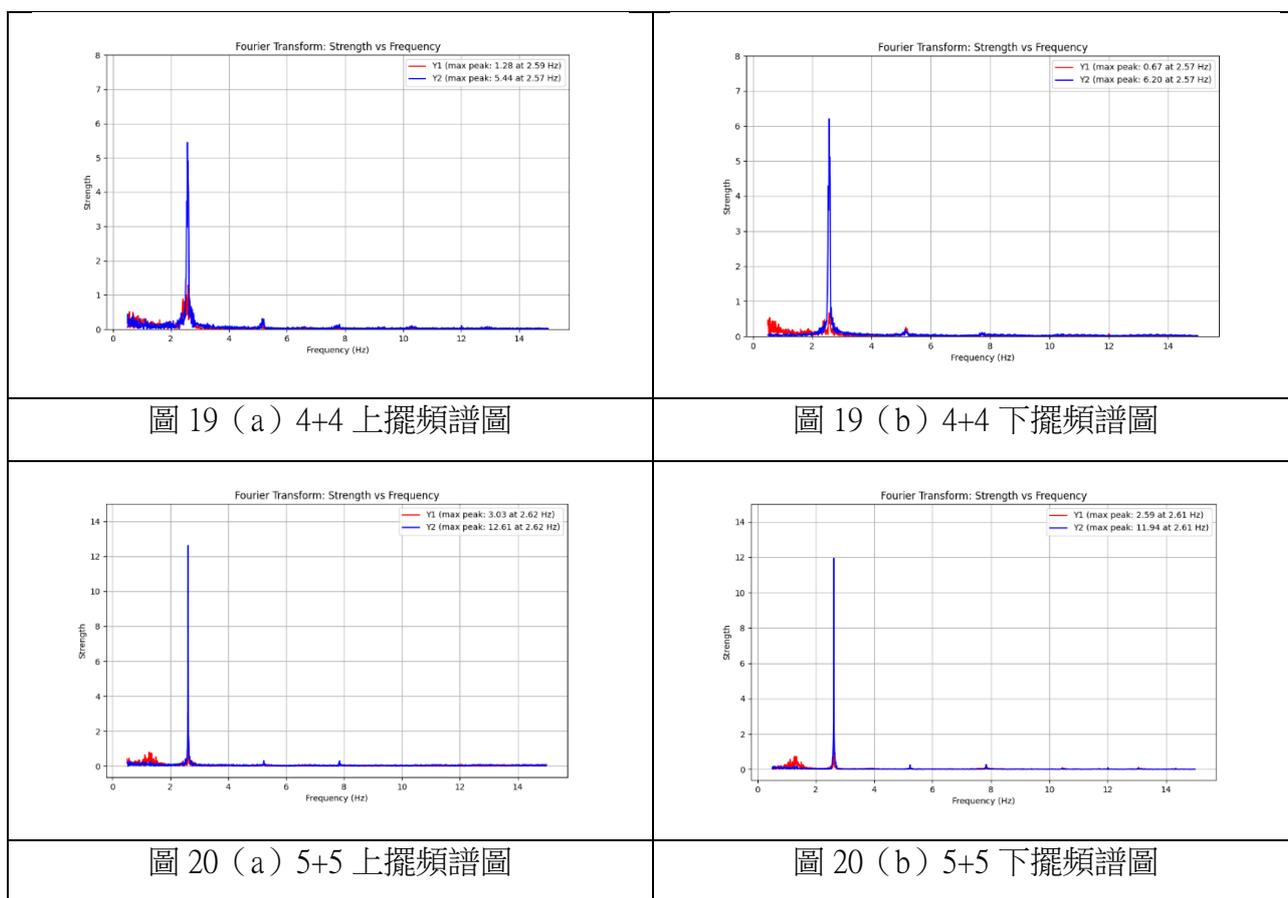


圖 19 (a) 4+4 上擺頻譜圖

圖 19 (b) 4+4 下擺頻譜圖

圖 20 (a) 5+5 上擺頻譜圖

圖 20 (b) 5+5 下擺頻譜圖

4+4 與 5+5 在特定頻率下皆可穩定，從頻譜圖可看出在上、下擺長度相同的情況下，x、y 頻譜圖主頻率頻率接近，且強度特別強。

(五) 實驗五探討雙擺在上、下長度不相同之組合下的的運動情況

1. 上下擺長度不相同之組合下是否能穩定

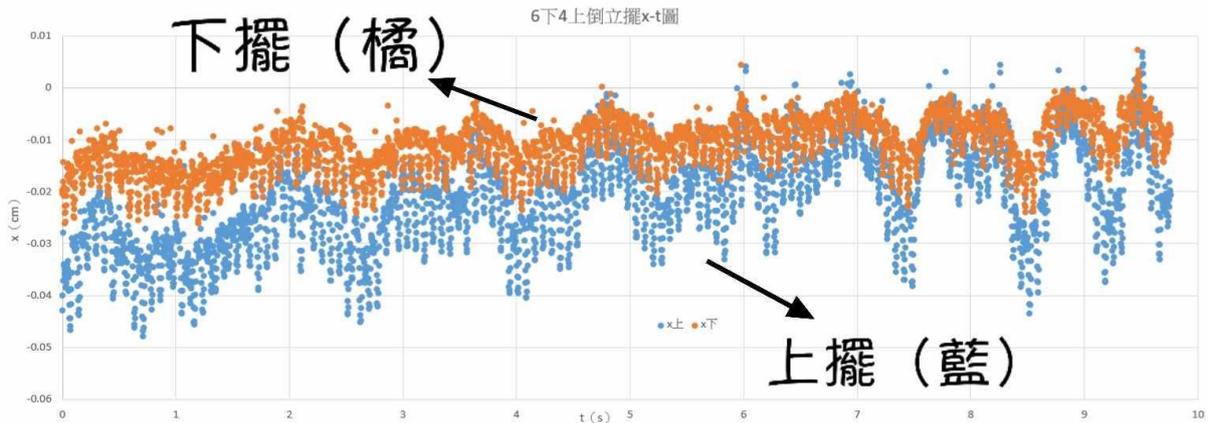


圖 21 6+4 倒立擺 x-t 圖 (藍色為上擺，橘色為下擺)

(1) 下擺長上擺短之情況，以 5+4 的實驗來舉例

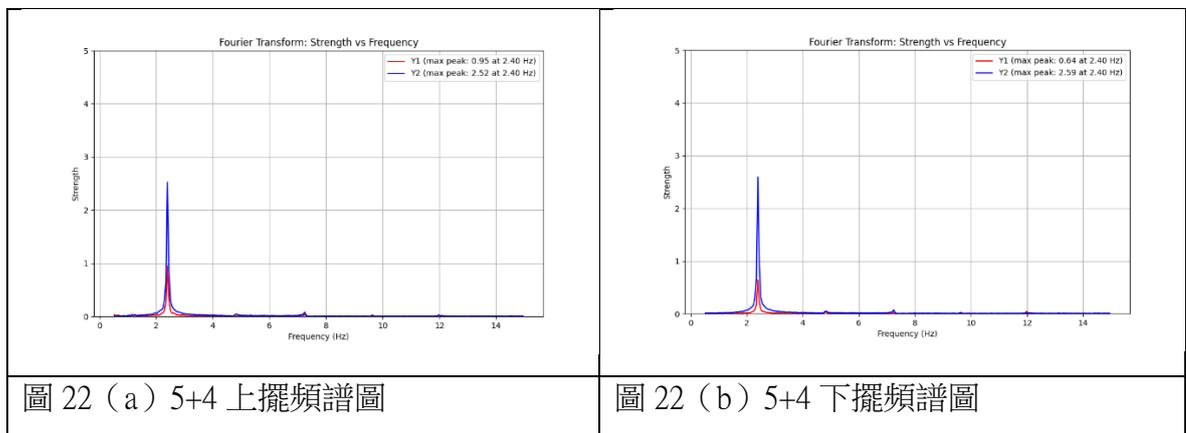


圖 22 (a) 5+4 上擺頻譜圖

圖 22 (b) 5+4 下擺頻譜圖

5+4 是可以維持穩定的，觀察頻譜圖，不論是上擺還是下擺，我們發現 x、y 主頻率相同，且上下兩擺主頻率強度亦相近。

2. 下擺短上擺長之情況

在下擺長度較短的情況下，並非所有的長度比皆能達成穩定，表 5 是改變下擺長度，固定上擺長度 6cm 所做出來的情形。

表 5 雙擺能達成穩定之情況

下+上 (cm)	4+6	4.2+6	4.4+6	4.6+6	4.8+6
是否能穩定	否	否	否	有時穩定 有時傾倒	是

將可達成穩定狀況的長度以 FFT 分析比較其差異。

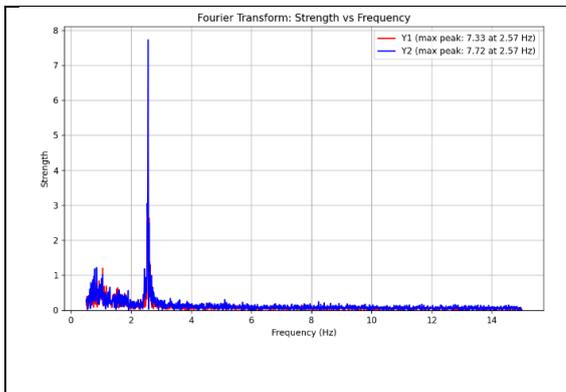


圖 23 (a) 4.6+6 上擺頻譜圖

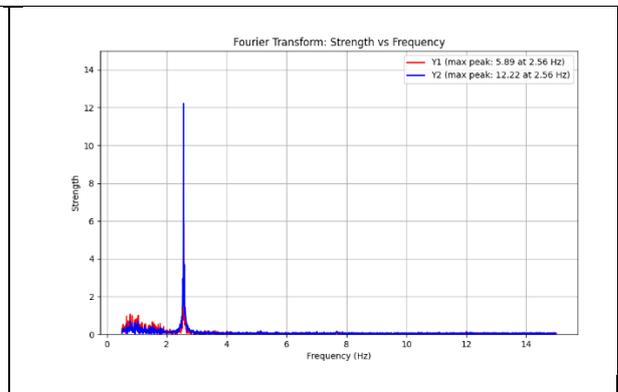


圖 23 (b) 4.6+6 下擺頻譜圖

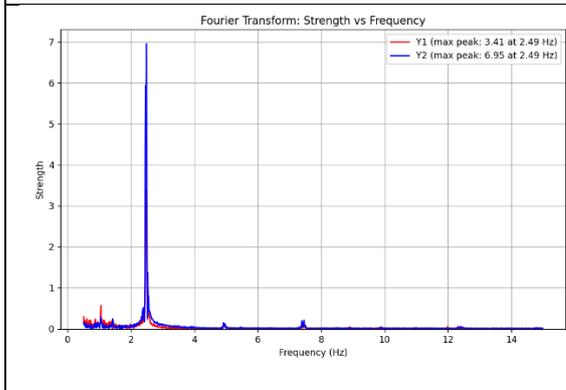


圖 24 (a) 4.8+6 上擺頻譜圖

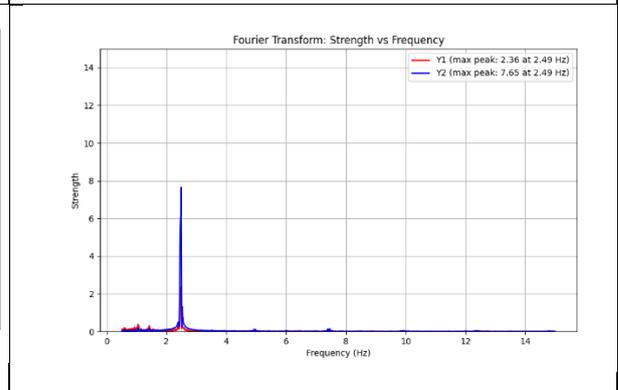
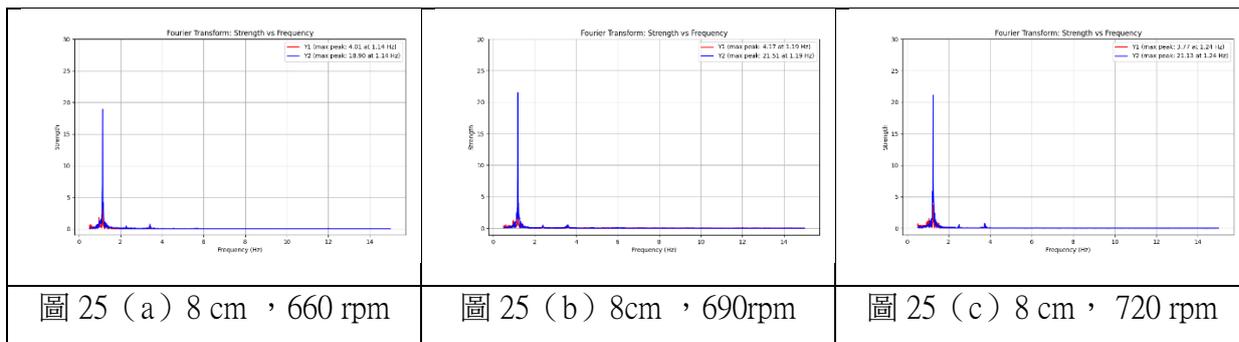


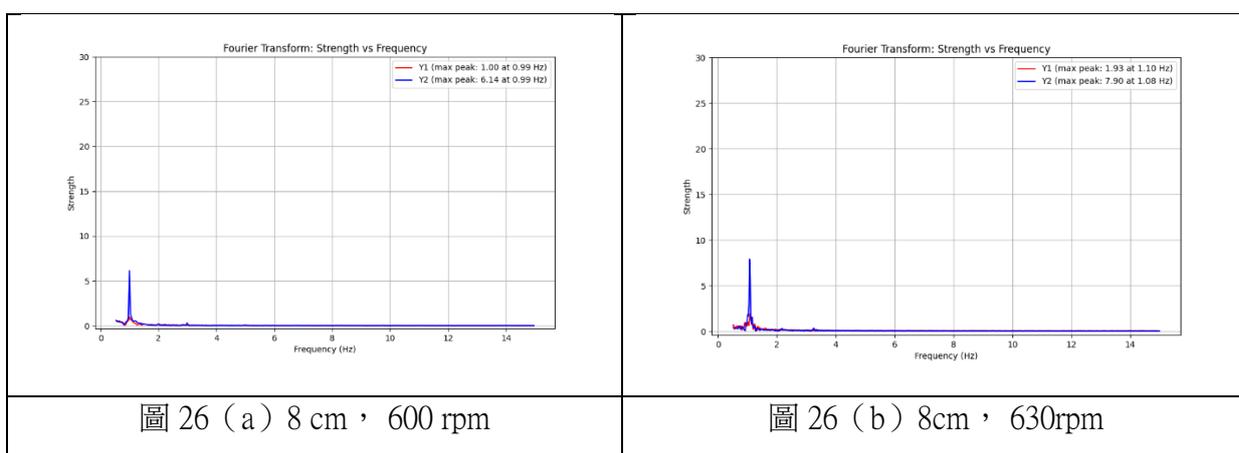
圖 24 (b) 4.8+6 下擺頻譜圖

4.6+6 雙擺組合中，並非每次實驗都能達成穩定，觀察頻譜圖 23 (a)、圖 23 (b)，除主頻率外的其他小頻率強度都較 4.8+6 頻譜圖 24 (a)、圖 24 (b) 雙擺組合大，整體雜亂的小頻率強度較高，除此之外 4.8+6 也同樣呈現了我們會在後續討論到可穩定情況下的頻譜圖特性，結合雙擺直到 4.8+6 後才可完全穩定，佐證下擺與上擺長度在下擺長度越短時越不穩定。

### 3. 實驗六比較倒立擺在穩定與不穩定情況下的 FFT 頻譜圖差異



在圖 25 (a)、25 (b)、25 (c) 中，擺可達成穩定，FFT 頻譜圖中 x 及 y 的主要振動頻率相同，且能看出隨著鉛直振動頻率增加，主頻率有增加趨勢，且主頻率之強度也會隨著穩定度越高而增強，而圖 25 (b)、圖 25 (b) 中主頻率強度差異不大是因為倒立擺擺動角度已趨近於零。



在圖 26 (a)、26 (b) 中擺未達穩定，FFT 頻譜圖中 x 及 y 的主要振動頻率依然相同，但相較於能達穩定的圖 25 (a)、25 (b)、25 (c) 之頻譜圖，主要振動頻率強度低許多。

4.在 5+5 雙擺實驗中是可以達成穩定的，但上擺及下擺會有不一樣的擺動情況，於是我們透過頻譜圖統計其在各個擺動情況下的時間長分布，探討不同擺動情況對 FFT 圖有何影響。

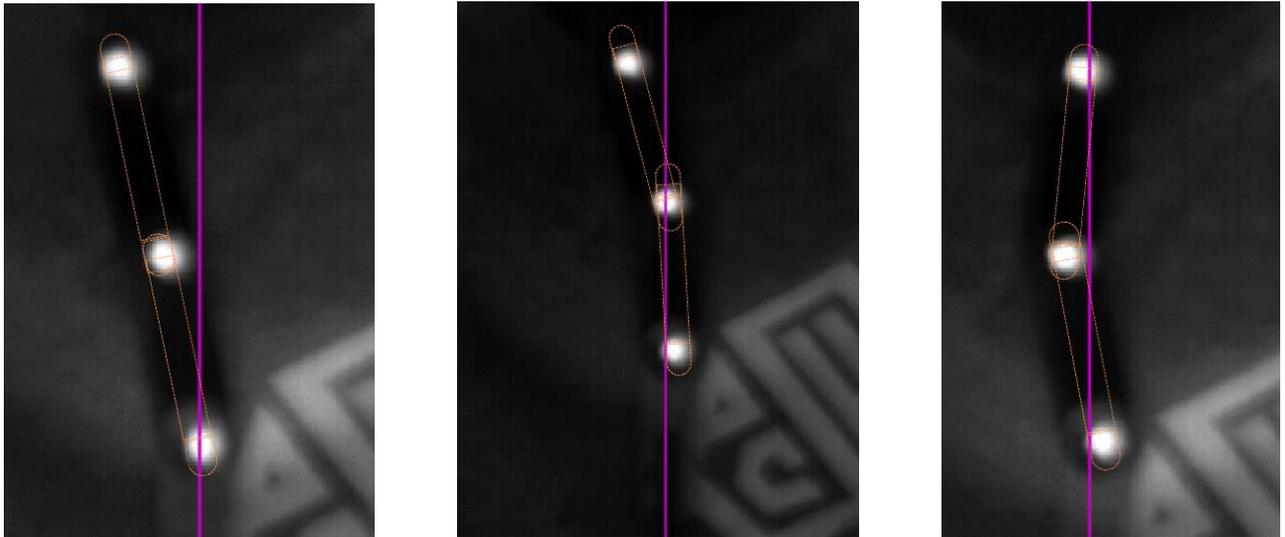
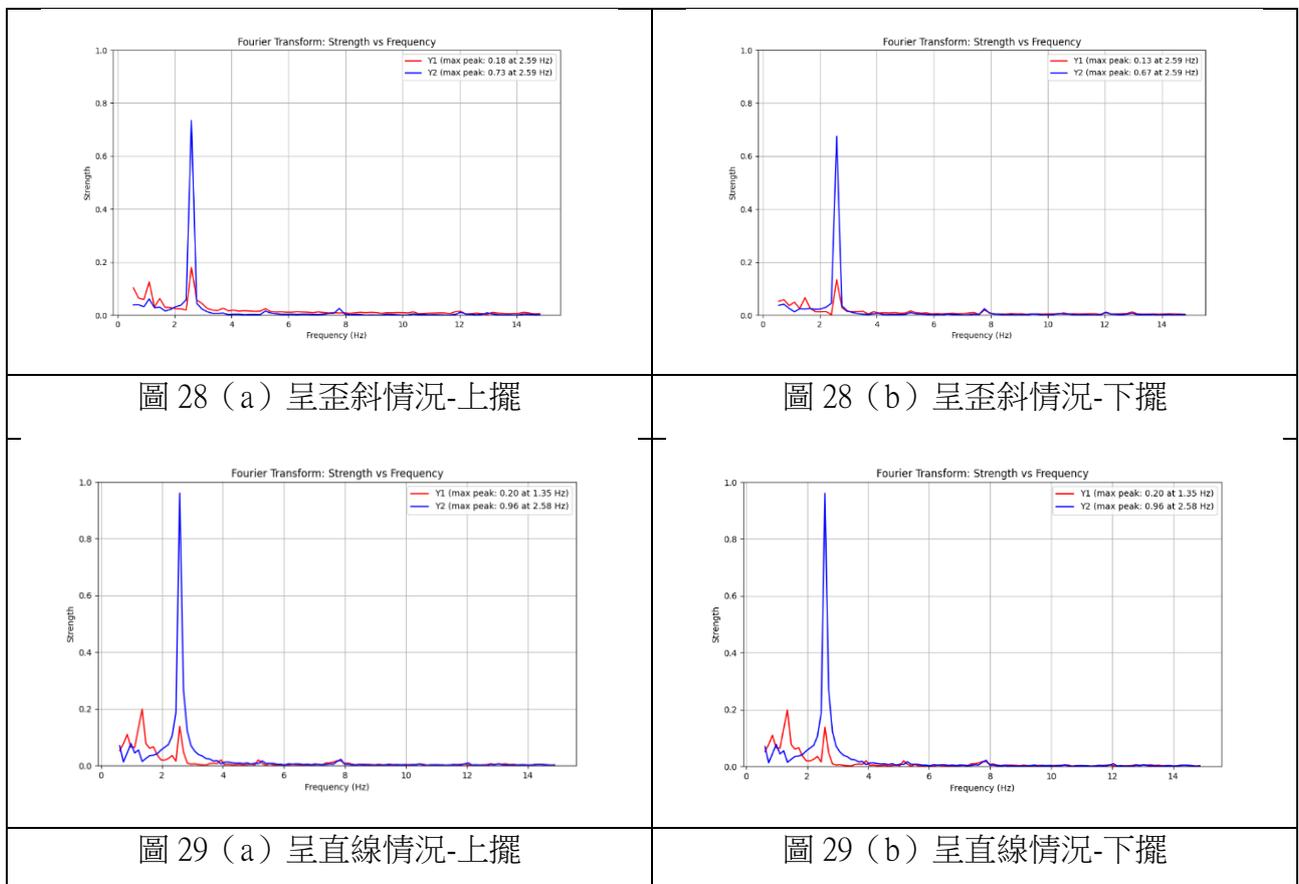


圖 27 (a) 呈直線情況圖 圖 27 (b) 向左歪斜之擺動情況 圖 27 (c) 向右歪斜之擺動情況

(圖 27(a)(b)(c) 照片由第三作者拍攝)



相較於圖 29 (a) 及圖 29 (b) 中上、下擺的頻譜圖分布非常相似，此時上下兩擺較趨近為一值線，圖 28 (a) 及圖 28 (b) 在主頻率前頻譜圖有強度與分布的差異，推測是因下擺歪斜導致，且頻譜圖中主頻率強度也會下降，此時擺之狀態是較不穩定且歪斜之振動。

## 柒、結論

一、倒立擺須外加一個鉛直振動頻率，才能使擺抵抗重力力矩在鉛直方向穩定振盪，單一倒立擺運動會有下列現象：

(一)倒立擺  $x$  分量位置在穩定的鉛直振盪下，擺動軌跡會呈現週期性函數，擺的  $x-t$  與  $y-t$  圖 波峰與波谷位置會相對應，且  $x-t$  關係圖呈現出大週期與小週期疊加的震盪情形。

(二)擺長度增加時，達成穩定所需的振動頻率會上升。

(三)在相同擺長下，鉛直振動頻率增加，倒立擺擺動範圍將縮小。

(四)倒立擺長度增加會使在相同振動頻率下倒立擺的平均擺動範圍增加。

二、雙擺

(一)雙擺上、下擺長的長度會影響擺是否容易穩定，當上、長度相同或下擺長度大於上擺長度時，雙擺較容易達成平衡，但若下擺長度小於上擺，則需要在特定長度比下才能穩定。

(二)雙擺總擺長長度增加時，達成穩定所需的振動頻率也會上升。

三、以 FFT 圖分析倒立擺的運動時，可發現當倒立擺運動有一下模式：

(一)穩定振盪時的頻譜圖呈現為：

$x$ 、 $y$  方向的主頻率接近，且強度高，頻譜圖的頻率分布近似但和擺動角度、擺動情形沒有顯著關係。

(二)當倒立擺未能達成穩定時，頻譜圖會出現主要振動頻率強度大幅降低且  $x$ 、 $y$  方向的主頻率差異變大的狀況。

## 捌、參考資料及其他

一、Jearl Walker (2010)。《物理馬戲團 The Flying Circus of Physics with Answers》。葉偉文譯。臺北。天下文化。

二、“Upside down pendulum” YouTube, upLoaded by Steve Mould, March 25, 2014, [https :  
//www.youtube.com/watch?v=gnn21smGVrQ&t=69s](https://www.youtube.com/watch?v=gnn21smGVrQ&t=69s)

三、“Self-correcting Inverted Pendulum Defies Gravity” , YouTube, upLoaded by The Action Lab, January 4, 2021, [https :  
//www.youtube.com/watch?v=5uZdwxbLdJ8](https://www.youtube.com/watch?v=5uZdwxbLdJ8)

四、Eugene, I., Butikov. Kapitza Pendulum : A Physically Transparent Simple Explanation  
” 檢自 [http :  
//butikov.facuLty.ifmo.ru/InvPendulumPTSE.pdf](http://butikov.facuLty.ifmo.ru/InvPendulumPTSE.pdf)

## 【評語】 051815

本作品探討倒立擺在選定鉛直振動頻率下的擺動軌跡，有探究空間。以自製簡易彈射裝置，紀錄物體彈跳軌跡，能達實驗功效，以擺長、振動頻率為實驗參數，拍攝紀錄運動軌跡，以 FFT 頻譜圖分析，能得出鉛直振動頻率升高，倒立擺擺動範圍縮小，及倒立擺長度增長時，穩定擺動需較高的角頻率。內容已完整，分析詳實。

## 作品簡報

探討特殊震盪頻率下的  
倒立擺自主校正運動

# 摘要

本研究探討倒立擺在**不同鉛直振動頻率**下的運動軌跡、擺動時長、擺動範圍及**自主校正**之情形。我們發現單一倒立擺是否能夠達成穩定自主校正主要受鉛直振動頻率影響，且隨著鉛直振動**頻率增加**，倒立擺**擺動範圍會縮小**。當倒立擺的**長度增加時**，擺達穩定所需之**頻率上升**，相同頻率下的**擺動範圍增加**。接著將不同長度的擺頭尾相連組合，觀察雙擺之運動情形，我們發現下擺與上擺的長度會影響擺是否能穩定，在上下等長與上短下長時，雙擺在適當頻率下即可達成平衡，但在上長下短的狀況下，上擺及下擺長度**比值過大時**將**無法穩定**。而當擺可以穩定時，FFT頻譜圖會有一高強度的主頻率，且其他雜亂的小頻率強度較低。

# 研究動機

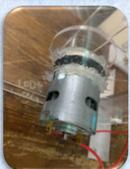
我們於《物理馬戲團》此書中看到一裝置，高速鉛直振動下的倒立擺不會因重力落下，而是維持在中線附近擺動，我們想探討鉛直振動頻率及倒立擺各屬性對倒立擺運動情形之影響，並找出如何能使倒立擺擺動穩定，使之維持在一個能克服重力而保持豎立的狀態。再增加擺的數量形成雙擺，觀察各變因對雙擺的影響。

# 研究目的

- (一) 實驗一：探討相同擺長單一倒立擺在**不同振動頻率**下的運動情形
- (二) 實驗二：探討不同擺長單一倒立擺達**穩定所需之最低頻率**
- (三) 實驗三：探討單一擺長倒立擺在不同振動頻率下達穩定後的**平均擺動範圍**
- (四) 實驗四：比較單一倒立擺在穩定與不穩定情況下的 FFT **頻譜圖差異**
- (五) 實驗五：探討雙擺在**上下長度相同**之組合下的運動情況
- (六) 實驗六：探討雙擺在**上下長度不相同**之組合下的運動情況

# 研究設備及器材

(照片皆由第三作者拍攝)

直流馬達	水平儀	電源供應器	高速攝影機	閃頻儀	鋁質支架	手提式線鋸機	Excel軟體	Thonny軟體	Tracker軟體
									

# 研究過程及方法

## 一、名詞解釋

- (一) 自主校正運動：定義倒立擺在特定鉛直振動頻率下不會因重力影響傾倒，而能自主維持在**中線附近擺動**的現象。
- (二) 平均擺動範圍：待倒立擺達穩定後，會於中線附近左右擺動，其擺動角度會有一個區間，我們測量其擺動範圍後計算平均值。
- (三) 最大擺角：擺在擺動過程中距中線最遠時**與中線的夾角**。
- (四) 雙擺：若下擺長度為 5 cm，上擺長度為 6 cm，則記為 5+6。將倒立擺兩兩以輕量螺絲組合後同樣倒放，後續實驗中我們會將上方的擺稱為上擺，下方與基座連接的擺稱為下擺。

## 二、實驗方法

- (一) 架設單一倒立擺：將壓克力擺倒放於裝置上，如圖1。
- (二) 架設雙擺：將多種不同長度的壓克力單擺頂端以螺絲連結組成雙擺，由於原單一倒立擺實驗裝置可負荷之振動頻率不足以使雙擺穩定，我們在雙擺實驗採用以線鋸機改裝的基座連接雙擺，如圖2。
- (三) 使用閃頻儀輔助調整至待測頻率後，以高速攝影機錄影並利用Tracker軟體追蹤擺的運動狀況，分析擺的確切頻率、運動軌跡、擺動時長及擺動範圍，如圖3。
- (四) 以Excel分析數據，求出擺振盪時與鉛直線的夾角，繪出擺動軌跡對時間關係圖。
- (五) 利用Thonny軟體（可執行Python程式，如圖4）進行快速傅立葉變換 (FFT) 後可得到頻譜圖，藉由頻譜圖觀察主頻率、主頻率強度及頻率分布。
- (六) 改變倒立擺長度與振動頻率並重複以上實驗。

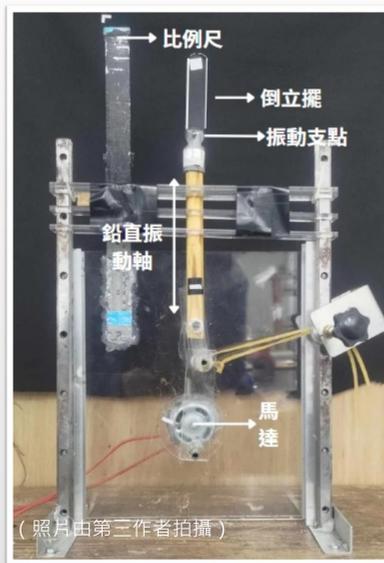


圖1 單一倒立擺實驗裝置圖



圖2 雙擺裝置圖 (螺絲以下為振動基座)

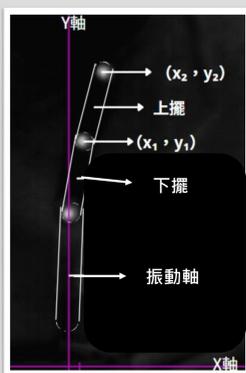


圖3 Tracker追蹤方法示意圖 (照片由第三作者拍攝)

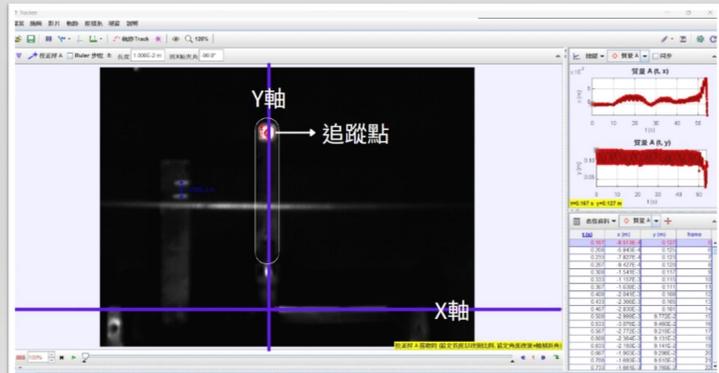


圖4 Thonny軟體示意圖 (照片由第三作者拍攝)

# 研究結果與討論

## 一、力學分析

### (一) 單一倒立擺力學分析

均勻倒立擺擺長 $L$ ，質量 $m$ ，使做簡諧運動，以支點處為新的參考點，倒立擺會受到假想慣性力，由圖5(a)可知參考點在點A和B間上下振動，對應到圖5(b)中，點A與點B分別為 $A'$ 和點 $B'$ ，產生的假想慣性力 $F_A$ 、 $F_B$ 方向如圖5(b)所示。若簡諧運動的角頻率為 $\omega$ ，振幅為 $a$ ，假想慣性力的大小為：

$$F = -ma = -m[-a\omega^2 \cos(\omega t)] = m\omega^2 y(t) \quad \dots\dots(1)$$

擺相對於鉛直線的瞬時偏角 $\varphi(t) = \delta(t) + \theta(t)$ ，其中 $\delta(t)$ 為振盪頻率造成的小角度變化， $\theta(t)$ 為振盪頻率造成的大角度變化。

由 $\delta(t)$ 產生之假想慣性力造成的力矩為： $\tau_1(t) = F(t)y(t)\sin\theta\cos\theta = m\omega^2 y^2(t)\sin\theta\cos\theta$

在簡諧運動一週期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的時間內平均後可得平均慣性力矩： $\langle\tau_1(t)\rangle = \frac{m\omega^2 a^2 \sin\theta\cos\theta}{2} = \frac{m\omega^2 a^2 \sin(2\theta)}{4}$

而由 $\theta(t)$ 產生的角度造成的力臂形成的力矩為 $\tau_2(t) = F(t)L\sin\theta(t)m\omega^2 y(t)L\sin\theta(t)$ 其在簡諧運動一個週期內的平均值為零。

倒立擺所受重力力矩為： $\langle\tau_g(t)\rangle = mgL\sin\theta(t)$

綜合以上討論，在倒立擺與鉛直方向偏移角度 $\theta$ 極小時， $\sin\theta \approx \theta$

$$\langle\tau_1(t)\rangle \approx \frac{m\omega^2 a^2 \theta}{2}, \quad \langle\tau_g(t)\rangle \approx mgL\theta$$

當慣性力矩大於重力力矩時，倒立擺可平衡，即： $a^2\omega^2 > 2gL$

若要討論在不同振盪頻率下倒立擺能達到穩定時最大的擺盪角度時，再

調整式(4)可得擺盪角度關係式為： $\cos\theta > \frac{2gL}{\omega^2 a^2}$

### (二) 拉格朗日力學分析

接著我們在無摩擦與風阻的理想情況下，用 Euler-Lagrange equation：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

來分析單擺與雙擺的運動。

$$\text{單擺：} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{L_1^2(m_1)\ddot{\theta}_1}{4} + \frac{L_1 a \omega^3 \sin\theta_1 \cos\omega t(m_1)}{2} + \frac{1}{12}m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{L_1^2 a \omega \sin\omega t(m_1) \cos\theta_1(\dot{\theta}_1)}{4} - \left(\frac{m_1}{2}\right)g L_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$\text{雙擺上擺：} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial \theta_1} = \frac{m_2 L_2 L_1 (\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)(\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_1)) + L_1 a \omega (\omega^2 \sin\theta_1(m_1 + 2m_2) \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \dot{\theta}_1(m_1 + m_2) \cos\theta_1)}{2} + \frac{L_1^2(m_1 + 4m_2)(\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1)}{4} + \frac{m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1}{12} - \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g L_1 \sin\theta_1 = 0 \quad \dots\dots(7)$$

$$\text{雙擺下擺：} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial \theta_2} = \frac{m_2 L_2 (L_1 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2) + (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))) + (a\omega \cos\theta_1 \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \dot{\theta}_2 \cos\theta_2) - g \sin\theta_2)}{2} + \frac{m_2 L_2^2 (\ddot{\theta}_2 \sin^2\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2)}{4} + \frac{m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2}{12} = 0 \quad \dots\dots(8)$$

(本圖由第一作者製作)

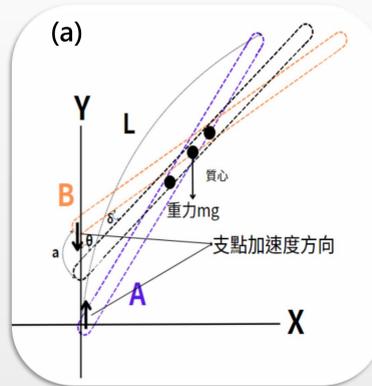


圖5(a) 慣性坐標系擺動過程力學圖

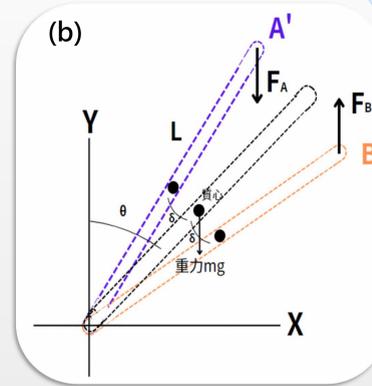


圖5(b) 非慣性坐標系擺動過程力學圖

(本圖由第一作者製作)

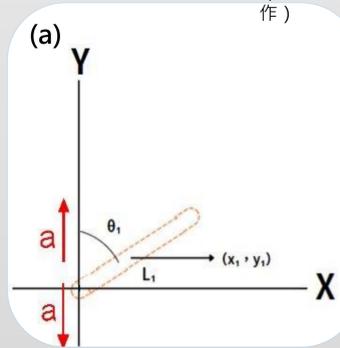


圖6(a) 單擺運動示意圖

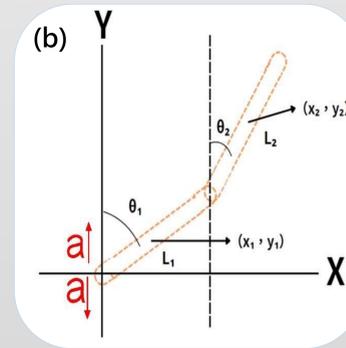


圖6(b) 雙擺運動示意圖

表1 符號說明

	質量	長度	與中線夾角
單擺	m	L	$\theta$
雙擺上擺	$m_1$	$L_1$	$\theta_1$
雙擺下擺	$m_2$	$L_2$	$\theta_2$

.....(6)

## 二、以理論驗證實驗結果

### (一) 實驗一中，測得單一倒立擺在不同鉛直振動頻率下的x-t與y-t圖。

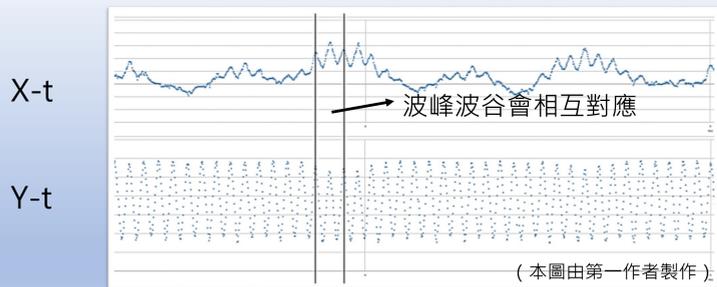


圖7 10 cm擺長在690 rpm下的 x-t 及 y-t 對照圖

由圖7可看到倒立擺除了頻率較低的大週期振盪外還有頻率較高的小週期振盪，由理論可知：影響倒立擺振盪的角度分為兩角度為 $\theta(t)$ 及 $\delta(t)$ ， $\theta(t)$ 為擺動角度， $\delta(t)$ 則為鉛直振動影響造成的小角度變化。

同時觀察x-t和y-t圖能發現在同個時刻的波峰波谷會相互對應，即擺盪角度 $\varphi(t) = \delta(t) + \theta(t)$ 。

### (二) 實驗二，改變單一倒立擺擺長，測得倒立擺可達穩定的最小頻率，圖為不同擺長下的頻率關係。

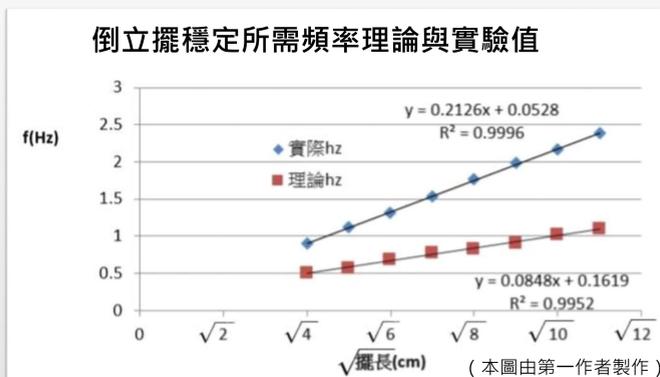


圖8 倒立擺穩定所需頻率理論與實驗值

根據式(5)： $\cos\theta > \frac{2gL}{\omega^2 a^2}$

倒立擺穩定後擺動角度會有極大值，在測出倒立擺達穩定後的最大擺角後，我們將之代入式(5)計算預測值，再與實際測量結果比較(如圖8)並驗證式(5)，即頻率與擺長開根號會呈線性關係。

由圖8可看出隨著擺長增加擺要達到穩定所需的頻率也會跟著上升，並呈線性關係。

但實驗結果與預測值不完全吻合，應是由於實驗時倒立擺所受阻力使得擺達成穩定所需的頻率提高。

為再度驗證摩擦力的影響，表2為8 cm倒立擺在630 rpm與660 rpm振動頻率下，利用每一瞬間的x分量計算出擺與中線夾角、角速度及角加速度後，帶入式(6)，嘗試驗證實驗結果與理論是否吻合，由表中圖可看出實驗中並非每一瞬間都滿足理想狀態下的Euler-Lagrange equation，判斷是風阻與摩擦力對運動造成影響。

表2 單擺力學關係式對時間關係圖 (本表中圖由第二作者製作)

8cm 單擺	振動頻率630 rpm	振動頻率660 rpm
力學關係式對時間關係圖	630 rpm 非保守力與時間散佈圖	660 rpm 非保守力與時間散佈圖

### (三) 實驗三，在特定擺長下改變振動頻率，觀察倒立擺的平均擺動範圍

圖9為8 cm與9 cm倒立擺可維持穩定振動30秒時，改變支點振動頻率所對應的平均擺動範圍關係圖，依據式(3)

$$\langle\tau_1(t)\rangle = \frac{m\omega^2 a^2 \sin(2\theta)}{4}$$

發現在特定擺長的情況下，當振動頻率增加，會使假想慣性力矩增加，擺動角度減少，且接近線性關係。

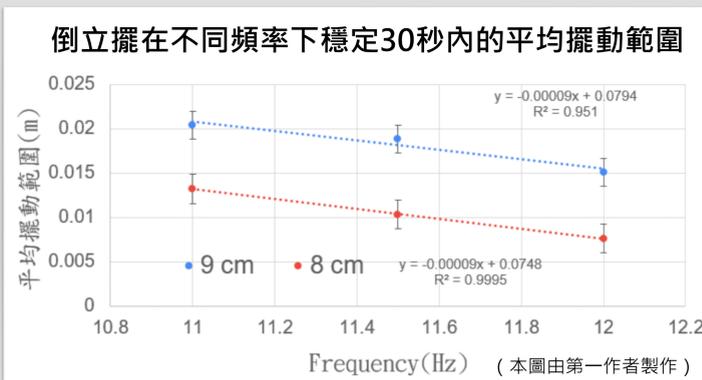


圖9 倒立擺在不同頻率下穩定30秒內的平均擺動範圍

#### (四) 實驗四：以FFT分析單一倒立擺可穩定振盪與即將傾倒時的不同。



註：(本頁海報FFT圖及單雙擺照片由第三作者製作)

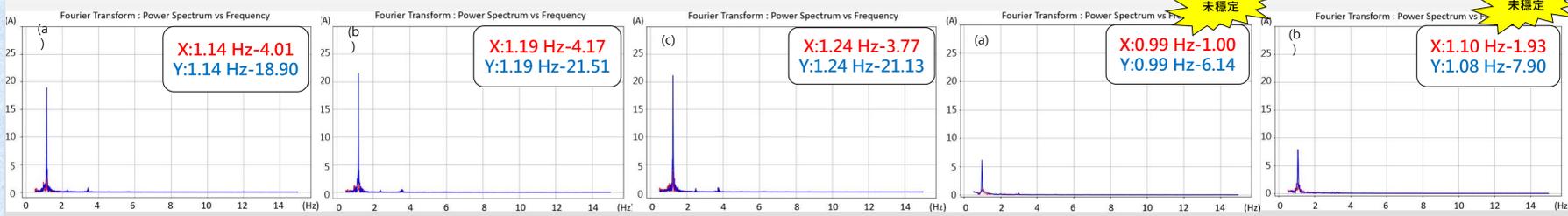
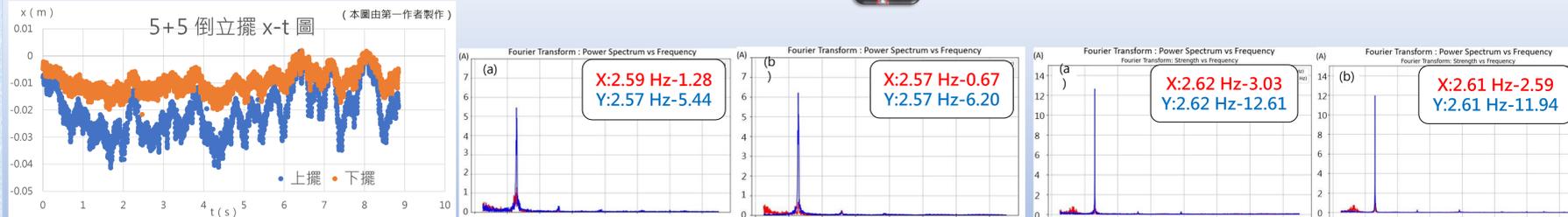


圖10(a)、10(b)、10(c)為8 cm倒立擺在可達成穩定的頻率下所對應的FFT頻譜圖。在可穩定時，x及y的主要振動頻率相同，且能看出隨著鉛直振動頻率增加，主頻率強度有增加趨勢。而圖10(b)、10(c)中主頻率強度差異不大因為擺擺動角度已趨近於零。圖11(a)、圖11(b)為8 cm倒立擺在不可達成穩定的頻率下所對應的FFT頻譜圖。擺不穩定代表只能維持非常短暫的鉛直狀態就會傾倒，雖然FFT頻譜圖中x及y的主要振動頻率依然相同，但相較於能達穩定的情形下主要振動頻率強度低許多。

#### (五) 實驗五探討雙擺在上、下擺長度相同之組合下的運動情況。

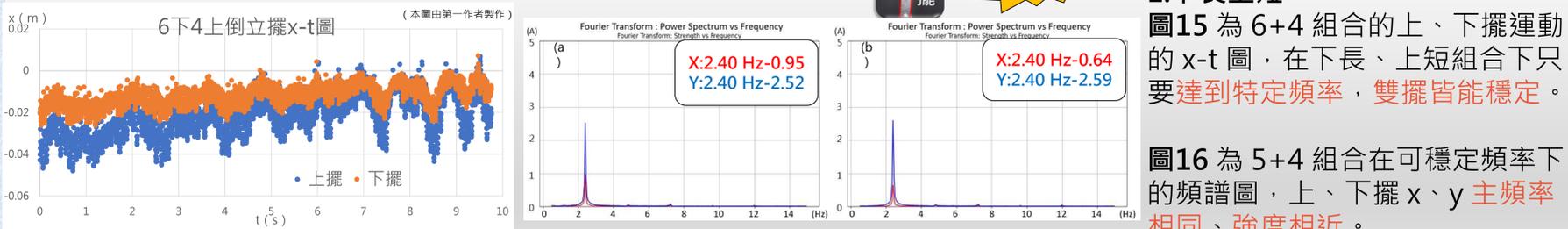


實驗發現上、下擺的x-t圖及y-t圖運動模式相近。使用FFT分析可看出4+4與5+5達到特定頻率後皆可穩定，上、下擺長度相同的情況下，x、y頻譜圖主頻率接近，且强度高。

#### (六) 實驗六探討雙擺在上、下長度不相同之組合下的運動情況。



下長上短



##### 1. 下長上短

圖15為6+4組合的上、下擺運動的x-t圖，在下長、上短組合下只要達到特定頻率，雙擺皆能穩定。

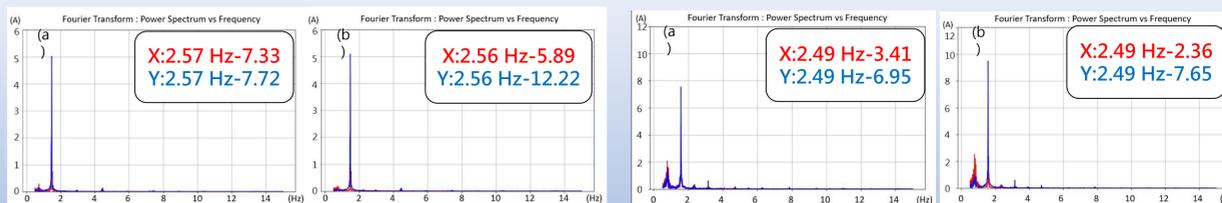
圖16為5+4組合在可穩定頻率下的頻譜圖，上、下擺x、y主頻率相同、強度相近。

##### 2. 下短上長 在下擺短的情況下，並非所有長度比皆能穩定，表3是改變下擺長度，固定上擺長度為6 cm之情形。

下短上長

表3 雙擺能達成穩定之情況

下+上(cm)	4+6	4+7	4+8	4+9
是否能穩定	是	是	否	否



下短上長雙擺組合中，圖18除主頻率外的其他小頻率強度都較圖17大，整體雜亂的小頻率強度較高，再增加上擺長度後發現雙擺已無法達成穩定。推論雙擺在下短上長時，上擺越長越不穩定。且4+6和4+7的雙擺雖都可達穩定振盪，但4+7不論是上擺或下擺主頻率強度皆較4+6下降，代表擺動時的狀況是較為歪斜的。

##### 3. 雙擺實際擺動情形探討。

圖19、圖20為5+5雙擺實驗情況，雖然在特定頻率下可達成穩定，但上擺及下擺會有不一樣的擺動情況，圖20(a)及圖20(b)中，上、下擺的頻譜圖非常相似，此時上、下兩擺較趨近為一直線，如圖19(a)。

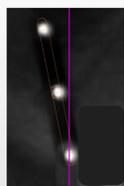


圖19(a) 呈直線情況

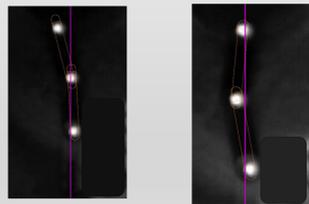
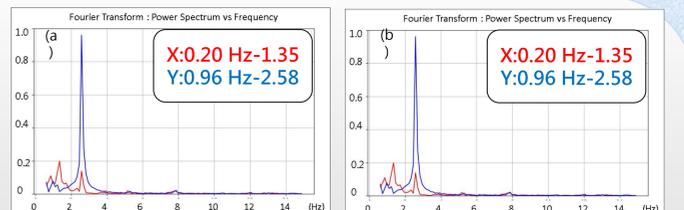


圖21(a) 向左歪斜之擺動情況  
圖21(b) 向右歪斜之擺動情況

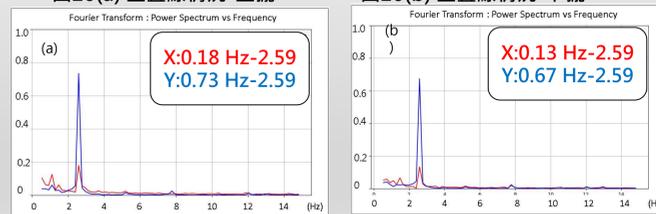


圖21(a)及圖21(b)中，x、y主頻率大小不一致，推測是因上、下擺歪斜導致，如圖19(c)、19(b)，頻譜圖中主頻率強度下降，此時擺之狀態是較不穩定且歪斜之振動。

也可由此驗證實驗六中下短上長的雙擺中，4+7的頻圖21(a)向左歪斜之擺動情況，圖21(b)向右歪斜之擺動情況，譜圖強度下降的原因。

## 結論

一、倒立擺須外加一鉛直振動頻率，才能抵抗重力力矩在鉛直方向穩定振盪，單擺運動會有下列現象：

- (一)擺的x-t與y-t圖波峰與波谷位置相對應，且x-t圖呈現出大週期與小週期疊加的振盪情形。
- (二)擺長度增加時，達成穩定所需的振動頻率會上升，在相同振動頻率下的平均擺動範圍增加。
- (三)在相同擺長下，當鉛直振動頻率增加，倒立擺擺動範圍將縮小。

##### 二、雙擺

- (一)雙擺上、下擺長的長度會影響擺是否易穩定，當上、長度相同或下擺長度大於上擺長度時，雙擺較容易達成平衡。
- (二)雙擺下長上短時，需要在特定長度下才能穩定。

三、以FFT圖分析倒立擺的運動時，可發現當倒立擺運動有一下模式：

- (一)穩定振盪時的頻譜圖呈現：x、y方向的主頻率相近，且强度高，頻譜圖的頻率分布近似，但和擺動角度、擺動情形沒有顯著關係。
- (二)當倒立擺未能達成穩定時，頻譜圖會出現主要振動頻率強度大幅降低且x、y方向的主頻率差異變大的狀況。

## 參考資料

- 一、Jearl Walker (2010)。《物理馬戲團The Flying Circus of Physics with Answers》。葉偉文譯。臺北。天下文化。
- 二、“Upside down pendulum” YouTube, upLoaded by Steve Mould, March 25, 2014, <https://www.youtube.com/watch?v=gnn21smGVRQ&t=69s>
- 三、“Self-correcting Inverted Pendulum Defies Gravity”, YouTube, upLoaded by The Action Lab, January 4, 2021, 檢自<https://www.youtube.com/watch?v=5uZdwxblJ8>
- 四、Eugene, I., Butikov. Kapitza Pendulum: A Physically Transparent Simple Explanation” 檢自<http://butikov.faculty.ifmo.ru/InvPendulumPTSE.pdf>