

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051814

跳躍圈躍起與滑動的力學條件分析

學校名稱： 國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 許廷聿 高二 陳風 高二 卓躍程	指導老師： 高銘宏
--	------------------

關鍵詞： 跳躍圈躍起、跳躍圈滑動、純滾動

摘要

本研究探討跳躍圈躍起與跳躍圈滑動的力學條件。首先以剛體力學理論導出平面與斜面上跳躍圈躍起的條件，我們使用雷射切割機自製圓環並以強力磁鐵當作加掛重物，在平面與斜面上進行實驗，手機錄製影片後使用 Tracker 進行分析，確定跳躍圈躍起的條件 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ 與實驗數據吻合。此外在影片中發現跳躍圈在躍起前，會先從純滾動變為滑動，此一現象稱之為純滾動破壞，我們也以剛體力學理論導出了斜面上跳躍圈從純滾動變為滑動的條件，手機錄製影片後使用 Tracker 進行分析，確定實驗數據與理論公式相符。

壹、前言

一、研究動機

跳躍圈(hopping hoop)指的是在圓環邊緣加上重物，接著讓圓環滾動後躍起的現象；跳躍圈憑空跳起同時引起了數學家與物理學家的興趣，網路上如youtube也可以找到不少相關的影片。

我們對於跳躍圈躍起的現象很感興趣，預定利用理論分析與實驗數據來探討這個現象，除了從平面上躍起之外，也進一步推廣到斜面上的躍起的情況；此外跳躍圈躍起前會從純滾動變為滑動，此一現象稱為純滾動破壞，在網路影片與論文上較少有純滾動破壞相關的討論，我們也會分析並探討這個現象。

二、研究目的

- (一)由剛體力學理論，導出跳躍圈躍起的條件。
- (二)在平面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式。
- (三)在斜面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式。
- (四)由剛體力學理論，導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件。
- (五)在斜面上進行實驗，驗證跳躍圈由純滾動變為滑動的理論公式。

三、文獻回顧

最早提出相關問題的書籍是 1953 年 Littlewood 的著作《A Mathematician's Miscellany》(W. F. D. Theron, 2000)，Littlewood 提出的問題如下：無質量的圓環頂端加掛重物，此系統由靜止開始釋放，考慮地面非常粗糙不會滑動，則跳躍圈是否會躍起？又跳躍圈躍起時加掛重物轉過的角度為何？在 1997 年論文《The Hopping Hoop》(Tadashi F. Tokieda, 1997)中，Tokieda 認為跳躍圈會躍起，躍起時重物轉過的角度為 90 度；1999 年的論文《Hopping Hoops Don't Hop》(James P. Butler, 1999)中，Butler 則認為跳躍圈不可能躍起。

在 2000 年的論文《The rolling motion of an eccentrically loaded wheel》(W. F. D. Theron, 2000)中，論文作者利用剛體力學理論分析了斜面上跳躍圈的運動，跳躍圈的運動十分複雜，至少包括純滾動、滑動、旋轉與跳躍等四種情況。論文的結論有二，一是導出了跳躍圈躍起的條件，二是當加掛重物的質量大於環的質量時，就可以產生比重力加速度更大的加速度。

在 2010 年的論文《The dynamics of an eccentrically loaded hoop》(Andrew Taylor, Mary Fehrs, 2010)中，論文作者設計斜面上的實驗驗證 Theron 在 2000 年提出的理論公式，他們在圓筒的內部黏上鉛塊，並且在四個邊緣位置放上 LED 燈，利用高速攝影拍下之後再分析影片；論文作者進行了五種質量比與六種不同角度的斜面合計三十次的實驗，結果與 Theron 在 2000 年的理論預測大致相符。此篇論文的特點是使用斜面進行實驗。

在 2012 年的論文《Experimental verification of the motion of a loaded hoop》(M. F. Maritz, W. F. D. Theron, 2012)中，論文作者實際進行實驗來驗證 2000 年 Theron 提出的理論，他們手動發射跳躍圈並且利用高速攝影機拍下影片分析，實驗的結果與理論大致相符，不過僅分析平面上的運動未分析斜面上的運動。

在 2021 年的論文《Physics of a hopping hoop》(Rod Cross, 2021)中，論文作者提出了一個相對簡單的模型，分析環與加掛重物的質心，質心的軌跡可以很好的由環心的運動加上正弦函數的週期性振盪所模擬，而正向力與重力的合力需要提供此週期性振盪的加速度，當正向力的合力為零時，即為跳躍圈躍起的條件；此一分析過為簡化，所以我們沒有採用這篇論文中的理論。

我們的科展報告中，討論了包含平面上跳躍圈躍起條件(包括理論證明與實驗數據)、斜面上跳躍圈躍起條件(包括理論證明與實驗數據)、平面上跳躍圈的純滾動破壞(包括理論證明與實驗數據)、斜面上跳躍圈的純滾動破壞(包括理論證明與實驗數據)。將上述的六篇論文處理到的部分整理列表比較如下所示。

論文作者與年份	平面上跳躍圈躍起條件		斜面上跳躍圈躍起條件		平面上跳躍圈純滾動破壞		斜面上跳躍圈純滾動破壞	
	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據
Tadashi F. Tokieda (1997)	有	無	無	無	無	無	無	無
James P. Butler (1999)	有	無	無	無	有	無	無	無
W. F. D. Theron (2000)	有	無	有	無	有	無	有	無
Andrew Taylor、Mary Fehrs (2010)	有	無	有	有	無	無	無	無
M. F. Maritz、W. F. D. Theron (2012)	有	有	無	無	有	有	無	無
Rod Cross (2021)	有	有	無	無	無	無	無	無
本科展報告	有	有	有	有	有	有	有	有

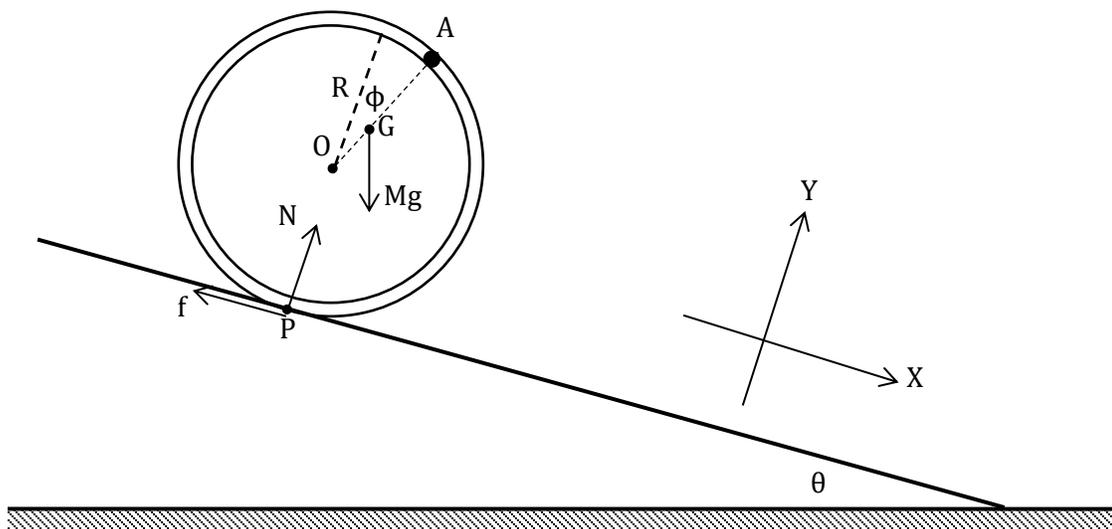
貳、研究設備及器材

(圖片除了軟體如 Tracker、Excel365 等為網路圖片外，其餘皆為作者自行拍攝)

			
自製雷切木製圓環	磁鐵(加掛重物)	Tracker	Excel
			
Rhinos3D	RDworksV8	尺	筆電
			
手機架	手機(攝影用)	雷射切割機	砂帶與桌面(斜面)

參、研究過程或方法

一、理論一：由剛體力學理論導出跳躍圈躍起的條件(W. F. D. Theron, 2000)。



圖(一)、實驗裝置示意圖：作者自行繪製

(一)參數說明：如圖(一)所示，O點為環的圓心、R為環的半徑、A點為加掛重物的位置、G點為環與重物的重心、P點為環與斜面的接觸點、 ϕ 為重物位置和Y軸夾角，斜面的底角為 θ 。環的質量為 m_h 、加掛重物的質量為 m_A 、環與加掛重物的總質量 $M = m_h + m_A$ ，定義質量比 $\gamma \equiv \frac{m_A}{M} = \frac{m_A}{m_h + m_A}$ ，再由重心的定義可知，環與加掛重物的重心位置G到環心的距離為 γR 。

(二)環與加掛重物受到作用力有三：重力(Mg)、正向力(N)、摩擦力(f)。以平行斜面的方向作為X方向、垂直斜面的方向作為Y方向，環心的座標為(X(t),Y(t))、重心的座標為(x(t),y(t))，若將PO與OG的夾角為 ϕ ，且將環視為剛體，則

$$y(t) = Y(t) + \gamma R \cos \phi \cdots \cdots \cdots (1)$$

並可推論環跳躍的充分條件為 $Y(t) > R$ ，而未跳躍時 $Y(t) = R$ 。加掛重物旋轉時相對於環心O的角速度 $\omega = \phi'$ 、角加速度 $\alpha = \phi''$ 、向心加速度 $a_c = R \cdot \phi'^2$ 。

取(1)式對時間t微分兩次，可得

$$y''(t) = Y''(t) + (\gamma R \cos \phi)'' \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$\text{其中} (\cos \phi)'' = [(-\sin \phi) \cdot \phi']' = -\cos \phi \cdot \phi'^2 - \sin \phi \cdot \phi'' = -\cos \phi \cdot \frac{a_c}{R} - \sin \phi \cdot \alpha \cdots \cdots (3)$$

將(3)式代回(2)式；可得

$$\begin{aligned} y''(t) &= Y''(t) + \gamma R \left(-\cos \phi \cdot \frac{a_c}{R} - \sin \phi \cdot \alpha \right) \\ &= Y''(t) - (\gamma R) \cdot \left(\cos \phi \cdot \frac{a_c}{R} \right) - \gamma R (\sin \phi \cdot \alpha) = Y''(t) - \gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi - \gamma \cdot R \cdot \alpha \cdot \sin \phi \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

已知跳躍時環脫離斜面，故此時正向力 $N = 0$ 、摩擦力 $f = 0$ ，故

$$y''(t) = -g \cos \theta \cdot \alpha = \phi'' = 0, \text{代回(4)式可得}$$

$$-g \cos \theta = Y''(t) - \gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi \cdots \cdots \cdots (5)$$

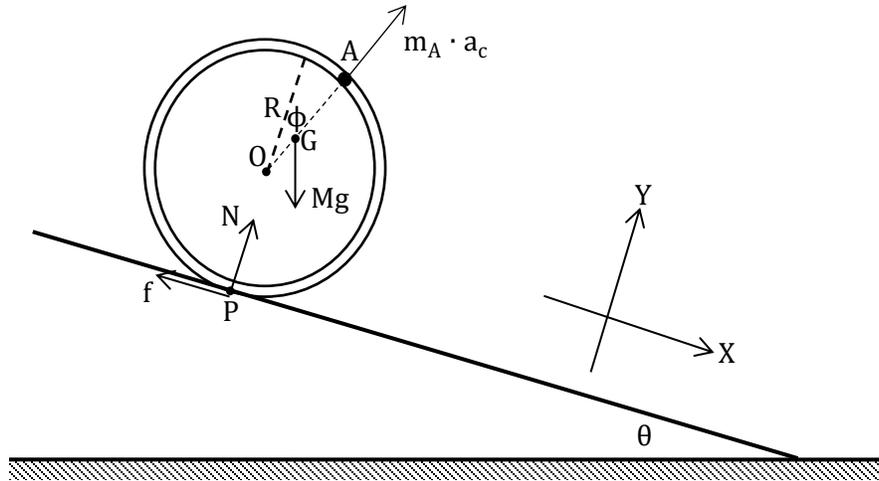
$$\text{移項(5)式可得：} Y''(t) = \gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi - g \cos \theta \cdots \cdots \cdots (6)$$

考慮環脫離的前一瞬間有 $Y(t) = R$ ，故 $Y'(t) = 0$ ，可得

$$Y''(t) = \gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi - g \cos \theta > 0 \cdots \cdots \cdots (7)$$

即得到跳躍的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ 。考慮在平面的情況 $\theta = 0$ ，平面跳躍的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cdots \cdots \cdots (8)$

(三)另一種證明方式，若採用加速座標系，觀察者在環心同以角速度 $\omega = \phi'$ 旋轉，則



圖(二)、實驗裝置示意圖：作者自行繪製

跳躍的條件為 $N = 0$ ，可得此時 $m_A \cdot a_c \cdot \cos\phi > Mg \cdot \cos\theta$ …………… (9)

移項(9)式可得

$$\frac{m_A}{M} \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cdot \cos\theta \dots\dots\dots (10)$$

又 $\gamma \equiv \frac{m_A}{M} = \frac{m_A}{m_h + m_A}$ ，可得 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ …………… (11)

公式(11)與前一個證明方法得到的公式(8)相同。

二、實驗一：在平面上進行跳躍圈實驗，如圖(三)所示，利用實驗數據驗證理論公式。



圖(三)、平面跳躍圈實驗；此圖為多張照片疊圖(作者自行拍攝繪製)

(一)實驗步驟

- 1、使用雷射切割機製作圓環，圓環的外直徑為0.25m、內直徑為0.23m，在圓環 A 處兩旁共放置八顆磁鐵作為加掛重物如圖(四)所示。
- 2、在圓環直徑上標示 B 點與 C 點。
- 3、將手機放置在腳架上，錄製圓環的運動過程。
- 4、用Tracker追蹤圓環的加掛重物(A)、圓環直徑上對稱端點(B、C)，由於 BC 線段中點為環心，故環心(x,y)座標為 $(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2})$ 。



圖(四)、跳躍圈
(作者自行拍攝)

- 5、向心加速度： $ac = \frac{V^2}{R}$ ，而V為環上端點相對於環中心的切線速度

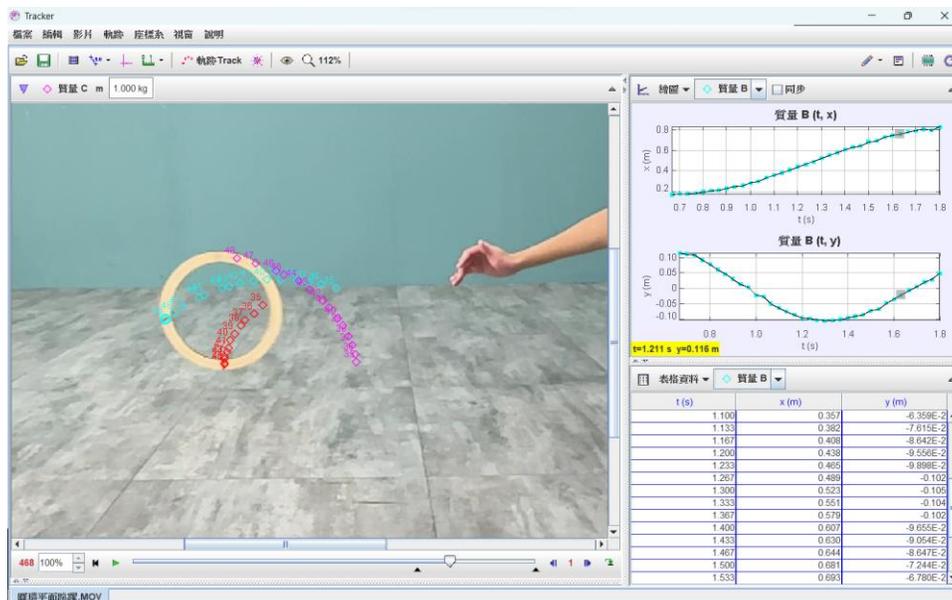
$$V = \sqrt{(Vx_B - Vx_O)^2 + (Vy_B - Vy_O)^2}$$

其中 Vx_B 為端點速度沿 X 軸分量、 Vy_B 為端點速度沿 Y 軸分量、 Vx_O 為環中心速度沿 X 軸分量、 Vy_O 為環中心速度沿 Y 軸分量。 ϕ 為重物位置和 Y 軸夾角，其中 $\cos \phi = \frac{x_A - x_O}{R}$ 。

- 6、tracker 播放幀數為 60fps，而拍攝的手機為 240fps，故時間需除四以得實際時間。

(二)數據分析

- 1、拍攝圓環跳躍的影片，匯入 Tracker，如圖(五)所示。



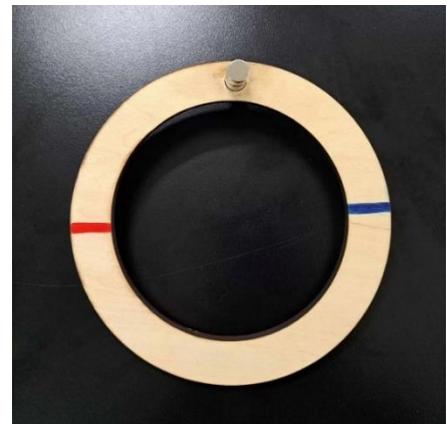
圖(五)：以 Tracker 分析平面上的圓環跳躍(作者自行拍攝)

- 2、設 tracker 水平方向為 x 方向，鉛直方向為 y 方向，圓環外直徑為 0.25m 。
- 3、點出兩端點 B 、 C ，利用此二數據求出環心位置。
- 4、點出加掛重物的位置 A 。
- 5、重新處理時間 t ，除以 4 得實際時間。
- 6、透過 tracker 得出環心的位置以及加掛重物的位置。
- 7、求出重物相對環心的速度($Vx_B - Vx_O, Vy_B - Vy_O$)，求出向心加速度 a 。
- 8、量測圓環直徑 $R = 0.25\text{m}$ 。
- 9、量測圓環和加掛重物的質量，並計算質量比($\gamma = 0.79$)。
- 10、代入公式(8)： $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，驗證跳起時之條件是否符合理論預測。

三、實驗二：在平面上進行跳躍圈實驗，如圖(六)所示，利用實驗數據驗證理論公式。



圖(六)、斜面跳躍圈實驗圖，此圖為多張照片疊圖：作者拍攝



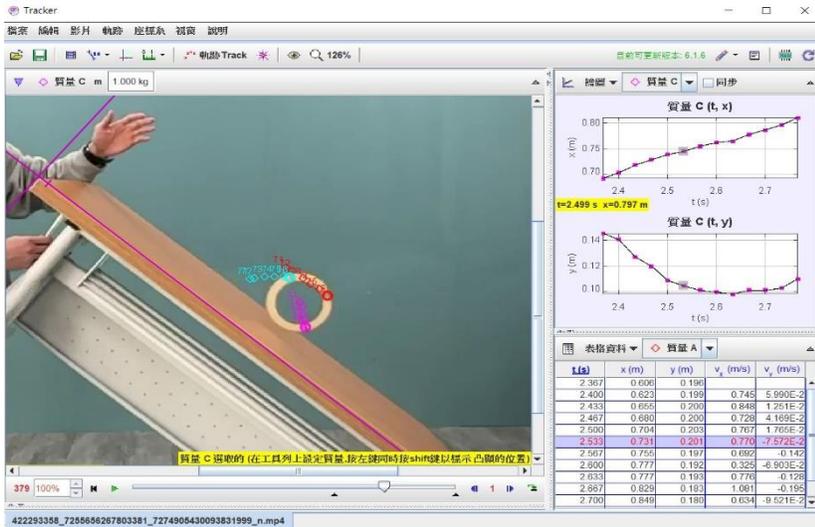
圖(七)、雷切自製跳躍圈圓環：作者自行拍攝

(一)實驗步驟

- 1、將外半徑為 0.075m 、內半徑為 0.055m 且質量比為 0.57 的圓環打洞，嵌入五顆磁鐵作為加掛重物如圖(七)所示，用腳架穩定手機，紀錄圓環的運動過程。
- 2、其餘步驟與實驗一相同。

(二)數據分析

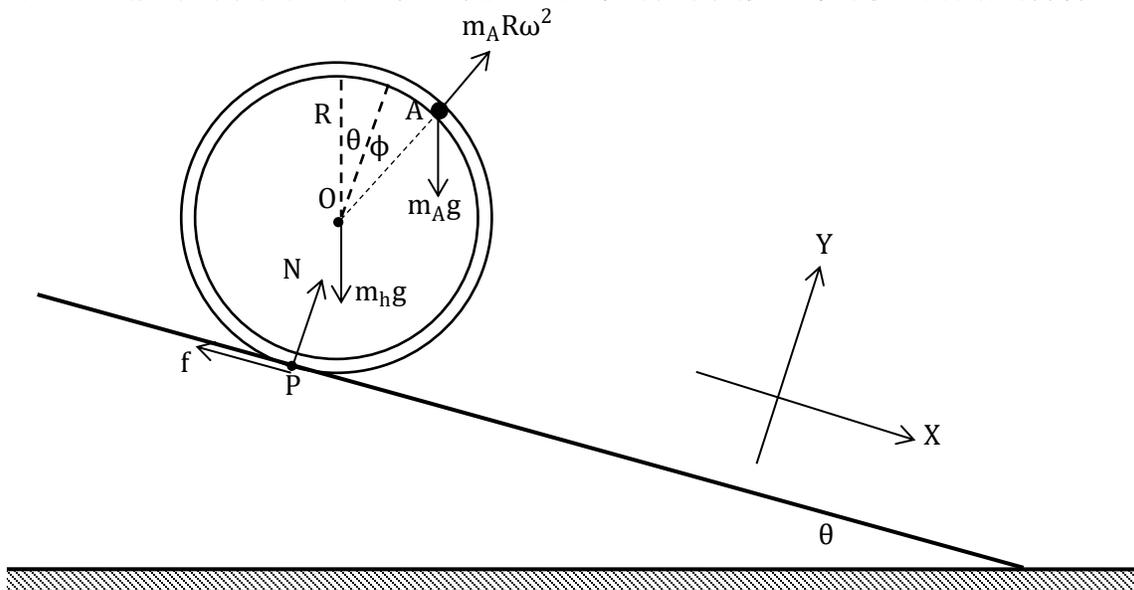
- 1、利用長度比得出三角函數值，反推出斜面與地面之夾角 θ 。
- 2、拍攝圓環在 θ 為 30° 、 40° 、 50° 的跳躍的影片，匯入 tracker，如圖(八)所示。



圖(八)：以 Tracker 分析斜面上的圓環跳躍；作者自行拍攝

- 3、設 tracker 平行斜面方向為 x 方向，垂直斜面方向為 y 方向
- 4、點出兩端點 B 與 C，利用此二數據求出環心位置。
- 5、點出加掛重物的位置 A。
- 6、重新處理時間 t，除以 4 得實際時間。
- 7、透過 tracker 得出環心以及加掛重物的位置。
- 8、求出重物相對環心的速度($V_{x_B} - V_{x_O}, V_{y_B} - V_{y_O}$)，求出向心加速度 a。
- 9、量測圓環半徑 $R = 0.075\text{m}$ 。
- 10、量測圓環和加掛重物的質量，並計算質量比($\gamma = 0.57$)。
- 11、代入公式(7) $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos\theta$ ，驗證跳起時之條件是否符合理論預測。

四、理論二：研究跳躍圈的運動過程，利用理論導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件。



圖(九)、實驗裝置示意圖：作者自行繪製

如圖(九)所示，若環沿著斜面以純滾動下滑，受到的作用力為環的重力($m_h g$)、加掛物體A的重力($m_A g$)、正向力(N)、摩擦力(f)、轉動座標系中的離心力($m_A R \omega^2$)，以下考慮X方向、Y方向與旋轉的牛頓運動定律。參數說明與理論(一)相同。

$$X \text{ 方向: } m_h g \sin \theta + m_A g \sin \theta + m_A R \omega^2 \sin \phi - f = (m_h + m_A) \cdot a \dots \dots \dots (12)$$

$$Y \text{ 方向: } m_h g \cos \theta + m_A g \cos \theta = N + m_A R \omega^2 \cos \phi \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{旋轉方向: } f \cdot R + m_A g R \sin(\theta + \phi) = I \cdot \alpha = (m_h R^2 + m_A R^2) \cdot \alpha \dots \dots \dots (14)$$

$$\text{純滾動的條件: } a = R \cdot \alpha \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{將(15)式帶入(14)式, 可得: } f + m_A g \sin(\theta + \phi) = (m_h + m_A) \cdot a \dots \dots \dots (16)$$

$$\text{由(13)式可求出正向力(N): } N = m_h g \cos \theta + m_A g \cos \theta - m_A R \omega^2 \cos \phi \dots \dots \dots (17)$$

結合(12)式與(16)式，可求出摩擦力f：

$$f = -m_A g R \sin(\theta + \phi) + \frac{m_h g \sin \theta + m_A g \sin \theta + m_A R \omega^2 \sin \phi + m_A g \sin(\theta + \phi)}{2} \dots \dots \dots (18)$$

考慮純滾動的摩擦力為靜摩擦力，必須小於最大靜摩擦力，故當摩擦力大於最大靜摩擦力時，即破壞純滾動的條件，環的運動行為由純滾動改為滑動；考慮摩擦係數為 μ 。

$$\text{純滾動的條件: } f \leq \mu N \dots \dots \dots (19)$$

$$\text{破壞純滾動, 改為滑動的條件: } f > \mu N \dots \dots \dots (20)$$

其中摩擦係數為 μ 的求法如下，示意圖參考圖(九)：參數說明 f 為摩擦力， f_{max} 為最大靜摩擦力， $a_{切}$ 為切線加速度， I 為圓環轉動慣量， α 為角加速度， θ_{max} 為最大靜摩擦力恰被破壞時的斜面角度。

$$X \text{ 方向: } Mg \sin \theta - f = Ma_{切} \dots \dots \dots (21)$$

$$Y \text{ 方向: } Mg \cos \theta = N \dots \dots \dots (22)$$

$$\text{旋轉: } f \cdot R = I \cdot \alpha = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha \dots \dots \dots (23)$$

移項(23)式可得:

$$f = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha \dots \dots \dots (24)$$

(24)式代入(21):

$$Mg \sin \theta - \frac{1}{2} Ma_{切} = Ma_{切} \dots \dots \dots (25)$$

移項化簡(25)式可得:

$$a_{\text{切}} = \frac{2}{3}g \sin \theta \cdots \cdots \cdots (26)$$

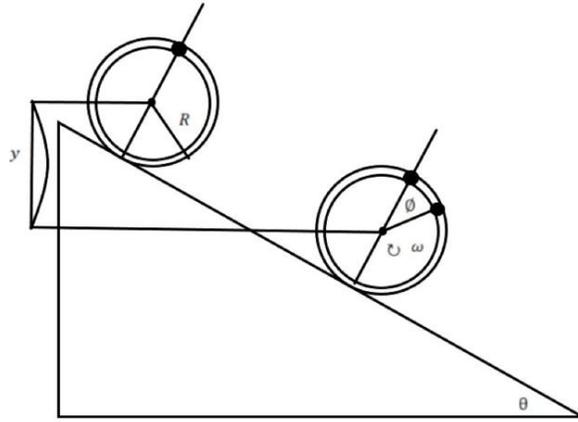
將(26)式代入(21)式

$$f_{\text{max}} = \frac{1}{3}Mg \sin \theta_{\text{max}} = Mg \cos \theta_{\text{max}} \cdot \mu \cdots \cdots \cdots (27)$$

移項(27)式:

$$\mu = \frac{1}{3} \tan \theta \cdots \cdots \cdots (28)$$

接著要來估算下降高度與速度、角速度、向心加速度的關係，以下向心加速度為 $R\omega^2$:



圖(十)圓環的純滾動：作者自行繪製

因為此過程為純滾動，故根據力學能守恆:

$$m_h gy + m_A g R [\sin(90 - \theta) - \sin(90 - \theta - \phi)] \\ = \frac{1}{2} m_h V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_A [(V + R\omega \cos \phi)^2 + (R\omega \sin \phi)^2] \cdots \cdots \cdots (29)$$

其中

$$\sin(90 - \theta) - \sin(90 - \theta - \phi) = \cos \theta - \cos(\theta + \phi) \\ = \cos \theta - \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \cdots \cdots \cdots (30)$$

再根據純滾動 $V = R\omega$:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_h R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_h V^2 \cdots \cdots \cdots (31)$$

$$(V + R\omega \cos \phi)^2 + (R\omega \sin \phi)^2 = V^2 + R^2 \omega^2 \cos^2 \phi + R^2 \omega^2 \sin^2 \phi + 2VR\omega \cos \phi \\ = 2V^2 + 2V^2 \cos \phi \cdots \cdots \cdots (32)$$

將(30)、(31)式、(32)式代入(29)式:

$$m_h gy + m_A g R (\cos \theta - \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) = (m_h + m_A + m_A \cos \phi) V^2 \cdots \cdots \cdots (33)$$

由(33)式可得:

$$R\omega^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{m_h g y + m_A g R (\cos \theta - \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)}{(m_h + m_A + m_A \cos \phi) R} \dots \dots \dots (34)$$

而平面上之公式則代 $\theta = 0^\circ$ ，並將下落垂直高度(y)改為距離出發點之水平距離(x)。

五、實驗三：在斜面上進行實驗，驗證跳躍圈由純滾動變為滑動的理論公式。

(一)實驗方法

- 1、利用圓環在 30° 、 40° 、 50° 上的斜面的運動，透過實驗二之方法，求出兩端點 B、C 與環心的位置。
- 2、求出端點相對於環心之速度V，並求出其角速度 ω 。
- 3、若圓環在進行純滾動時會遵守公式 $V = R\omega$ ；若圓環開始滑動則 $V = R\omega$ 即不成立。
- 4、取 V/ω 對 ϕ 之作圖，在趨勢線斜率變化時，即為圓環破壞純滾動開始滑動的時間。
- 5、驗證公式(20)是否正確。

(二)數據分析

- 1、數據分析步驟與實驗二步驟(1)到步驟(11)相同。
- 2、將數據匯入 Excel，並輸入公式，繪出 V/ω 對 ϕ 的作圖，求出圓環開始滑動的時間。
- 3、用 Excel 代入公式比對 f 和 μN 之間的大小，求出圓環開始滑動的時間。
- 4、比較理論預測與實驗數據的差異。

肆、研究結果

一、實驗一：在平面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式

(一)圓環跳躍起的情況

編號	γ	V_{x_B} (m/s)	V_{y_B} (m/s)	V_{x_O} (m/s)	V_{y_O} (m/s)	V^2 (m ² /s ²)	a_c (m/s ²)	$\cos \phi$
1	0.79	-1.58	0.90	-0.08	0.16	3.33	28.94	0.92
2	0.79	-1.65	1.24	-0.11	0.28	3.28	28.6	0.98
3	0.79	-1.51	0.71	-0.12	0.22	2.90	18.99	0.95
4	0.79	-2.09	1.33	-0.29	0.76	3.59	31.2	0.84
5	0.79	-1.85	0.98	-0.16	-0.03	3.77	32.8	0.83

表(一)

(二)圓環未跳躍起的情況

編號	γ	Vx_B (m/s)	Vy_B (m/s)	Vx_O (m/s)	Vy_O (m/s)	V^2 (m ² /s ²)	a_c (m/s ²)	$\cos \phi$
6	0.79	-0.96	1.44	-0.12	-0.04	31.23	10.69	0.99
7	0.79	-0.65	0.26	-0.02	-0.02	3.98	7.33	0.74
8	0.79	-0.40	0.40	0.10	0.18	0.29	2.51	0.88

表(二)

(三)分析圓環跳躍前後過程中的 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值

編號	t(s)	1.17	1.20	1.23	1.27	1.30	1.33	1.37	1.40	1.43
9	$\gamma \cdot a_c$ $\cdot \cos \phi$ (m/s ²)	4.29	9.23	8.56	4.74	1.76	8.46	0.26	14.88	5.27

表(三)

二、實驗二：在斜面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式

(一)圓環在 30 度的斜面上跳躍的情況

編號	γ	Vx_B (m/s)	Vy_B (m/s)	Vx_O (m/s)	Vy_O (m/s)	V^2 (m ² /s ²)	a_c (m/s ²)	$\cos \phi$
10	0.57	2.68	0.06	1.43	0.11	1.58	21.01	0.82
11	0.57	2.72	0.40	1.42	0.06	1.79	23.94	0.82
12	0.57	2.51	0.75	1.22	0.12	2.07	27.56	0.81

表(四)

(二)分析圓環在 30 度的斜面跳躍前後過程中的 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值

編號	t(s)	6.133	6.167	6.2	6.233	6.267	6.3	6.33	6.367
13	$\gamma \cdot a_c$ $\cdot \cos \phi$ (m/s ²)	1.29	4.85	3.89	7.64	0.13	6.51	5.79	12.2

表(五)

(三)圓環在 40 度的斜面上跳躍的情況

編號	γ	Vx_B (m/s)	Vy_B (m/s)	Vx_o (m/s)	Vy_o (m/s)	V^2 (m ² /s ²)	a_c (m/s ²)	$\cos \phi$
14	0.57	3.18	0.28	1.54	0.29	2.69	35.86	0.79
15	0.57	3.25	-0.15	0.89	0.17	5.66	75.4	0.79
16	0.57	3.07	0.07	1.25	0.82	3.86	51.46	0.66

表(六)

(四)分析圓環在 40 度的斜面跳躍前後過程中的 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值

編號	t(s)	1.467	1.50	1.53	1.567	1.6	1.63	1.667	1.7
17	$\gamma \cdot a_c$ $\cdot \cos \phi$ (m/s ²)	-1.64	0.57	2.64	4.5	5.87	4.34	3.10	16.3

表(七)

(五)圓環在 50 度的斜面上跳躍的情況

編號	γ	Vx_B (m/s)	Vy_B (m/s)	Vx_o (m/s)	Vy_o (m/s)	V^2 (m ² /s ²)	a_c (m/s ²)	$\cos \phi$
18	0.57	3.15	0.51	2.13	-0.02	1.33	17.7	0.72
19	0.57	2.87	-0.08	1.79	0.19	1.24	16.59	0.73
20	0.57	3.04	0.45	1.97	0.21	1.21	16.17	0.73

表(八)

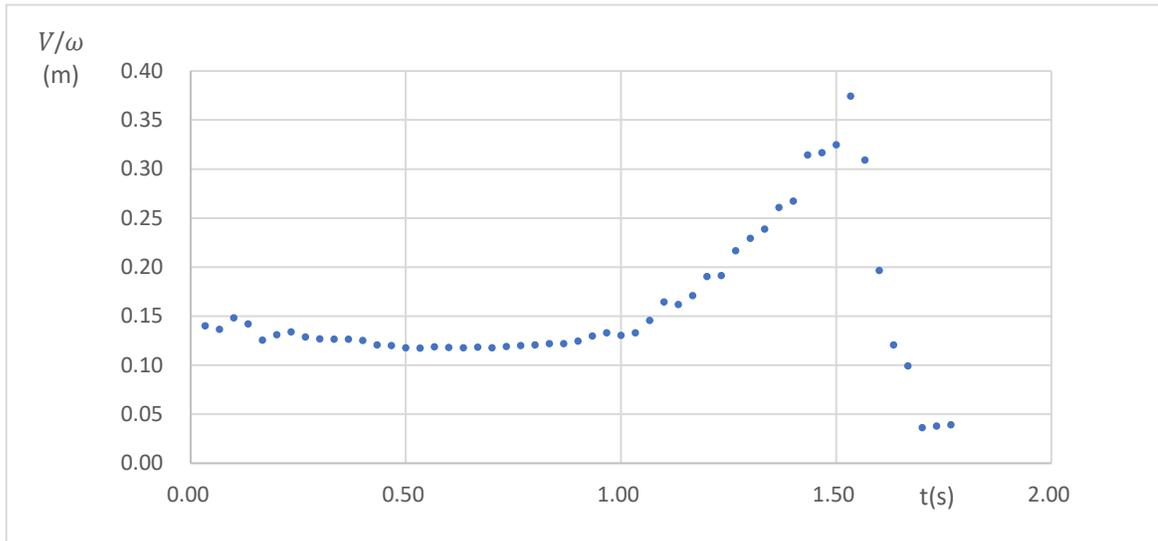
(六)分析圓環在 50 度的斜面跳躍前後過程中的 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值

編號	t(s)	1.53	1.567	1.6	1.63	1.667	1.7	1.73	1.767
21	$\gamma \cdot a_c$ $\cdot \cos \phi$ (m/s ²)	0.93	2.44	4.15	4.55	2.87	5.35	2.73	7.34

表(九)

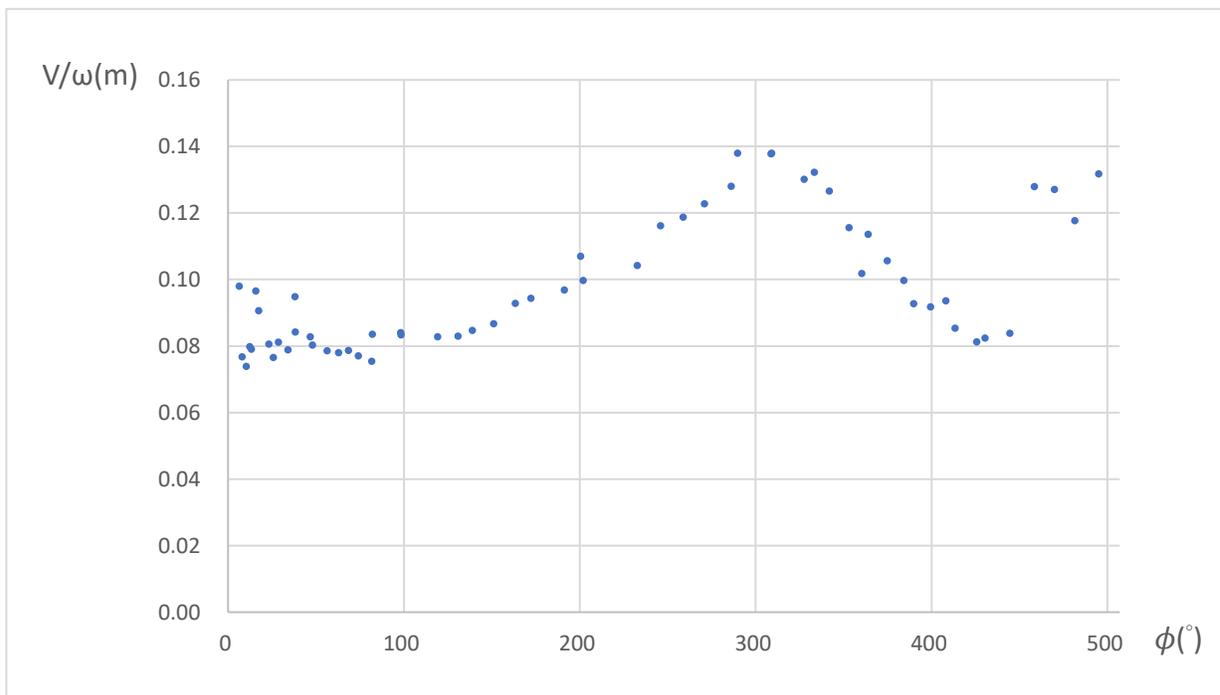
三、實驗三：在斜面上進行實驗，驗證跳躍圈由純滾動變為滑動的理論公式。

(一)平面圓環 V/ω 對 t 的作圖：



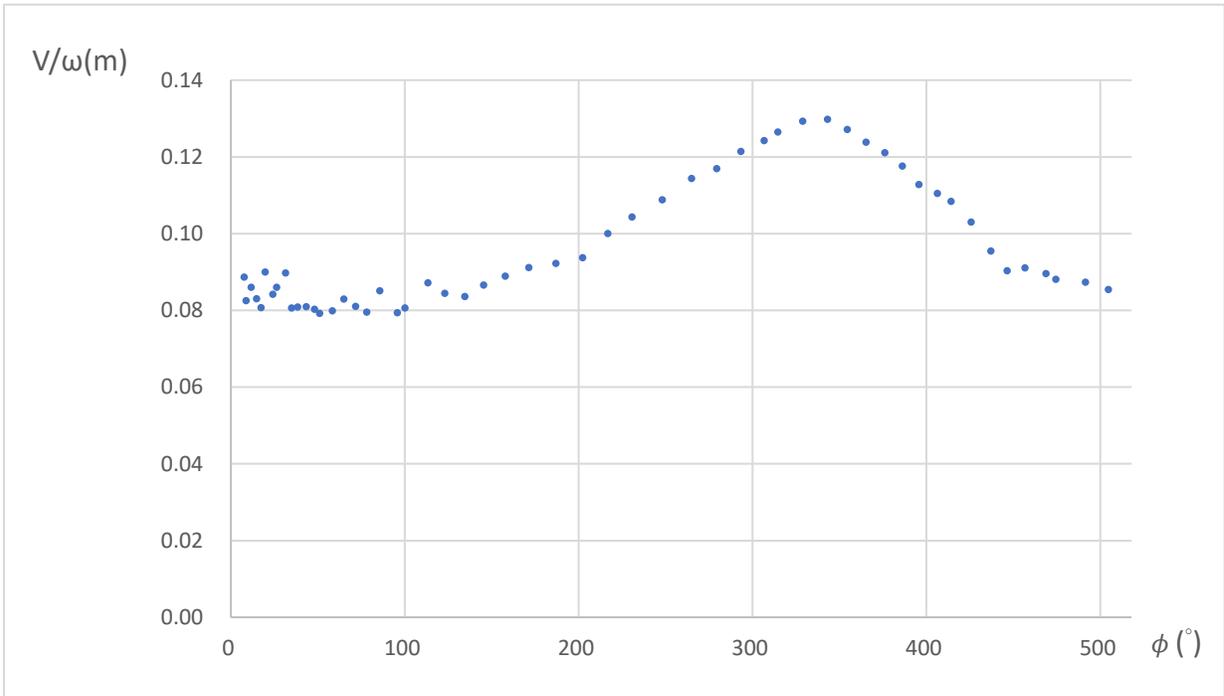
圖(十一)：作者自行繪製

(二)斜面 30 度圓環 V/ω 對轉過角度 ϕ 的作圖：



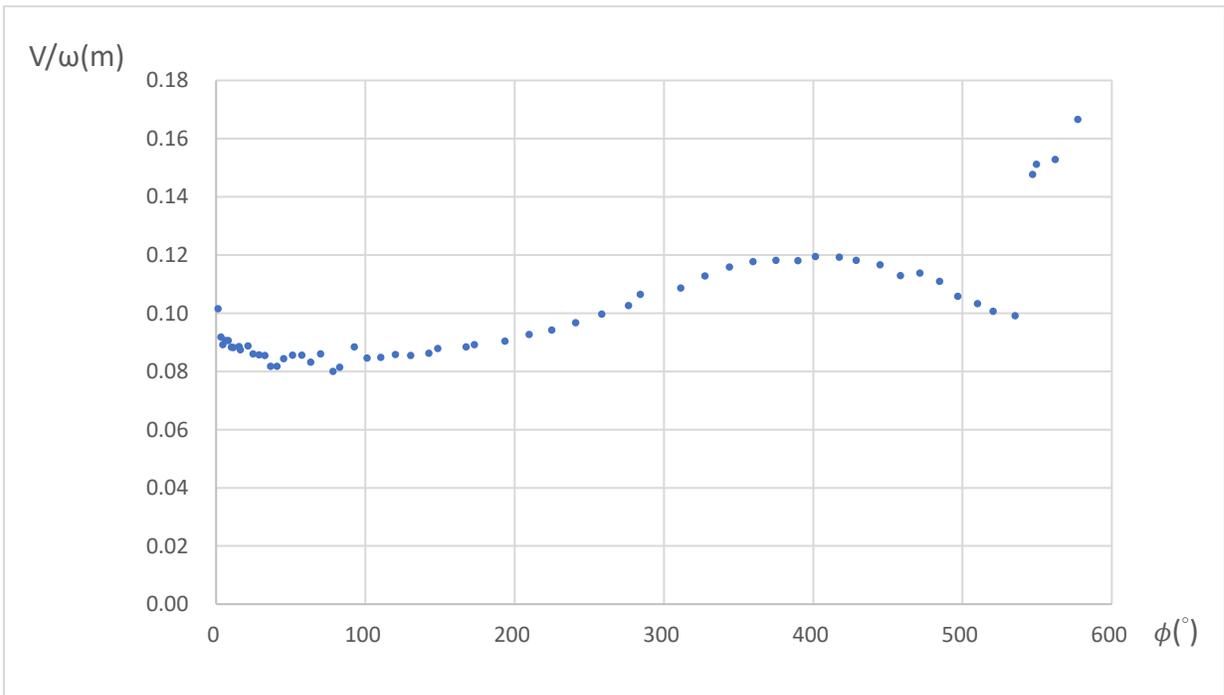
圖(十二)：作者自行繪製

(三) 斜面 40 度圓環 V/ω 對轉過角度 ϕ 的作圖:



圖(十三)：作者自行繪製

(四) 斜面 50 度圓環 V/ω 對轉過角度 ϕ 的作圖



圖(十四)：作者自行繪製

伍、討論

一、跳躍圈跳躍條件公式理論分析

(一)平面躍起條件： $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，其中符合下列條件者，跳躍圈較容易跳躍。

1. 質量比(γ)需夠大，故加掛重物越重越容易讓跳躍圈躍起。
2. 由 $a_c = R\omega^2$ 可知重物加掛的位置(R)需離環心夠越遠，則越容易躍起。
3. 由 $a_c = R\omega^2$ 可知旋轉的角速度(ω)越大，則越容易躍起。
4. 根據公式可推斷當 $\cos\phi = 1$ 時，也就是 $\phi = 0^\circ$ 時，圓環較易躍起；透過實驗觀測也發現圓環跳起時，重物在頂端附近。

(二)斜面躍起條件： $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos\theta$ ，而圓環跳躍條件分析與平面相同，其中斜面的角度 θ 越大圓環越容易跳起。

(三)透過此公式理論可以回答文獻回顧中 1953 年 Littlewood 所提出的問題：『無質量的圓環頂端加掛重物，此系統由靜止開始釋放，考慮地面非常粗糙不會滑動，則跳躍圈是否會躍起？』由理論一的分析可得平面跳躍圈躍起的條件如下：

$$\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cdots \cdots (35)$$

其中 γ 因為圓環視為無質量，故 $\gamma = 1$ ，而 a_c 可利用力學能守恆得知：

$$m_a g R (1 - \cos\phi) = \frac{1}{2} m_a V^2 \cdots \cdots (36)$$

移項可得：

$$V^2 = 2gR(1 - \cos\phi) \cdots \cdots (37)$$

將(37)式代入(36)式：

$$2g(1 - \cos\phi) \cos\phi \geq g \cdots \cdots (38)$$

將(38)式移項可得：

$$-2\cos^2\phi + 2\cos\phi - 1 \geq 0 \cdots \cdots (39)$$

而(39)式等號成立之解 $\cos\phi = \frac{1 \pm i}{2}$ ，可得出此系統從靜止開始釋放，跳躍圈不會躍起。

二、實驗一：在平面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式

(一)根據理論公式： $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，將表(一)、表(二)數據代入計算得表(十)、表(十一)：

編號	1	2	3	4	5
$\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ (m/s^2)	17.46	22.20	14.24	20.95	21.5

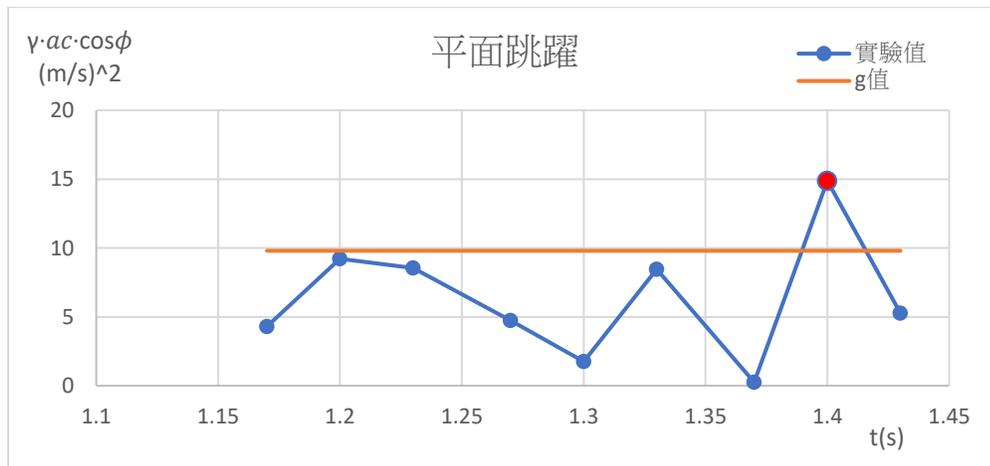
表(十) 成功跳躍的情況

編號	6	7	8
$\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ (m/s^2)	8.35	4.3	1.75

表(十一) 未成功跳躍的情況

觀察表(十)實驗數據，發現當圓環跳起時， $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ 的數值均大於重力加速度數值 $g = 9.8(m/s^2)$ ，而表(十二)實驗數據可以觀察到當圓環未跳起時， $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ 的數值皆均小於重力加速度數值 $g = 9.8(m/s^2)$ ，實驗數據與理論相符。

(二)將圓環跳躍前後過程中的表(三)數據代入理論公式並作圖:



圖(十五)：作者自行繪製

分析圓環運動過程中 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ 對時間(t)的關係，並作圖得出圖(十五)。透過 tracker 分析已知在 1.4 秒時圓環跳起，進一步從圖(十五)可看出 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ 值唯一大於 g 值的那一刻即跳起的時間 1.4 秒，驗證實驗與理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ 相符。

三、實驗二: 進一步在斜面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式

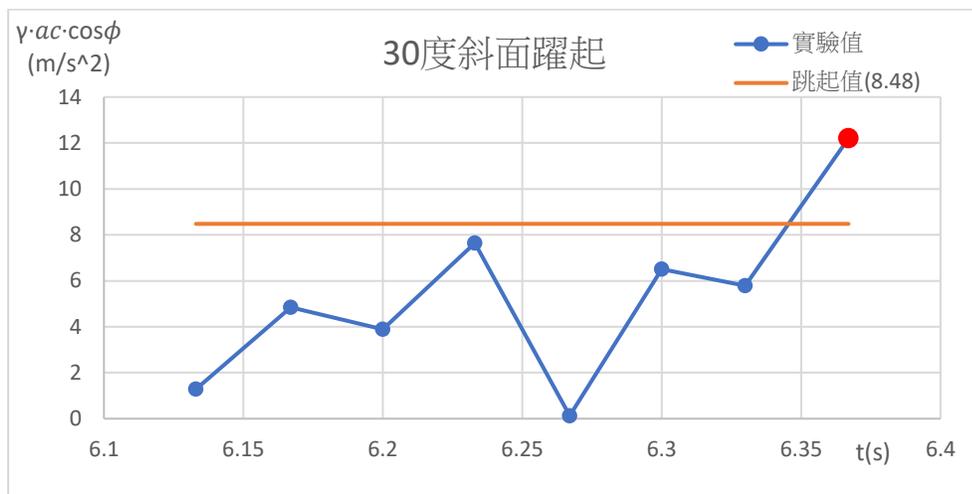
(一)根據理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos\theta$ ，將表(四)數據代入公式得表(十二)驗證圓環在 30 度的斜面符合 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos30^\circ \approx 8.48(m/s^2)$ 。

編號	10	11	12
$\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ (m/s^2)	9.81	11.2	12.76

表(十二) 圓環在 30 度斜面成功跳躍的情況

觀察表(十二)實驗數據，發現當圓環跳起時，其值皆大於理論值 $g\cos30^\circ \approx 8.48(m/s^2)$ 。

(二) 將圓環在 30 度的斜面跳躍前後過程中的表(五)數據代入理論公式並作圖:



圖(十六)：作者自行繪製

透過 tracker 分析已知在 6.367 秒時圓環在 30 度的斜面上跳起，進一步從圖(十六)可看出 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值唯一大於 $g \cos 30^\circ$ 的那一刻即跳起的時間 6.367 秒，驗證實驗與理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ 相符。

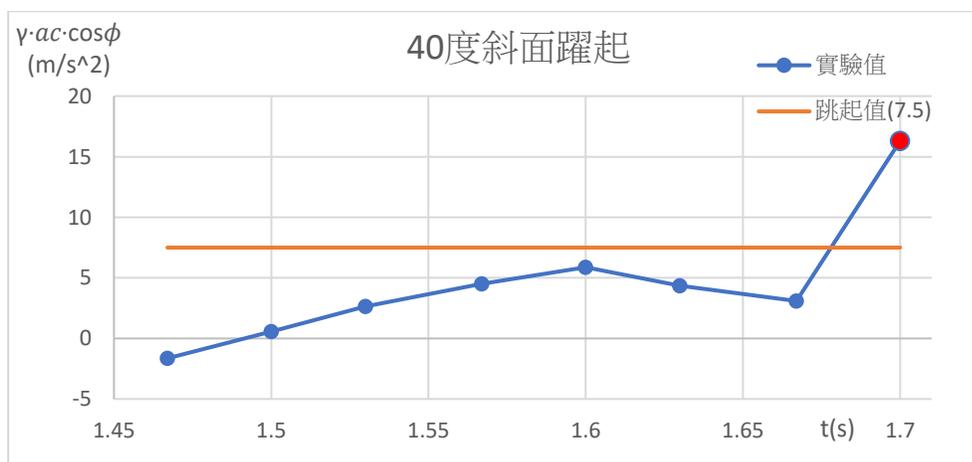
(三) 根據理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ ，將表(六)數據代入公式得表(十三)驗證圓環在 40 度的斜面符合 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos 40^\circ \approx 7.51(\text{m/s}^2)$ 。

編號	14	15	16
$\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ (m/s ²)	16.3	34.2	19.5

表(十三) 圓環在 40 度斜面成功跳躍的情況

觀察表(十三)實驗數據，發現當圓環跳起時，其值皆大於理論值 $g \cos 40^\circ \approx 7.51(\text{m/s}^2)$

(四) 將圓環在 40 度的斜面跳躍前後過程中的表(七)數據代入理論公式並作圖:



圖(十七)：作者自行繪製

透過 tracker 分析已知在 1.7 秒時圓環在 40 度的斜面上跳起，進一步從圖(十七)可看出 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值唯一大於 $g \cos 40^\circ$ 的那一刻即跳起的時間 1.7 秒，驗證實驗與理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ 相符。

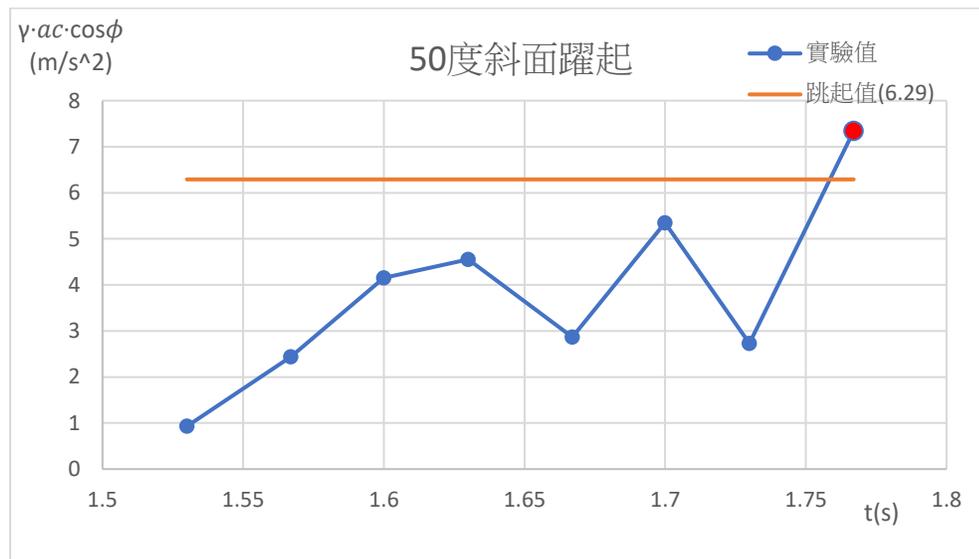
(五)根據理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ ，將表(八)數據代入公式得表(十四)驗證圓環在 50 度的斜面符合 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos 50^\circ \approx 6.29(m/s^2)$ 。

編號	18	19	20
$\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi (m/s^2)$	7.34	6.93	6.77

表(十四) 圓環在 50 度斜面成功跳躍的情況

觀察表(十四)實驗數據，發現當圓環跳起時，其值皆大於理論值 $g \cos 50^\circ \approx 6.29(m/s^2)$

(六)將圓環在 50 度的斜面跳躍前後過程中的表(九)數據代入理論公式並作圖：



圖(十八)：作者自行繪製

透過 tracker 分析已知在 1.7 秒時圓環在 50 度的斜面上跳起，進一步從圖(十八)可看出 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi$ 值唯一大於 $g \cos 50^\circ$ 的那一刻即跳起的時間 1.7 秒，驗證實驗與理論公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos \phi > g \cos \theta$ 相符。

四、理論二: 研究跳躍圈的運動過程，利用理論導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件。

(一) 靜摩擦係數(μ): 我們利用其他相同材質的物體，得知物體開始滑動的角度 $\theta = 53^\circ$ ，

$$\text{故推出靜摩擦係數 } \mu = \frac{1}{3} \tan \theta = \frac{1}{3} \tan 53^\circ = 0.442。$$

(二)根據理論公式導出跳躍圈在 30 度的斜面，從純滾動變為滑動時的落下高度(y_1)

1.將 y 依序帶入求出 f ，並找出當 f 恰大於 μN 跳躍圈落下的理論高度如表(十五)

y_2 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$ (N)	$R\omega^2$ (m/s ²)	f (N)	μN (N)
0.27	0.1498	10.0761	0.0571	0.0660
0.28	0.1500	10.4496	0.0573	0.0612
0.29	0.1503	10.8229	0.0575	0.0565
0.30	0.1506	11.1964	0.0578	0.0517
0.31	0.1509	11.5698	0.0580	0.0469

表(十五)

根據表(十五)可以觀察到當圓環下落垂直高度為0.29(m)時，摩擦力 f 會恰大於最大靜摩擦力 μN ，代表此時的純滾動會被破壞且開始滑動，因此0.29(m)為圓環在 30 度的斜面開始滑動的落下高度理論值。

(三)根據理論公式導出跳躍圈在 40 度的斜面，從純滾動變為滑動時的落下高度(y_2)

1. 將 y 依序帶入求出 f ，並找出當 f 恰大於 μN 跳躍圈落下的理論高度如表(十六)

y_2 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$ (N)	$R\omega^2$ (m/s ²)	f (N)	μN (N)
0.19	0.1887	7.1158	0.0723	0.0814
0.20	0.1891	7.4904	0.0725	0.0766
0.21	0.1894	7.8651	0.0727	0.0718
0.22	0.1897	8.2399	0.0728	0.0670
0.23	0.1901	8.6147	0.0733	0.0622

表(十六)

根據表(十六)可以觀察到當圓環下落垂直高度為0.21(m)時，摩擦力 f 會恰大於最大靜摩擦力 μN ，代表此時的純滾動會被破壞且開始滑動，因此0.21(m)為圓環在 40 度的斜面開始滑動的落下高度理論值。

(四)根據理論公式導出跳躍圈在 50 度的斜面，從純滾動變為滑動時的落下高度(y_3)

1. 將 y 依序帶入求出 f ，並找出當 f 恰大於 μN 跳躍圈落下的理論高度如表(十七)

y_2 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$ (N)	$R\omega^2$ (m/s ²)	f (N)	μN (N)
0.11	0.2212	4.1347	0.0857	0.0919
0.12	0.2216	4.5107	0.0850	0.0870

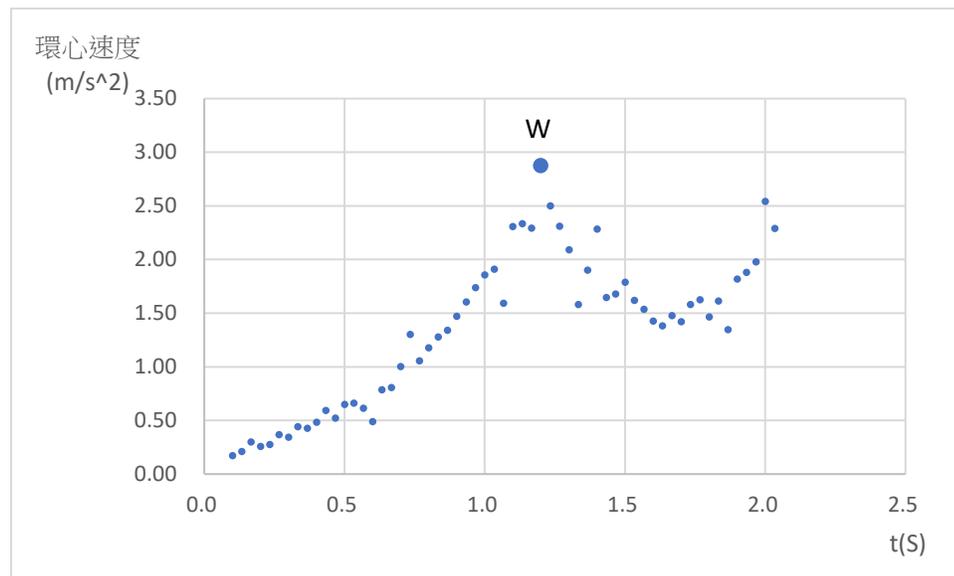
0.13	0.2219	4.8667	0.0859	0.0822
0.14	0.2222	5.2628	0.0861	0.0774
0.15	0.2225	5.6388	0.0862	0.0726

表(十七)

根據表(十七)可以觀察到當圓環下落垂直高度為0.13(m)時，摩擦力 f 會恰大於最大靜摩擦力 μN ，代表此時的純滾動會被破壞且開始滑動，因此0.13(m)為圓環在 50 度的斜面開始滑動的落下高度理論值。

五、實驗三：在斜面上進行實驗，驗證跳躍圈由純滾動變為滑動的理論公式。

(一)我們利用環心速度對時間作圖，如圖(十九)，欲利用此圖找出圓環實際開始滑動時的時間，並回推落下的垂直高度。



圖(十九)：作者自行繪製

根據圖(十九)可以觀察到此跳躍圈有三個運動階段，分別為起始的等加速期、中間的減速期、後期的跳躍期:

1. 起初我們將起始的等加速期視為純滾動，而中間減速期則視為純滾動被破壞且開始滑動:
 - (1) 起初等加速期的純滾動: 起初重物的離心力不大，所以還能維持純滾動。
 - (2) 純滾動被破壞: 重物的離心力垂直斜面分量造成正向力減少，造成摩擦力減少，使圓環受力不再平衡，進而造成純滾動遭破壞。

(3) 開始滑動:重物的離心力平行斜面分量、重力沿斜面分量、摩擦力三個力的作用，如果超過圓環的最大靜摩擦力，就會使圓環從純滾動變成滑動。

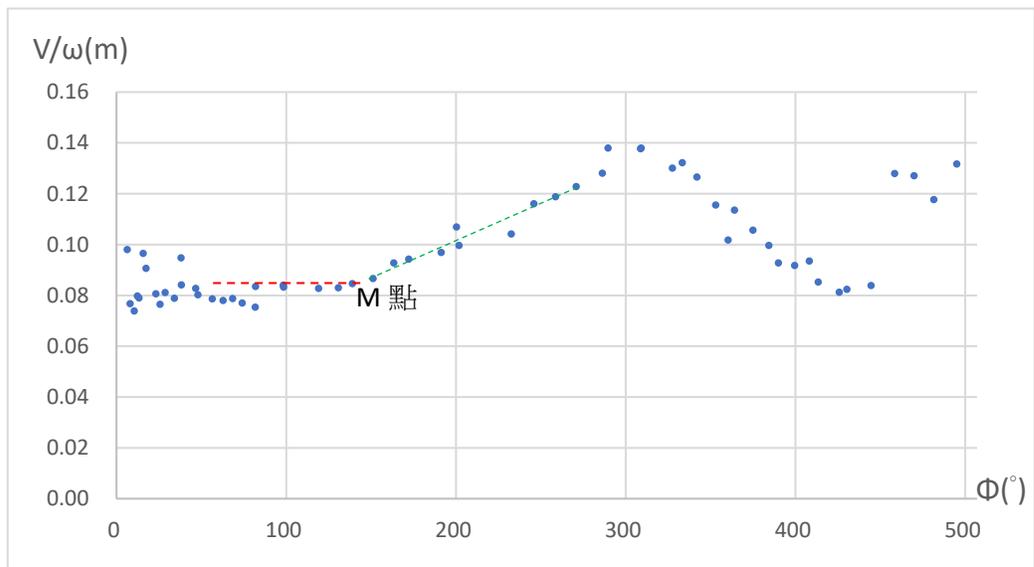
故我們取環心速度最大值的數據點為純滾動被破壞的時刻(圖中的 W 點)

- 但在經過計算發現與理論落下高度值不符合，因而發現前期的等加速期並非一條數據點排列整齊的斜直線，其中數據點間距有上下起伏，後來我們推斷為重物的離心力會隨著圓環旋轉，造成圓環會有瞬間加速以及減速，使得環心速度的最大值可能為重物離心力造成，而非我們一開始想的純滾動被迫壞，故無法單純利用環心速度對時間作圖判斷。

(二)利用 V/ω 對 ϕ 的作圖判斷圓環開始滑動的時間，並回推圓環落下的垂直高度

- 根據純滾動環心速度與角速度的條件 $V = R\omega$ ，可以得出當圓環進行純滾動時， V/ω 會是一定值，也就是圓環之半徑。因此我們將不同斜面角度之 V/ω 對 ϕ 作圖，並找出 V/ω 開始變動的時候，即為純滾動被破壞且開始滑動的角度。

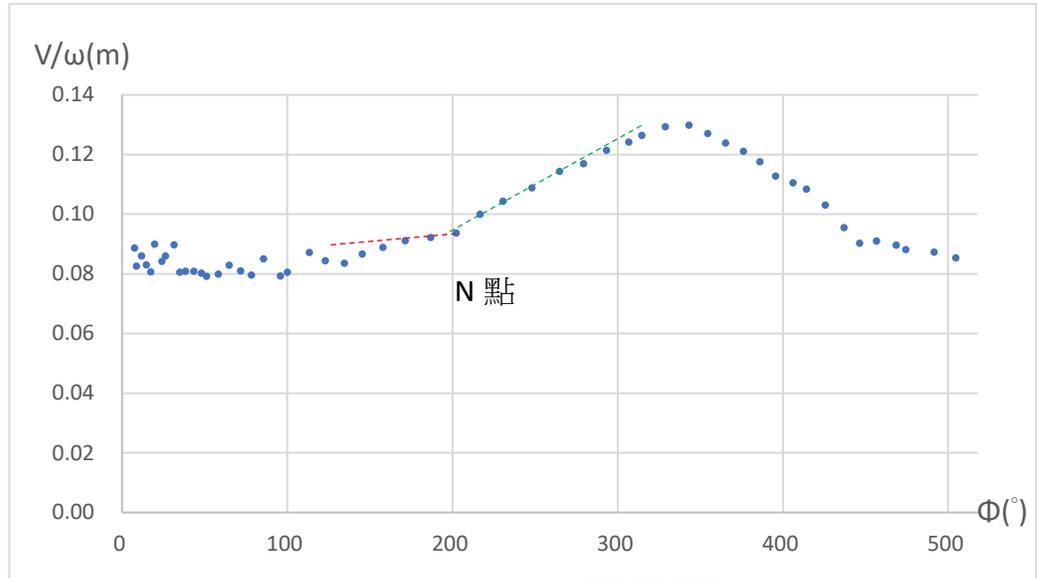
(1) 斜面 30 度圓環 V/ω 對 ϕ 的作圖：



圖(二十)：作者自行繪製

根據圖(二十)可以觀察起始的 V/ω 值接近 $0.075m$ ，即圓環半徑，而 M 點為斜率變動的轉折點，即為純滾動恰被破壞的角度，為 151.02° ，再透過角度與距離的幾何關係，就可算出實際下落垂直高度為 $0.266(m)$ 。

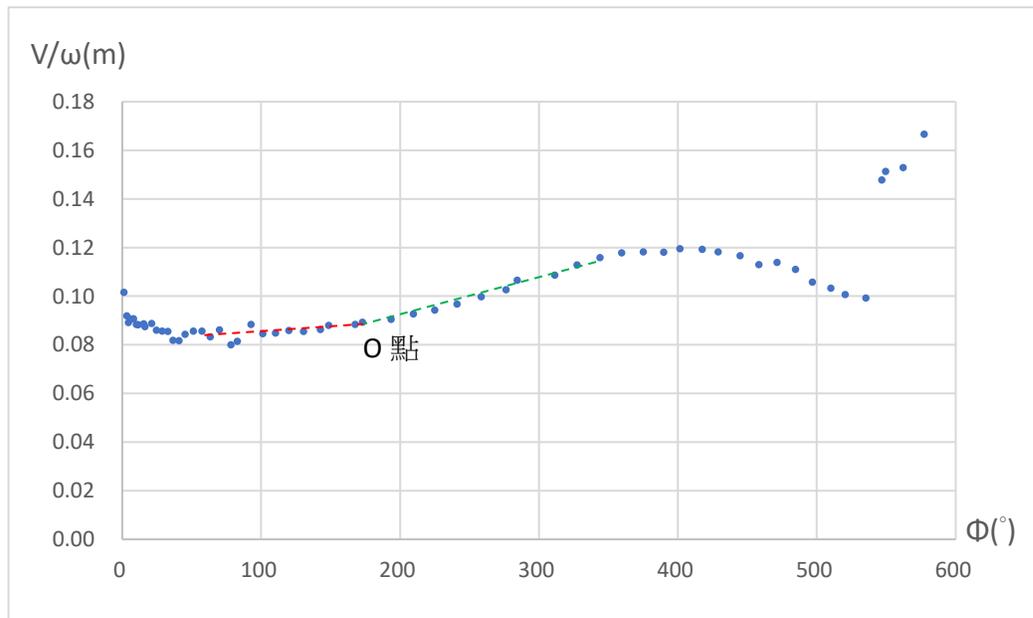
(2) 斜面 40 度圓環 V/ω 對 ϕ 的作圖：



圖(二十一)：作者自行繪製

根據圖(二十一)可以觀察起始的 V/ω 值接近 $0.075m$ ，即圓環半徑，而 N 點為斜率變動的轉折點，為純滾動恰被破壞的角度，為 202.12° ，再透過角度與距離的幾何關係，就可算出實際下落垂直高度為 $0.185(m)$ 。

(4) 斜面 50 度圓環 V/ω 對 ϕ 的作圖：



圖(二十二)：作者自行繪製

根據圖(二十二)可以觀察起始的 V/ω 值接近 $0.075m$ ，即圓環半徑，而O點為斜率變動的轉折點，為純滾動恰被破壞的角度 $\phi = 173^\circ$ ，再透過角度與距離的幾何關係，就可算出實際下落垂直高度為 $0.173(m)$ 。

不同角度之斜面，由純滾動變為滑動，實際與理論下落垂直高度比較：

	30 度	40 度	50 度
實驗下落高度(m)	0.266	0.185	0.173
理論下落高度(m)	0.290	0.210	0.130

表(十八)

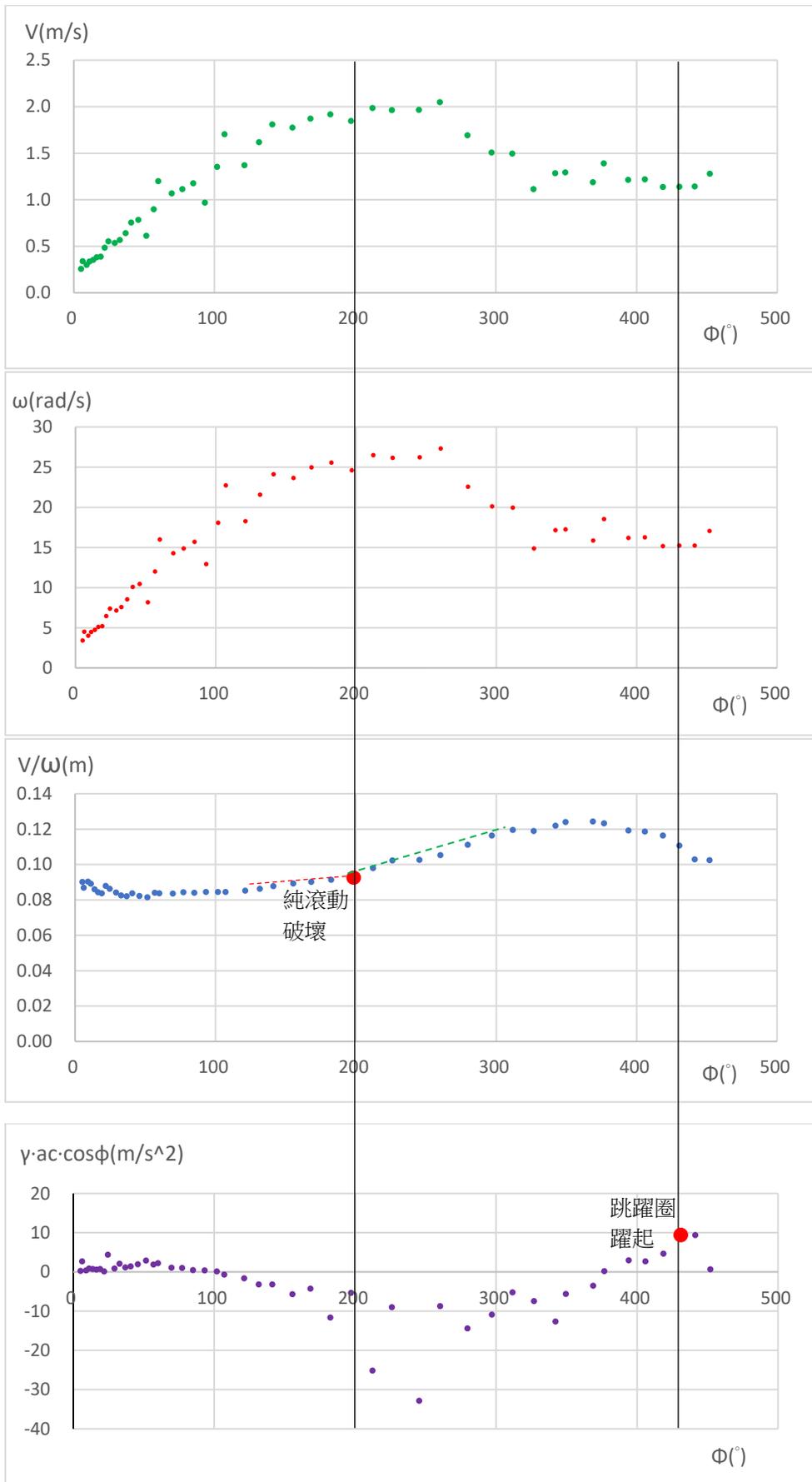
根據表(十八)得到實際與理論數值以及趨勢相符。

(三)我們在斜面上放置砂紙(號數 150)，改變了跳躍圈與斜面的摩擦係數，並且重複純滾動破壞的實驗，實驗數據與理論結果比較如下：

	摩擦係數	破壞純滾動的理論高度	破壞純滾動的實驗高度
原本的平面	0.442	0.210m	0.185m
砂帶號數 150	0.840	0.280m	0.320m

(四)我們將 v 、 ω 、 v/ω 、 $\gamma a_c \cos\phi$ 對角度的函數關係畫在同一張圖中，如圖(二十三)所示。

- 1、選擇斜面 40 度，將 v 、 ω 、 v/ω 、 $\gamma a_c \cos\phi$ 對角度的函數關係畫在同一張圖中，比較四個物理量之間的關係。
- 2、跳躍圈從純滾動轉變為滑動的 $\theta = 202^\circ$ ，在轉過的角度介於 0° 到 202° 之間，跳躍圈的運動為純滾動，故符合 $V = R \cdot \omega$ 的公式，也可看出速度與角速度隨著時間等比例增加。
- 3、在 $\theta = 202^\circ$ 到 $\theta = 306^\circ$ 之間歷經減速過程，此段過程是由離心力所造成，與純滾動轉變為滑動無關。
- 4、在 $\theta = 430^\circ$ 時 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ ，此時跳躍圈跳躍離開地面。



陸、結論

- 一、我們參考並且簡化論文上的證明，導出斜面上跳躍圈躍起的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos\theta$ ，考慮 $\theta = 0^\circ$ 即可得到平面上跳躍圈躍起的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ；若使用旋轉座標系分析，可讓證明過程更簡潔易懂。
- 二、我們使用雷切製作圓盤，再將強力磁鐵吸在兩旁當作加掛重物，分析了九個平面上跳躍圈的運動影片，其中有六個成功跳躍、三個未成功跳躍；實驗中若符合跳躍條件 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，則可以成功跳躍；反之則不會跳躍。
- 三、我們使用雷切製作有洞圓盤，再將強力磁鐵塞入當作加掛重物，在底角 30° 、 40° 、 50° 斜面上進行了九次實驗，九個實驗均成功跳躍，所有實驗結果均符合 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g\cos\theta$ 的理論公式。
- 四、平面與斜面的實驗均觀察跳躍圈在跳躍前會先減速，最初推測原因為判跳躍圈從純滾動轉變為滑動，並且利用剛體力學導出開始滑動的條件為 $-m_A g R \sin(\theta + \phi) + \frac{m_h g \sin\theta + m_A g \sin\theta + m_A R \omega^2 \sin\phi + m_A g R \sin(\theta + \phi)}{2} > \mu(m_h g \cos\theta + m_A g \sin\theta - m_A R \omega^2 \cos\phi)$ ，實驗結果發現跳躍圈開始滑動的時間與明顯減速時間不同，進一步發現明顯減速與離心力之關係較大。
- 五、我們分析影片中環心速度與繞環心角速度的關係，驗證跳躍圈從純滾動轉變為滑動的理論公式與實驗結果符合。

柒、參考文獻資料

- 1、Andrew Taylor、Mary Fehrs(2010)◦ The dynamics of an eccentrically loaded hoop◦ American Association of Physics Teachers◦ 第78卷第5期◦ 496-498◦
- 2、James P. Butler(1999)◦ Hopping Hoops Don't Hop◦ The American Mathematical Monthly◦ 106：6，565-568◦
- 3、M. F. Maritz、W. F. D. Theron(2012)◦ Experimental verification of the motion of a loaded hoop◦ American Association of Physics Teachers◦ American Association of Physics Teachers◦ 第80卷第7期◦ 594 - 598◦
- 4、Rod Cross(2021)◦ Physics of a hopping hoop◦ Physics Education◦ 第56卷◦
- 5、Tadashi F. Tokieda(1997)◦ The Hopping Hoop◦ The American Mathematical Monthly◦ 104：2，152-154◦
- 6、W. F. D. Theron(2000)◦ The rolling motion of an eccentrically loaded wheel◦ American Association of Physics Teachers◦ 第68卷◦ 812-820◦

【評語】 051814

本作品探討木製中空圓環自斜面滾下的彈跳運動。以圓環直徑、圓環厚度、斜面傾斜角為實驗參數，拍攝圓環運動，以計算運移動速率、環心速率。能觀測得跳躍圈在躍起前由純滾動變為滑動的現象，能以理論導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件，數據討論合宜，但聚焦在呈現運動行為，建議可以再就物理蘊含再作深入探討。或可再擴充實驗參數範圍，尋找是否能顯現新穎現象。

作品簡報

跳躍圈躍起與滑動的力學條件分析

摘要

本研究探討跳躍圈躍起與跳躍圈滑動的力學條件。首先以剛體力學理論導出平面與斜面上跳躍圈躍起的條件，接著使用雷射切割機自製圓環並以強力磁鐵當作加掛重物，在平面與斜面上進行實驗，手機錄製影片後使用Tracker進行分析，確定跳躍圈躍起的條件 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，理論分析與實驗數據吻合。此外在影片中發現跳躍圈在躍起前，會先從純滾動變為滑動，此一現象稱之為純滾動破壞，我們也以剛體力學理論導出了斜面上跳躍圈從純滾動變為滑動的條件，手機錄製影片後使用Tracker進行分析，確定實驗數據與理論公式相符。

壹、研究動機

跳躍圈(hopping hoop)指的是在圓環邊緣加上重物，接著讓圓環滾動後躍起的現象；跳躍圈憑空跳起引起數學家與物理學家的興趣，網路上如youtube也可以找到不少相關的影片。

我們對於跳躍圈躍起的現象很感興趣，預定利用理論分析與實驗數據來探討這個現象，除了從平面上躍起之外，也進一步推廣到斜面上的躍起的情況；此外跳躍圈躍起前會從純滾動變為滑動，此一現象稱為純滾動破壞，在網路影片與論文上較少有純滾動破壞相關的討論，我們也會分析並探討這個現象。

貳、研究目的

- (一)由剛體力學理論，導出跳躍圈躍起的條件。
- (二)在平面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式。
- (三)在斜面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式。
- (四)由剛體力學理論，導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件。
- (五)在斜面上進行實驗，驗證跳躍圈由純滾動變為滑動的理論公式。

參、文獻回顧

表(一)文獻回顧整理與比較表

論文作者與論文年份	平面上跳躍圈躍起條件		斜面上跳躍圈躍起條件		平面上跳躍圈純滾動破壞		斜面上跳躍圈純滾動破壞	
	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據	理論證明	實驗數據
Tadashi F. Tokieda (1997)	有	無	無	無	無	無	無	無
James P. Butler (1999)	有	無	無	無	有	無	無	無
W. F. D. Theron (2000)	有	無	有	無	有	無	有	無
Andrew Taylor、Mary Fehrs (2010)	有	無	有	有	無	無	無	無
M. F. Maritz、W. F. D. Theron (2012)	有	有	無	無	有	有	無	無
Rod Cross (2021)	有	有	無	無	無	無	無	無
本科展報告	有	有	有	有	有	有	有	有

肆、研究設備及器材

表(二)研究設備及器材列表

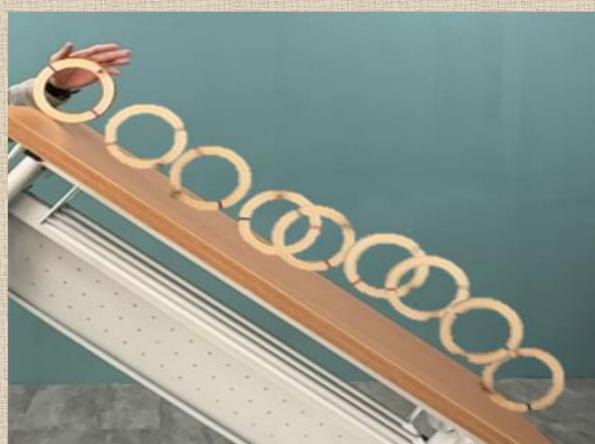
自製雷射切割木製圓環	強力磁鐵(加掛重物)	手機(攝影用)	手機架	砂紙、砂帶(改變摩擦係數)	桌子(作為斜面)	Tracker(數據分析軟體)
						

伍、研究過程及方法

一、實驗裝置架設圖



圖(一)平面跳躍圈實驗；此圖為多張照片疊圖



圖(二)斜面跳躍圈實驗圖；此圖為多張照片疊圖

二、實驗原理

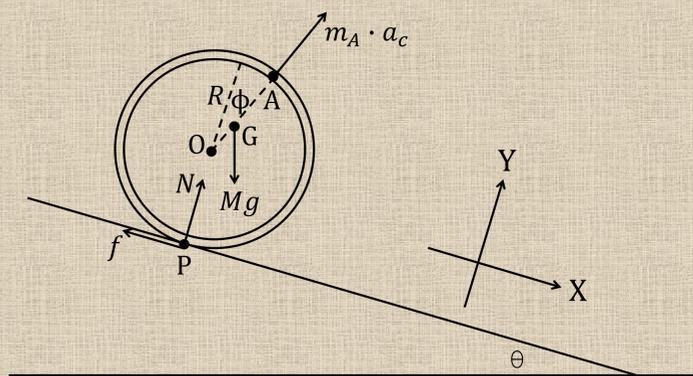
(一)由剛體力學理論導出跳躍圈躍起的條件

1、參數說明與跳躍圈躍起的理論證明

圓環的質量為 m_h 、環半徑為 R ，環心的位置為 O ，加掛重物的質量為 m_A 、位置為 A ，圓環與斜面的接觸點為 P ，圓環與加掛重物的重心為 G 、圓環與加掛重物的總質量 $M = m_h + m_A$ ，定義質量比 $\gamma \equiv \frac{m_A}{M} = \frac{m_A}{m_h + m_A}$ ；如圖

(三)所示。

斜面的角度為 θ 、沿著斜面的方向為 X 方向、垂直斜面的方向為 Y 方向， OA 連線與 Y 方向的夾角為 ϕ ；圓環與加掛重物系統受到重力(Mg)、正向力(N)、摩擦力(f)，若觀察者在環心同以角速度 $\omega = \phi'$ 旋轉，則加掛重物受到離心力($m_A \cdot R\omega^2 = m_A \cdot a_c$)。跳躍圈躍起的條件為 $N = 0$ ，此時 $m_A \cdot a_c \cdot \cos\phi > Mg \cdot \cos\theta$ ，移項可得 $\frac{m_A}{M} \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cdot \cos\theta$ ，其中 $\gamma \equiv \frac{m_A}{M}$ 代入，可得跳躍圈躍起的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cdot \cos\theta$ 。



圖(三)實驗裝置示意圖

(二) 利用剛體力學理論，導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件

1、以下考慮X方向、Y方向與旋轉上的牛頓運動定律。參數說明與上述相同。

$$X\text{方向} : m_h g \sin\theta + m_A g \sin\theta + m_A R \omega^2 \sin\phi - f = (m_h + m_A) \cdot a$$

$$Y\text{方向} : m_h g \cos\theta + m_A g \cos\theta = N + m_A R \omega^2 \cos\phi$$

$$\text{旋轉方向} : f \cdot R + m_A g R \sin(\theta + \phi) = I \cdot \alpha = (m_h R^2 + m_A R^2) \cdot \alpha$$

結合上述三個公式，以及搭配純滾動的條件 $a = R \cdot \alpha$ ，可得出摩擦力 $f = -m_A g R \sin(\theta + \phi) + \frac{m_h g \sin\theta + m_A g \sin\theta + m_A R \omega^2 \sin\phi + m_A g R \sin(\theta + \phi)}{2}$ ，

考慮圓環與斜面的摩擦係數為 μ ，當摩擦力大於最大靜摩擦力時 ($f > \mu N$)，即破壞圓環的純滾動，圓環的運動行為由純滾動改為滑動。

(三) 實驗過程與分析方法

1、實驗一、二：在平面與斜面上進行跳躍圈實驗，利用實驗數據驗證理論公式

(1)錄製圓環的運動過程用 *Tracker* 追蹤圓環的加掛重物(A)、圓環直徑上對稱端點(B、C)，由於BC線段中點為環心，故環心(x,y)座標為

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) ; \text{如圖(四)所示。}$$

(2)向心加速度 $a_c = \frac{V^2}{R}$ ，而 V 為環上端點相對於環中心的切線速度 $V = \sqrt{(V_{x_A} - V_{x_0})^2 + (V_{y_A} - V_{y_0})^2}$ 。其中 V_{x_A} 為端點速度沿X軸

量、 V_{y_A} 為端點速度沿Y軸分量、 V_{x_0} 為環中心速度沿X軸分量、 V_{y_0} 為環中心速度沿Y軸分量，其中 $\cos\phi = \frac{x_A - x_0}{R}$ 。

(3)tracker播放幀數為 $60fps$ ，而拍攝的手機幀數為 $240fps$ ，故時間需除四以得實際時間。

(4)代入公式 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ ，驗證跳起時之條件是否符合理論預測。

2、實驗三：研究跳躍圈的運動過程，利用理論導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件，並利用實驗數據驗證理論公式

(1)透過公式 $f > \mu N$ ，計算理論開始滑動的時間。

a、利用Excel將落下高度可能值代入公式，比對 f 和 μN 之間的大小，求出理論上圓環開始滑動的時間。

(2)透過tracker分析圓環運動過程並透過數據推出實際滑動的時間，如圖(六)與圖(七)。

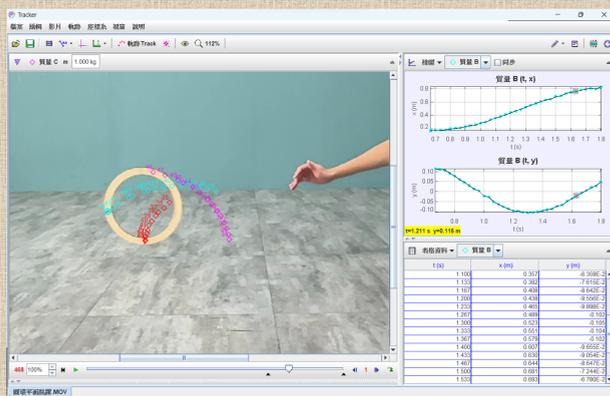
a、若圓環的運動為純滾動時，會遵守公式 $V = R\omega$ ；故當圓環開始滑動時公式 $V = R\omega$ 即不成立。

b、取 V/ω 對角度 ϕ 作圖，在趨勢線斜率變化時，即為圓環破壞純滾動開始滑動的時間。

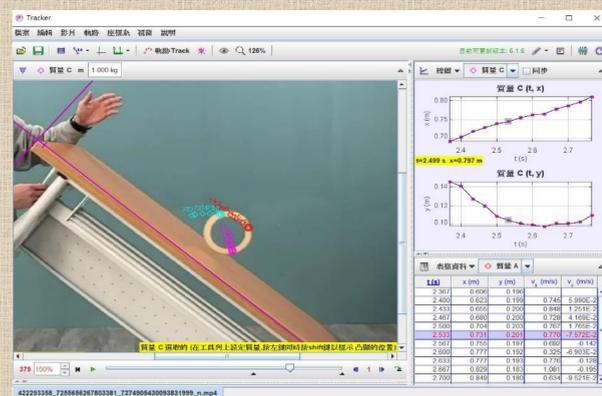
c、再將此時圓環的落下高度與理論落下高度進行比較。



圖(四)平面用跳躍圈 外直徑0.25m、
內直徑0.23m。
圖(五)斜面用跳躍圈 外直徑0.15m、
內直徑0.11m。



圖(六)Tracker分析平面上的圓環跳躍



圖(七)Tracker分析斜面上的圓環跳躍

陸、研究結果與討論

一、實驗一與實驗二：在平面與斜面上進行跳躍圈實驗，驗證跳躍圈躍起的條件 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cdot \cos\theta$

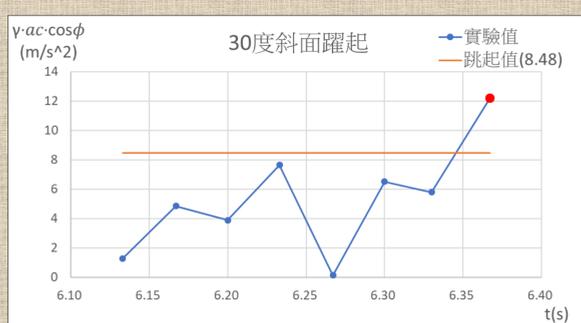
表(三)實驗一與實驗二的實驗結果列表

編號	質量比(γ)	環半徑R(m)	斜面角度 $\theta(^{\circ})$	$V^2(m^2/s^2)$	$a_c(m/s^2)$	$\cos\phi$	$\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi(m/s^2)$	$g \cos\theta(m/s^2)$	是否躍起
1	0.79	0.125	0	3.33	28.94	0.92	17.46	9.80	是
2				3.28	28.60	0.98	22.20		是
3				2.90	18.99	0.95	14.24		是
4				3.98	7.33	0.74	4.30		否
5				0.29	2.51	0.88	1.75		否
7	0.57	0.075	30	1.58	21.01	0.82	9.81	8.48	是
8				1.79	23.94	0.82	11.20		是
9				2.07	27.56	0.81	12.76		是
11	0.57	0.075	40	2.69	35.86	0.79	16.3	7.51	是
12				5.66	75.40	0.79	34.2		是
13				3.86	51.46	0.66	19.5		是
15				1.33	17.70	0.72	7.34		是
16	0.57	0.075	50	1.24	16.59	0.73	6.93	6.29	是
17				1.21	16.17	0.73	6.77		是

二、實驗一與實驗二：平面、斜面角度30°、斜面角度50°的 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi$ 隨時間變化圖



圖(八)實驗值隨時間變化圖：平面



圖(九)實驗值隨時間變化圖：30度斜面



圖(十)實驗值隨時間變化圖：50度斜面

三、實驗三：研究跳躍圈的運動過程，利用理論導出跳躍圈從純滾動變為滑動的條件，並利用實驗驗證

(一) 代入理論公式，導出跳躍圈在不同角度的斜面，從純滾動變為滑動時的理論落下高度y (m)

表(四) 破壞純滾動理論數據，斜面 $\theta = 30^\circ$

y_1 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$	$R\omega^2$ (m/s ²)	f(N)	μN (N)
0.27	0.1498	10.0761	0.0571	0.0660
0.28	0.1500	10.4496	0.0573	0.0612
0.29	0.1503	10.8229	0.0575	0.0565
0.30	0.1506	11.1964	0.0578	0.0517
0.31	0.1509	11.5698	0.0580	0.0469

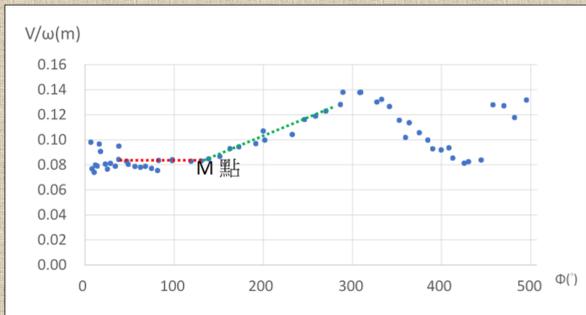
表(五) 破壞純滾動理論數據，斜面 $\theta = 40^\circ$

y_2 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$	$R\omega^2$ (m/s ²)	f(N)	μN (N)
0.19	0.1887	7.1158	0.0723	0.0814
0.20	0.1891	7.4904	0.0725	0.0766
0.21	0.1894	7.8651	0.0727	0.0718
0.22	0.1897	8.2399	0.0728	0.0670
0.23	0.1901	8.6147	0.0733	0.0622

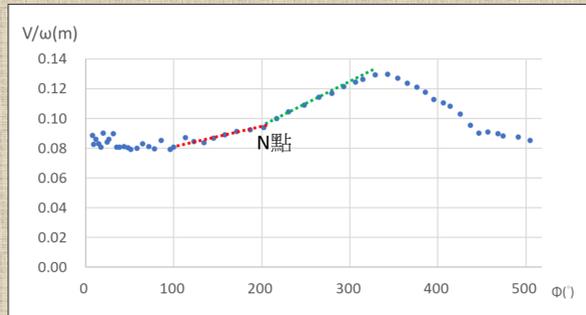
表(六) 破壞純滾動理論數據，斜面 $\theta = 50^\circ$

y_3 (m)	$m_A g R \sin(\theta + \phi)$	$R\omega^2$ (m/s ²)	f(N)	μN (N)
0.11	0.2212	4.1347	0.0857	0.0919
0.12	0.2216	4.5107	0.0850	0.0870
0.13	0.2219	4.8667	0.0859	0.0822
0.14	0.2222	5.2628	0.0861	0.0774
0.15	0.2225	5.6388	0.0862	0.0726

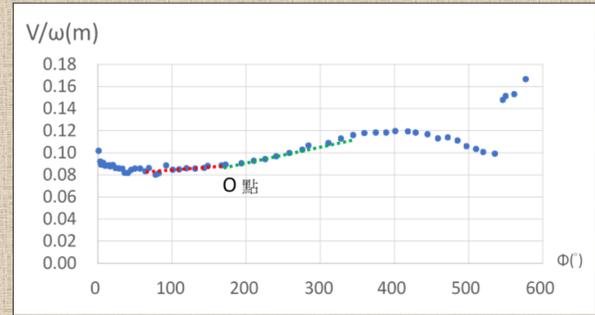
(二) 利用 V/ω 對 ϕ 的作圖判斷圓環開始滑動的角度，並回推圓環落下的垂直高度y (m)



圖(十一)破壞純滾動實驗，斜面角度 $\theta = 30^\circ$ ； $\phi = 151.02^\circ$ 破壞純滾動；落下高度0.266(m)



圖(十二)破壞純滾動實驗，斜面角度 $\theta = 40^\circ$ ； $\phi = 202.12^\circ$ 破壞純滾動；落下高度0.185(m)



圖(十三)破壞純滾動實驗，斜面角度 $\theta = 50^\circ$ ； $\phi = 173.00^\circ$ 破壞純滾動；落下高度0.173(m)

(三) 破壞純滾動的實驗結果列表比較

表(七) 破壞純滾動，不同角度下理論與實驗比較表

斜面角度	30°	40°	50°
理論下落高度(m)	0.290	0.210	0.130
實驗落下高度(m)	0.266	0.185	0.173

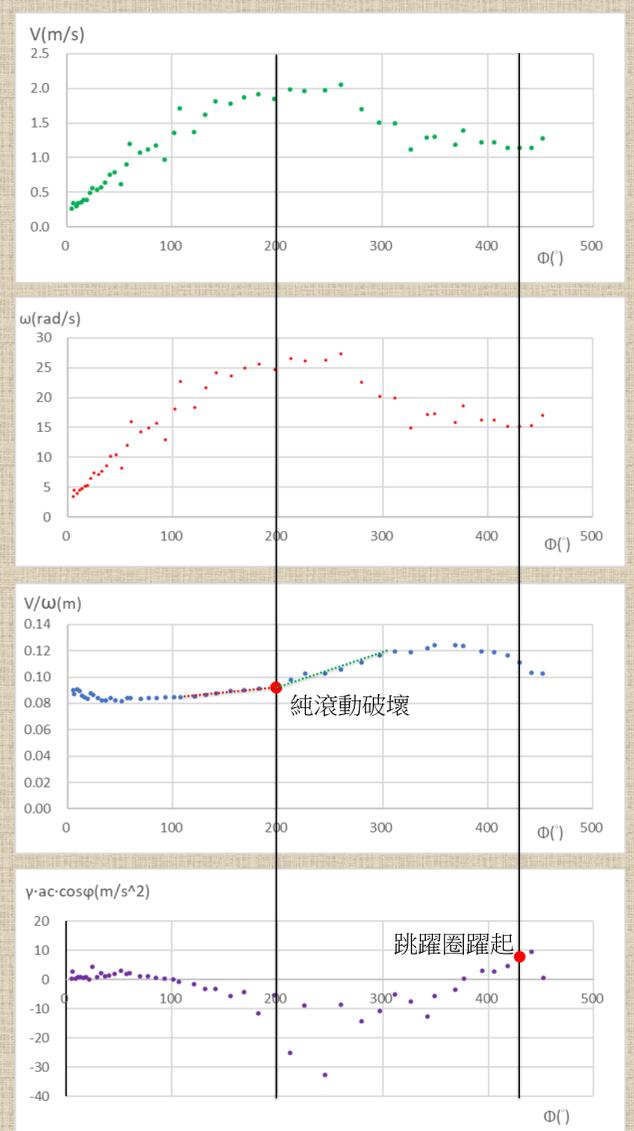
表(八) 破壞純滾動，不同摩擦係數下理論與實驗比較表

不同斜面($\theta = 40^\circ$)	摩擦係數	破壞純滾動 理論高度(m)	破壞純滾動 實驗高度(m)
原本的斜面	0.442	0.210	0.185
鋪上砂紙(號數150)	0.840	0.280	0.320

由表(七)與表(八)中可以看到理論與實驗趨勢吻合，斜面角度越大、摩擦係數越小，則越容易破壞純滾動。

(四) 實驗結果討論

- 1、選擇斜面40度，將 v 、 ω 、 v/ω 、 $\gamma a_c \cos\phi$ 對角度(ϕ)的函數關係畫在圖(十四)中，比較四個物理量。
- 2、跳躍圈從純滾動轉變為滑動的 $\theta = 202^\circ$ ，在轉過的角度介於 0° 到 202° 之間，跳躍圈的運動為純滾動，故符合 $V = R \cdot \omega$ 的公式，也可看出速度與角速度隨著時間等比例增加。
- 3、在 $\theta = 202^\circ$ 到 $\theta = 306^\circ$ 之間歷經減速過程，此段過程是由離心力所造成，與純滾動轉變為滑動無關。
- 4、在 $\theta = 430^\circ$ 時 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ ，此時的跳躍圈躍起離開地面。



圖(十四) v 、 ω 、 v/ω 、 $\gamma a_c \cos\phi$ 對角度(ϕ)關係圖

柒、結論

- 一、我們參考並且簡化論文上的證明，導出斜面上跳躍圈躍起的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ ，考慮 $\theta = 0^\circ$ 即可得到平面上跳躍圈躍起的條件為 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ；若使用旋轉座標系分析，可讓證明過程更簡潔易懂。
- 二、我們使用雷切製作圓盤，再將強力磁鐵吸在兩旁當作加掛重物，分析了九個平面上跳躍圈的運動影片；實驗中若符合跳躍條件 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g$ ，則可以成功跳躍；反之則不會跳躍。所有實驗結果均與理論公式吻合。
- 三、我們使用雷切製作有洞圓盤，再將強力磁鐵塞入當作加掛重物，在底角 30° 、 40° 、 50° 斜面上進行了九次實驗，九個實驗均成功跳躍，所有實驗結果均符合 $\gamma \cdot a_c \cdot \cos\phi > g \cos\theta$ 的理論公式。
- 四、平面與斜面的實驗均觀察跳躍圈在跳躍前會先減速，推測原因為跳躍圈從純滾動轉變為滑動，並且利用剛體力學導出開始滑動的條件為 $-m_A g R \sin(\theta + \phi) + \frac{m_h g \sin\theta + m_A g \sin\theta + m_A R \omega^2 \sin\phi + m_A g R \sin(\theta + \phi)}{2} > \mu(m_h g \cos\theta + m_A g \sin\theta - m_A R \omega^2 \cos\phi)$ ，實驗結果發現破壞純滾動的時間與明顯減速時間不同，進一步發現明顯減速的現象與離心力之關係較大。
- 五、我們分析影片中環心速度與繞環心角速度的關係，驗證跳躍圈從純滾動轉變為滑動的理論公式與實驗結果符合。

捌、參考文獻資料

- 1、Andrew Taylor、Mary Fehrs(2010)。The dynamics of an eccentrically loaded hoop。American Association of Physics Teachers。第78卷第5期。496-498。
- 2、James P. Butler(1999)。Hopping Hoops Don't Hop。The American Mathematical Monthly。106：6，565-568。
- 3、M. F. Maritz、W. F. D. Theron(2012)。Experimental verification of the motion of a loaded hoop。American Association of Physics Teachers。American Association of Physics Teachers。第80卷第7期。594 - 598。
- 4、Rod Cross(2021)。Physics of a hopping hoop。Physics Education。第56卷。
- 5、Tadashi F. Tokieda(1997)。The Hopping Hoop。The American Mathematical Monthly。104：2，152- 154。
- 6、W. F. D. Theron(2000)。The rolling motion of an eccentrically loaded wheel。American Association of Physics Teachers。第68卷。

本海報中所有圖片，除研究設備與器材中的Tracker的圖片為網路圖片外，其餘圖片均為作者自行繪製或拍攝。