

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051812

旋轉奧秘—吸管抽水之原理探討

學校名稱： 高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 陳柏維 高二 李鎧任 高二 胡維中	指導老師： 盧政良 蔡萍實
---	-----------------------------

關鍵詞： 灑水器、離心力、體積流率

摘要

這項研究針三角形狀吸管製成的簡易水泵進行探討。通過將三角形吸管浸入水中並繞垂直軸旋轉，水可以通過吸管流出。研究的目的是瞭解幾何形狀和其他相關參數對體積流率的影響。在理論模型中建構以旋轉座標系描述流體相對運動的方法。且考慮了外部力矩對控制體積的總和以及通過控制表面的角動量流動速率。在實驗中先以紅外線探測器連接至 Arduino 找出不同幾何條件產生抽水現象之邊界條件。再以可記錄數據之電子天平量測質量對時間關係，以得出不同幾何情形之體積流率。再以水滴之拋射距離得出最終速度，其中最終速度是指水流出吸管時的速度，以探討相關變因對其影響。數據分析中以 Visual Studio Code 和 Python 繪出擬合線與理論線進行比對，得出推導理論與實驗是相符合的。

壹、 實驗動機

在學校體育課的時候，每每可以見到同學們在網球場上揮灑汗水的身影，而伴隨著那些汗水的還有球場上的灑水機。當我們去仔細觀察時，我們可以發現灑水器轉的速度越快，噴出的水越多越遠。我們希望可以藉由一個簡單的裝置去複製出一個灑水器的模型，並研究產生此現象的原因以及這個裝置對灑水造成的影響和成因與能灑水的邊界條件。

我們於是利用了吸管做成了一個簡易的裝置，並著重探討以下問題：首先，我們將調整吸管的直徑、長度、角度、浸水深度。接著，我們將觀察飛散的水滴的速度與體積流率。透過改變相關變因，我們希望瞭解這些因素對水滴飛散及體積流率的影響。最後，我們將探討水滴的最終速度。透過調整噴射角度和角速度分佈，我們預測這些因素可能影響最終速度以及體積流率。

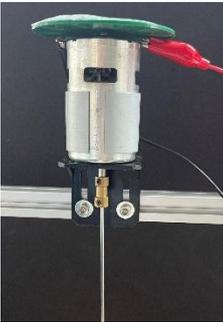
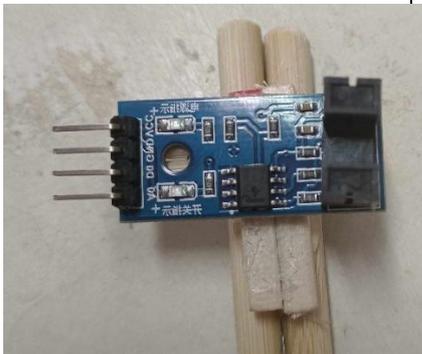
貳、 實驗目的

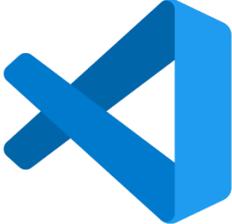
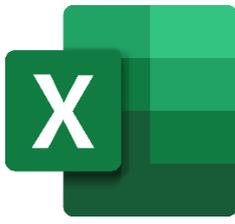
- 一、 探討灑水的模型及原理
- 二、 找出現象發生之邊界條件
- 三、 改變吸管的幾何條件與旋轉速度對體積流率的影響
- 四、 改變吸管的幾何條件與旋轉速度對最終速度

參、 研究設備及器材

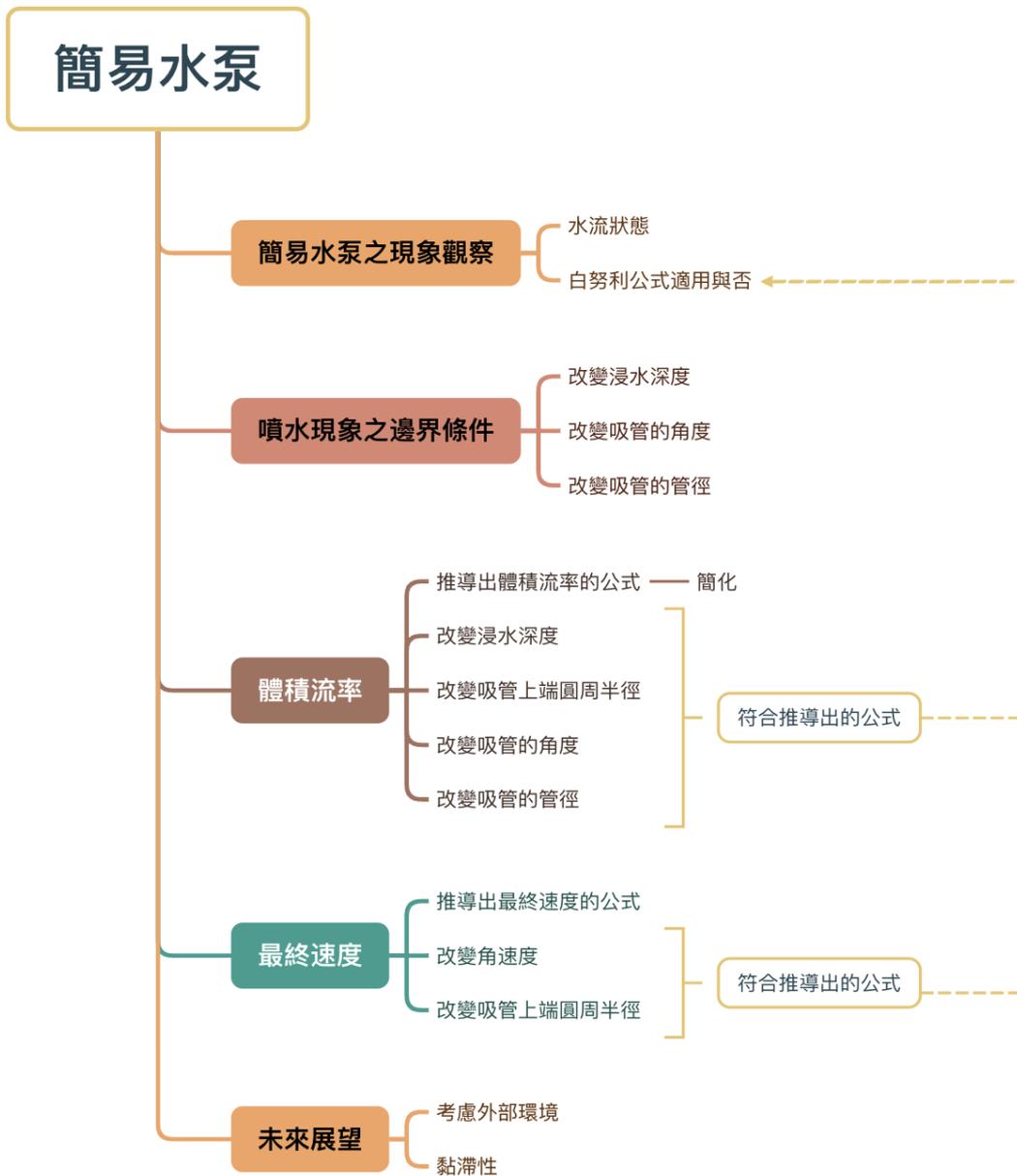
一、器材：馬達、可變電阻、容器、不同吸管、Sky300（電子秤）、ADIO-SPEED2（紅外線感測器）、RS232（序列資料通訊界面）、Arduino Uno、電源供應器。

二、儀器：筆電（含 Python、Visual Studio Code、Excel、Arduino IDE 軟體）、攝影器材

實驗器材圖		
馬達	可變電阻	容器
		
不同吸管	電源供應器	Arduino Uno
		
Sky300	ADIO-SPEED2	RS232
		

實驗儀器及軟體圖			
Python	Visual Studio Code	Excel	Arduino IDE
			

研究架構：

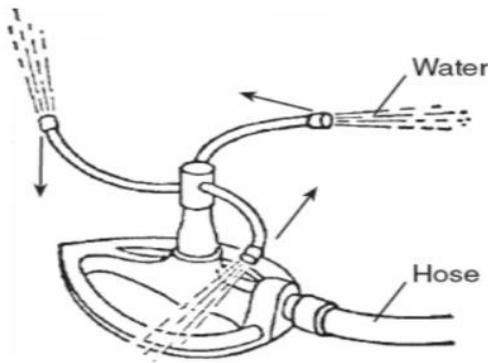


肆、 研究過程及方法和結果

一、 理論推導與公式討論

(一) 一般的灑水器工作原理

在討論我們的模型前，我們先以一般灑水器（圖一）的案例進行討論：

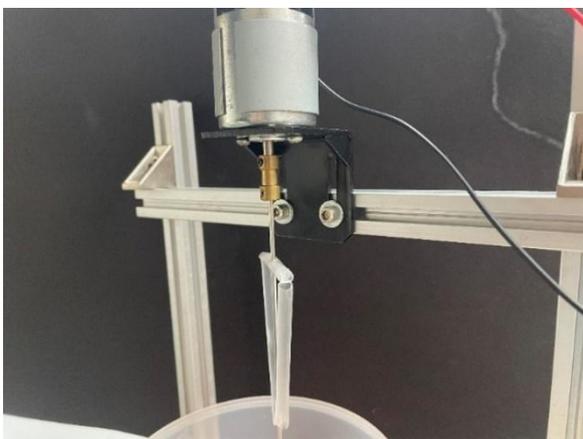


(圖一) 一般灑水器

一般的灑水器又稱為離心泵（Centrifugal pumps），顧名思義其工作原理是由旋轉參考系中的假想力（離心力 Centrifugal force）所產生的。

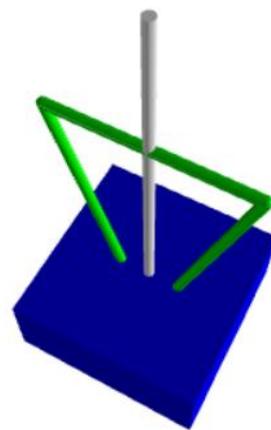
(二) 我們的實驗模型

為了模擬灑水器的情況，我們將吸管折成三角形的形狀，並在折口處剪出開口讓水可以進出（圖二），將水浸入一定深度後利用馬達帶動轉動，而由於水在傳輸的過程中沒有充滿整個管徑，截面積不固定，因此我們無法用白努利方程簡化的描述流體運動，必須建立一個單獨的推導方法。



(圖二) 吸管和馬達裝置

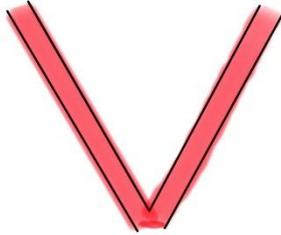
4



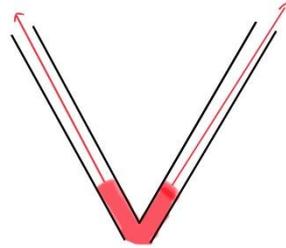
(圖三) 3D 示意圖

(三) 理論推導及建模

從實驗觀察我們發現水在吸管中並不會充滿整個管徑（圖四），而是沿著內壁向外噴出（圖五），且因為水在管內中截面積的變化過於複雜，因此我們會以線性流場簡化去做推導及建模。



（圖四）水充滿整個吸管

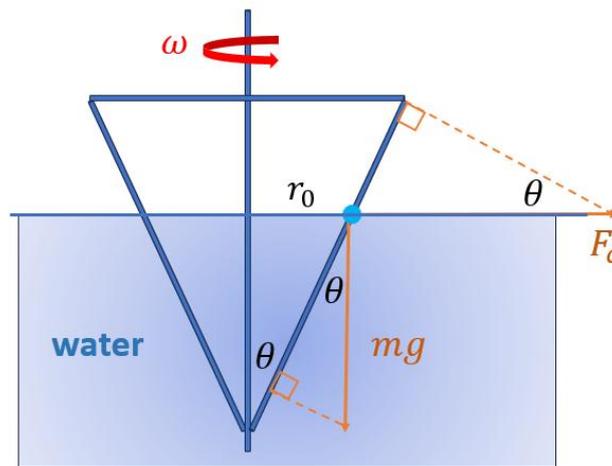


（圖五）水不只沿著管壁

1. 臨界角速度（邊界條件）：

首先我們以旋轉坐標系考慮離心力的影響，為了使水能夠被抽出，離心力給予的上升力必須能夠抵抗重力造成的下滑力（圖六），不考慮水的黏滯力：

$$F_c \sin \theta \geq mg \cos \theta$$



（圖六）離心力和重力

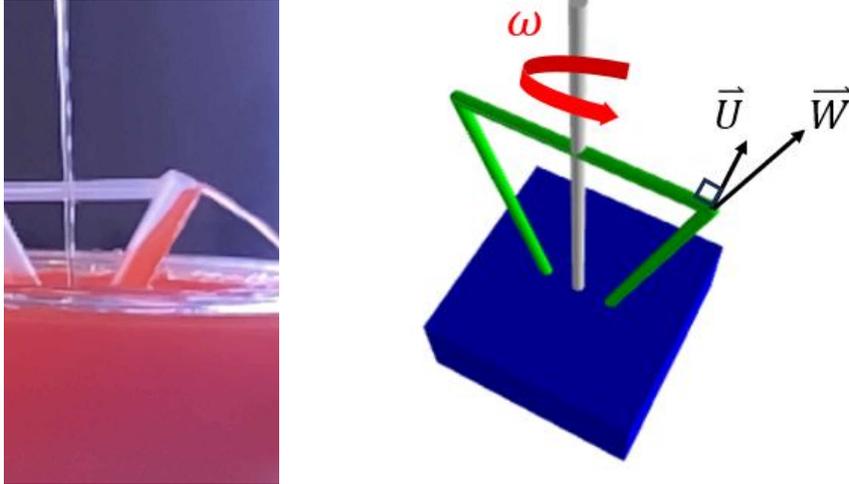
將方程式移項後得到：

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan \theta}}$$

可知各變因的邊界關係式，但實驗中為了方便將測定其餘因素對臨界角速度的影響。

2. 體積流率 (Q) :

一般而言，幫浦的水會充滿整個管徑，但斜向的離心泵中的水會沿管壁運動，因此我們會以相對運動的向量面向切入：



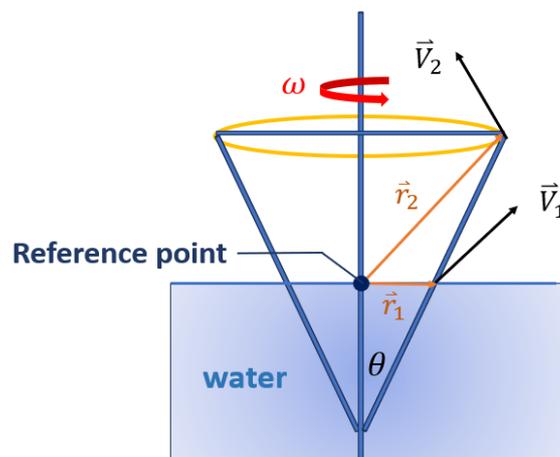
(圖七) 水的運動情況與相對運動示意圖

首先考慮絕對速度為旋轉坐標系中相對運動速度及切線速度的向量和 (圖七) :

$$\vec{V}_{\text{水地}} = \vec{W}_{\text{水吸}} + \vec{U}_{\text{吸地}}$$

考慮控制體積上作用的外部力矩總和以及通過控制表面的角動量流動速率：

$$\sum (\vec{r} \times \vec{F}) = \int_{cs} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho V \cdot \hat{n} dA$$



(圖八) 相對運動示意圖

我們利用力矩和等於角動量變化率可得（定參考點為水面和吸管轉軸的接觸點）：

$$\vec{T} = -\vec{r}_1 \times (\dot{m}_1 \vec{V}_1) + \vec{r}_2 \times (\dot{m}_2 \vec{V}_2)$$

接著我們將流體定義為穩流（無黏滯力、固定點速度和壓力不隨時間改變），可知

各點流量一樣 $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$

$$\vec{T} = \dot{m}(\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1)$$

且可將質量流量轉換成體積流量乘以流體密度 $\dot{m} = \rho Q$ ：

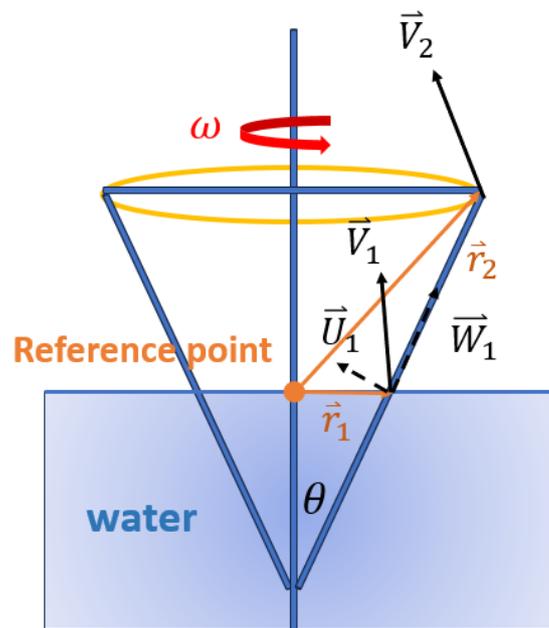
$$\vec{T} = \rho Q(\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1)$$

而對於旋轉系統來說，其功率會等於力矩內積角速度：

$$P = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$$

由此可推得：

$$P = \rho Q \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1)$$



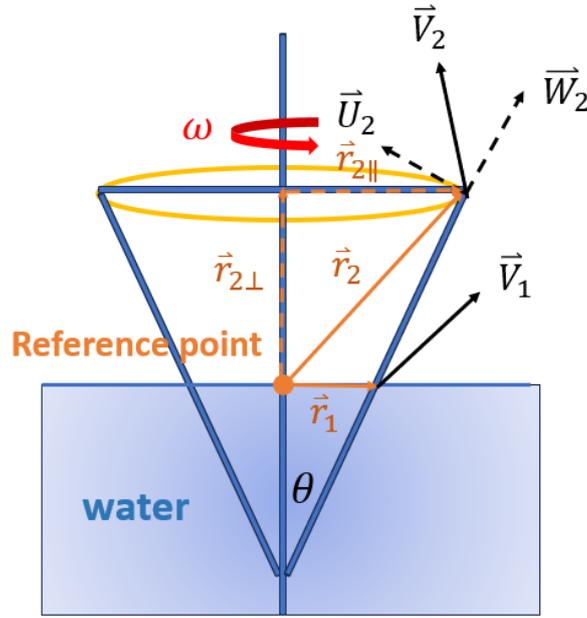
（圖九）相對運動示意圖

如前所述，絕對速度為切線速度及旋轉坐標系中相對運動速度的向量和：

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{V}_1) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times (\vec{U}_1 + \vec{W}_1))$$

由上式 $\vec{\omega} \parallel (\vec{r}_1 \times \vec{U}_1)$ & $\vec{\omega} \perp (\vec{r}_1 \times \vec{W}_1)$ ：

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times (\vec{U}_1 + \vec{W}_1)) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{U}_1) = r_1^2 \omega^2$$



(圖十) 相對運動示意圖

如前所述，絕對速度為切線速度及旋轉坐標系中相對運動速度的向量和：

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2) = \vec{\omega} \cdot ((\vec{r}_{2\perp} + \vec{r}_{2\parallel}) \times (\vec{U}_2 + \vec{W}_2))$$

由 $\vec{\omega} \parallel (\vec{r}_{2\perp} \times \vec{U}_2)$ & $\vec{\omega} \parallel (\vec{r}_{2\perp} \times \vec{W}_2)$ & $\vec{\omega} \parallel (\vec{r}_{2\parallel} \times \vec{W}_2)$ & $\vec{\omega} \perp (\vec{r}_{2\parallel} \times \vec{U}_2)$ ：

$$\vec{\omega} \cdot ((\vec{r}_{2\perp} + \vec{r}_{2\parallel}) \times (\vec{U}_2 + \vec{W}_2)) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{2\parallel} \times \vec{U}_2) = r_{2\parallel}^2 \omega^2$$

最後可得：

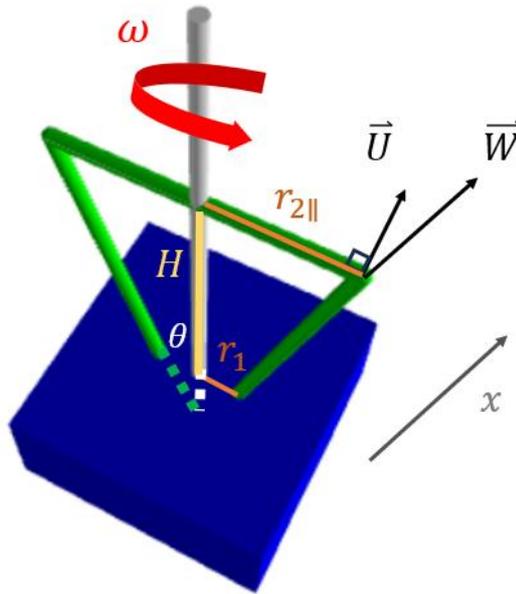
$$P = \rho Q (r_{2\parallel}^2 - r_1^2) \omega^2$$

其中 Q 為體積流率，即為泵送速度，為實驗的應變變因。由於我們無法確切得知功率大小（功率會受到太多因素影響）且功率和角速度為一對一函數，當我們固定轉速，功率也是定值，可得：

$$\rho Q \propto \frac{1}{r_{2\parallel}^2 - r_1^2}$$

3. 最終速度：

在我們的模型中只考慮旋轉坐標系中離心力和重力對流體的影響，因此可寫出以下方程式：



(圖十一) 相對運動示意圖

$$\sum F = -mg\cos\theta + F_c\sin\theta = m \frac{dW}{dt}$$

而後我們定義 x 方向為沿管壁方向，並利用連鎖律可得出下式：

$$-mg\cos\theta + m\omega^2 x \sin^2\theta = m \frac{dW}{dx} \frac{dx}{dt} = mW \frac{dW}{dx}$$

接著對管壁路徑做積分：

$$\int_0^W W dW = \int_{\frac{r_1}{\sin\theta}}^{\frac{r_{2\parallel}}{\sin\theta}} (-g\cos\theta + \omega^2 \sin^2\theta x) dx$$

可得：

$$W = \sqrt{\omega^2(r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

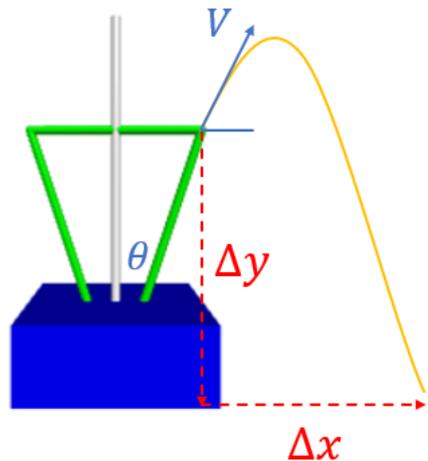
由於上述式求得的是相對速度大小，因此我們還要考慮切線速度：

$$V = \sqrt{U^2 + W^2}$$

展開後：

$$V = \sqrt{(r_{2\parallel}\omega)^2 + \omega^2(r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

但是由於水是連續體，很難定義物體位置，要直接利用 Tracker 追蹤並不準確，因此我們打算利用水在被抽出後的拋體運動反推被抽出時瞬間的速度：



(圖十二) 拋體運動示意圖

可得出水滴著地時間：

$$t = \frac{\sqrt{(W \cos \theta)^2 + 2g\Delta y} + W \cos \theta}{g}$$

水平維度位移：

$$\Delta x = \sqrt{(W \sin \theta)^2 + (r_{2\parallel}\omega)^2} \times t$$

而後經由推導可得：

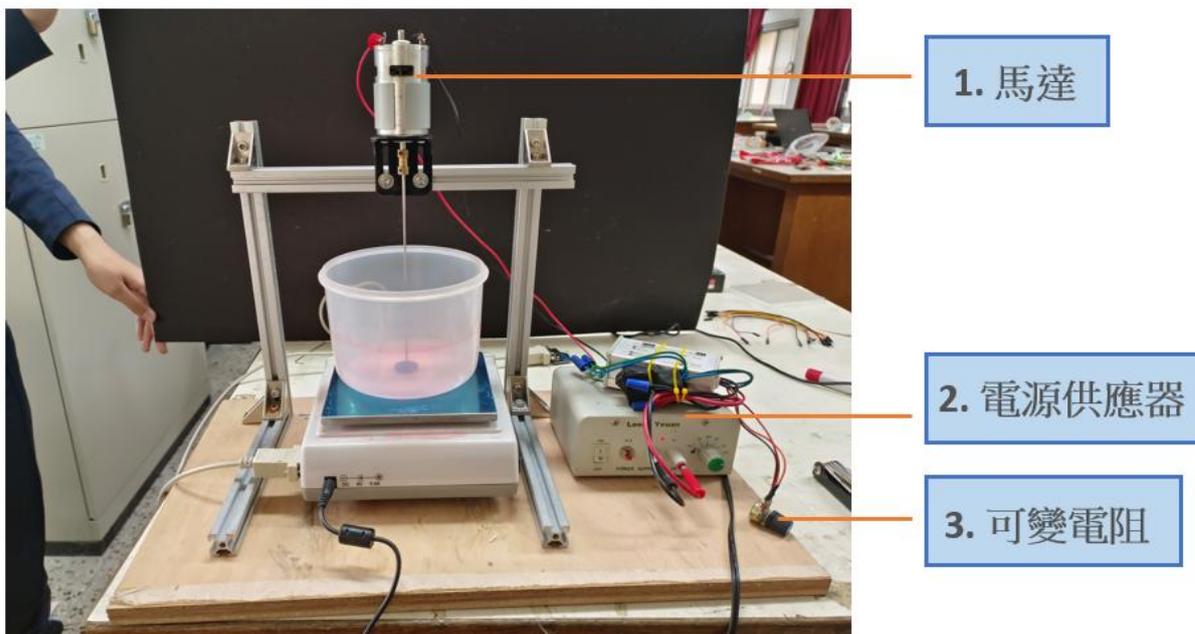
$$V^2 = \frac{3}{2}g\Delta y \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} - 4[(r_{2\parallel}\omega)^2(1 + \cos 2\theta) - \frac{8g(\Delta x)^2}{\Delta y}]$$

由此，我們可從實驗測得的 Δx 結合其餘已知條件反推得出水被抽出的瞬間速度。

二、實驗方法

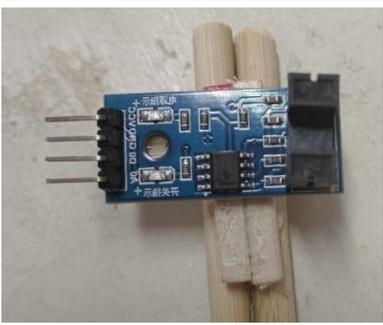
(一) 實驗裝置

在理想中，容器底面積本身應該要是無限大的，這樣水面才不會隨著抽水的過程而減少，但真實情況中，水面會隨著水被抽出而逐漸降低，因此我們打算盡量取短時間內的數據以減少誤差，以下是我們的裝置架設（圖十三）：

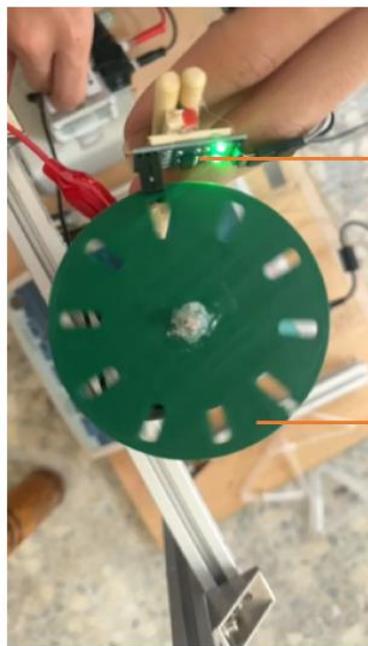


(圖十三) 實驗裝置圖

我們使用了 Sky300（電子天平）、ADIO-SPEED2（紅外線感測器）、RS232（序列資料通訊界面）連接至 Arduino，回傳各時間的數據，而非利用一段時間取平均值，可幫助我們減少實驗誤差。

Sky300	ADIO-SPEED2	RS232
測量當前重量	測量當前轉速	連結至 Sky300
		

紅外線感測器測轉速的方法：



讀取每個洞的間隔時間，
測出轉速

跟著轉軸旋轉

(圖十四) 轉速測量器裝置圖

(二) 數據處理

在實驗設計中，我們利用 Arduino 處理數據測量的部分，以下是各儀器連接到 Arduino IDE 的程式碼：

```
1 #include <SoftwareSerial.h>
2
3 SoftwareSerial mySerial(6, 7); // RX, TX <-----<<<<
4
5 void setup()
6 {
7   Serial.begin(9600);
8   mySerial.begin(9600);
9 }
10
11 void loop()
12 {
13   while (mySerial.available())
14   {
15     Serial.write(mySerial.read()); // You can also
16     delayMicroseconds(10000);
17   }
18 }
19 }
```



```
sketch_feb24a.ino
1 float time1,time2;
2 int pin=2;
3 float Pi = 3.14159;
4 float alltime=0.0;
5
6 void setup() {
7   pinMode(pin, INPUT);
8   Serial.begin(9600);
9 }
10
11 void loop() {
12
13   if(digitalRead(pin)==LOW){
14     time1 = millis()/1000.0;
15     alltime = time1-time2;
16     Serial.print(millis());
17     Serial.print(" ");
18     Serial.println(2*Pi/alltime);
19   }
20   else
21     {time2 = time1;}
```



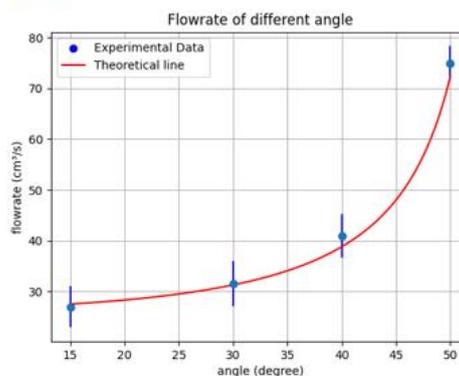
(圖十五) Arduino 程式碼及連接裝置

在理論推導中，公式可以分成三個部分討論：臨界角速度、體積流量、抽出速度，我們將這些公式寫進 Visual Studio Code 中的 Python 進行數值及理論線處理：

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 # Read the data from the Excel file
6 data = pd.read_excel('Condition 1.xlsx')
7
8 # Extract the x and y values from the data
9 x = data['A']
10 y = data['B']
11
12 # Draw error bar
13 error = np.random.uniform(low=0.5, high=1, size=len(x))
14 plt.errorbar(x, y, yerr=error, fmt='o', ecolor='blue')
15
16 # Define parameters
17 r2=3
18 #l=2
19 theta = 15/180*np.pi
20 a = 397.372
21
22 # Create a higher-resolution array of x-values
23 x_smooth = np.linspace(x.min(), x.max(), 100)
24
25 # Calculate the theoretical critical angular velocity for the smooth x-values
26 #theory_y_smooth = a/(np.power(r2,2)-np.power(l*np.tan(theta),2))
27 theory_y_smooth = a/(np.power(r2,2)-np.power(x_smooth*np.tan(theta),2))
28
29 # Create a scatter plot for the experimental data
30 plt.scatter(x, y, label='Experimental Data', color='blue')
31
32 # Plot the smooth theoretical critical angular velocity curve

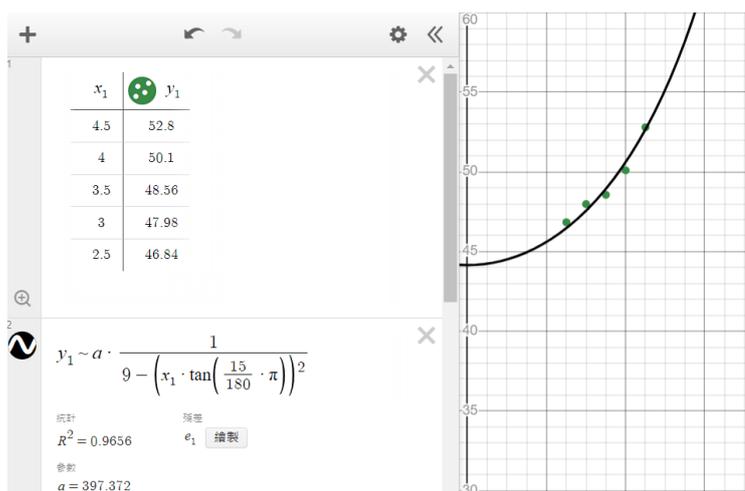
```



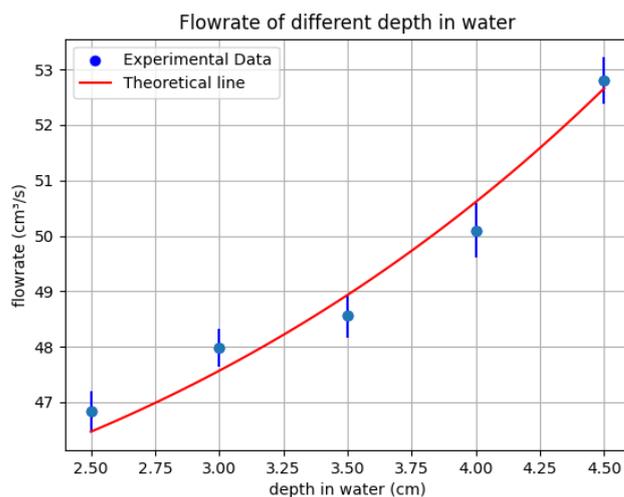
(圖十六) Python 程式碼及作圖

由於體積流率的公式是比例關係式，因此我們打算利用 Desmos 和 Python 進行數據擬合，可以得出相關參數對於體積流率的趨勢變化影響。

以下我們以一常數表達固定轉速和功率下，功率和角速度的比值（圖十七）



(圖十七) Desmos 擬合



(圖十八) Python 作圖

三、實驗結果

研究（一）抽水之邊界條件探討

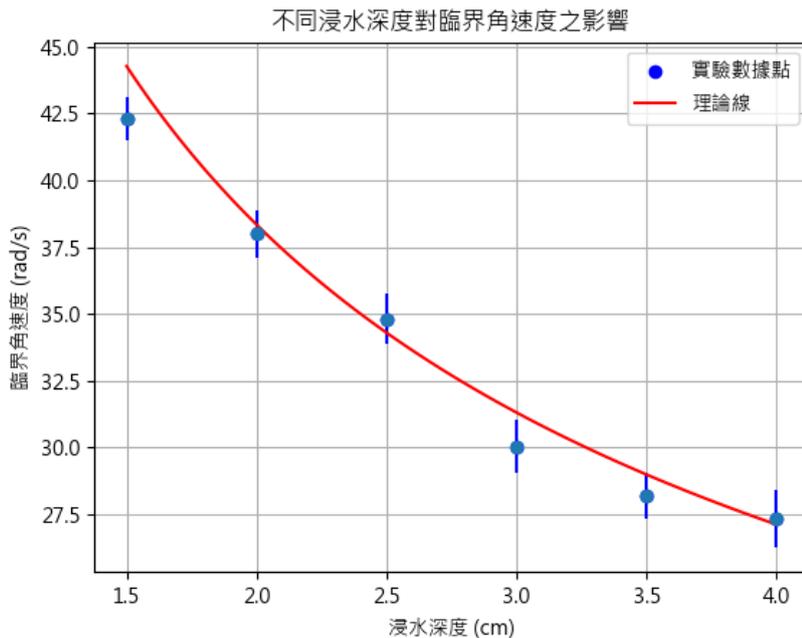
實驗 1-1 浸水深度對臨界角速度之影響

步驟

- (1) 架設簡易水泵。
- (2) 用相同吸管插入不同水深，記錄其抽水角速度。
- (3) 將兩者紀錄於 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (4) 將分析結果以圖表形式輸出，並與理論比較。

結果與討論

從浸水深度對臨界角速度作圖結果如下：



控制變因

$\theta: 30^\circ$

(圖十九) 浸水深度對臨界角速度關係圖

其理論方程式為：

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan \theta}} = \sqrt{\frac{g}{l_0 \tan^2 \theta}}$$

而在圖表中我們可以發現：

- (1) 當浸水深度越大，由於離心力越大，水越容易被抽出來。

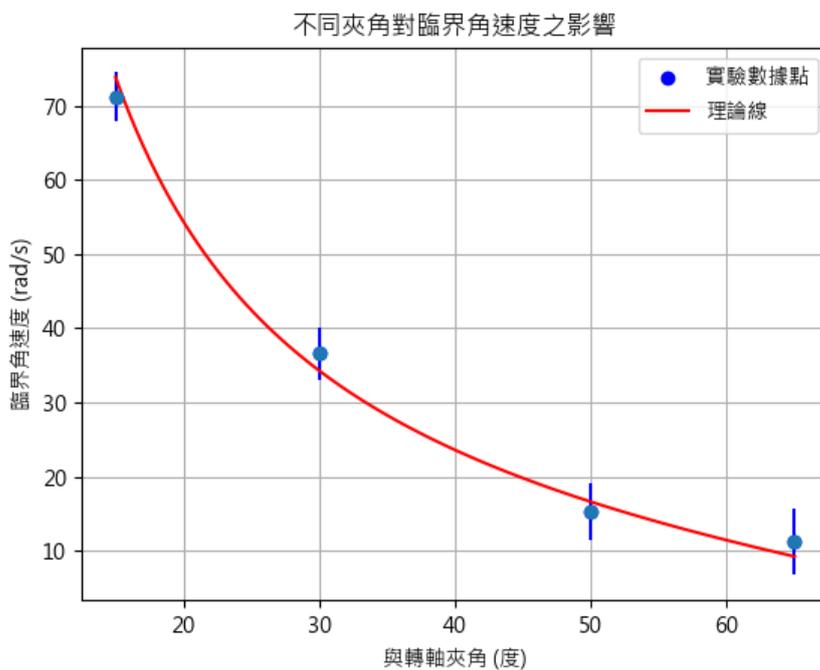
實驗 1-2 與轉軸夾角對臨界角速度之影響

步驟

- (1) 做出多組不同夾角的吸管
- (2) 使其插入水深相同，並記錄其臨界角速度。
- (3) 將兩者數據匯入 Excel 檔案並輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (4) 將理論值與數據進行比對與分析。

結果與討論

從與轉軸夾角對臨界角速度作圖結果如下：



控制變因

$l_0: 2.5cm$

(圖二十) 與轉軸夾角對臨界角速度關係圖

其中理論之方程式為：

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan \theta}} = \sqrt{\frac{g}{l_0 \tan^2 \theta}}$$

從圖表中可以得到：

- (1) 此方程式能夠精確符合實驗的數據點，因此在簡易水泵的推論是正確的。
- (2) 夾角越大誤差愈大，因為夾角越大，正向力越大，與管壁摩擦力亦越大。

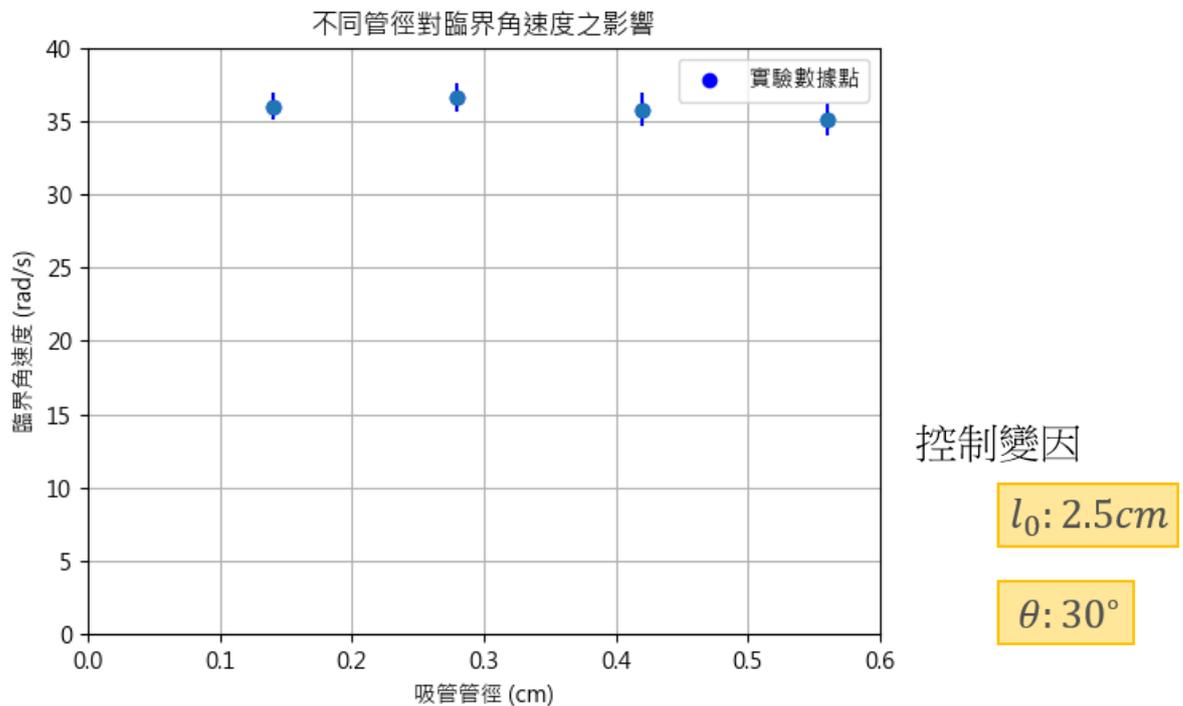
實驗 1-3 吸管管徑對臨界角速度之影響

步驟

- (1) 用不同管徑做出相同的裝置
- (2) 使其插入水深相同，並記錄其臨界角速度。
- (3) 將兩者數據匯入 Excel 檔案並輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (4) 將理論值與數據進行比對與分析。

結果與討論

從管徑大小對臨界角速度作圖結果如下：



(圖二十一) 管徑對臨界角速度關係圖

在實驗數據中可以發現：

- (1) 吸管内徑對臨界角速度影響不大，這是由於水會沿著內壁流動，而非充滿整個管徑，因此對於不同管徑吸管，其結果差異不大。
- (2) 但如果吸管管徑過小可能導致毛細力影響過大，使結果發生改變。

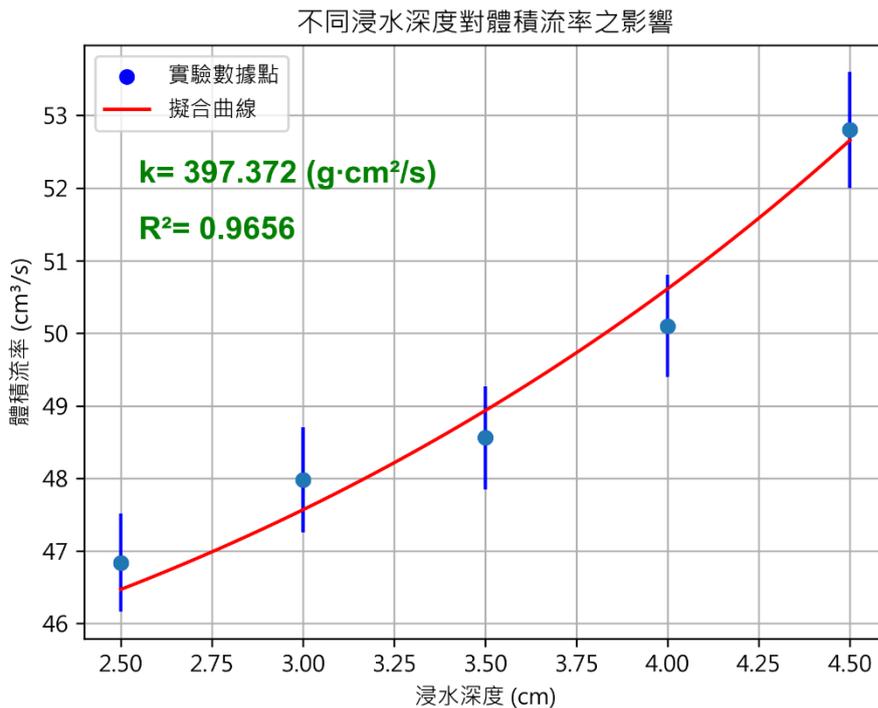
研究（二）體積流量與其相關參數探討

實驗 2-1 浸水深度對體積流量之影響

步驟

- (1) 架設裝置並放於 Sky300 上。
- (2) 改變不同浸水深度。
- (3) 用相同吸管設置且固定角速度。
- (4) 由 Arduino IDE 得到質量和時間的關係，再用密度轉換成體積流率。
- (5) 將上層半徑與體積流率匯入 Excel 後再輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (6) 以上述數據公式進行擬合。

結果與討論



控制變因

$$\begin{aligned}\omega &= 80 \text{ (rad/s)} \\ r_{2\parallel} &= 3 \text{ (cm)} \\ \theta &= 15^\circ\end{aligned}$$

(圖二十一) 吸管浸水深度對體積流率關係圖

此圖表之擬合線為：

$$\rho Q = k \frac{1}{r_{2\parallel}^2 - (l \tan \theta)^2}$$

可以從圖表中得到：

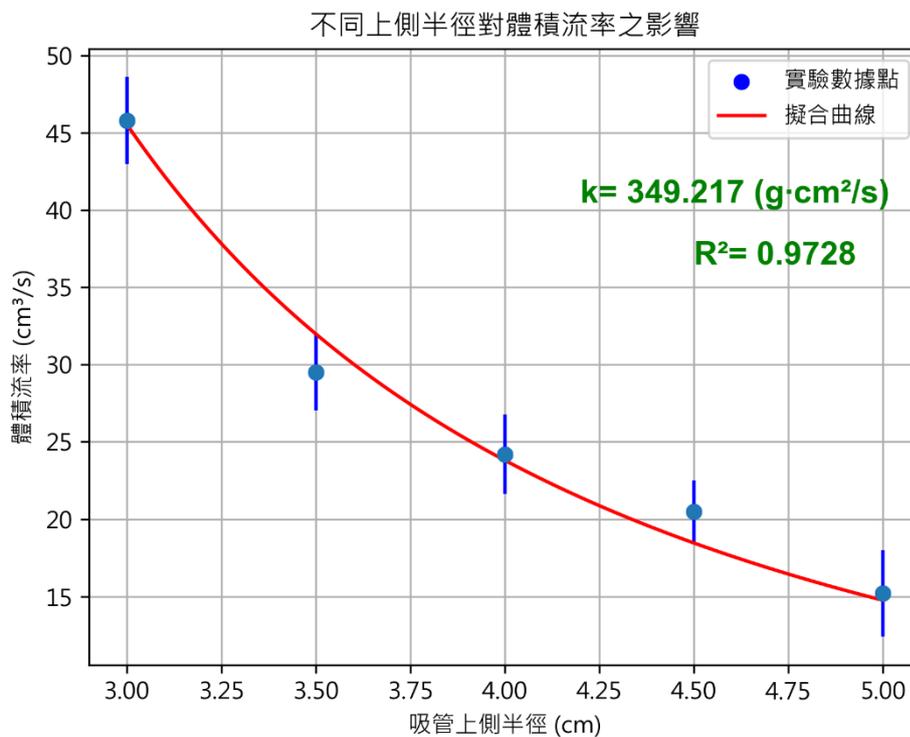
- (1) 數據大約坐落在擬合線上，此擬合是有意義。

實驗 2-2 吸管最上層半徑($r_{2||}$)對體積流率之影響

步驟

- (1) 架設裝置並放於 Sky300 上。
- (2) 用由相同吸管做出不同大小的相似三角形。
- (3) 固定其浸水深度與旋轉角速度。
- (4) 由 Arduino IDE 得到質量和時間的關係。
- (5) 將浸水深度與質量流率匯入 Excel 後再輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (6) 以上述數據公式進行擬合。

結果與討論



控制變因

$$\begin{aligned}\omega &= 80 \text{ (rad/s)} \\ l &= 2 \text{ (cm)} \\ \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

(圖二十二) 吸管上側半徑對體積流率關係圖

此圖擬合之公式為：

$$\rho Q = k \frac{1}{r_{2||}^2 - (l \tan \theta)^2}$$

可以從圖表中得到：

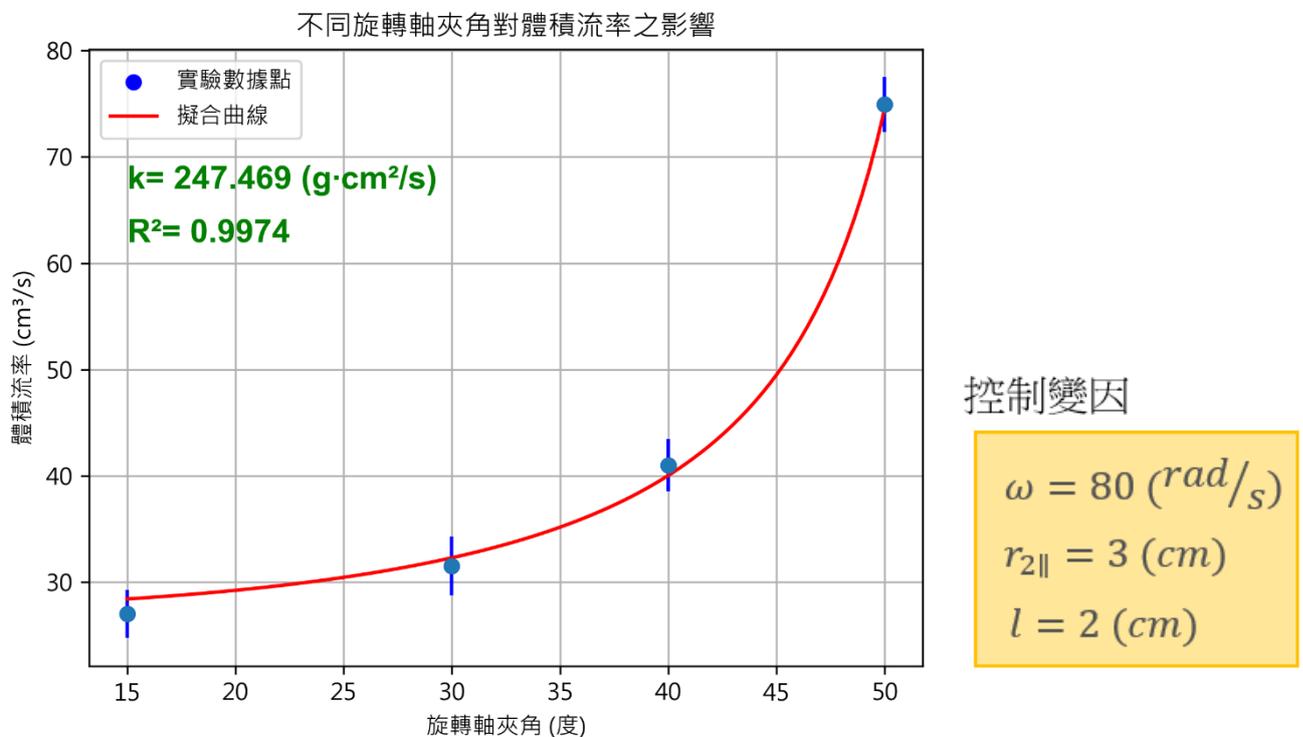
- (1) 數據大約坐落在擬合線上，此擬合是有意義。

實驗 2-3 旋轉軸夾角對體積流率之影響

步驟

- (1) 架設裝置並放於 Sky300 上。
- (2) 做出不同夾角但底邊長度相同的裝置
- (3) 固定其浸水深度與旋轉角速度。
- (4) 由 Arduino IDE 得到質量和時間的關係。
- (5) 將旋轉軸夾角與質量流率匯入 Excel 後再輸入 Visual Studio Code 軟體中。

結果與討論



圖（二十三）旋轉軸夾角對體積流率關係圖

此圖擬合之公式為：

$$\rho Q = k \frac{1}{r_{2||}^2 - (l \tan \theta)^2}$$

可以從圖表中得到：

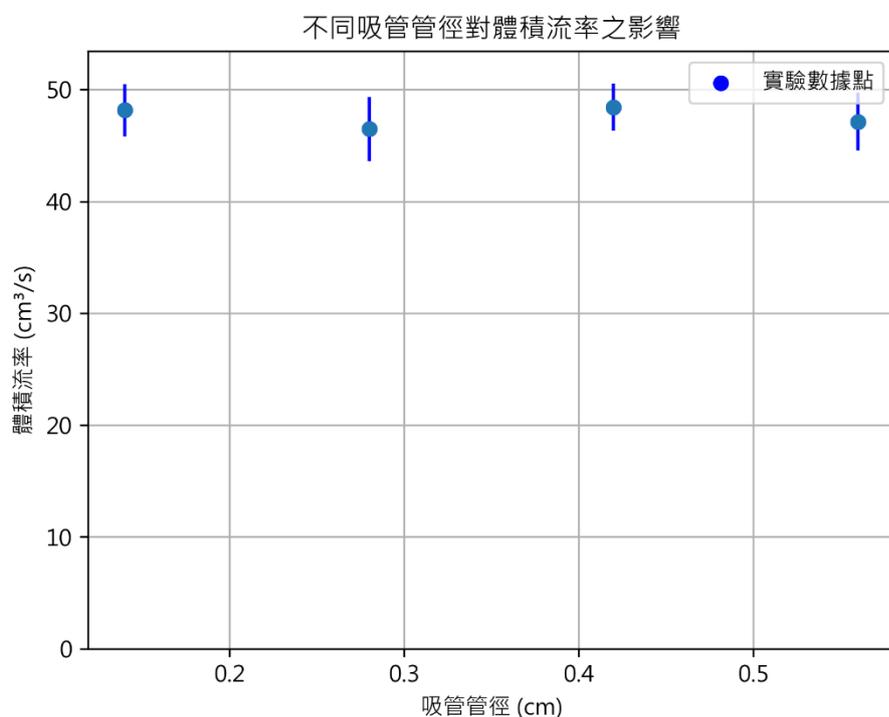
- (1) 數據大多坐落在擬合線上，此擬合趨勢是符合模型的。

實驗 2-4 吸管内徑對體積流率之影響

步驟

- (1) 架設裝置並放於 Sky300 上。
- (2) 用不同管徑的吸管做出相同三角形
- (3) 固定其浸水深度和上側半徑與旋轉角速度。
- (4) 由 Arduino IDE 得到質量和時間的關係。
- (5) 將吸管内徑與質量流率匯入 Excel 後再輸入 Visual Studio Code 軟體中。

結果與討論



控制變因

$$\begin{aligned}\omega &= 80 \text{ (rad/s)} \\ r_{2\parallel} &= 3 \text{ (cm)} \\ l &= 2.5 \text{ (cm)} \\ \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

圖（二十四）吸管内徑對體積流率關係圖

在實驗數據中可以發現：

- (1) 吸管内徑對臨界角速度影響不大，這是由於水會沿著內壁流動，而非充滿整個管徑，因此對於不同管徑吸管，其結果差異不大。
- (2) 但如果吸管内徑過小可能導致毛細力影響過大，使結果發生改變。
- (3) 承(1)，體積流率可表示為截面積乘以流速，由於體積流率不變，當流速愈大，水的截面積愈小。

研究(三) 水滴速度與運動軌跡及其變因探討

實驗 3-1 吸管最上層半徑對水滴噴出速度與其軌跡影響

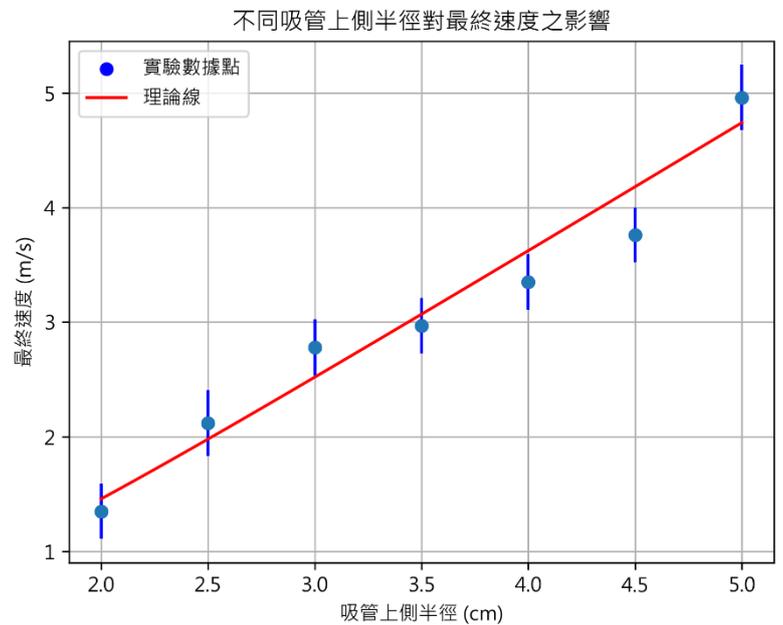
步驟

- (1) 用由相同吸管做出不同大小的相似三角形。
- (2) 固定其浸水深度與旋轉角速度。
- (3) 使水滴拋射並記錄其落地距離，再由斜拋公式得其初始速度。
- (4) 將最上層半徑 ($r_{2\parallel}$) 與水滴速度匯入 Excel 再輸入至 Visual Studio Code 軟體中。

結果與討論

下列數據為拋射距離和拋射速度：

$r_{2\parallel}$ (cm)	Δx (cm)	V (m/s)
2	23	1.35
2.5	47	2.12
3	76	2.78
3.5	86	2.97
4	107	3.35
4.5	133	3.76
5	226	4.096



圖（二十五）拋射距離與水滴速度數據

圖（二十六）吸管上側半徑對最終速度關係圖

此圖理論線公式：

$$V = \sqrt{2g\Delta x}$$

在上圖中我們可以發現：

- (1) 數據與理論大約相符，理論推導是正確的。

實驗 3-2 旋轉角速度對水滴噴出速度與其軌跡影響

步驟

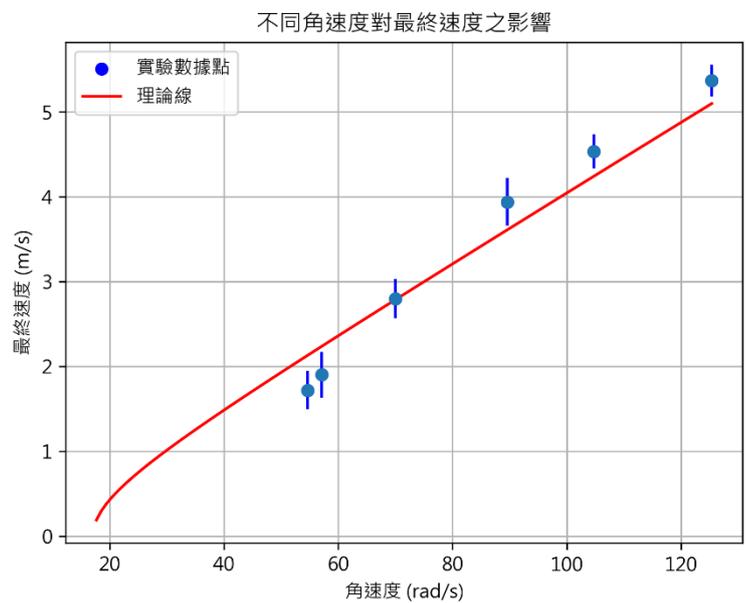
- (1) 固定其浸水深度且使用相同吸管。
- (2) 改變旋轉角速度。
- (3) 使水滴拋射並記錄其落地距離，再由斜拋公式得其初始速度。
- (4) 將旋轉角速度與水滴速度匯入 Excel 再輸入至 Visual Studio Code 軟體中。

結果與討論

下列數據為拋射距離和拋射速度：

ω (rad/s)	Δx (cm)	V (m/s)
54.63	33	1.71
57.11	34	1.75
71.23	77	2.81
89.63	145	3.93
104.71	190	4.53
125.38	263	5.36

圖（二十七）拋射距離與水滴速度數據



圖（二十八）角速度對最終速度關係圖

此圖理論線公式：

$$V = \sqrt{2g \Delta x}$$

在上圖中我們可以發現：

- (1) 數據大致上是符合理論線的趨勢，部分誤差有可能是受拋體的空氣阻力和流體黏滯力的影響，且理論線和 x 軸交點即為理論臨界角速度。

伍、 討論

研究（一）臨界角速度與其相關參數探討

- 一、浸水深度對臨界角速度的影響：根據實驗結果和理論方程式，我們可以看出浸水深度對臨界角速度具有一定的影響。實驗數據點大致落在理論線上，這表明理論方程式能夠準確描述浸水深度和臨界角速度之間的關係。這意味著隨著浸水深度的增加，臨界角速度也會相應增加。
- 二、轉軸夾角對臨界角速度的影響：根據實驗結果和理論方程式，我們可以看出轉軸夾角對臨界角速度具有重要影響。理論方程式能夠準確符合實驗數據點，這表明理論方程式能夠精確描述轉軸夾角和臨界角速度的關係。實驗結果顯示，當轉軸夾角增加時，臨界角速度也隨之增加。
- 三、吸管管徑對臨界角速度的影響：根據實驗結果，我們可以觀察到吸管管徑對臨界角速度沒有明顯的影響。實驗數據中的數據點未呈現出明顯的趨勢。
- 四、這些實驗結果提供了對吸管抽水現象中邊界條件的一些洞察。浸水深度和轉軸夾角對臨界角速度有著明顯的影響，而吸管管徑則可能對臨界角速度影響較小。

研究（二）體積流率與其相關參數探討

- 一、吸管最上層半徑對體積流率的影響：根據實驗結果和擬合線，我們可以看出吸管最上層半徑對體積流率具有一定的影響。實驗數據點大致落在擬合線上，這表明擬合線能夠準確描述吸管最上層半徑和體積流率之間的關係。這意味著吸管最上層半徑的增加會導致體積流率的增加。
- 二、浸水深度對體積流量的影響：根據實驗結果和擬合線，我們可以觀察到浸水深度對體積流率具有顯著影響。實驗數據點大致分佈在擬合線上，這表明擬合線能夠很好地描述浸水深度和體積流率之間的關係。實驗結果顯示，隨著浸水深度的增加，體積流率也隨之增加。
- 三、旋轉軸夾角對體積流量的影響：根據實驗結果和擬合線，我們可以觀察到旋轉軸夾角對體積流率具有重要影響。實驗數據點大致分佈在擬合線上，這表明擬合線能夠準確描述

旋轉軸夾角和體積流率的關係。實驗結果顯示，當旋轉軸夾角增加時，體積流率也隨之增加。

四、吸管内徑對體積流率的影響：根據實驗結果，我們可以觀察到吸管内徑對體積流率沒有明顯的影響。實驗數據中的數據點未呈現出明顯的趨勢。這可能意味著在我們的實驗範圍內，吸管内徑對體積流率的影響相對較小。

五、這些實驗結果提供了對吸管抽水現象中吸管最上層半徑、浸水深度和旋轉軸夾角的一些洞察。吸管最上層半徑、浸水深度和旋轉軸夾角對體積流量都有明顯的影響，需要注意的是，這些實驗結果是基於特定實驗條件下的觀察，可能受到實驗設置和操作的限制。在進一步研究中，可以考慮調整其他參數，如吸管形狀、液體性質和外部條件等，以獲得更全面的結果，且擬合線能夠很好地描述實驗數據。

研究（三）最終速度與其相關參數探討

一、吸管最上層半徑對水滴噴出速度與其軌跡影響：吸管最上層半徑對水滴的拋射距離和初始速度有影響。隨著最上層半徑的增加，水滴的拋射距離增加，初始速度也相應增加。這表明吸管最上層半徑與水滴的最終速度有正相關。

二、旋轉角速度對水滴最終速度與其軌跡影響：旋轉角速度對水滴的拋射距離和初始速度有影響。隨著旋轉角速度的增加，水滴的拋射距離增加，最終速度也相應增加。這表明旋轉角速度與水滴的最終速度有正相關。

三、這些實驗結果提供了對於吸管最上層半徑和旋轉角速度對水滴最終速度和軌跡的影響的初步理解。

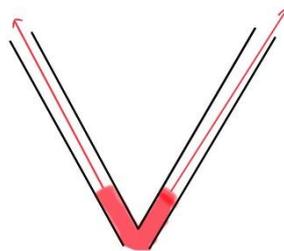
陸、 結論

一、在建設理論的過程中，我們第一步先在實驗中觀察到當將三角形吸管部分浸入水中並沿垂直軸旋轉時，水可以透過吸管上升。這種現象可能是由於旋轉過程中產生的離心力導致水被抽出。我們進一步觀察到，當吸管的形狀改變時，抽水效果也會有所不同。例如，當吸管的斜率變小時，體積流率明顯增加。

- 二、透過實驗和理論分析，我們成功確定了無黏滯性水的臨界角速度。當角速度大於此值時，水開始被抽出。這可能是由於旋轉產生的離心力超過了重力，使得水能夠開始移動，且由於帕斯卡原理，在吸管外的水會補充進入管內。此外，我們發現臨界角速度與吸管的形狀和半徑有關，較小的形狀和半徑需要更快的角速度才能實現抽水效果。
- 三、我們進一步研究了吸管的幾何形狀和其他相關參數對抽水速度的影響。實驗中，我們改變了吸管的形狀、半徑和浸入水的深度，並觀察到不同參數對抽水速度的影響。結果顯示，較小的形狀和半徑以及較深的浸入水深度可以增加體積流率。此外，我們發現當角速度增加時，體積流率也會隨之增加。
- 四、吸管的幾何形狀和角速度也會影響水的最終速度。我們觀察到，在相同的角速度下，不同形狀的吸管會產生不同的最終速度。此外，較小的形狀和半徑以及較深的浸入水深度也導致較高的最終速度。這些結果進一步驗證了吸管的幾何形狀和其他參數對抽水效果的影響

柒、 研究過程中發現的可能誤差原因與解決辦法

- I. 我們第一個遇到的問題是在測量體積流率時，水位會越變越低，而浸入深度也會隨之改變。我們的解決方法是在測量時，我們只測量極短時間內的數據，這樣就能盡量控制浸入深度了。
- II. 我們遇到的第二個問題是水在抽水過程的截面積會隨時間改變，而我們的解決方法是只考慮沿著管壁的那條線的流體運動，而我們實驗發現的確符合此模型。



捌、 展望

- 一、吸管抽水現象的研究也應考慮環境因素對抽水效果的影響。例如，溫度、壓力和流體的組成等因素可能對吸管抽水行為產生影響。未來的研究可以研究這些環境因素的效應，並提供相應的模型和理論解釋。這將有助於更好地理解吸管抽水在不同環境條件下的行為，並為相關應用提供更準確的預測和設計依據。
- 二、雖然我們在這份報告中對吸管抽水現象進行了深入研究，但仍存在一些限制和未解決的問題。例如，我們僅考慮了無黏滯性的情況，實際應用中可能需要考慮黏滯性和其他流體特性。此外，我們的研究主要集中在理想化的吸管形狀，未來的研究可以進一步探索其他形狀和幾何設計的影響。

玖、 參考資料

- (1) Fundamentals of Fluid Mechanics, 6th Edition, Munson, Young, Okiishi, Huebsch
- (2) Pumping straw – a centrifugal force, The Naked Scientist
- (3) Fluid Mechanics, 7th Edition, Frank M. White

※所有照片圖形皆為作者自行拍攝製作

【評語】 051812

針對灑水器的旋轉運動做出物理推導並進行向量分析，討論在水中垂直旋轉折彎的吸管，探討吸出的水量。實驗過程中在水中旋轉底部開口的折彎中空管體，以折彎角度、管徑、浸水深度、旋轉軸夾角為實驗參數，量測吸出水量。針對不同條件進行分析與理論曲線比較，超過臨界速度時離心力會將水抽出等結論。此工作對於常見的日常工具做出詳細分析與討論。

作品簡報

旋轉奧秘 ——

吸管抽水之原理探討

摘要

這項研究針**三角形狀吸管**製成的簡易水泵進行探討。通過將三角形吸管浸入水中並繞垂直軸旋轉，水可以通過吸管流出。研究的目的是瞭解**幾何形狀**和其他**相關參數對體積流率**的影響。在理論模型中建構一種以旋轉座標系描述流體相對運動的方法。且考慮了**外部力矩**對控制體積的總和以及通過控制**表面的角動量流動速率**。在實驗中先以紅外線探測器連接至 Arduino 找出不同幾何條件產生抽水現象之邊界條件。再以可記錄數據之電子天平量測質量對時間關係，以得出不同幾何情形之體積流率。再以水滴之拋射距離得出最終速度，其中**最終速度**是指水流出吸管時的速度，以探討相關變因對其影響。數據分析中以 Visual Studio Code 和 Python 繪出擬合線與理論線進行比對，得出推導理論與實驗是相符合的。

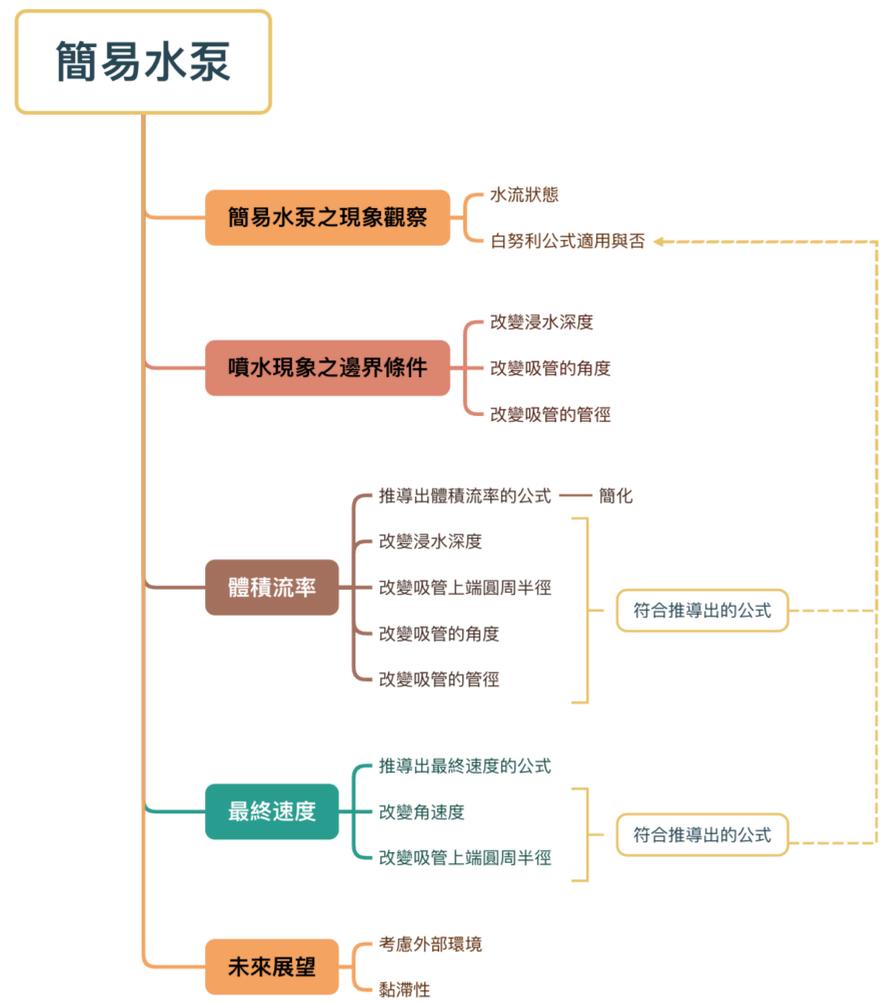
動機

在學校體育課的時候，每每可以見到同學們在網球場上揮灑汗水的身影，而伴隨著那些汗水的還有球場上的灑水機。當我們去仔細觀察時，我們可以發現灑水器轉的速度越快，噴出的水越多越遠。我們希望可以藉由一個簡單的裝置去複製出一個灑水器的模型，並研究產生此現象的原因以及這個裝置對灑水造成的影響和成因與能灑水的邊界條件。

實驗目的

- 一. 探討灑水的模型及原理
- 二. 找出現象發生之**邊界條件**
- 三. 改變吸管的幾何條件與旋轉速度對**體積流率**的影響
- 四. 改變吸管的幾何條件與旋轉速度對**最終速度**

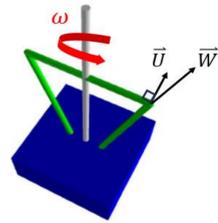
研究架構



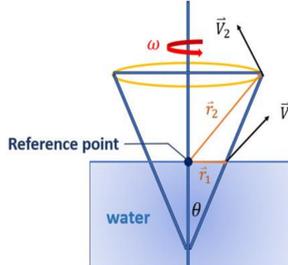
體積流率 (Q)

以相對運動的向量分析：

絕對速度為切線速度(\vec{W})及旋轉坐標系中相對運動速度(\vec{U})的和



$$\vec{V}_{\text{水地}} = \vec{W}_{\text{水吸}} + \vec{U}_{\text{吸地}}$$



作用在體積上的外部力矩總和以及通過表面的角動量流動速率：

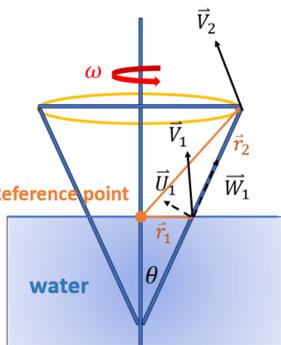
$$\sum (\vec{r} \times \vec{F}) = \int_{cs} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho V \cdot \hat{n} dA$$

已知力矩合為角動量變化且假設流體為穩流：

$$\vec{T} = \rho Q (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1)$$

旋轉系統功率為力矩內積角速度

$$P = \rho Q \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1)$$



再將 $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$ 帶入計算：

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times (\vec{U}_1 + \vec{W}_1)) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{U}_1) = r_1^2 \omega^2$$

$$\vec{\omega} \cdot ((\vec{r}_{2\perp} + \vec{r}_{2\parallel}) \times (\vec{U}_2 + \vec{W}_2)) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{2\parallel} \times \vec{U}_2) = r_{2\parallel}^2 \omega^2$$

最後可得

$$P = \rho Q (r_{2\parallel}^2 - r_1^2) \omega^2 \Rightarrow \rho Q \propto \frac{1}{r_{2\parallel}^2 - r_1^2}$$

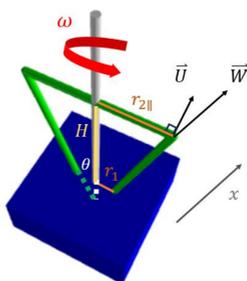
最終速度：

模型中只考慮旋轉坐標系中離心力和重力

$$\sum F = -mg \cos \theta + F_c \sin \theta = m \frac{dW}{dt}$$

定義管壁方向為x，再用鏈鎖律得：

$$-mg \cos \theta + m \omega^2 x \sin^2 \theta = m \frac{dW}{dx} \frac{dx}{dt} = m W \frac{dW}{dx}$$



積分得：

$$W = \sqrt{\omega^2 (r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

由於 $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$ 得最終速度為：

$$V = \sqrt{(r_{2\parallel} \omega)^2 + \omega^2 (r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

理論推導

理論建模與邊界條件：

水並沒有充滿整個管內，故無法使用白努利定律計算，則使用線性流場簡化及推導

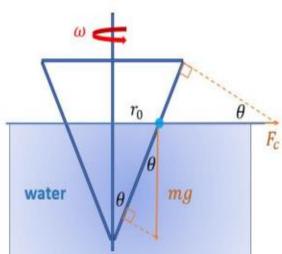


不考慮黏滯力下的抽水條件

$$F_c \sin \theta \geq mg \cos \theta$$

展開移項整理可得

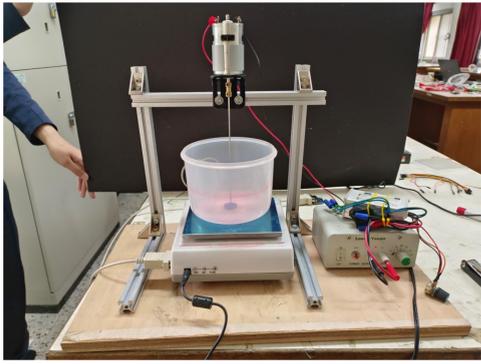
$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan \theta}}$$



力學分析圖

實驗方法

裝置架設 (電子秤、轉速計) :



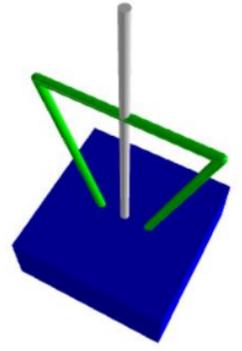
Arduino :

```

1 #include <SoftwareSerial.h>
2 SoftwareSerial mySerial(6, 7); // RX, TX <-----<<<< use the pins you want
3
4
5 void setup()
6 {
7   Serial.begin(9600);
8   mySerial.begin(9600);
9 }
10
11 void loop()
12 {
13   while (mySerial.available())
14   {
15     Serial.write(mySerial.read()); // You can also use: Serial.print((char)mySerial.read());
16     delayMicroseconds(10000);
17   }
18 }
19

```

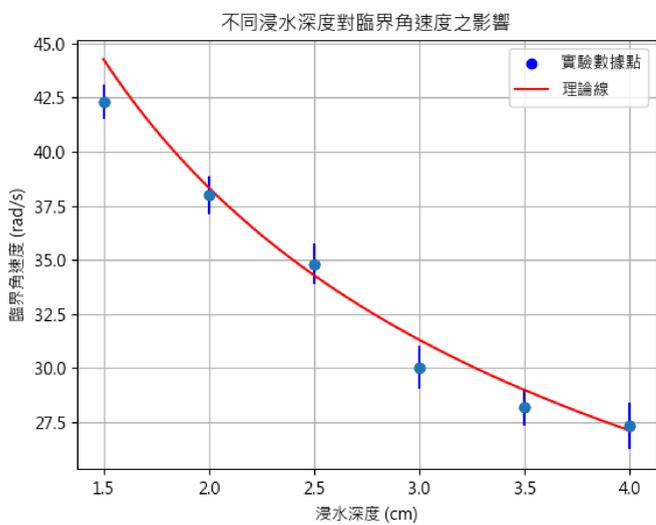
Vpython 模型 :



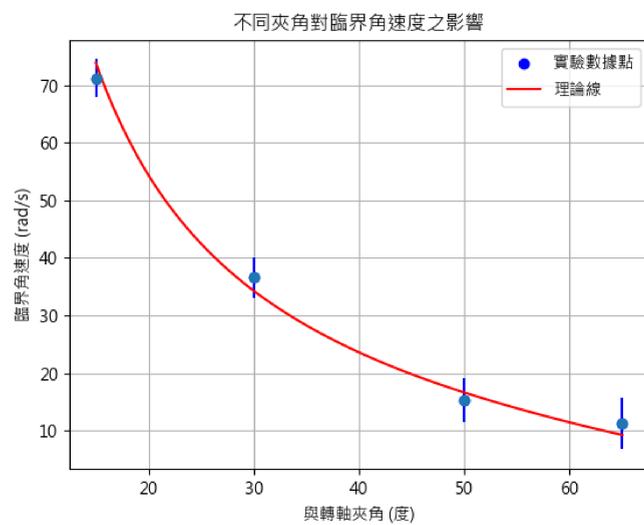
實驗結果

研究 (一) 不同變因對臨界角速度之影響

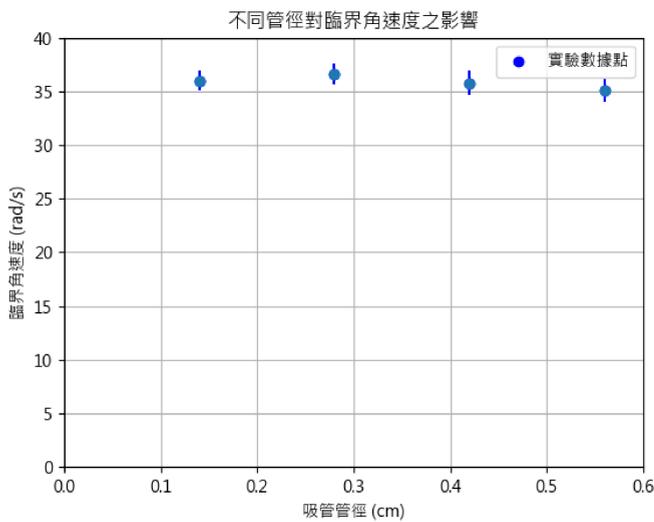
實驗 1-1: 浸水深度對臨界角速度之影響



實驗 1-2: 吸管夾角角度對臨界角速度之影響



實驗 1-3: 吸管管徑對臨界角速度之影響



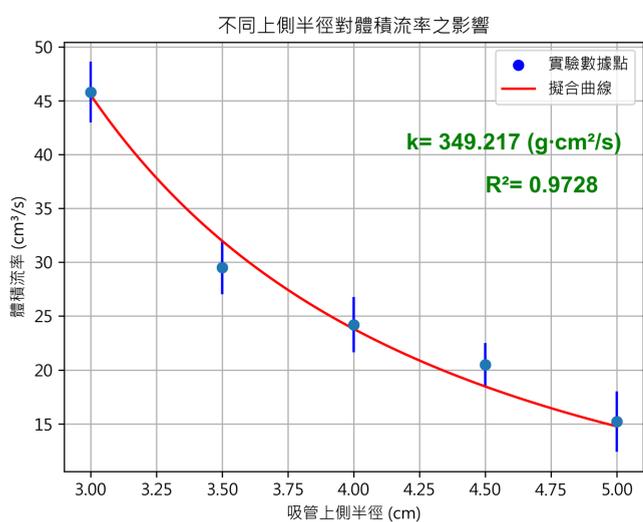
理論公式

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l_0 \tan^2 \theta}}$$

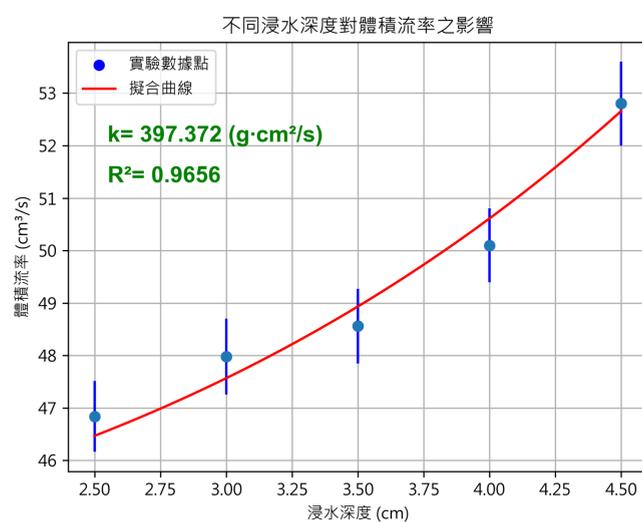
1. 浸水深度和臨界角速度呈負相關，因此當浸水越深，水越容易被抽出來
2. 吸管夾角和臨界角速度呈負相關，因此當吸管斜率越小，水越容易被抽出來
3. 當管徑沒有過小時，吸管管徑對於臨界角速度沒有顯著影響

研究 (二) 不同變因對體積流率之影響

實驗 2-1: 吸管上端半徑對體積流率之影響

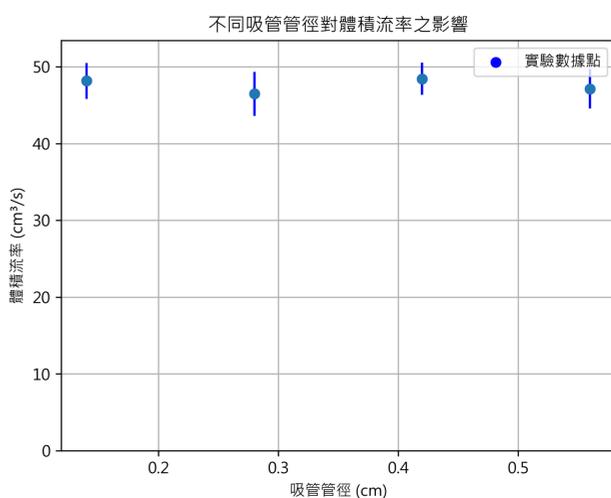
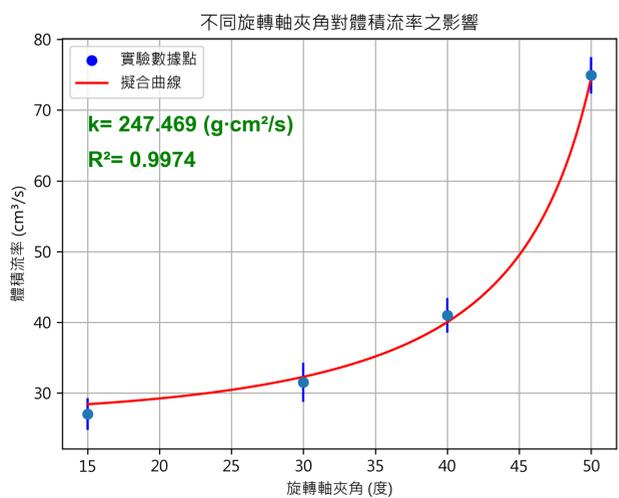


實驗 2-2: 浸水深度對體積流率之影響



實驗 2-3: 吸管夾角角度對體積流率之影響

實驗 2-4: 吸管管徑對體積流率之影響



理論公式

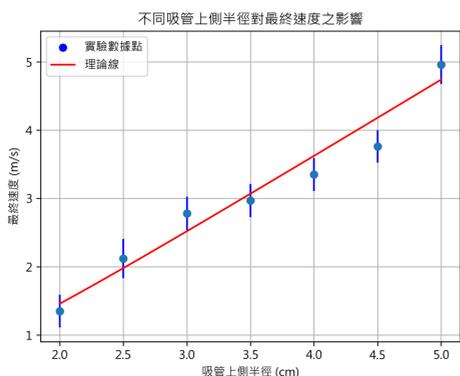
$$\rho Q = k \frac{1}{r_{2\parallel}^2 - (l \tan \theta)^2}$$

1. 上側半徑及浸水深度和體積流率成負相關，吸管管徑則和體積流率呈正相關
2. 吸管內徑對臨界角速度影響不大，這是由於水會沿著內壁流動，而非充滿整個管徑，因此對於不同管徑吸管，其結果差異不大
3. 但如果吸管管徑過小可能導致毛細力影響過大，使結果發生改變
4. 體積流率可表示為截面積乘以流速，由於體積流率不變，當流速愈大，水的截面積愈小

研究(三) 水滴速度與運動軌跡及其變因探討

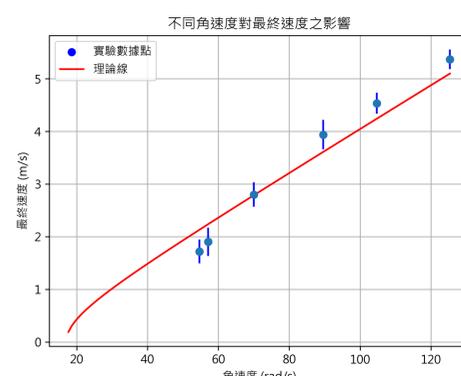
實驗 3-1: 吸管上側半徑對水滴噴出速度與其軌跡影響

ω (rad/s)	Δx (cm)	V (m/s)
54.63	33	1.71
57.11	34	1.75
71.23	77	2.81
89.63	145	3.93
104.71	190	4.53
125.38	263	5.36



實驗 3-2: 角速度對水滴噴出速度與其軌跡影響

$r_{2\parallel}$ (cm)	Δx (cm)	V (m/s)
2	23	1.35
2.5	47	2.12
3	76	2.78
3.5	86	2.97
4	107	3.35
4.5	133	3.76
5	226	4.096

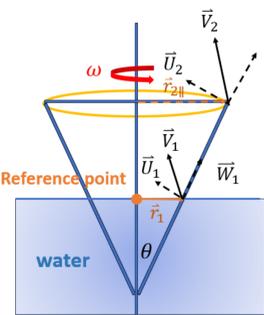


理論公式

$$V = \sqrt{\omega^2 r_{2\parallel}^2 + \omega^2 (r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

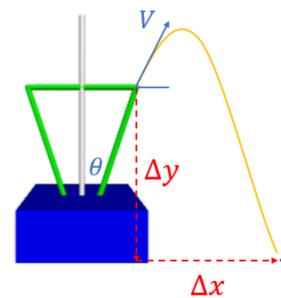
1. 吸管上側半徑及角速度皆和最終速度呈正相關
2. 角速度趨勢線和x軸交點即為臨界角速度

結論



$$P = \rho Q (r_{2\parallel}^2 - r_1^2) \omega^2$$

$$V^2 = \frac{3}{2} g \Delta y \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} - 4[(r_{2\parallel} \omega)^2 (1 + \cos 2\theta) - \frac{8g(\Delta x)^2}{\Delta y}]$$

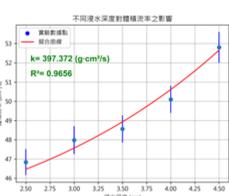
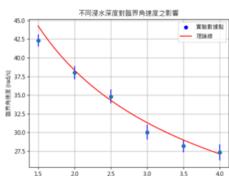


$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l_0 \tan^2 \theta}}$$

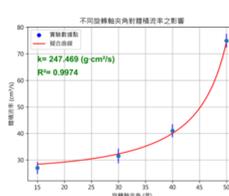
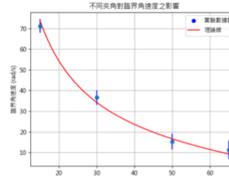
$$\rho Q = k \frac{1}{r_{2\parallel}^2 - (l \tan \theta)^2}$$

$$V = \sqrt{\omega^2 r_{2\parallel}^2 + \omega^2 (r_{2\parallel} - r_1)^2 - 2gH}$$

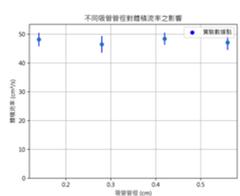
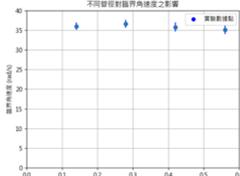
浸水深度



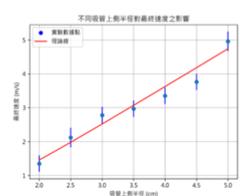
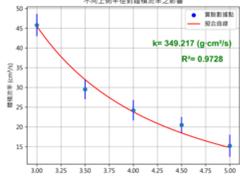
與轉軸夾角



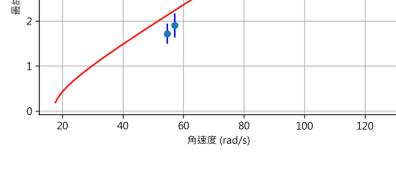
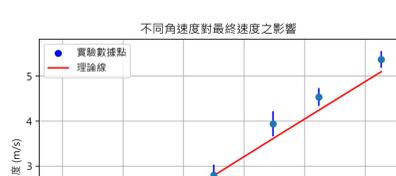
吸管管徑



上側半徑



角速度



參考資料

1. Fundamentals of Fluid Mechanics, 6th Edition, Munson, Young, Okiishi, Huebsch
2. Pumping straw – a centrifugal force, The Naked Scientist
3. Fluid Mechanics, 7th Edition, Frank M. White