

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科
團隊合作獎

051811

懸臂樑的聲學震盪與力學震盪—鐵尺的探究與
實作

學校名稱：臺南市立土城高級中學

作者： 高二 柳澤一 高二 王瀚陞 高二 陳胤愷	指導老師： 林柏宏
---	------------------

關鍵詞：懸臂樑、聲學振盪、電磁感應

摘要

去年我們在全國物理探究實作競賽被淘汰，主題是鐵尺的磁機械振盪器，賽後我們決定試著把它研究清楚。最初我們以為鐵尺的振盪行為類似繩上的駐波，但後來發現，鐵尺其實表現出懸臂樑的運動特徵。懸臂樑在建築學、結構和材料力學中很重要，在尖端科學的 AFM、STM、MEMS 中也有應用。我們一開始使用 Tracker、Phyphox App、以及超音波感測器進行實驗，最終我們使用手機 APP 偵測鐵尺的聲學振盪，以及線圈產生感應電流，透過示波器偵測鐵尺運動的力學振盪，這兩種是我們創新的量測方式。鐵尺振動須用懸臂樑的力學解釋，理論包含 \sin 與 \sinh 函數。我們在聲學、力學振盪的實驗結果是互相驗證的，並與懸臂樑理論預期的頻譜一致，驗證了鐵尺的振盪為懸臂樑的運動形式。

壹、研究動機

我們去年參加了物理教育學會舉辦的全國高中物理探究實作競賽，抽到的題目是磁機械振盪器(Magnetic-Mechanical Oscillator)。最初我們對於這個題目不大了解，在複賽中就被淘汰，之後我們前去物理教育年會，聆聽當年得獎隊伍的報告，但仍然不清楚這實驗到底在做什麼，讓我們非常挫折。回到學校之後，我們決定嘗試把鐵尺的振盪行為研究清楚。

起初我們以為鐵尺的運動類似繩上的駐波，只取繩上一點觀察位置變化，即能發現其在做簡諧運動，同理取鐵尺上一點的振盪，也應為簡諧運動。之後我們利用了 影像追跡軟體 Tracker、手機應用軟體 Phyphox、以及超音波感測器(PascoPS-2103A 以及 Arduino 距離感應器)，進行了一系列的實驗，在後續數據分析中發現不完全是簡諧運動。

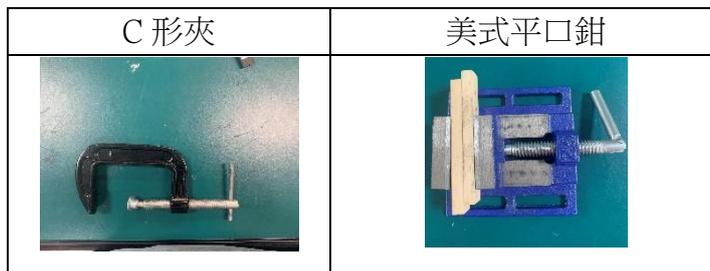
透過資料查閱及做了更多的實驗和研究之後，我們才發現：鐵尺的運動其實是類似懸臂樑的運動。懸臂樑是建築學、結構力學、和材料力學中非常重要的學習和研究主題，在近代的尖端科學中，懸樑臂也是很重要的研究工具，其中包括原子力顯微鏡 AFM、電子穿隧顯微鏡 STM、微機電系統 MEMS，因此懸臂樑是值得我們深入學習和研究的主題。而在最後我們利用了手機軟體 FFT Wave 偵測鐵尺的聲學振盪，觀察其所呈現的頻譜，同時利用強磁、線圈及示波器的結合，偵測鐵尺運動的力學振盪。透過感應電流在示波器中所呈現的樣貌，對比聲學及力學的實驗結果，並利用 GeoGebra 進行理論模擬，應證了鐵尺振盪中都為懸臂樑表現樣態。藉由電磁感應探究振盪頻譜這個創新的方法，使我們成功研究出符合理論的結果。

貳、研究目的

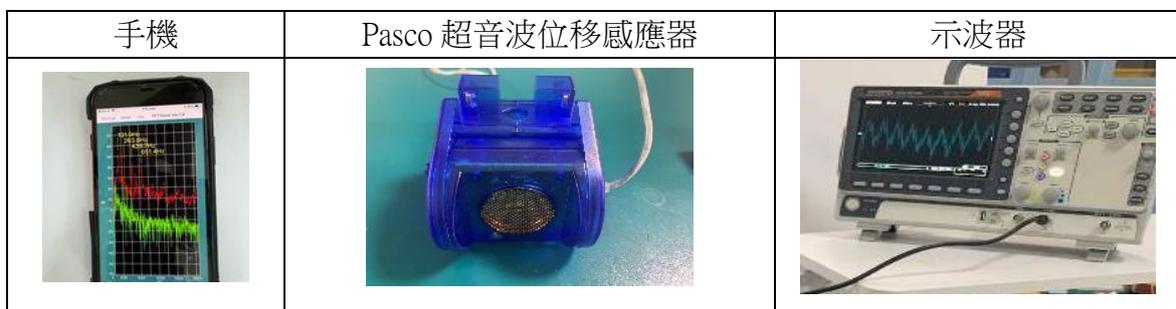
- 1、使用不同量測模式觀察並推測鐵尺振盪時可能的運動形式。
- 2、對比不同量測模式所獲得的實驗數據及圖形。
- 3、透過模擬軟體 Geogebra 模擬理論所得結果，與實驗中所得的振盪波形進行對比，並對其差異加以改良。
- 4、尋找並設計適當的量測方法，觀測鐵尺振盪的模態。
- 5、利用不同規格的鐵棒、鋁棒、銅棒進行實驗並觀察差異。
- 6、討論並推測出鐵尺振盪的運動模式。

參、研究設備及器材

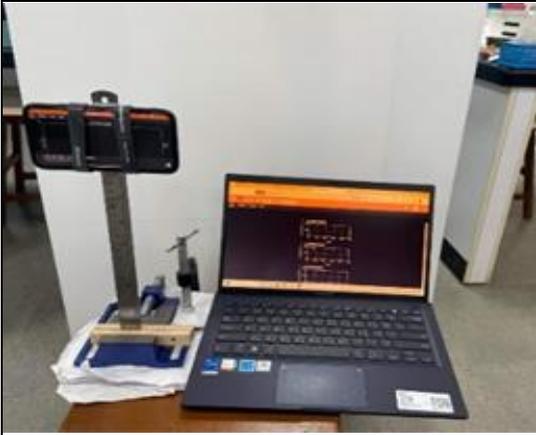
- 1、研究器材：電池、橡皮筋、直尺(鐵 30cm 及塑膠)、棉線、槓片、長桿、繩索、彈簧、夾鏈袋、C 形夾、美式平口鉗、紙板、木片、吸管(10cm)、單擺架、擺錘、鐵架、強力磁鐵、線圈、手機支架、長尾夾、鐵棒(直徑 1cm 長 30cm)、鋁棒(直徑 1cm、2cm 長 30cm 及直徑 1cm 長 100cm)、銅棒(直徑 1cm、2cm 長 30cm)。



- 2、研究設備：筆記型電腦(含 Geogebra、EXCEL、Pasco SPARKvue 等軟體)、手機(內含相機、phyphox、FFT Wave 等 APP)、示波器+鱷魚夾 BNC 電纜、Pasco 超音波位移感應器

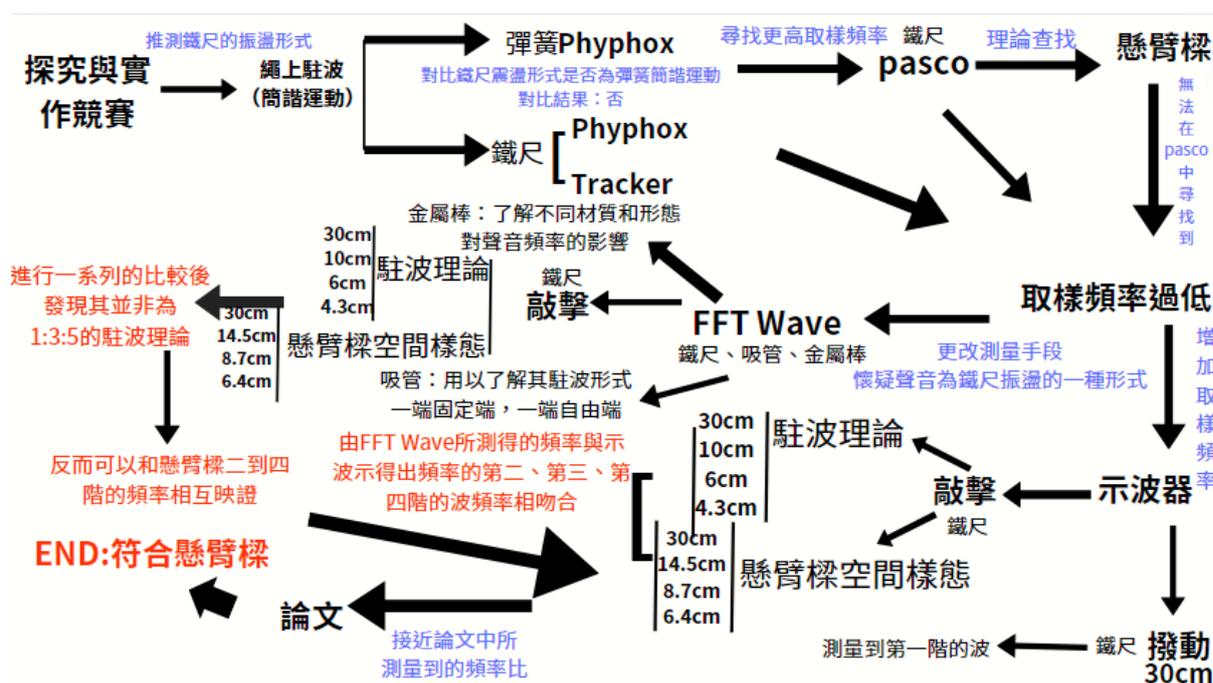


3、實驗裝置架構圖：

<p>1. 利用手機內建 phyphox 加速度感應器與電腦連接後進行遠端操控利用手機量測搖晃鐵尺力學振盪擷取圖形數據</p>	<p>2. 利用 Pasco 超音波位移感應器量測鐵尺振盪並以 SPARKvue 擷取圖形與數據</p>	
		
<p>3. 利用手機 FFT Wave 的 APP，量測鐵尺的聲學振盪，並找出相對強度較高的頻率</p>	<p>4. 利用電磁感應原理，將鐵尺振盪的電流訊號以示波器讀取出來。</p>	
		
<p>4-1 感應線圈(側視圖)</p>	<p>4-2 感應線圈(正視圖)</p>	<p>4-2 感應線圈(上視圖)</p>
		

肆、研究過程及方法

1、研究流程圖



2、文獻探討與原理討論

(一) 懸臂樑(Cantilever)

在施工中被廣泛採用，特別是在懸臂橋和陽台。橋樑在建造過程中會形成懸臂，但完工時會組合成非懸臂的結構，施工中會從兩端以懸臂形式進行施工，然後在合攏前撤去臨時的懸臂支撐。

接下來探討的懸臂樑方程式只是其在空間中振盪的一種形式，實驗中我們透過示波器所測得的圖形是吸附在鐵尺上磁鐵隨時間的運動，前者是空間上鐵尺整體的運動形式，後者則是該點隨著時間變化的關係。

空間上的探討需要先從歐拉-伯努力樑方程式開始了解，歐拉-伯努力樑方程式為：

$$y = A_1 \sinh(kx) + A_2 \cosh(kx) + A_3 \sin(kx) + A_4 \cos(kx)$$

而下面這三個模態這個公式所描述，懸臂樑在空間中的分佈。

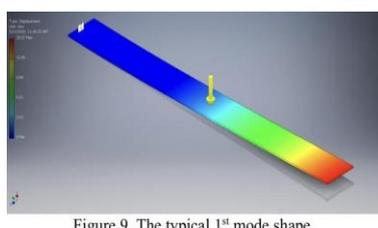


Figure 9. The typical 1st mode shape.

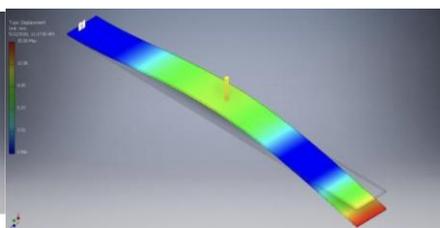


Figure 10. The typical 2nd mode shape.

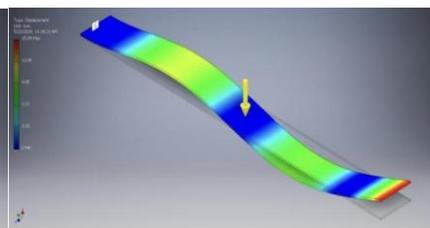
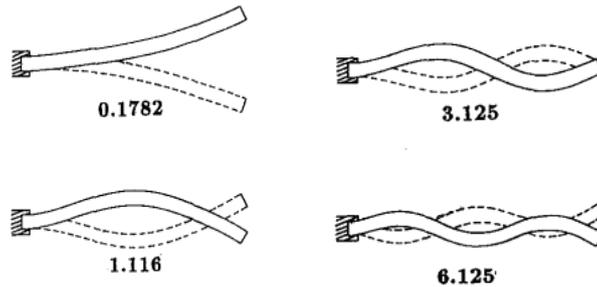


Figure 11. The typical 3rd mode shape.

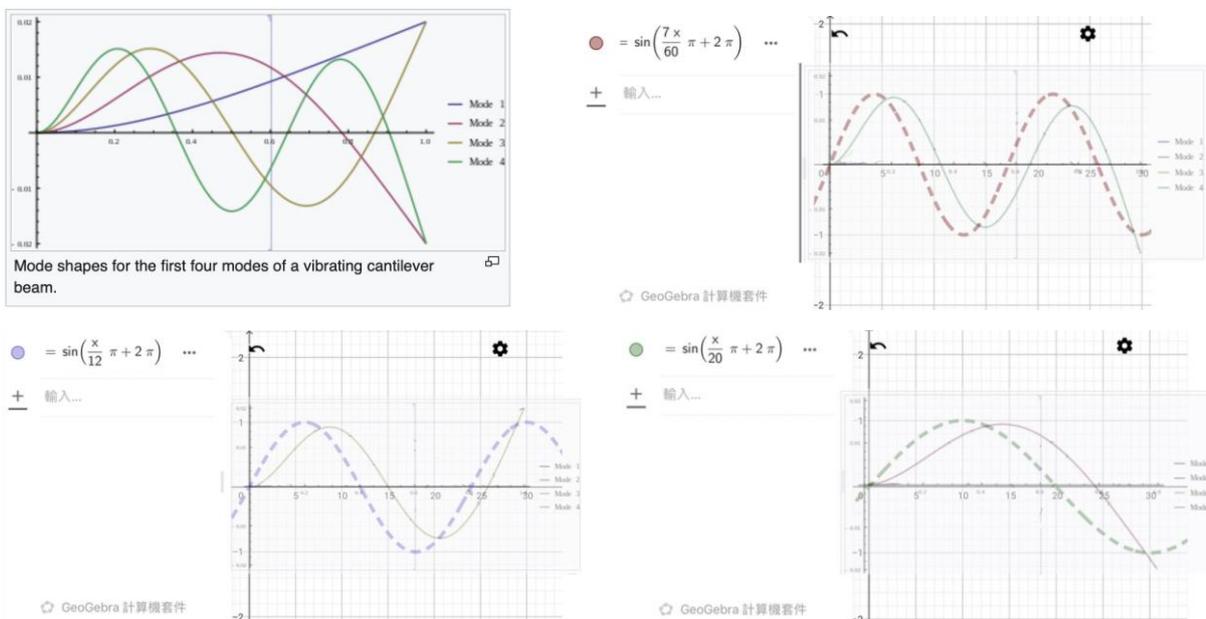
(圖片來源：引自 Ardi Noerpamoengkas, Miftahul Ulum, 參考資料 1.)

下圖可以看到懸臂樑空間樣態一到四階的頻率比為 $f_1: f_2: f_3: f_4 = 1: 6.26: 17.54: 34.37$



(圖片來源：為 Thomas D. Rossing and Daniel A. Russell, 參考資料 6.)

我們找到懸臂樑的數學型態，因為對於數學式中的雙曲正弦函數(sinh)無法了解，而理論上數學式為駐波的正弦函數(sin)與雙曲正弦函數(sinh)的疊加，因此改用 Geogebra 進行只有正弦函數的模擬，從模擬出的圖形判斷波腹的位置，以方便進行之後的實驗。



(虛線部分為 GeoGeber 模擬，實線為查找到的參考資料 7.)

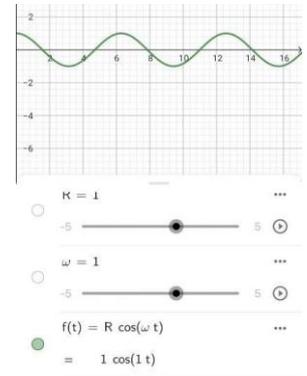
在時間上的探討是利用法拉第電磁感應定律：任何封閉電路中感應電動勢大小，等於穿過線圈磁通量的變化率，而線圈的電動勢是為了抵抗磁場變化，因此在前面加上負號。感應電動勢會驅使電子流動，形成感應電流。在實驗中磁鐵靠近或遠離線圈時產生造成磁通量的變化，根據理論用四種不同函數表示磁通量，分別為 sin、cos、sinh、cosh 四種，經由微分後再除以電阻值，當電流以 $AB\omega \sin \omega t$ 表示，可得四種不同函數的電流表示方式，分別為 sin、cos、sinh、cosh 四種，而其中各自的 $(-)AB\omega R$ 便為歐拉-伯努力樑方程式中的 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 。

(二) 簡諧運動

我們一開始推測，振盪形式應為駐波的樣態，之後我們選擇鐵尺上的一點進行觀察，當敲擊鐵尺時，可以很明顯觀察到鐵尺的來回振盪，若我們將鐵尺下方固定，會產生一端固

定，另一端自由端的駐波樣態。我們小力敲擊時，使鐵尺產生小角度振盪，類似於單擺的擺動，當單擺在小角度時(擺角小於 5 度)，可以視為簡諧運動。簡諧運動是在同一平面產生來回振盪，若敲擊力過大，使自由端不是在同平面移動，既無法產生理想的簡諧振盪波形，也會使本來的鐵尺因劇烈的角度變化而彎曲，因此進行研究時，須小力敲擊鐵尺。

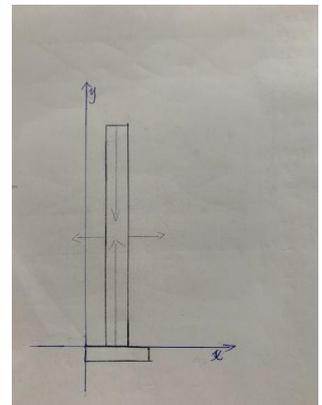
簡諧運動形式假設為 $x = R\cos\omega t$ ，而我們利用 Geogebra 進行模型架構，先獲得 $x = R\cos\omega t$ 的函數圖形，以便與感測器所測量出之圖形進行比對。但模擬出的波形是在理想狀態下產生的波形，現實中則近似阻尼振盪，量測的波形會隨著時間遞減而停止振盪，無法像理想的波形，在沒有能量損耗前提，以固定頻率來回振盪而不停止。



(三)駐波

駐波是常駐空間某區域之波動，會維持在固定位置中來回振盪的波。駐波現象發生條件是兩個波的振幅、頻率、波長相同，但是方向相反時所互相干涉產生的，數學形式如 $y_1 = y_0 \sin(kx + \omega t)$ 與 $y_2 = y_0 \sin(kx - \omega t)$ ，此時駐波(或是靜止波)的平均傳播能量為零，不會有能量往外傳播。本實驗的駐波會發生在鐵尺振盪與波傳遞的方向相反時。

而在敲擊鐵尺的研究中，鐵尺所發生的振盪，我們推測在右圖 y 方向中，可能是以駐波的形式來回振盪。鐵尺振盪的原因，我們推測在微觀角度上，是鐵尺中內部金屬離子進行振盪，並鐵尺中形成駐波產生聲音。

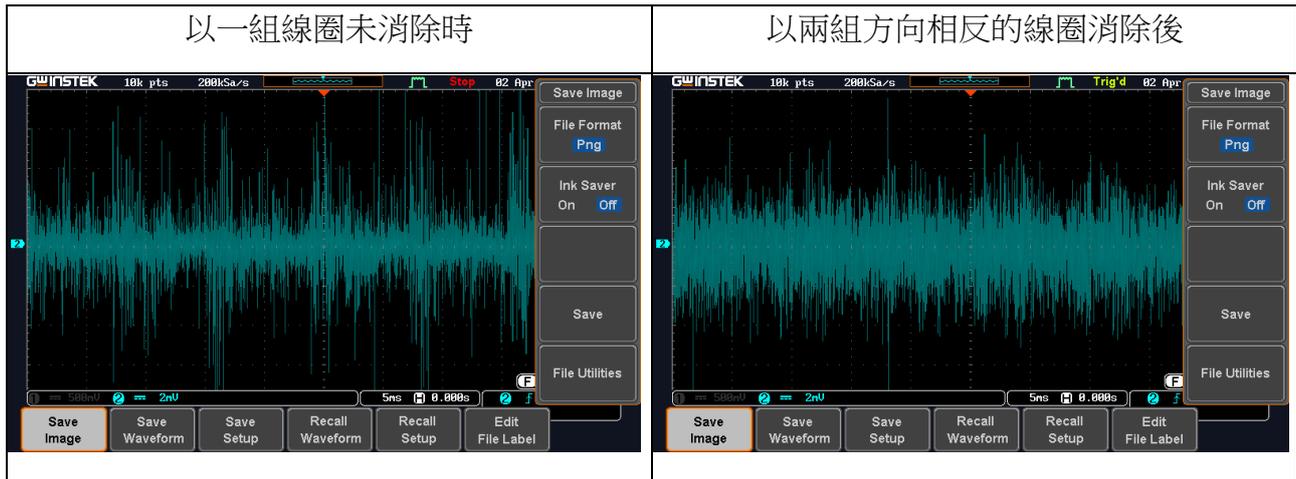


<p>Hand-drawn diagrams of standing waves in a tube with both ends open. It shows three modes: $n=3$ (3 antinodes), $n=2$ (2 antinodes), and $n=1$ (1 antinode). Below the diagrams are formulas: $v = \lambda f$, $f = \frac{v}{\lambda}$, $\lambda = \frac{v}{f}$, and $f = n \times \frac{v}{4L}$ ($n=1,2,3,\dots$).</p>	<p>Hand-drawn diagrams of standing waves in a tube with one end open and one end closed. It shows three modes: $n=5$ (5 antinodes), $n=3$ (3 antinodes), and $n=1$ (1 antinode). Below the diagrams are formulas: $v = f\lambda$, $f = \frac{v}{\lambda}$, $\lambda = \frac{v}{f}$, and $f = n \times \frac{v}{4L}$ ($n=1,3,5,\dots$).</p>	<p>Four diagrams of standing waves in a tube with both ends closed, labeled with frequency ratios: 1.133, 3.125, 6.125, and 10.125.</p>
<p>兩端開口的駐波</p>	<p>一端開口一端閉口的駐波</p>	<p>兩端閉口的駐波 (上面圖片來源為參考資料 6)</p>

上方為各種的駐波型態對應到不同振盪圖形及頻率比，如在兩端開口的駐波圖形中，可以得知其頻率比為 1 : 2 : 3，而一端開口一端閉口的駐波圖形，頻率比則是 1 : 3 : 5，兩端開口的駐波圖形，頻率比則為 1 : 2.76 : 6.41 : 8.94，在之後的實驗，我們便可由理論中各階的頻率比，分析我們的實驗(如聲學的振盪以及懸臂樑...等)是屬於何種型態駐波。

(四) 背景頻率的出現及抵銷

由於在環境中存在既有頻率會影響到實驗的量測，使實驗數值不夠準確，我們稱為背景雜訊。實驗中觀察到在磁鐵來回通過線圈時，示波器產生的電流訊號不只來自線圈的感應電流，還包含背景雜訊所顯現出的影響，因此我們必須削去背景雜訊所造成的影響。而改良的方法是利用兩個圈數及大小相同的線圈，一個主線圈接收磁鐵訊號及背景雜訊，另一線圈只接收背景雜訊，透過反接的方式，來抵銷兩線圈因背景雜訊產生的感應電流，如此示波器只讀取到磁鐵振盪產生的感應電流，這是我們在實驗上改良的重點措施。



從上方左圖可觀察未進行背景頻率抵銷時，訊號很雜亂，高低參差不齊，估算發現其雜訊頻率約為 100HZ；而以兩方向相反的線圈進行頻率抵銷後，我們不再觀察到其背景頻率的波峰，確定背景雜訊真的有減弱，成功抵銷了背景雜訊。

三、實驗方法

(一) 彈簧的簡諧運動

1. 彈簧的研究方法：

- (1) 在同一個彈簧上掛一個夾鏈袋，裡面裝同質量的電池數量 1~5 個
- (2) 紀錄彈簧在掛不同質量重物時的長度的變化。
- (3) 以圖表呈現伸長量與重量之關係，根據虎克定律 $F=-kx$ ，求出彈力常數 k



2. 橡皮筋的研究方法

- (1) 將長桿架在兩椅子的孔洞間，將一條橡皮筋以繩索分別掛在長桿上。
- (2) 在橡皮筋下方綁上塑膠袋，並放入一個~五個電池在夾鏈袋中。
- (3) 觀察五條橡皮筋的伸長量並算出彈力常數 k

(二)以手機 APP 直接量測鐵尺的振動

1. 將手機固定於長度為 30 公分的鐵尺上，固定於美式平口鉗上，並將整體用 C 形夾固定於椅子
2. 將手機打開 phyphox 軟體與電腦同步，並選擇”不含重力之加速度”進行測量。
3. 撥動鐵尺頂端，並向後撥動一公分，讓裝置運動一段時間後，觀察手機所測得的波形數據



(三)利用超音波位移感應器量測鐵尺的震動

1. 將紙板黏到鐵尺上，其餘與上一個實驗裝置相同。
2. 將紙板與超音波位移感應器對準，利用 SPARKVue 連接感應器，以取樣頻率 100Hz 進行測量。
3. 移動紙板與感應器的距離，選擇為最適當量測距離。
4. 為了可以定量的敲擊，透過單擺以固定的角度敲擊，提升實驗的精密度。敲擊鐵尺(30cm 處)，觀察其測得的數據並進行研究
5. 改變取樣頻率 200Hz 和 250Hz，重複以上步驟。
6. 利用 GeoGebra 模擬簡諧運動的圖形，與取樣頻率 100、200、250Hz 的波形對比



(四)利用手機 APP-FFT Wave 進行量測

1. 利用吸管發聲，進行頻率量測
 - (1) 將吸管剪至 10 公分，手機開 FFT Wave，並開啟螢幕側錄
 - (2) 使用手機測量對一端封閉一端不封閉的吸管、兩端為不封閉的吸管小力吹氣時所產生的頻率。
 - (3) 使用手機測量對一端封閉一端不封閉的吸管、兩端為不封閉的吸管大力吹氣時所產生的頻率。
 - (4) 對所測得的頻率進行研究
2. 依駐波理論敲擊波腹的鐵尺聲學頻率
 - (1) 利用平口鉗、C 形夾固定 30cm 鐵尺
 - (2) 手機開 FFT Wave，並開啟螢幕側錄
 - (3) 以擺錘剛好敲到鐵尺的度數或些微增加度數再度敲擊，找出適當測得頻譜的方式
 - (4) 分別測量有無磁鐵時以擺錘剛好敲到鐵尺時產生的聲學頻率(30、10、6、4.3cm)。
 - (5) 對有無磁鐵時敲擊鐵尺時其所產生的頻率進行分析對比。



(6) 和吸管所測出的數據進行對比。

3. 依懸臂樑數學型態敲擊波腹的鐵尺(含強力磁鐵)聲學頻率：

- (1) 利用美式平口鉗、用 C 形夾固定 30cm 鐵尺，並吸附強力磁鐵(11.32g)
- (2) 手機開 FFT Wave，並開啟螢幕側錄
- (3) 分別測量以擺錘敲擊鐵尺時其所產生的聲學頻率 (30、14.5、8.7、6.4cm)。
- (4) 和吸管所測出的數據以及依駐波理論敲擊波腹的頻譜進行對比。

4. 以不同規格的銅鋁鐵棒進行實驗

- (1) 利用橡皮筋及鐵架將不同規格的銅、鋁、鐵棒懸掛
- (2) 手機開 FFT Wave，並開啟螢幕側錄
- (3) 利用鐵鎚及橡膠錘敲擊鐵棒對比何者頻譜較好
- (4) 利用頻譜較好的鐵鎚敲擊鐵棒(直徑 1cm 長 30cm)、
鋁棒(直徑 1cm 長 30cm)、
銅棒(直徑 1、2cm 長 30cm、直徑 1cm 長 100cm)。



- (5) 利用得到數據與鐵尺的頻譜進行對比，了解不同材質及規格對頻譜的影響

(五) 利用示波器進行量測

1. 依駐波理論敲擊波腹的鐵尺力學振盪(未考慮能量衰退及定量)

- (1) 將鐵尺附上磁鐵，並將自行設計的感應線圈固定於塑膠尺上，須確保鐵尺振盪時，塑膠尺不動，並以 C 形夾固定於桌腳，並確定能讓磁鐵可以通過線圈中央。
- (2) 連接將示波器連接感應線圈後，調整至適宜觀察的範圍。
- (3) 敲擊鐵尺(30、10、6cm)，並利用示波器觀察現象後，取得圖形與數據。
- (4) 使用 Geogebra 對所測得的頻率與振幅進行模擬，並對模擬的數據進行研究



2. 敲擊鐵尺 4.3cm(駐波中得第 7 諧波)(考慮能量衰退，並將實驗定量)

- (1) 將鐵尺附上磁鐵，並將自行設計的感應線圈固定於塑膠尺上，須確保鐵尺振盪時，塑膠尺不動，並以 C 形夾固定於桌腳，並確定能讓磁鐵可以通過線圈中央。
- (2) 連接將示波器連接感應線圈後，調整至適宜觀察的範圍。
- (3) 比較以擺錘剛好敲擊到鐵尺 4.3cm 的度數四捨五入後加 10 的度數及擺錘剛好敲到鐵尺時的圖形，看何者較佳
- (4) 以擺錘剛好敲擊到鐵尺 4.3cm 的度數四捨五入後加 10 的度數進行敲擊，並利用示波器觀察現象，取得圖形與數據。

(5) 使用 GeoGebra 對所測得的頻率與振幅進行模擬，並對模擬的數據進行研究

3. 以懸臂樑數學型態敲擊波腹

(1) 將鐵尺附上磁鐵，並將自行設計的感應線圈固定於塑膠尺上，須確保鐵尺振盪時，塑膠尺不動，並以 C 形夾固定於桌腳，並確定能讓磁鐵可以通過線圈中央。

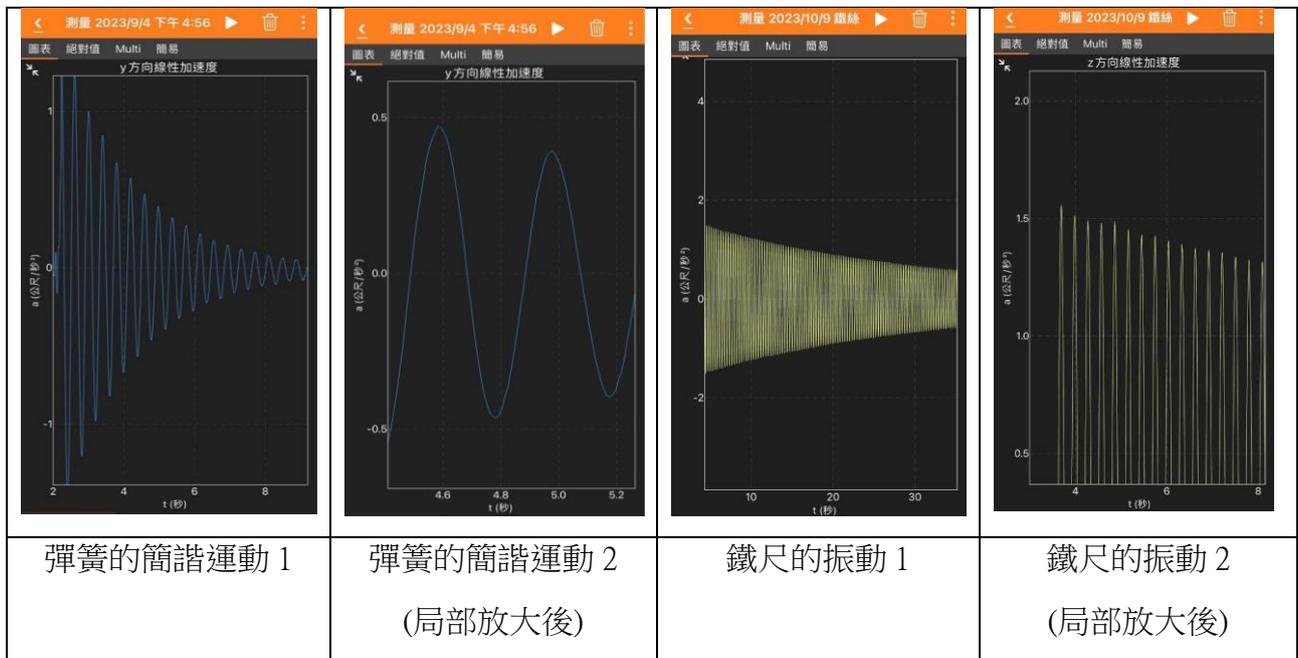
(2) 連接將示波器連接感應線圈後，調整至適宜觀察的範圍。

(3) 以擺錘剛好敲擊到鐵尺(30、14.5、8.7、6.4cm)的度數四捨五入後加 10 的度數(進行敲擊，並利用示波器觀察現象，取得圖形與數據。

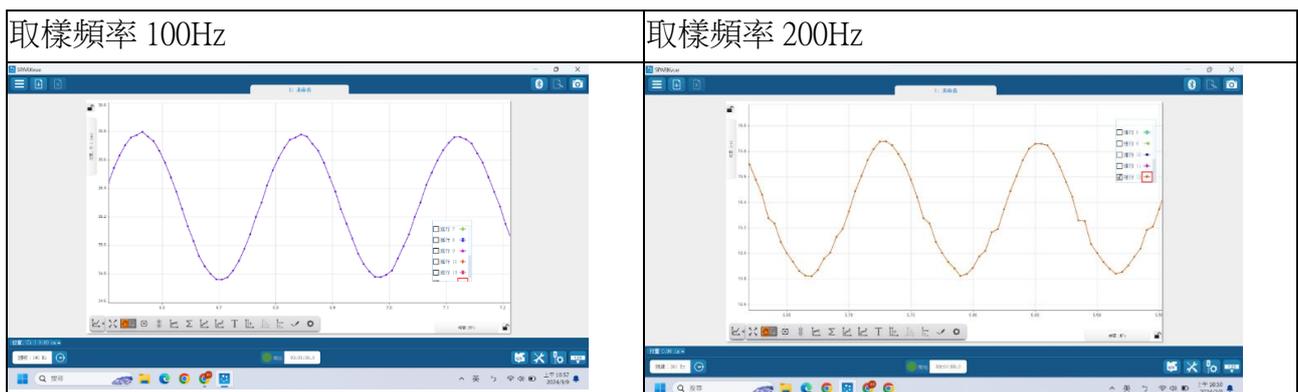
(4) 使用 GeoGebra 對所測得的頻率與振幅進行模擬，並對模擬的數據進行研究

伍、研究結果

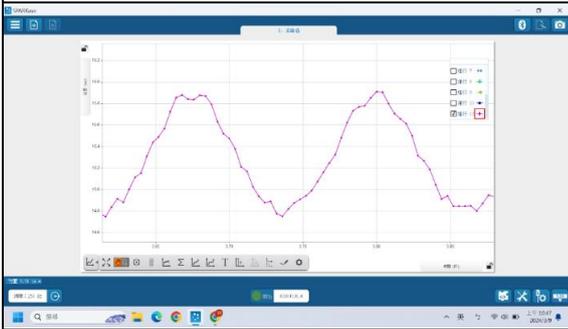
一、以手機 APP - Phyphox 量測彈簧的簡諧運動、鐵尺的振動



二、利用超音波位移感應器量測



取樣頻率 250Hz



三、利用手機 APP-FFT Wave 進行量測

(一)吸管的頻率測量：

小力吹氣		大力吹氣	
一端開口 一端閉口	兩端開口	一端開口 一端閉口	兩端開口
頻率比 1 : 3 : 5	頻率比 1 : 2 : 2.99	頻率比 1 : 2 : 3	頻率 1 : 3.16 : 5.27

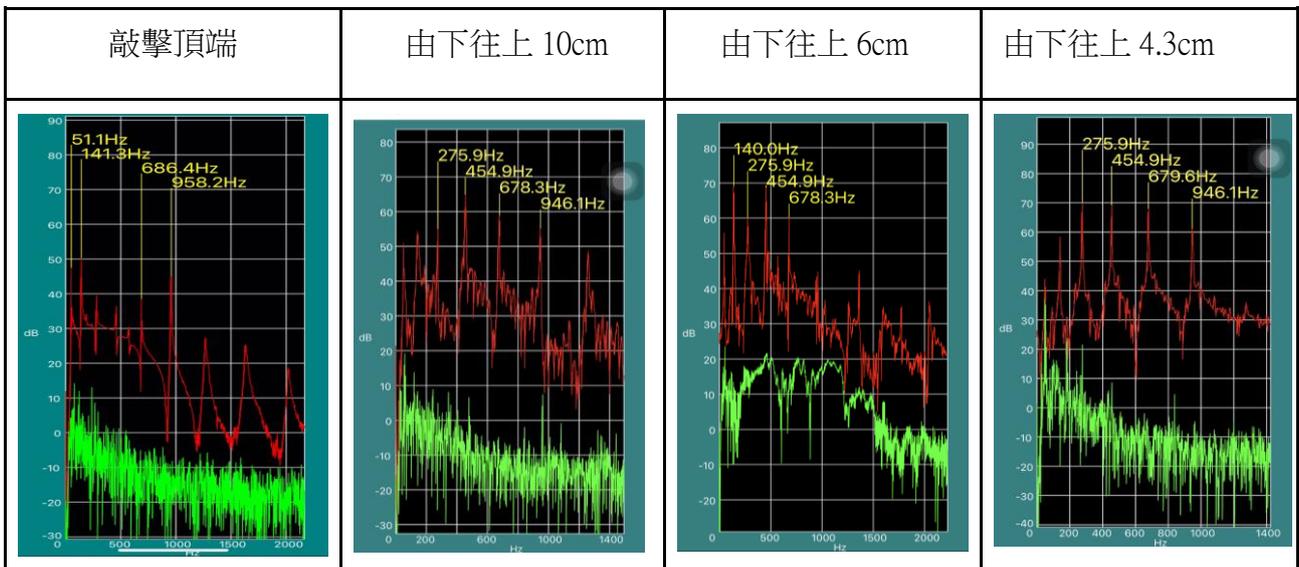
(二) 駐波理論敲擊波腹的鐵尺聲學頻率:

1. 以擺錘剛好敲到鐵尺及剛好敲擊到鐵尺的度數加 10 度 敲擊

10cm 剛好敲到(20 度)	10cm 剛好敲到再加 10 的度數(30 度)

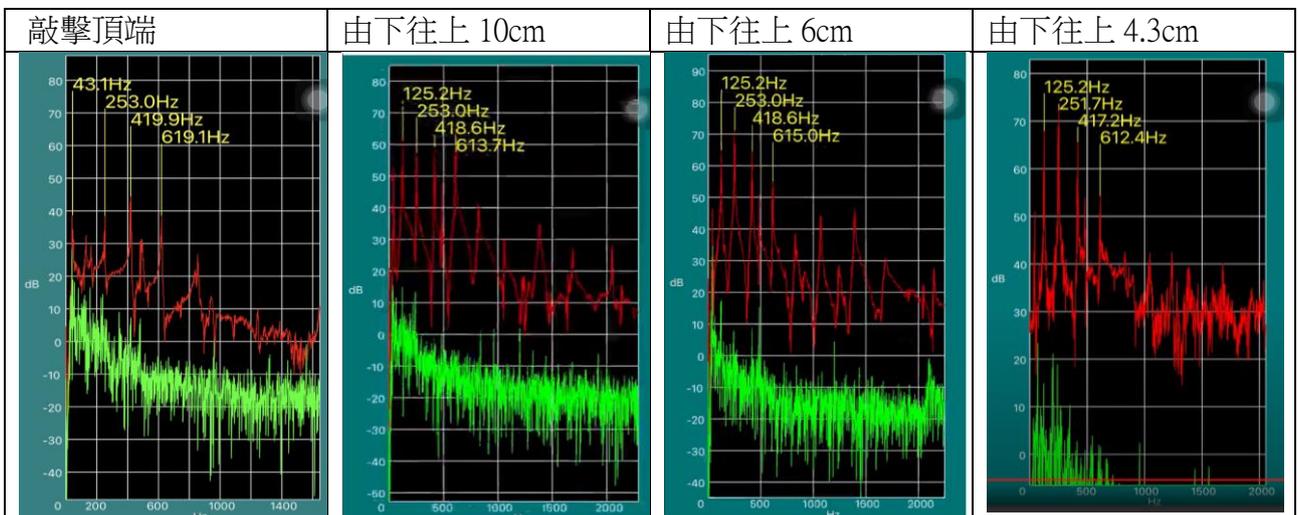
由於實驗所得的數據在剛好敲擊到時比較漂亮，可以看到比較清楚的各個波峰，因此我們在聲學上的研究就是使用剛好敲擊的方式

2. 不含磁鐵:



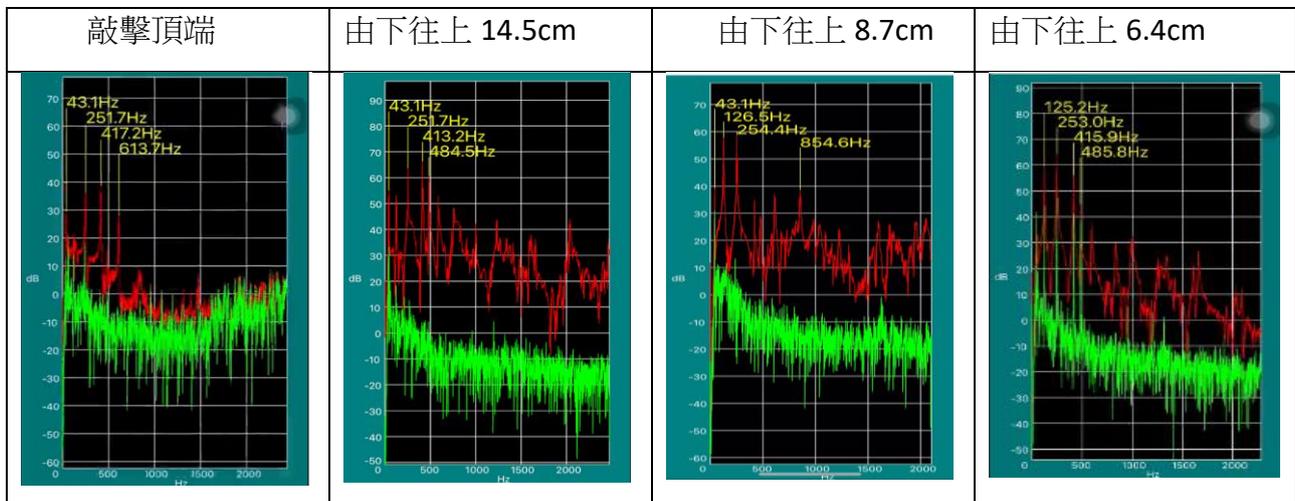
敲擊位置		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
敲擊 30cm	頻率	51.1	141.3	270.0	450.0	686.4
	頻率比	1.00	2.77	5.28	8.81	13.43
由下往上 10cm	頻率	49.8	140.0	275.9	454.9	678.3
	頻率比	1.00	2.81	5.54	9.13	13.62
由下往上 6cm	頻率	49.8	140.0	275.9	454.9	678.3
	頻率比	1.00	2.81	5.54	9.13	13.62
由下往上 4.3cm	頻率	49.8	140.0	275.9	454.9	679.6
	頻率比	1.00	2.81	5.54	9.13	13.65

3. 含磁鐵 (11.32g) :



敲擊位置		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
敲擊頂端 (含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	253.0	419.9	619.1
	頻率比	1.00	2.90	5.87	9.74	14.36
由下往上 10cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	253.0	418.6	613.7
	頻率比	1	2.90	5.87	9.71	14.24
由下往上 6cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	253.0	418.6	615.0
	頻率比	1.00	2.90	5.87	9.71	14.27
由下往上 4.3cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	251.7	417.2	612.4
	頻率比	1.00	2.90	5.84	9.68	14.21

(三)以懸臂樑數學型態敲擊鐵尺(含磁鐵)的波腹：

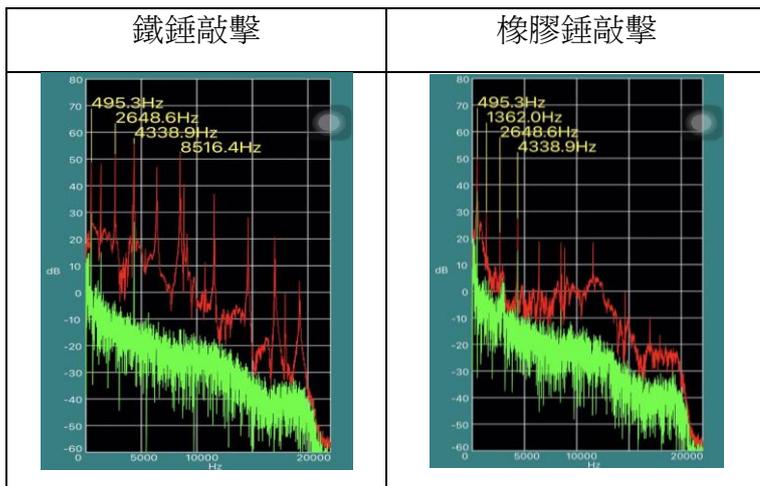


敲擊位置		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
敲擊頂端 (含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	251.7	417.2	484.5
	頻率比	1.00	2.90	5.84	9.68	11.24
由下往上 14.5cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	251.7	413.2	484.5
	頻率比	1	2.90	5.84	9.59	11.24
由下往上 8.7cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	251.7	414.5	485.8
	頻率比	1.00	2.90	5.84	9.62	11.27
由下往上 6.4cm(含磁鐵)	頻率	43.1	125.2	253.0	415.9	485.8
	頻率比	1	2.9	5.87	9.65	11.27

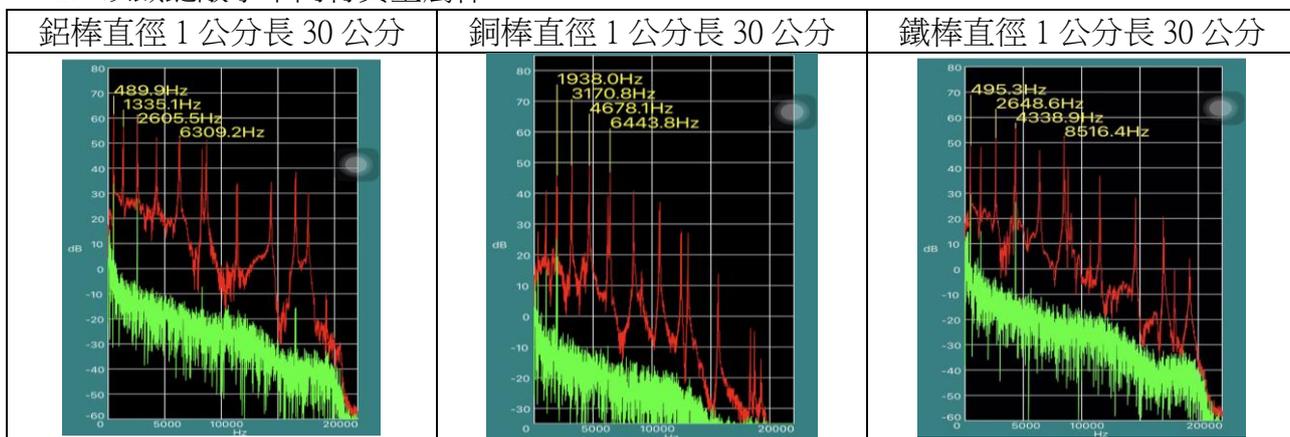
(四) 以不同規格的銅、鋁、鐵棒進行實驗

1. 以鐵錘敲擊與橡膠錘敲擊鐵棒 (規格直徑 1cm、長度 30cm)

由右圖發現以鐵錘敲擊所得圖形較易清楚，可以看到比較清楚的各個波峰，因此我們在銅、鋁、鐵、棒聲學上的研究就是使用鐵錘敲擊的方式。



2. 以鐵錘敲擊不同材質金屬棒



鋁棒 鐵錘 橫截面 p2-1

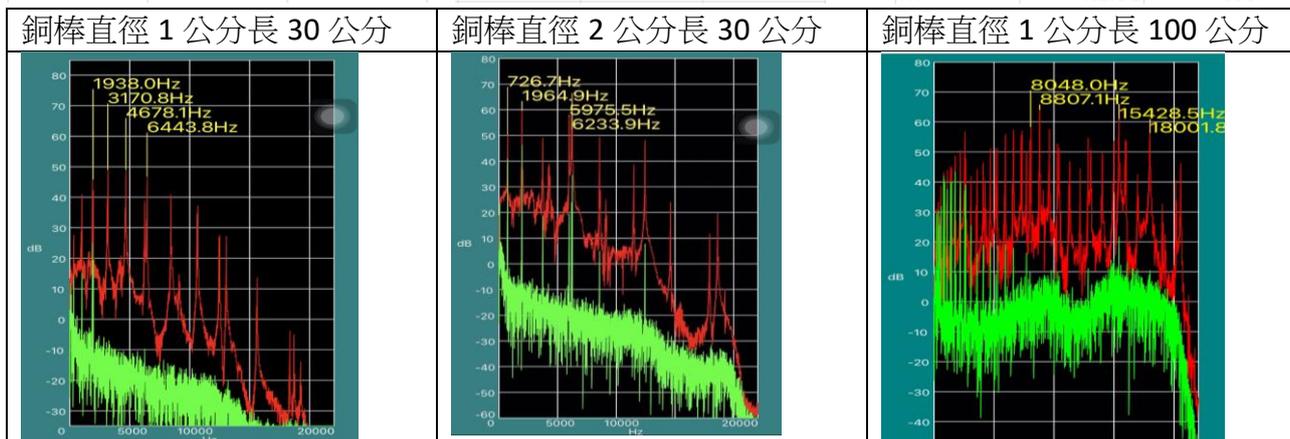
	頻率	頻率比
f1	489.9	1.00
f2	1335.1	2.73
f3	2605.5	5.32
f4	4269.0	8.71
f5	6309.2	12.88
f6	8683.3	17.72
f7	11401.8	23.27
f8	14416.5	29.43
f9	16569.8	33.82
f10	17694.9	36.12
f11	19277.6	39.35

銅棒 鐵錘 橫截面 p1-1

	頻率	頻率比
f1	360.0	1.00
f2	995.9	2.77
f3	1938.0	5.38
f4	3170.8	8.81
f5	4678.1	12.99
f6	6443.8	17.90
f7	8441.0	23.45
f8	10648.2	29.58
f9	12489.3	34.69
f10	15633.1	43.43
f11	18362.4	51.01

鐵棒 鐵錘 橫截面

	頻率	頻率比
f1	495.3	1.00
f2	1362.0	2.75
f3	2648.6	5.35
f4	4338.9	8.76
f5	6406.1	12.93
f6	8834.0	17.84
f7	11584.9	23.39
f8	14626.4	29.53
f9	17027.4	34.38
f10	17964.1	36.27
f11	19272.2	38.91

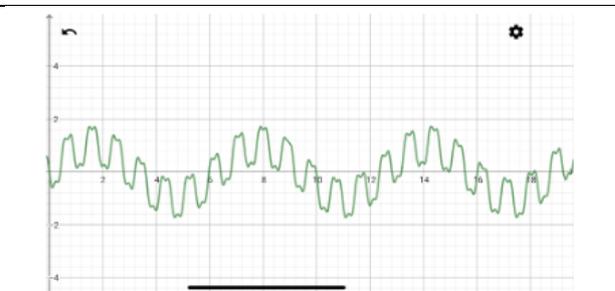
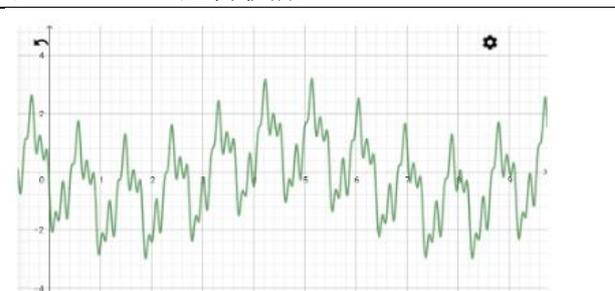
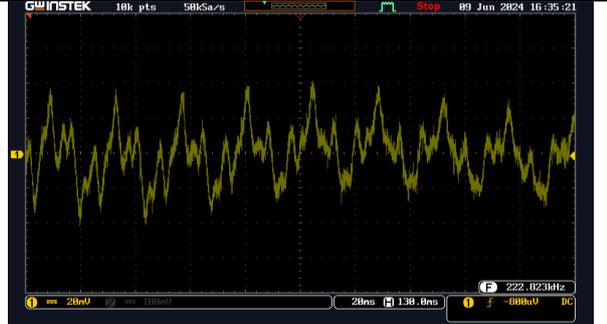
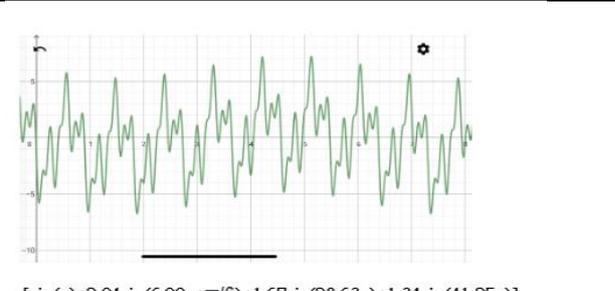


銅棒 鐵錘 橫截面 p1-1			直徑2cm長度30cm			直徑1cm長度100cm		
	頻率	頻率比	頻率	頻率比		頻率	頻率比	
f1	360.0	1.00	f1	726.7	1.00	f1	242.2	1.00
f2	995.9	2.77	f2	1964.9	2.70	f2	403.7	1.67
f3	1938.0	5.38	f3	3741.4	5.15	f3	602.9	2.49
f4	3170.8	8.81	f4	4252.8	5.85	f4	839.8	3.47
f5	4678.1	12.99	f5	5975.5	8.22	f5	1119.7	4.62
f6	6443.8	17.90	f6	6233.9	8.58	f6	1432	5.91
f7	8441.0	23.45	f7	8586.4	11.82	f7	1787.3	7.38
f8	10648.2	29.58	f8	9130.1	12.56	f8	2180.2	9.00
f9	12489.3	34.69	f9	11493.3	15.82	f9	2573.2	10.62
f10	15633.1	43.43	f10	12451.6	17.13	f10	3073.9	12.69
f11	18362.4	51.01	f11	14637.2	20.14	f11	3574.5	14.76
						f12	4112.8	16.98
						f13	4688.9	19.36
						f14	5141.1	21.23
						f15	5291.8	21.85
						f16	5927	24.47

四、利用示波器進行量測

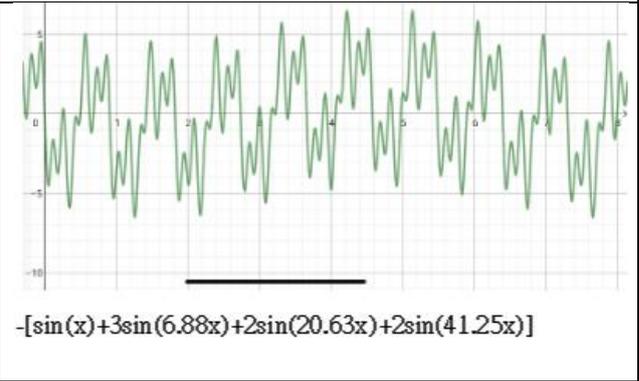
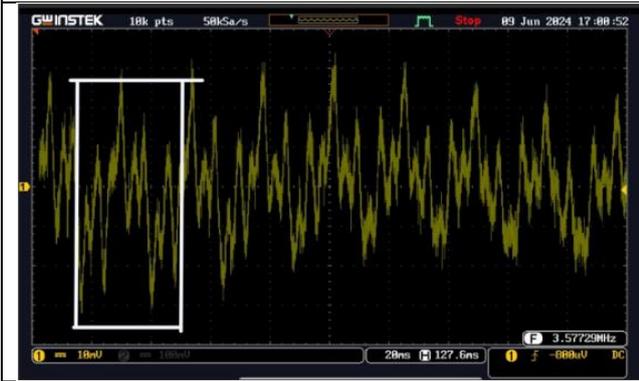
(一)以駐波理論敲擊鐵尺敲擊駐波波腹

1. 敲擊鐵尺(考慮能量衰退)

<p>(1)敲擊鐵尺 30 公分(第一諧波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$\sin(x)+0.8\sin(6.88x+\pi)+0.2\sin(20.63x+\pi)$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 = 6.06 : 41.67 = 1 : 6.88$</p>	
<p>(2) 敲擊鐵尺 10 公分 (第三諧波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$-[\sin(x)+1.4\sin(6.88x+\pi/6)+0.6\sin(20.63x)+0.5\sin(41.25x)]$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = 6.06 : 41.67 : 125 : 250 = 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25$</p>	
<p>(3) 敲擊鐵尺 6 公分 (第五諧波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$-[\sin(x)+2.84\sin(6.88x+\pi/6)+1.67\sin(20.63x)+1.34\sin(41.25x)]$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = 6.06 : 41.67 : 125 : 250 = 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25$</p>	

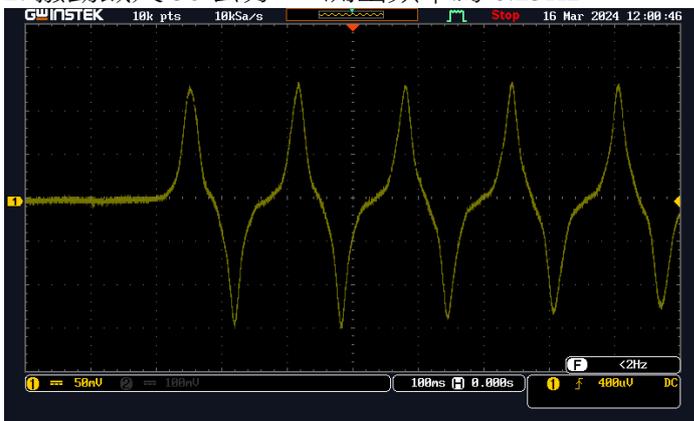
(4)敲擊鐵尺 4.3 公分(第七諧波)

以 GeoGebra 進行模擬



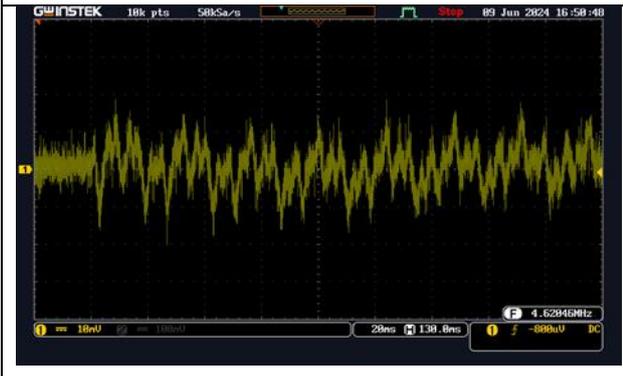
頻率 $f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = 6.06 : 41.67 : 125 : 250 = 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25$

2. 撥動鐵尺 30 公分，測出頻率為 6.25Hz

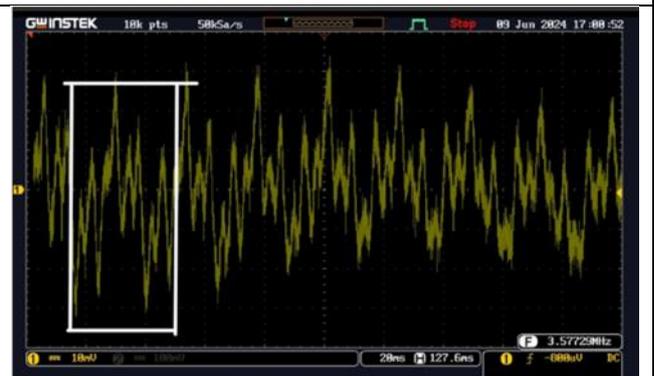


3. 敲擊鐵尺角度大小對示波器之力學震盪的影響
敲擊鐵尺 4.3 公分(第七諧波)

剛好敲到(16度)鐵尺 4.3cm

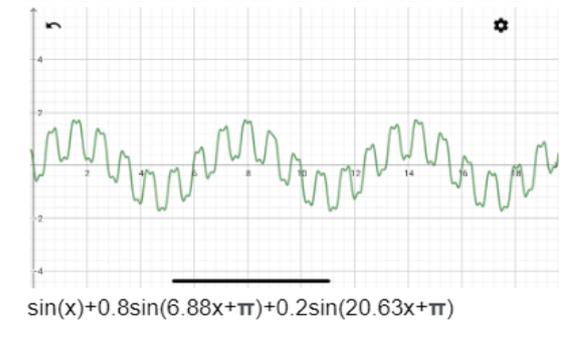
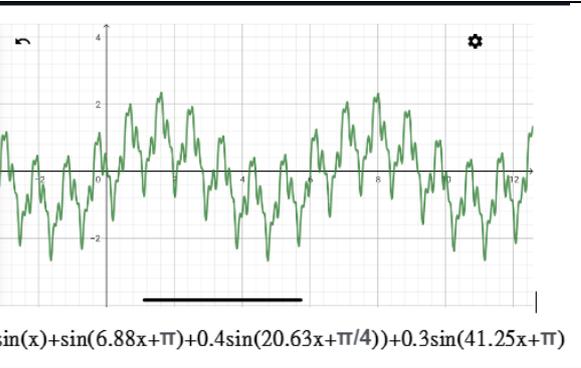
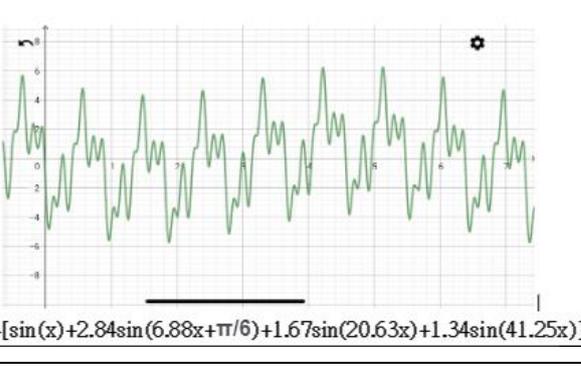
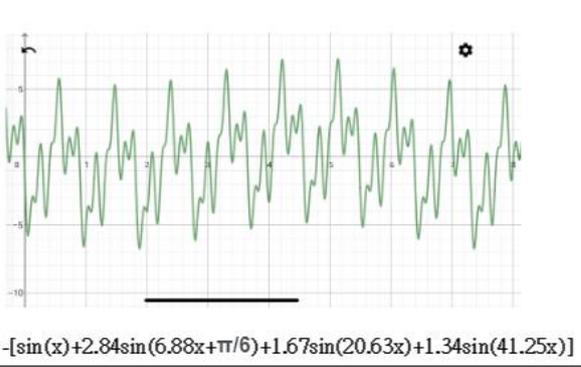


剛好敲到的度數+10度(30度)



由於實驗所得的數據在剛好敲到的度數+10度時比較漂亮，可以觀察到比較清楚的高階的頻率，因此我們在力學上的研究就是使用剛好敲擊的方式。

(二)以懸臂樑數學型態敲擊波腹

<p>(1)以 30 度敲擊鐵尺 30cm(第一階波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$\sin(x)+0.8\sin(6.88x+\pi)+0.2\sin(20.63x+\pi)$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 = 6.06 : 41.67 = 1 : 6.88$</p>	
<p>(2) 以 30 度敲擊鐵尺 14.5cm(第二階波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$\sin(x)+\sin(6.88x+\pi)+0.4\sin(20.63x+\pi/4)+0.3\sin(41.25x+\pi)$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 = 6.06 : 41.67 = 1 : 6.88$</p>	
<p>(3) 以 30 度敲擊鐵尺 8.7cm(第三階波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$-[\sin(x)+2.84\sin(6.88x+\pi/6)+1.67\sin(20.63x)+1.34\sin(41.25x)]$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 : f_3 = 6.06 : 41.67 : 125 = 1 : 6.88 : 20.63$</p>	
<p>(4) 以 30 度敲擊鐵尺 6.4cm(第四階波)</p> 	<p>以 GeoGebra 進行模擬</p>  <p>$-[\sin(x)+2.84\sin(6.88x+\pi/6)+1.67\sin(20.63x)+1.34\sin(41.25x)]$</p>
<p>頻率 $f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = 6.06 : 41.67 : 125 : 250 = 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25$</p>	

陸、討論

一、鐵尺的振盪與彈簧的簡諧運動討論

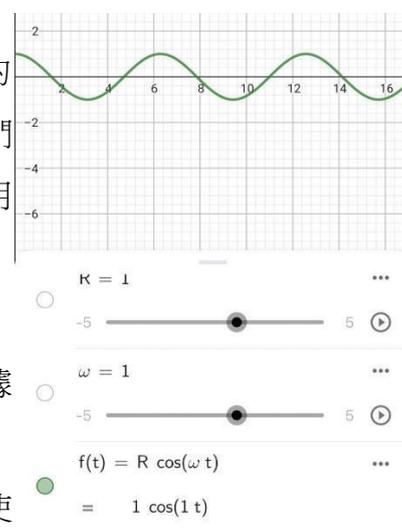
我們一開始認為鐵尺的振盪模式近似駐波，因此選擇鐵尺上的一點進行觀察時，發現該點進行簡諧運動，作為對比，我們先由彈簧的簡諧振盪進行研究。彈簧的簡諧振盪是有規律的波所組成的，當鐵尺受到阻力，振盪波形中的振幅逐漸遞減，而逐漸停止簡諧振盪，為阻尼振盪，不過其仍可視為有規律性的振盪。

當我們以手機 APP-Phyphox 量測彈簧的簡諧運動時，整體看起來是理想的簡諧振盪波形，放大觀察亦同。而後改為直接量測鐵尺的振動，整體看起來很相似，但將波形展開來觀察後，發現在某些波峰的位置，會出現忽高忽低的情形，並非理想的簡諧振盪形式(或阻尼振盪)。經過一段時間討論後，我們推測可能是手機的質量太大，在實驗裝置中只有鐵尺的一邊附載手機，導致重量的不平衡，此外進行多次的測量後，鐵尺因重量不均，容易歪掉變形，無法恢復原狀，因此必須用其他方式進行量測探究。恰巧實驗室有超音波位移感應器(Pasco 型號 PS-2103A)，因此改用超音波探測動態位移，來測量鐵尺的振盪頻率。

二、以不同儀器測量鐵尺振盪

(一)以超音波位移感應器(PASCO)量測

經由實驗結果可知，振盪圖形與我們原先預想的 $X=R\cos\omega t$ 的簡諧運動形式有些不同。透過超音波位移感應器的實驗結果，我們發現在較低的取樣頻率下，量測到的波形如我們所預期，與我們用 Geogebra 所模擬的簡諧振盪(如右圖)相似。但如果仔細觀察取樣頻率為 100HZ 的波形，發現其波峰並不像我們模擬的波形那麼的平滑，而是出現一些特別突兀的點。當我們提高取樣頻率，發現數據所形成的函數圖形更加偏離預期，提高至 250HZ 時，所測得的波形變得十分雜亂。剛開始懷疑是否因為測量技術精度不夠純熟，使



得量測圖形不如預期，特別在高頻段(>200Hz)，受限於超音波來回傳遞時間，因此取樣頻率無法在提升。在 100HZ 時，因為在較低的取樣頻率下，鐵尺的振盪會很像簡諧振盪，但其實在波峰出現了突兀的數據點，而在更高的取樣頻率時，並不如預期的簡諧運動的樣態，有更多不同於模擬函數 $X=R\cos\omega t$ 波形的點，並疊合成我們所觀察的現象。進行多次實驗，都能在取樣頻率較高時，發現不完整的波形，確定是因為取樣不夠高，而無法完全測得各點數據，並找出其他似簡諧運動 $X=R\cos\omega t$ 函數。在停滯無法在深入探討時，突然注意到在敲擊

鐵尺的過程中有發出聲音，而聲音是物體振動下的產物，因此開始聲音頻譜的研究，期待這方向會為我們帶來解開鐵尺振盪波形的線索。

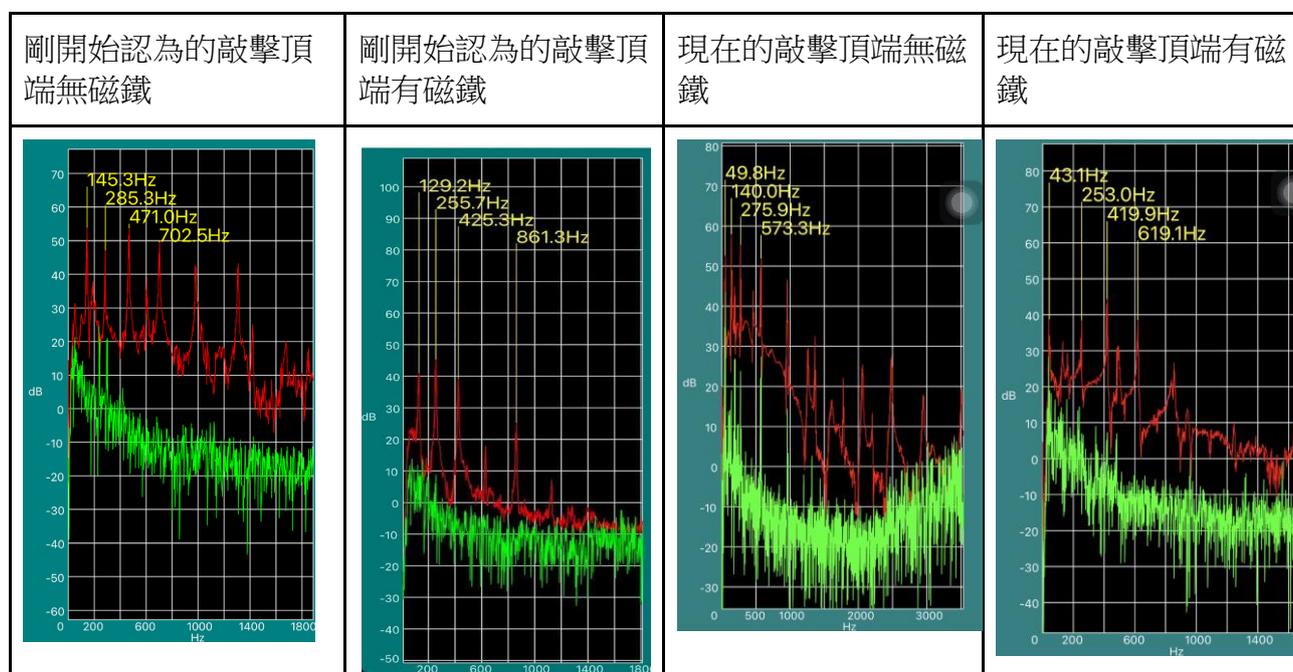
(二)利用手機 APP-FFT Wave 進行量測

1. 吸管的頻譜與鐵尺頻譜的關係

在吹吸管的實驗中，我們分成大力吹及小力吹的對照方式，發現了在大力吹吸管的時候，所顯示的頻譜雖然可以得到我們預測的駐波比，但是也觀察到無論是一端固定另一端自由端時，或兩端都為自由端時，其頻譜上會有相當多的雜訊，無法非常明確觀察，甚至在頻譜中間的部分，雜訊的影響相當大，甚至無法明確判斷波峰位置。相較於小力吹吸管時的頻譜，無論是一端固定另一端自由端，或兩端都為自由端時，都可以輕易觀察到波峰的位置，因此我們採用的方式是小力吹來觀察波峰位置，並進行計算頻率比對，比較是否與理論值相吻合。

透過小力吹吸管時，我們觀察當一端固定另一端自由時，其波峰的頻率比約為 1:3:5，確實符合我們之前在上方所繪的波形。而兩端都為自由端時其波峰的頻率比約為 2:4:6（一開始兩端都為自由端時其波峰的頻率比為 1:2:3，此處使用 2:4:6 是為了方便對鐵尺的頻譜進行解釋），也是符合我們之前在上方所繪的波形，且兩者都基本符合駐波的理论，有一定倍數與各自基頻波相對應。

2. 鐵尺振盪吸附磁鐵的有無對頻率造成的影響



由於一開始我們並沒有探討敲擊的角度，也沒有進行敲擊角度的對比，因此我們當時測出來的基頻與近期所測出的基頻不同，對比敲擊頂端有加磁鐵與沒加磁鐵，其聲音頻率分別為加磁鐵:129.2HZ、沒加磁鐵:145.3Hz，附載磁鐵的頻率有差異，兩者差約為 16Hz 左右，所

以由此可知加重使其頻率降低，但都還是符合 1 : 3 : 5 : 7 的一端開口一端閉口的吸管駐波比。

在之前的實驗中，我們發現聲音與力學是兩個獨立的系統，需要分開討論。而在聲學的部分，是使用吹吸管時所看到的 1 : 3 : 5 : 7 的一端開口一端閉口的駐波理論進行解釋。剛開始我們認為頻譜中得到有 1:3:5:7 的頻率，但其中有一件需注意的，當鐵尺振盪所產生的第二階的波，有一個 255.7Hz 的頻率，本來以我們用駐波的理论是無法解釋的，因此出現瓶頸很長一段時間。而我們繼續研究，看能否得到一些不一樣的資料，並且將之前沒有定量及敲擊鐵尺的聲音實驗從做一次，看能不能找出新的線索。最後我們得到在敲擊頂端所測得的基頻分別為加磁鐵:43.1Hz、沒加磁鐵:49.8Hz，發現兩者的基頻差值為 9Hz 左右，而當我們使用 43.1Hz 當作基頻時會發現，其頻率比為 1 : 2.9 : 5.84 : 9.68，與原本的駐波頻率比相去甚遠。因此我們推測，鐵尺的聲學振盪可能不是一端開口一端閉口的駐波形式，因此我們打算往力學的方向前進，看看能不能有不同的收穫，此外我們使用懸臂樑的空間樣態進行實驗，敲擊 (30、14.5、8.7、6.4cm)，而我們都可得到 $f_1=43.1\text{Hz}$ 、 $f_2=125.2\text{Hz}$ 、 $f_3=253.0\text{Hz}$ 、 $f_4=415.9\text{Hz}$ ，我們打算於力學進行對比看看有何異同。

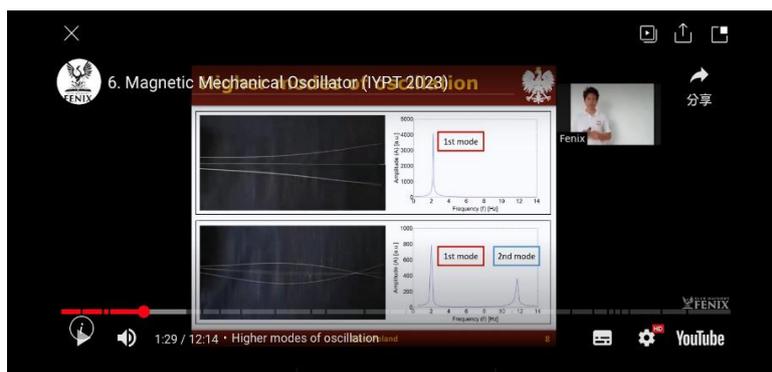
(三) 利用示波器進行量測

1. 敲擊位置與頻率之間的關係

敲擊 30 公分與 10 公分時只有激發出第一階與第二階的波形，而第三階的波會在敲擊 6 公分的位置時被激發。因為懸臂樑的振盪形式由正弦函數以及雙曲正弦函數疊加而成的，所以敲在 30、10、6 公分駐波的波腹上會分別激發出對應第一諧波(30/30=1)、第三諧波(30/10=3)、第五諧波(30/6=5)的頻率。

2. 示波器的頻率比

透過實驗我們可以得知確實是有第二階的波的存在，而兩者的比例約為 1 : 6.88，這結果與 2023 年 IYPT 波蘭隊針對磁機械振盪器所測量的結果，第一階頻率與第二階的頻率比為 1:6 左右非常接近，但該隊伍僅僅量測至第二階的波。(參考資料 5.)



而我們在另外一篇論文裡找到了一、二、三階的諧波的頻率比其為 1 : 6.26 : 17.55，這雖然和我們做出的比值為 1 : 6.88 : 20.63 有所出入。但是這其中有著眾多的變量可以去討論，比如：是否增加磁鐵、磁鐵位置、長度、材質、厚度等去討論

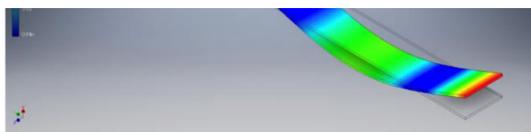


Figure 11. The typical 3rd mode shape.

Table 1. Study results with lateral orientation angle variation.

Lateral Orientation (degree)	Maximum Von Mises Stress (Mpa)	Maximum Displacement (mm)	1 st Natural Frequency (Hz)	2 nd Natural Frequency (Hz)	3 rd Natural Frequency (Hz)
0	5.017	2.042	13.72	85.94	240.85
22.5	4.64	1.887	13.72	85.94	240.85
45	3.556	1.444	13.72	85.94	240.85
67.5	1.944	0.7814	13.72	85.94	240.85
90	0.4096	0.005236	13.72	85.94	240.85



圖片來源：參考資料 1.

此論文中實驗所使用的鐵尺規格為：厚度為 1.5mm，寬度為 30mm，長度為 300mm。此材料為具有各向同性機械行為的鋁，楊氏模量為 107 psi，泊鬆比為 0.33，剪切模量為 3,700 ksi，屈服強度為 5,000 psi，拉伸強度為 13,000 psi，密度為 0.098 lb/in³

而當我們想再利用 Geogbra 來模擬示波器中的圖形，當 Geogbra 模擬第一、第二階波時都是可行的，但卻在第三階和第四階波時無法成功模擬出，可知 Geogbra 的模擬範圍只僅限於第一、第二階波，而在模擬第三階波、第四階波時由於其振幅變化量過快，而導致其只能進行局部區域的模擬。

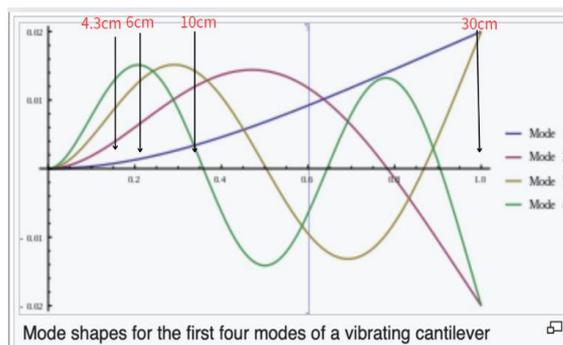
3. 使用懸臂樑的空間樣態進行實驗

在剛開始實驗時，並沒有採定量的方式進行，之後將實驗敲擊的角度一律以「剛好敲到」、「剛好敲到再四捨五入加 10 的度數」進行敲擊。此外朝兩個方向進行實驗，分別是由駐波為基礎計算出的敲擊位置（敲擊鐵尺頂端、10cm、6cm、4.3cm），以及網路上找到的懸臂樑第一到四的數學樣態進行敲擊（敲擊鐵尺頂端、14.5cm、8.7cm、6.4cm）。

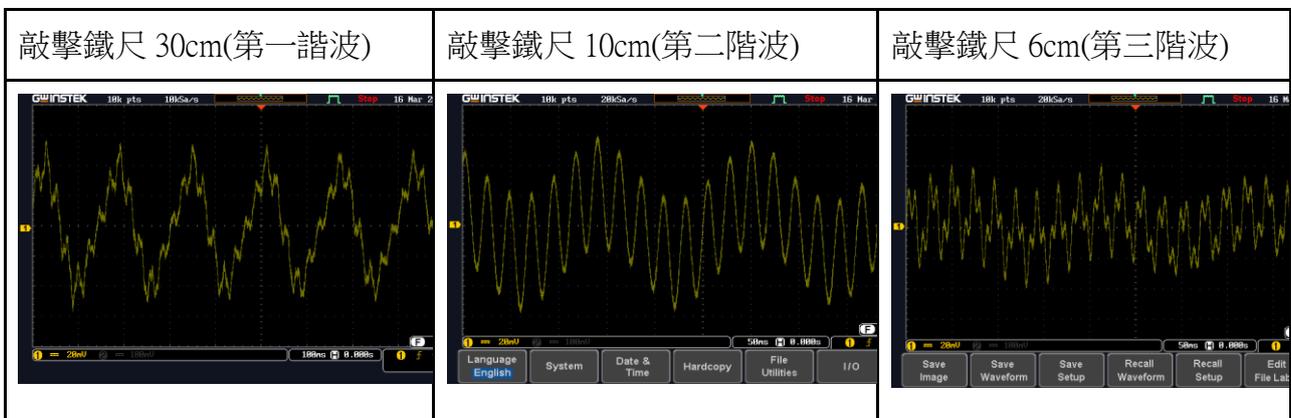
而在力學振盪中得到的數據為 $f_1=6.06\text{Hz}$ 、 $f_2=41.67\text{Hz}$ 、 $f_3=125\text{Hz}$ 、 $f_4=250\text{Hz}$ ，其比例為 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25，與用懸臂樑的空間樣態比 1 : 6.26 : 17.54 : 34.37 是相近的。

- (1) 駐波理論為基礎計算出的敲擊位置(未考慮能量衰退)

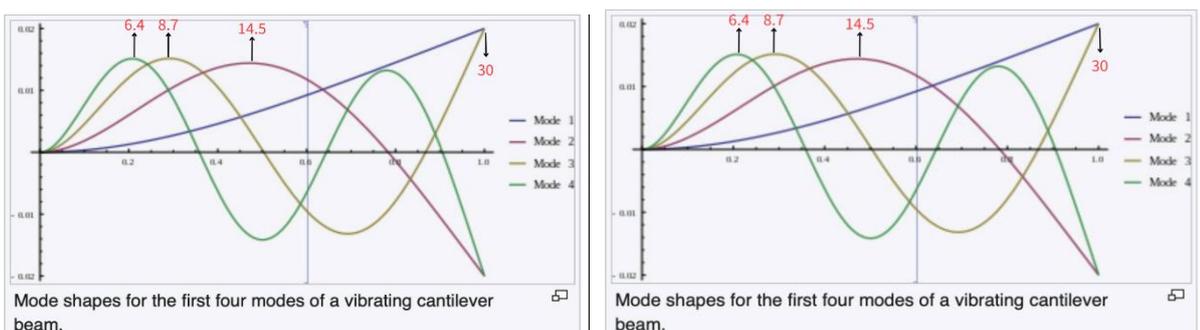
(右方圖片來源為參考資料 7，我們有進行改動，圖上的箭頭以及紅色字體為我們進行的標註)



- 圖中小箭頭標示頂端、10 公分、6 公分、4.3 公分 的四個位置。
- 此圖是假設每一個階波的最大振幅都相同情況下畫出來的
- 敲擊頂端時，第一階波分到最主要的能量，第二階波也有被激發。第三、四階波沒有分到足夠的能量。
- 在 10 公分的位置，第一階波的振幅小了很多，第二諧波的振幅相對的增加了許多。第三階波沒有分到什麼能量、幾乎看不到。
- 在 6 公分的位置，第一階波在這裡振幅很小、幾乎看不到。第二階波的振幅沒有那麼大，第三階波的振幅相對較大，拿到不少能量，且第四階波拿到了足夠的能量(足以令我們觀察到)。
- 在 4.3 公分的位置，第四階波的振幅增加的更多。



(2) 網路搜尋找到懸臂樑第一到四的數學樣態進行敲擊駐波理論為基礎計算出的敲擊位置



(圖片來源：參考資料 7，圖上的箭頭以及紅色字體為我們進行的標註)

- 敲擊頂端時第一階的波分到最主要的能量，第二階的波也有被激發。第三階的波沒有分到足夠的能量，所以顯示不清楚。
- 敲擊頂端，第一階波分到最主要的能量，第二階波也有被激發。第三、四階波沒有分到足夠的能量。

c. 敲擊 10、14.5cm 的位置的對比，首先兩者都有出現第一、第二、第三、第四階波。而第一、第二階波都有很明顯的出現，但是在三階及四階的時候敲機位置較下面的 10cm 比較明顯。

d. 敲擊 6、8.7cm 的位置的對比，第一階波在這裡振幅變小，第二階波的振幅沒有那麼大，第三階波的振幅相對較大，拿到不少能量，且第四階波拿到了足夠的能量(足以令我們觀察到)。但是在四階的時候敲機位置較下面的 6cm 比較明顯。

e. 在 6.4、4.3cm 的位置，第四階波的振幅增加的更多，更加能夠觀察。

f. 敲擊的位置並不會影響到頻率，而是會影響到懸臂樑頻率的能量分配。當敲擊的位置逐漸靠近固定端時，頻率較高的波會分配到較多的能量。當敲擊的位置逐漸靠近自由端時，頻率較低的波會分配到較多的能量。

(四) 超音波位移感應器與示波器的波形對比

利用超音波位移感應器的波形我們可以推測出，在最高取樣頻率(250Hz)時，還是無法滿足我們所需的測量精度。而利用磁鐵通過線圈產生感應電流的方法，在藉由示波器讀取訊號，顯現波形的樣態，成了提升量測精密度的方法。因為有這項實驗技術幫忙，我們成功的克服了取樣頻率不夠高的問題，能夠非常明確的在示波器中觀察波形。透過電磁感應所測量出的波形，證實了我們的推測，鐵尺振盪的波形並不是單單由 $X=R\cos\omega t$ 一種函數所產生的簡諧振盪，而是為 $y = A_1 \sinh(kx) + A_2 \cosh(kx) + A_3 \sin(kx) + A_4 \cos(kx)$ 的懸臂樑運動形式。

(五) FFT Wave 量測聲學振盪與示波器量測力學振盪：

在進行撥動鐵尺時，與敲擊鐵尺實驗中最大的不同就是，前者我們無法利用聲音進行量測，在使用 FFT Wave 時，只能收到背景中很雜亂的頻譜，撥動鐵尺並沒有於 FFT Wave 產生特殊的聲音頻譜。於是知道敲擊鐵尺跟撥動鐵尺是不一樣的，而且聲音只有在敲擊時出現，由於內部的振盪，因此為了從更多面向進行研究，我們決定以敲擊鐵尺的方式進行研究，以此才可同時測得聲音與示波器中所顯示的波形，進而研究鐵尺的聲學振盪與力學振盪。

在撥動鐵尺頂端時，我們發現撥動與敲擊的波形不一樣，可以發現撥動鐵尺在示波器上所呈現的圖形為 \sinh ，而一般敲擊鐵尺的波形，推論有三個波形疊合，為 \sin 、 \cos 、 \sinh 。我們思考不一樣的原因可能是，撥動時的振盪為外部的振盪，而且也沒有產生內部的振盪，在示波器中也確實沒有看到有細微振盪。

三、利用不同規格的鐵棒、鋁棒、銅棒進行實驗並觀察差異

分析-1 鐵棍敲橫截面比值直徑1cm長30cm					
銅棒 鐵錘 橫截面		鋁棒 鐵錘 橫截面		鐵棒 鐵錘 橫截面	
頻率(Hz)	頻率比	頻率(Hz)	頻率比	頻率(Hz)	頻率比
f1	360.0	1.00	f1	489.9	1.00
f2	995.9	2.77	f2	1335.1	2.73
f3	1938.0	5.38	f3	2605.5	5.32
f4	3170.8	8.81	f4	4269.0	8.71
f5	4678.1	12.99	f5	6309.2	12.88
f6	6443.8	17.90	f6	8683.3	17.72
f7	8441.0	23.45	f7	11401.8	23.27
f8	10648.2	29.58	f8	14416.5	29.43
f9	12489.3	34.69	f9	16569.8	33.82
f10	15633.1	43.43	f10	17694.9	36.12
f11	18362.4	51.01	f11	19277.6	39.35

從理論中我們找到的比值為 1 : 2.76 : 6.41 : 8.94，而銅棒、鋁棒、鐵棒的前四個頻率是非常接近的。這代表了棒狀金屬物體的振盪形式形式為兩端閉口。

分析-2 銅棒接近的頻率		分析-3	
直徑1cm長度30cm 直徑2cm長度30cm		直徑1cm長度30cm 直徑2cm長度30cm	
1938	1964.9	360	726.7
4678.1	4252.8	995.9	1964.9
6443.8	6233.9	1938	3741.4
8441	8586.4	3170.8	6233.9
10648.2	11493.3	4678.1	9130.1
12489.3	12451.6	6443.8	12451.6
15633.1	14637.2	8441	
		10648.2	

當棒狀金屬物體直徑變為原來的兩倍時頻率也會變成原來的兩倍。

分析-4 長30公分直徑1公分			
銅的聲速為4660m/s		銅棒	
	理論值	實驗值	f2-f1=2584.0Hz
第一階	2330Hz	2255.6Hz	f3-f2=2196.4Hz
第二階	4660Hz	4839.6Hz	f4-f3=2535.5Hz
第三階	6990Hz	7036.0Hz	
第四階	9320Hz	9571.5Hz	

銅棒理論值的差值因為 2330Hz，而這裡實驗得出的數據為理論值的± 200 左右。

鋁的聲速為6420m/s		鋁棒	
	理論值	實驗值	以2966.2Hz為f1
第一階	3210Hz	2966.2Hz	以3450.7Hz為f1
			f2-f1=2928.5Hz
第二階	6420Hz	6379.2Hz	f3-f2=3526.1Hz
第三階	9630Hz	9905.3Hz	f4-f3=2759.2Hz
第四階	12840Hz	12661.5Hz	

鋁棒理論值的差值因為 3210Hz，而這裡實驗得出的數據為理論值的-500~+300 左右。

(2966.2Hz 為 f₁ 或 3450.7Hz 為 f₁ 皆是)

鐵的聲速為5890m/s		鐵棒	
	理論值	實驗值	鐵的聲速為5890m/s
第一階	2945Hz	3073.9Hz	第一階2945Hz相似:3073.9Hz
第二階	5890Hz	5927.0Hz	第二階5890Hz相似: 5927.0Hz
第三階	8835Hz	8807.1Hz	第三階8835Hz相似: 8807.1Hz
第四階	11780Hz	12182.4Hz	第四階11780Hz相似: 12182.4Hz

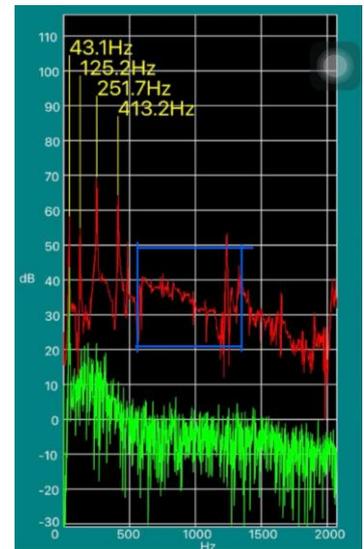
三者的實驗進行比較，整體上來講銅棒的實驗效果最理想，實驗得出的數據與理論值大約± 200。如果忽略第四階則是鐵棒的實驗最為理想，鐵棒的實驗數據為理論值的± 100 左右 (f₁~f₃ 差值與頻率皆是)。最差的是鋁棒所做出的實驗誤差範圍過大為-500~+300 左右。

四、討論並推測出鐵尺振盪的運動模式

在力學振盪中得到的數據為 $f_1=6.06\text{Hz}$ 、 $f_2=41.67\text{Hz}$ 、 $f_3=125\text{Hz}$ 、 $f_4=250\text{Hz}$ ，其比例為 $1:6.88:20.63:41.25$ ，與懸臂樑的空間樣態振動頻率比 $1:6.26:17.54:34.37$ 是相近的，因此測得的鐵尺力學振盪是符合理論的，可以用懸臂樑的振盪進行解釋。

然而在進行 FFT Wave 測量聲音時，由於一開始沒有定量的實驗，以及不夠好的實驗方法(沒有小力敲擊)，導致我們測得的頻譜不是那麼的完整，在用駐波理論進行討論時，中間的 200 多 Hz 的頻率一直讓我們困惑，也因為發現這點，為了解決這個部分，朝更精確的實驗去改良，使得到的數據更加有說服力。由於我們以 FFT Wave 最後所測得的頻譜為 $f_1=43.1\text{Hz}$ 、 $f_2=125.2\text{Hz}$ 、 $f_3=253.0\text{Hz}$ ，是非常接近力學振盪的 $f_2=41.67\text{Hz}$ 、 $f_3=125\text{Hz}$ 、 $f_4=250\text{Hz}$ ，我們發現也許聲音也是懸臂樑的表徵，當以這樣的方法研究，不只那 200 多 Hz 的波能夠得到解釋，在其他的部分也是合理的，因此我們認為，力學及聲學都是鐵尺振盪的中懸臂樑的樣態。

而我們發現在大力敲擊時 14.5cm30 度敲擊，剛好敲到為 20 度，中間有斷層的部分(為右圖中的藍色部分)，因為在大力敲擊時力學振盪的表徵更為清楚，但在小力敲擊時反而是聲學振盪的表徵更為清楚，因此在小力敲擊時在 FFT Wave 中的波峰較多，斷層的前方為懸臂樑力學振盪的頻率，可以被 FFT Wave 測得。



五、FFT Wave 頻譜中的 6HZ

波動鐵尺時 FFT Wave 測得的數據	靜置鐵尺時 FFT Wave 測得的數據

透過波動鐵尺時 FFT Wave 測得 5-10Hz 內的的峰可以了解到示波器所測得 6.06Hz 的頻率是可以被 FFT Wave 測到，但是能量非常小(- 40dB 左右)。

柒、結論

力學及聲學振盪的實驗結果和理論所預期的頻譜十分一致。在力學振盪的部分，我們可以偵測到第四階的懸臂樑振盪頻率。即使是 I Y P T 的國際競賽決賽的隊伍，也只觀察到第二階的振盪，我們的研究結果是超越他們的。在聲學振盪的部分，可以偵測到 $f_1=43.1\text{HZ}$ 、 $f_2=125.2\text{HZ}$ 、 $f_3=253.0\text{HZ}$ ，與力學振盪中的形式雷同的，因此在測量懸臂樑的力學振盪時，也可以使用聲學振盪進行佐證，而且以 FFT Wave 測量是更為準確的方式，可以直接於軟體中顯示頻率，這麼一來是可以用示波器取得大致的頻率，在利用 FFT Wave 取得準確的頻率，兩者互相對照使實驗準確度提升。

而且示波器是比起高速攝影機的價格更便宜，取得更方便，在測量方法上也較為方便。我們的創新是用電磁感應的方法偵測鐵尺的橫向運動，電磁感應的靈敏度很高，是我們實驗成功的關鍵，讓我們突破了取樣頻率的問題，在過去的文獻中沒有看到有人使用這個方法研究懸臂樑的運動。因此我們建議：在含有磁性的懸臂樑系統中（例如 m-FAM、m-STM、m-MEMS 等系統中），可以嘗試用電磁感應的方法增加測量的靈敏度。這是我們未來希望能繼續研究的方向。

捌、參考資料及其他

- 1、Ardi Noerpamoengkas,Miftahul Ulum, Ahmad Yusuf Ismail.(2020) Orientation Effect on Statics and Natural Frequency of Cantilever Beam
- 2、郑志月, 许瑞, 程志海. 高次谐振微悬臂的有限元设计与分析. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1086 – 1096
- 3、梁晶煒 (2000)。附加質量對懸臂樑橫向振動自然頻率影響研究。明志技術學院學報，32 卷，1-10。
- 4、許翊聖,邱郁蕙,黃聖祐.63 屆決賽探究精神獎-耦合振盪器於磁場內的運動與理論模型探討
- 5、<https://youtu.be/tLgJSc12Tas?si=siFijzdmDB4TdW3G>、YouTube 搜尋：Magnetic Mechanical Oscillator (IYPT2023)
- 6.Thomas D. Rossing and Daniel A. Russell,Department of Physics, Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 6011,Laboratory observation of elastic waves in solids,(Received 21 February 1990; accepted for publication 25 March 1990)
- 7.Euler – Bernoulli beam theory.(2024 April 12).In *Wikipedia, the free encyclopedia*.Retrieved June 15, 2024, from <http://en.wikipedia.org/wiki/Euler – Bernoulli beam theory>

特別感謝臺南高工李雅筑同學提供 **Arduino** 以及示波器的技術協助!!!

【評語】 051811

敲打金屬尺所引發的聲音及振動，使用手機 APP 偵測鐵尺的聲學振盪，以及線圈產生感應電流，透過示波器偵測鐵尺運動的力學振盪。藉由敲打金屬尺各不同部位引發聲音，以手機紀錄所發出聲響，繪製聲譜。利用示波器的 FFT Wave 取得準確的頻率，兩者互相對照使實驗準確度提升。很詳細觀察，對於不同撞擊模式進行探討，雖然沒有物理及數學推導，可得到觀察上結論。分析完整，可發展成實作課教材。

作品簡報

懸臂樑的聲學震盪與力學震盪

--鐵尺的探究與實作

壹、摘要

“鐵尺的磁機械振盪器”是去年參加全國物理探究實作競賽的主題，我們在賽後以此方向更進一步去研究。原先認為鐵尺的振盪行為類似繩上駐波，最後發現是鐵尺表現出懸臂樑的運動特徵。懸臂樑在建築學、結構和材料力學中很重要，並且在尖端科學的 AFM、STM、MEMS中也有應用。我們一開始使用 Tracker影像分析、Phyphox 加速度感應、及超音波距離感測器進行量測，最終我們研究出利用手機FFT Wave偵測鐵尺聲學振盪，及鐵尺力學震盪時透過電磁感應導入示波器，觀察其力學振盪，這兩種是我們創新的量測方式。鐵尺振盪須用懸臂樑的力學解釋，理論包含 \sin 與 \sinh 函數。我們在聲學、力學振盪的實驗結果是互相驗證的，並與預期的懸臂樑理論頻譜一致，驗證了鐵尺的振盪為懸臂樑的運動形式。

貳、研究動機

由於去年參加物理探究實作競賽，因為不夠瞭解題目磁機械振盪器而被淘汰，聆聽得獎隊伍報告依舊不清楚實驗，我們決定把鐵尺振盪研究清楚。

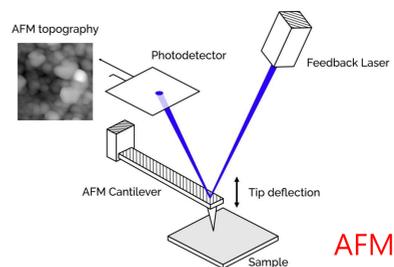
最初我們假設鐵尺運動類似繩上駐波，也就是鐵尺上任一點作簡諧運動。之後用影像追蹤軟體Tracker、手機軟體Phyphox、超音波感測器(PascoPS-2103A、Arduino距離感應器)，實驗和數據分析卻不完全是簡諧運動。

過程中透過文獻及實驗發現：鐵尺震盪模式類似懸臂樑，懸臂樑是建築學、結構力學和材料力學非常重要的主題，也在近代尖端科學有極重要的應用，例如原子力顯微鏡AFM、電子穿隧顯微鏡STM、微機電系統MEMS，我們認為懸臂樑這個方向值得深入去探究學習和研究。

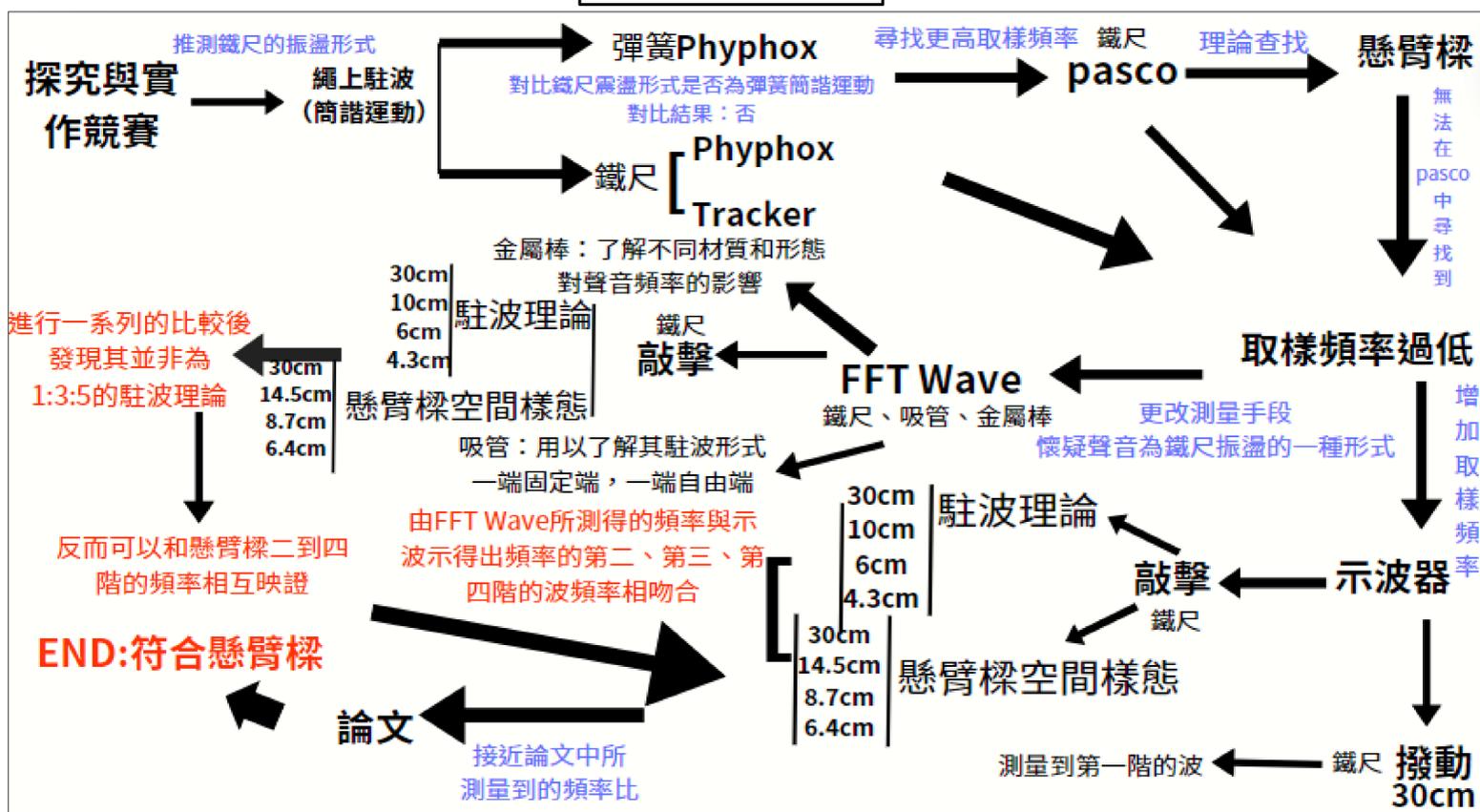
我們最後利用手機軟體FFT Wave偵測鐵尺的聲學振盪，也利用強磁、線圈及示波器的結合，偵測鐵尺力學振盪，並觀察呈現的頻譜，與GeoGebra進行理論模擬進行比對，驗證了鐵尺振盪中為懸臂樑表現樣態。

參、研究目的

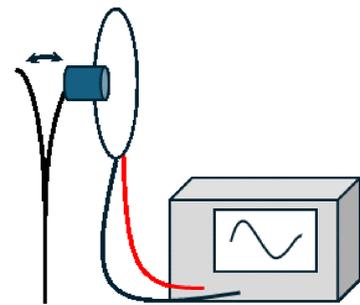
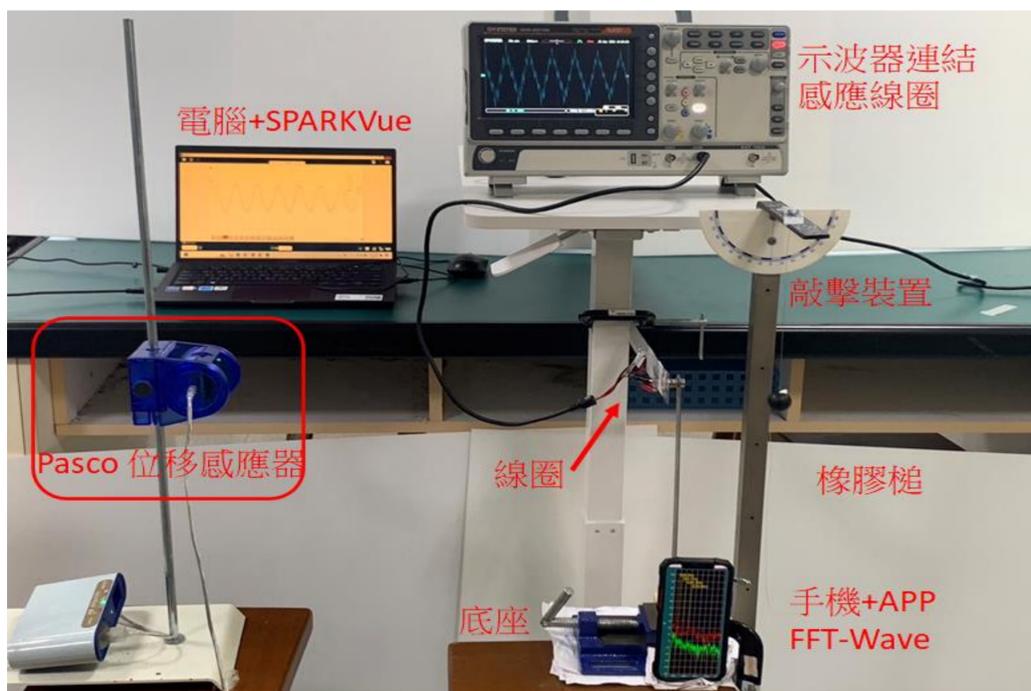
- 一、使用不同量測模式觀察並推測鐵尺振盪時可能的運動形式。
- 二、對比不同量測模式所獲得的實驗數據及圖形。
- 三、透過Geogebra模擬理論結果，與實驗中所得振盪波形對比，並對其差異加以改良。
- 四、尋找並設計適當的量測方法，觀測鐵尺振盪的模態。
- 五、利用不同規格的鐵棒、鋁棒、銅棒進行實驗並觀察差異。
- 六、討論並推測出鐵尺振盪的運動模式。



肆、研究方法



伍、實驗裝置



鐵尺吸附強磁→來回振盪
→進出線圈→產生感應電流
→電流引入示波器→觀察振盪波形



左圖為線圈特寫，在佈置磁鐵時，磁鐵置於線圈中間，並且剛好通過線圈

陸、理論說明

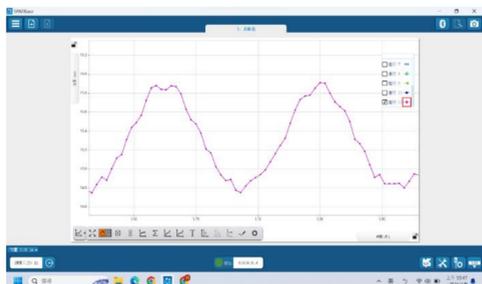
一、實驗量測原理的改進：

(一) 影像追蹤tracker：

將振盪過程錄影後，經由tracker觀察振盪圖形，但受限於錄影格式每秒60幀(60fps)的取樣，較高頻率無法順利讀出。除非以高速攝影機錄影，但售價頗貴。

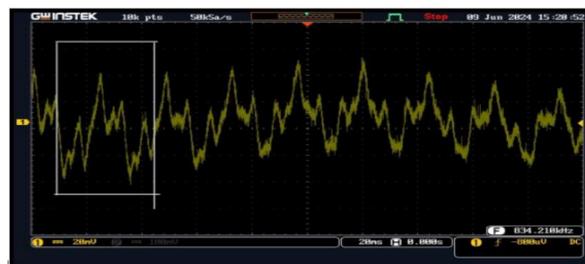
(二) 超音波位移感應器：

利用超音波偵測鐵尺振盪並繪圖但超音波最高取樣上限在250Hz(高頻無法觀察)



(三) 電磁感應配合示波器：

利用鐵尺吸附強磁，並進出線圈產生感應電流，藉由示波器讀取波形，具有高靈敏度但儀器取得方便，非常適合觀察高頻振盪



二、力學震盪部分

(一)懸臂樑(Cantilever)方程式

空間上由歐拉-伯努力樑方程式：

$$y=A_1\sinh kx+A_2\cosh kx+A_3\sin kx+A_4\cos kx$$

在這裡每個位移解稱為模態(mode)，而位移曲線稱為模態振型(mode shape)

而下方這三個模態描述懸臂樑在空間中的分佈

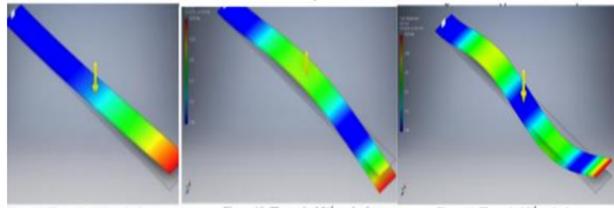
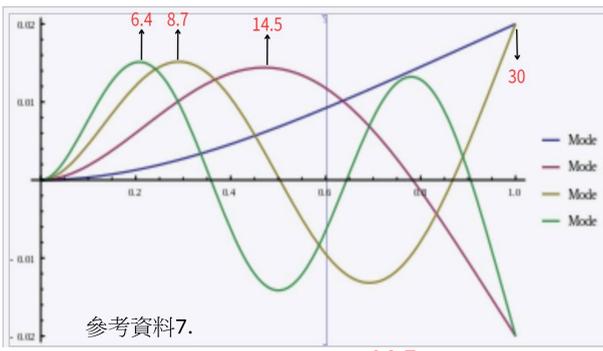


Figure 9. The typical 1st mode shape. Figure 10. The typical 2nd mode shape. Figure 11. The typical 3rd mode shape. 參考資料1.

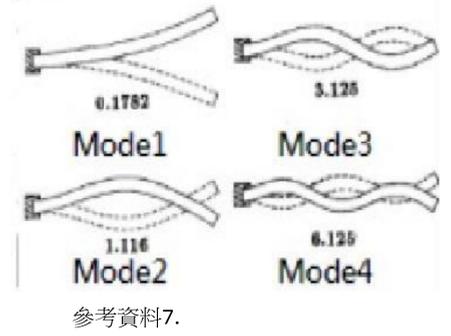
(二)懸臂樑上各樣態對應的位置

設定邊界條件後透過模擬獲得四種模態
如下圖 峰值可以視為四個模態振盪最明顯的位置



(三)懸臂樑每個樣態對應的頻率比

視為一端固定一端自由的型態
頻率比為 1 : 6.26 : 17.54 : 34.37



二、聲學震盪部分：

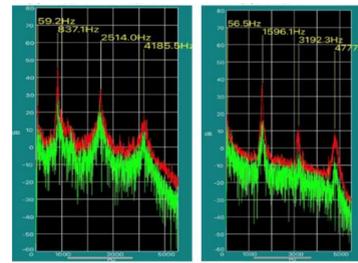
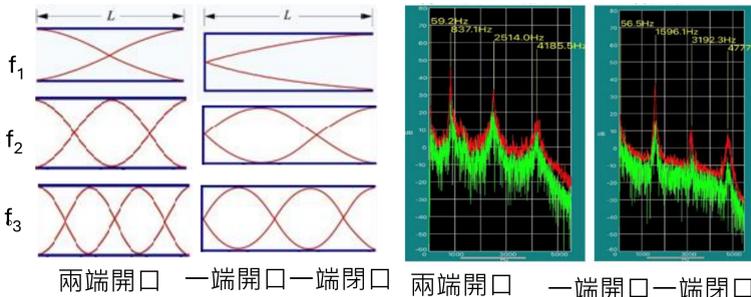
(一)駐波：聲音駐波型式多為兩端開口、一端開口一端閉口，

$$f_n = \frac{nv}{2L}, f_n = \frac{(2n-1)v}{4L}$$

我們以吹吸管並透過手機APP- FFT Wave測量聲音頻譜 f_2
藉以驗證吸管駐波是可量測的。

(二)懸臂樑振動所發出聲音頻率，可視為一端開口一端閉口型式 f_3

我們也可透過程式FFT-Wave探測出鐵尺發出的音頻，
憑藉此方法，也可以對照出力學振盪的模態點。



分析-1 鐵錘橫截面 鐵錘橫截面 直徑1cm長30cm		
頻率(Hz)	頻率比	
f1	360.0	1.00
f2	995.9	2.77
f3	1938.0	5.38
f4	3170.8	8.81
f5	4678.1	12.99
f6	6443.8	17.90
f7	8441.0	23.45
f8	10648.2	29.58
f9	12489.3	34.69
f10	15633.1	43.43
f11	18362.4	51.01

使用兩端閉口的懸臂樑進行實驗得到的數據(紅字部分的比值是符合理論的)

柒、研究結果

我們同時利用手機APP-FFT Wave量測聲音頻譜、利用強磁搭配線圈並經由示波器量測振盪波形尋找頻率，並以模擬軟體GeoGeBra對照示波器波形

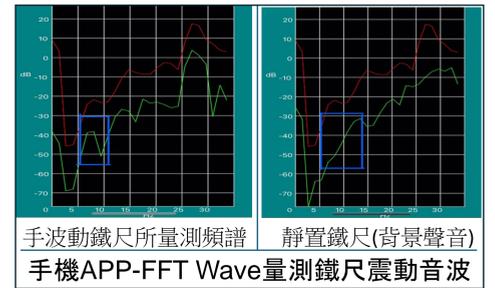
一、用手撥動

示波器圖形顯示，尖峰與谷底應該是磁鐵穿過線圈的瞬間來回振盪造成(振盪速率最快，感應電流最強)，透過此週期振盪圖形可以找出頻率。此外波形呈現不是正弦函數的形式，可能是使用的磁鐵和鐵尺產生的磁場形式造成的。在

此外手撥鐵尺的橫向力學振盪時，觀察FFT-Wave聲音訊號，幾乎無法量測出聲學振盪的訊號(微弱到程式無法標記)，推測手撥動鐵尺無法激發出聲學振盪，須採用其他方法，例如敲擊。



示波器顯示波形



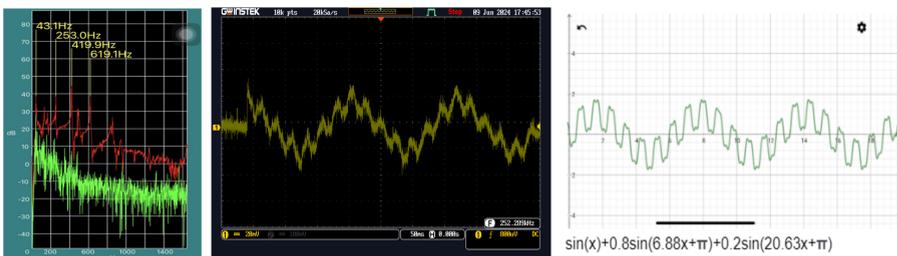
手波動鐵尺所量測頻譜 靜置鐵尺(背景聲音)
手機APP-FFT Wave量測鐵尺震動音波

二、敲擊鐵尺

根據懸臂樑空間分布(參考陸、理論說明的圖形)，我們可以推斷第一階至第四階波振盪峰值位置分別距離固定端30cm、14.5cm、8.7cm、6.4cm，在這些位置敲擊應該可以獲得振盪極佳的圖形

(一)敲擊固定端上方30cm處

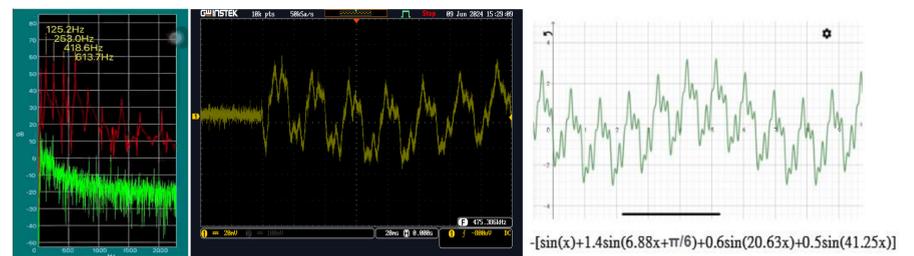
力學上可以激發第一階、第二階、第三階的波。第一階的振幅最大，第三階振幅最弱。聲學上頻率接近示波器所測得的數據。



聲學振盪頻譜 力學振盪波形(示波器) GeoGebra模擬

(二)敲擊固定端上方14.5cm處

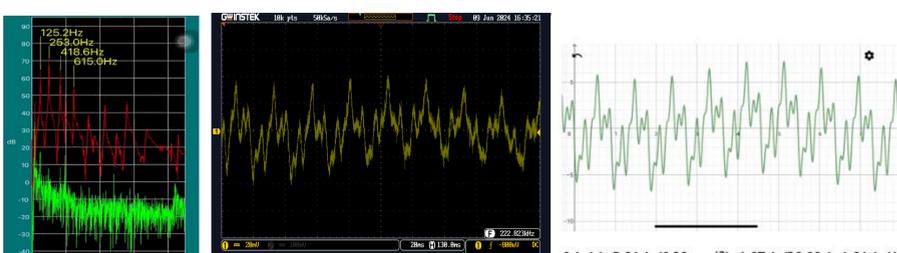
力學上可以激發第一階、第二階、第三階、第四階的波。第一、二階的振幅最大，第四階振幅最弱。聲學上頻率接近示波器所測得的數據。



聲學振盪頻譜 力學振盪波形(示波器) GeoGebra模擬

(三)敲擊固定端上方8.7cm處

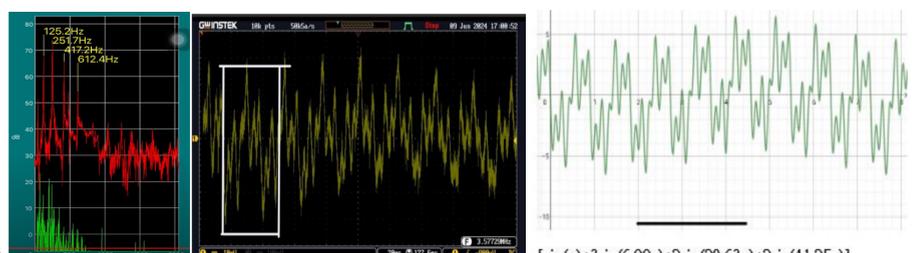
力學上可以激發第一階、第二階、第三階、第四階的波。第二階的振幅最大，第一階振幅最弱。聲學上頻率接近示波器所測得的數據。



聲學振盪頻譜 力學振盪波形(示波器) GeoGebra模擬

(四)敲擊固定端上方6.4cm處

力學上可以激發第一階、第二階、第三階、第四階的波。第二階的振幅最大，第一階振幅最弱。聲學上頻率接近示波器所測得的數據。



聲學振盪頻譜 力學振盪波形(示波器) GeoGebra模擬

捌、討論

一、與理論值相比較

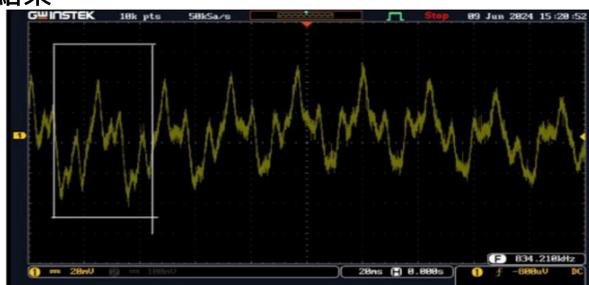
由文獻參考資料6，經由模擬一、二、三、四階的頻率比約為 1 : 6.26 : 17.54 : 34.37。

由上述實驗可知敲擊的位置不影響頻率比值，因此以敲擊固定端上方6.4cm為例，其聲學振盪所測出的頻率比為 1 : 6.88 : 20.63 : 41.25，與模擬結果非常接近

二、振幅衰退後的討論

(一)考慮振幅衰退後的結果

在敲擊鐵尺時，觀察示波器的波形會發現，到最後只剩第一階的波形仍存在，推測是能量衰退的問題。以6.4cm為例(如右圖)，第四階和第三階會迅速的衰退消失。



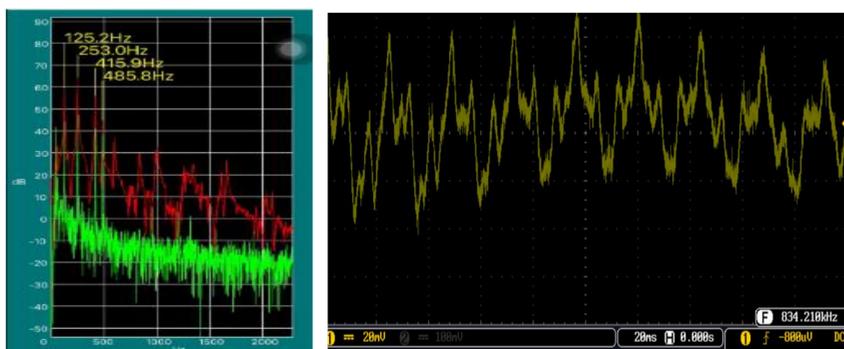
(二)第四階的出現

考慮到振幅衰退後，可以發現在14.5cm(如右圖)就已經出現第四階的圖形了

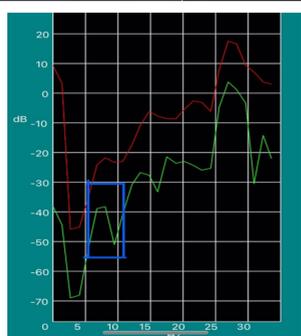


三、FFT Wave與示波器圖形共同討論

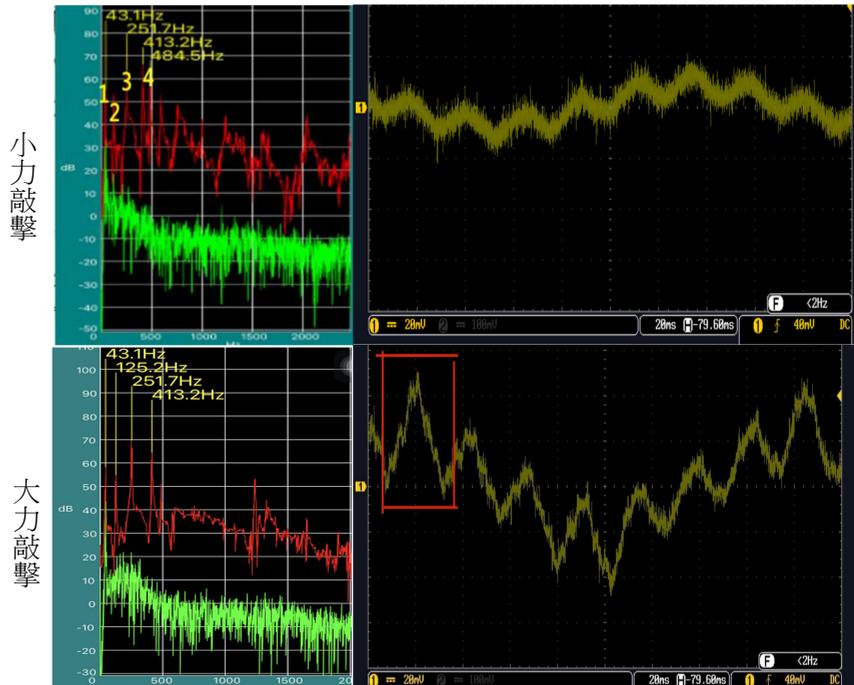
敲擊鐵尺6.4公分，由示波器所得波形，並測量出頻率為
6.06 : 41.67 : 125 : 250 · 比例約為1 : 6.88 : 20.63 : 41.25。
結果與FFT Wave的第1、2、3階(43.1、126.5、251.7Hz)相似。



基於以上的推測，示波器的第一階有可能
會被FFT Wave測量到，進行實驗後，在
FFT Wave中觀測到大約在6HZ的位置，有
些許的波動，因能量太小而無法被標記。
(右圖為FFT Wave中約在6HZ位置的波動)



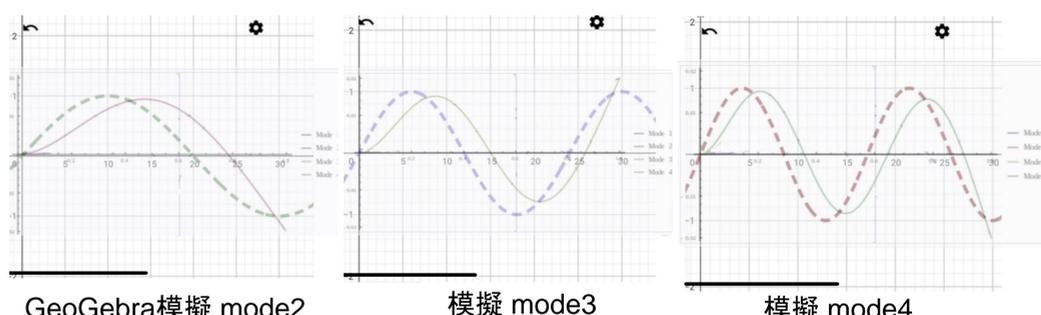
敲擊鐵尺14.5公分，由FFT-Wav頻譜與示波器所得波形觀察，
發現小力敲擊得到FFT Wave的頻率的峰值沒有出現斷層，而大力敲
擊則是所得到的示波器波形較為明顯，但是在大力敲擊FFT Wave時
候頻譜間會有斷層，而斷層前的頻率除了413.2Hz外恰好是示波器的
第2、3、4階。



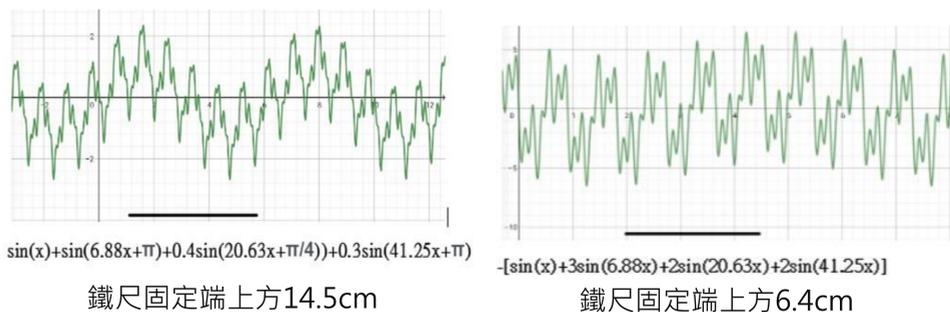
基於上述結果，我們推測鐵尺的聲學振盪與力學振盪是同樣的本質，不同的表現樣態，可以相互映證。(251.7HZ可以被合理的解釋)

四、不同理論進行敲擊後的比較

我們對駐波的理論進行敲擊(敲擊波腹)和
查找到的懸臂樑數學樣態兩者的實驗結果進行
了對比。總結出當敲擊的位置越靠近固定端時，
高階的波所得到的能量就越多，低階的波所得
到的能量就越少。當敲擊的位置越遠離固定端
時則相反。例如：鐵尺固定端上方14.5cm和
鐵尺固定端上方6.4cm(GeoGebra模擬)



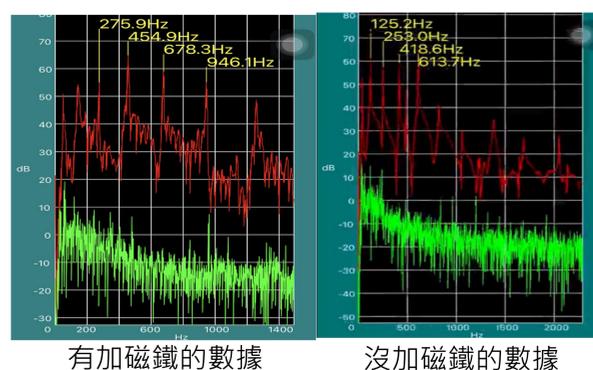
敲擊14.5cm時振幅比為1 : 1 : 0.4 : 0.3，敲
擊6.4cm時振幅比為1 : 3 : 2 : 2。敲擊14.5cm
第三、四階的振幅均小於第一階，敲擊6.4cm的
第二、三、四階的振幅都大於第一階，從兩者的
比較可以發現伴隨著敲擊位置的下移，高階振幅
所得到的能量已經大於低階政府所得到的能量。



五、磁鐵的有無對懸臂樑振盪頻率造成的影響

基於討論三、FFT Wave與示波器圖形共同討論，我們也透過FFT Wave來比較鐵
尺有無吸附磁鐵對懸臂樑振盪頻率是否有影響。

我們敲擊固定端上方10cm的位置，分別量測加磁鐵(11.32g)與沒加磁鐵的聲音振
盪頻譜。發現有加磁鐵的頻率為43.1 : 125.2 : 253 : 418.6，沒加磁鐵的頻率為
49.8 : 140 : 275.9 : 454.9。儘管頻率有些許變動，但比值仍無顯著差異，與理論
非常接近。



玖、結論

鐵尺振盪是否類似懸臂樑的研究，在力學及聲學振盪的實驗結果和理論所預期的頻譜一致。在力學振盪的部分，我們可以偵測到第四階的懸臂樑振盪波形，對照I Y P T的國際競賽決賽的隊伍，也只觀察到第二階的振盪，我們的研究方式是超越他們的。在聲學振盪的部分，可以偵測到 $f_1=43.1\text{Hz}$ 、 $f_2=125.2\text{Hz}$ 、 $f_3=253.0\text{Hz}$ ，與力學振盪所量測到是雷同的，因此在測量懸臂樑的力學振盪時，也可以使用聲學振盪進行佐證，而且以手機軟體FFT Wave測量是更為準確的方式，可以直接於軟體中顯示頻率，這麼一來是可以用示波器取得大致的頻率，在利用FFT Wave取得準確的頻率，兩者互相對照使實驗準確度提升。

此外比起利用高速攝影機進行影像追跡方式，透過示波器量測除了價格更便宜，在測量方法上也較為方便。我們的創新是用電磁感應的方法偵測鐵尺的橫向運動，高靈敏度是我們實驗成功的關鍵，讓我們解決了取樣頻率的問題，在過去的文獻中沒有看到有人使用這個方法研究懸臂樑的運動，我們認為在含有磁性的懸臂樑系統中(例如 m-FAM、m-STM、m-MEMS 等系統中)，可以嘗試用示波器搭配電磁感應的方法增加測量的靈敏度，這是我們未來希望能繼續研究的方向。

拾、參考資料及其他

1. Ardi Noerpamoengkas, Miftahul Ulum, Ahmad Yusuf Ismail. (2020) Orientation Effect on Statics and Natural Frequency of Cantilever Beam
2. 郑志月, 许瑞, 程志海. 高次谐微悬臂的有限元设计与分析. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1086 - 1096
3. 梁晶煒 (2000)。附加質量對懸臂樑橫向振動自然頻率影響研究。明志技術學院學報，32卷，1-10。
4. 許翊聖, 邱郁惠, 黃聖祐. 63屆決賽探究精神獎-耦合振盪器於磁場內的運動與理論模型探討
5. Magnetic Mechanical Oscillator (IYPT2023) <https://youtu.be/tLgJSc12Tas?si=-B-9LFfn7B7K5-71>
6. Thomas D. Rossing and Daniel A. Russell, Department of Physics, Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 6011, Laboratory observation of elastic waves in solids, (Received 21 February 1990; accepted for publication 25 March 1990)
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Bernoulli_beam_theory