

# 中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

051810

飛揚的繩圈

學校名稱： 國立羅東高級中學

<p>作者：</p> <p>高二 陳正昕</p> <p>高二 穆亭真</p> <p>高二 林昱辰</p>	<p>指導老師：</p> <p>謝祥綺</p>
--	-------------------------

關鍵詞： 空氣阻力、張力、繩圈

## 摘要

我們利用繩圈發射器研究繩圈在不同速度下的運動及形狀。假設繩圈只受重力、空氣阻力、張力作用，且發射器和繩圈接觸點張力為零，我們發展出計算繩圈受空氣阻力、張力的方法，且張力的理論值和實際值極為接近。我們認為，繩圈的速度越快，空氣阻力使繩圈整體向上抬升，使繩圈變得狹長，但繩圈末端的曲率與張力出現極大變化，相較於空氣阻力，張力對末端的形狀有更重要的影響。而在高速下末端會出現特別的凹陷現象，我們認為是末端的繩圈，受到的張力及空氣阻力，使末端各部份具有向後之加速度，使各段減速導致繩圈形狀發生凹陷。在這個過程中，張力的重要性遠大於空氣阻力，因此我們可以說，繩圈的末端是被自己拉過去的！

## 壹、研究動機

在 youtube 上有段影片 “Ultimate String Lasso Review!” (來源：<https://www.youtube.com/watch?v=Yc-GJG1AYy8>)，介紹一發射器利用轉輪的摩擦將繩圈以固定速率拋出，此時繩圈會在不斷轉動的同時，在空中維持固定形狀(圖 1)，若改變發射仰角，繩圈的形狀也會發生變化。我們對這個現象感到好奇。我們是否能改變速率來探究對繩圈運動、形狀的影響？最特別的是，我們注意到在高速時繩圈末端會出現凹陷的形狀(圖 2)，這是為什麼？我們期待能對這些問題進行探究與討論。

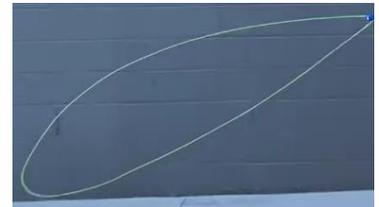


圖 1 運動中的繩圈  
(圖片來源：實驗者拍攝)

## 貳、研究目的

- 一、探討繩圈單位長度受空氣阻力和速度之關係。
- 二、探討繩圈上單位長度張力差與位置、速度之關係。
- 三、探討速度增加時繩圈上升之機制。
- 四、探討繩圈末端凹陷之現象。

## 參、研究原理

根據 Margaux Abello、Juliette Courson、Arnaud Maury、and Julian Renaud(2019)，以及 Nicolas Taberlet, Jeremy Ferrand, and Nicolas Plihon(2019) 等人之研究，繩圈的運動主要受三個力的作用：重力、空氣阻力、繩上張力，透過實驗，他們確認繩圈能升起，是因為空氣阻力的關係。他們也利用數學上的分析，計算出以某仰角、速度發射之繩圈，在穩定狀態下之形狀。

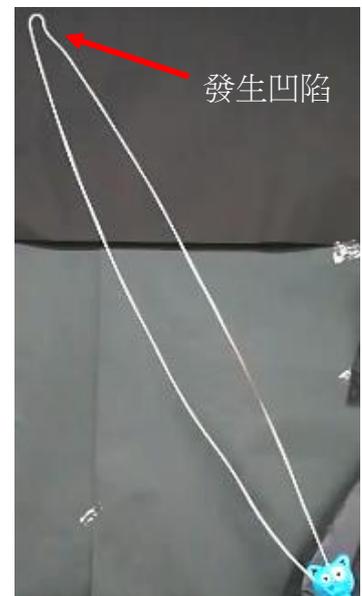
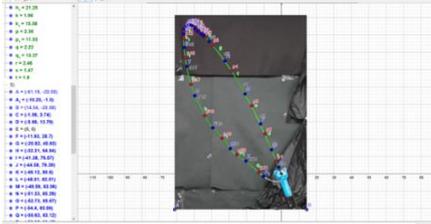


圖 2 繩圈末端發生凹陷  
(圖片來源：實驗者拍攝)

## 肆、研究設備

名稱	照片及說明
繩圈發射器	
繩圈	 <p>長200.00cm 繩重0.96g 線密度0.0048 g/cm</p>
直流電源供應器	 <p>提供繩圈發射器電流，在改變電流的情況下便可改變發射器馬達轉速，進而改變繩圈速度。</p>
手機	使用1080P、120fps之設定進行錄影。
Geogebra 軟體	

## 伍、研究過程與方法

### 一、 名詞與符號定義

$\lambda$	繩圈線密度
$f$	單位長度受空氣阻力
$\Delta T$	單位長度張力差
穩定態	繩圈形狀固定之狀態

### 二、 實驗一：繩圈單位長度受空氣阻力與繩圈速度之關係

#### (一)方法

1. 在繩上塗上顏色作為記號，播放影片時，每秒會撥放120個影格，即兩影格時

間差為 $\frac{1}{120}$ 秒，觀察記號沿繩圈移動一圈(200cm)之影格數，即可計算繩圈速度。

2. 如(圖 3)，在繩圈上找出最高點A與最低點B，取A、B兩點間之繩子加以分析，設此部分之繩長為 $l$ 。若將此部分切分為無限多段 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ 、...、 $\Delta l_n$ ，在極短時間內，A、B間繩子之運動可以視為 $\Delta l_1$ 移動至 $\Delta l_n$ ，而中間各段不動，而 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_n$ 動量都在水平方向，故A、B間之繩子動量變化在水平方向，鉛直方向動量變化為0。而A、B間之繩子在鉛直方向只受重力與空氣阻力，所以兩力必然有相同的量值。

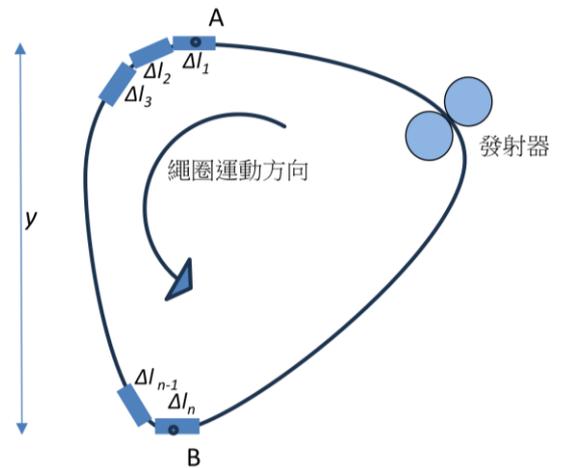


圖 3 (圖片來源：實驗者繪製)

3. 參見(圖 4)，設繩圈線密度為 $\lambda$ ，A、B間之繩子受重力可表示為 $\lambda g$ 。而所受空氣阻力之鉛直分量可用以下方法計算：假設空氣阻力沿繩子切線方向且與運動方向相反，令單位長度受空氣阻力 $f$ ，則各段 $\Delta l$ 受空氣阻力為 $f \Delta l$ ，又設各段 $\Delta l$ 與水平方向夾角為 $\varphi$ ，則各段 $\Delta l$ 受空氣阻力之鉛直分量為 $f \Delta l \sin \varphi$ ，令 $y$ 為A、B間鉛直距離。則A、B間之繩子受空氣阻力之鉛直分量為：

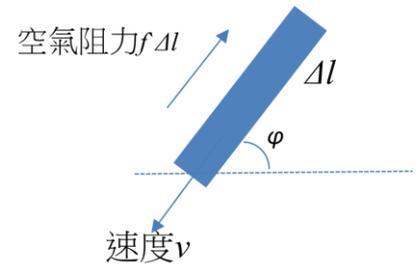


圖 4 (圖片來源：實驗者繪製)

$$\sum_{i=1}^n f \Delta l_i \sin \varphi_i = f \sum_{i=1}^n \Delta l_i \sin \varphi_i = f y$$

4. 綜合以上所述，可以得到：

$$\lambda g = f y \quad (\text{式 1})$$

可由此式計算單位長度空氣阻力 $f$ 。

## (二)步驟

1. 調整繩圈發射器仰角分別為 $20^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ ，改變電源供應器電壓，因此改變繩圈速度，錄影後擷取繩圈在穩定態之照片。
2. 利用Geogebra分析照片，找到繩圈上切線斜率為零的點：即最高點A及最低點B，以及兩點間之鉛直距離 $y$ 。
3. 再利用Geogebra繪製曲線擬合A、B間繩子的形狀，得到方程式後便可知道A、B間繩長 $l$ 。
4. 利用(式 1)計算單位長度空氣阻力 $f$ 。

### (三)結果

1. 實驗結果如表 1 所示。

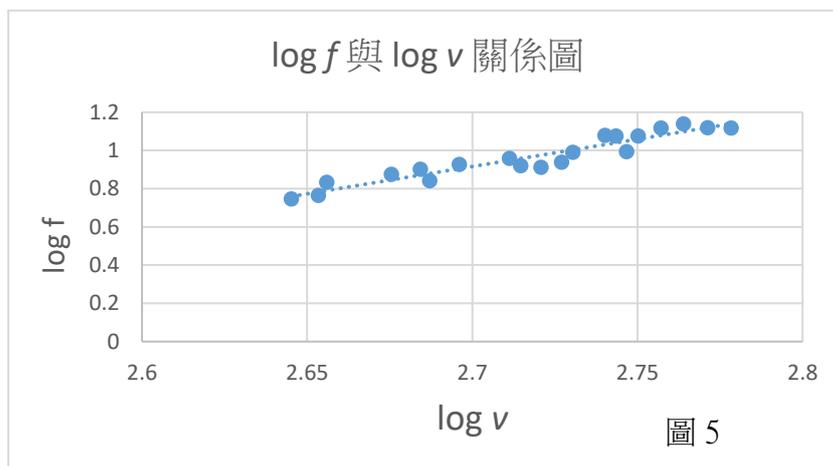
表 1 不同仰角在不同速度下之單位長度空氣阻力

仰角20°		仰角25°		仰角30°		仰角45°	
$v(cm/s)$	$f(dyne/cm)$	$v(cm/s)$	$f(dyne/cm)$	$v(cm/s)$	$f(dyne/cm)$	$v(cm/s)$	$f(dyne/cm)$
441.8	5.58	473.7	7.51	452.8	6.80	450.2	5.81
486.5	6.95	496.6	8.75	483.3	7.98	473.7	7.75
518.4	8.32	537.5	9.78	514.3	9.11	496.6	8.44
525.8	8.16	549.7	12.0	537.4	10.1	533.3	8.68
558.1	9.87	553.9	11.9	562.6	11.9	558.3	8.73
580.7	10.6	571.6	13.1				
590.2	12.8	580.7	13.8				

2. 由以上實驗，我們發現繩圈單位長度空氣阻力和速度成正相關，但和發射器仰角關係不大，因此我們綜合上述所有數據，並假設單位長度空氣阻力 $f$ 和速度 $v$ 之關係為：

$$f = av^b$$

利用上述數據，以 $\log f$ 對 $\log v$ 作圖，得到(圖 5)



3. 得到回歸曲線：

$$\log f = 2.857 \log v - 6.797 \quad R^2 = 0.9097$$

因此可以得到單位長度空氣阻力 $f$ 和速度 $v$ 之關係

$$f = 10^{-6.797} v^{2.857} \quad (\text{式 } 2)$$

### 三、 實驗二：計算繩圈在不同速度及仰角時，繩上各處張力

#### (一)方法

1. 基本假設：發射器和繩圈接觸點繩張力 $T_1$ 為0。  
說明：參考(圖 6)，將整個繩圈切分為無限多段 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ 、...、 $\Delta l_n$ ，繩圈透過兩個轉輪提供的摩擦力 $F$ 而發射，因此和轉輪接觸的 $\Delta l_n$ 受此摩擦，拉動後方各段 $\Delta l_{n-1}$ 、 $\Delta l_{n-2}$ ...、 $\Delta l_1$ 前進，而繩上的張力 $T_n$ 、 $T_{n-1}$ 、...、 $T_1$ 也向後逐漸遞減。而位於最後方的 $\Delta l_1$ 和 $\Delta l_n$ 間張力 $T_1$ 若不為0，代表最後方的 $\Delta l_1$ 也會拉動 $\Delta l_n$ ，這似乎是不合理的。因此我們大膽假設 $\Delta l_1$ 和 $\Delta l_n$ 間張力 $T_1 = 0$ 。

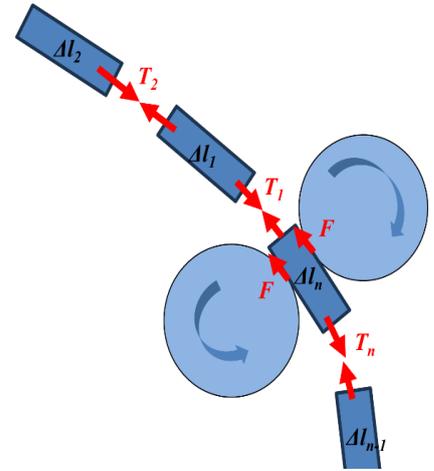


圖 6 (圖片來源：實驗者繪製)

2. 參考(圖 7)，若要計算繩上某點 $P$ 之張力 $T_p$ ，則以 $O$ 為原點，得到 $P$ 之座標為 $(x, y)$ ，取 $O$ 、 $P$ 間繩子加以分析，設此部分之繩長為 $l$ ，則質量為 $\lambda l$ 。若將此部分切分為無限多段 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ 、...、 $\Delta l_n$ ，每段長度為 $\Delta l$ ，每段質量為 $\Delta l \lambda$ ，在極短時間內， $O$ 、 $P$ 間繩子之運動可以視為 $\Delta l_1$ 移動至 $\Delta l_n$ ，而中間各段不動，若 $\Delta l_1$ 和水平方向夾角 $\theta_1$ ，則水平速度為 $v \cos \theta_1$ ，鉛直速度為 $v \sin \theta_1$ ，若 $\Delta l_n$ 和水平方向夾角 $\theta_n$ ， $\Delta l_n$ 水平速度為 $v \cos \theta_n$ ，鉛直速度為 $v \sin \theta_n$ ，則 $O$ 、 $P$ 間繩子的動量變化為

$$\text{水平方向 } \Delta p_x = \Delta l \lambda (v \cos \theta_n - v \cos \theta_1)$$

$$\text{鉛直方向 } \Delta p_y = \Delta l \lambda (v \sin \theta_n - v \sin \theta_1)$$

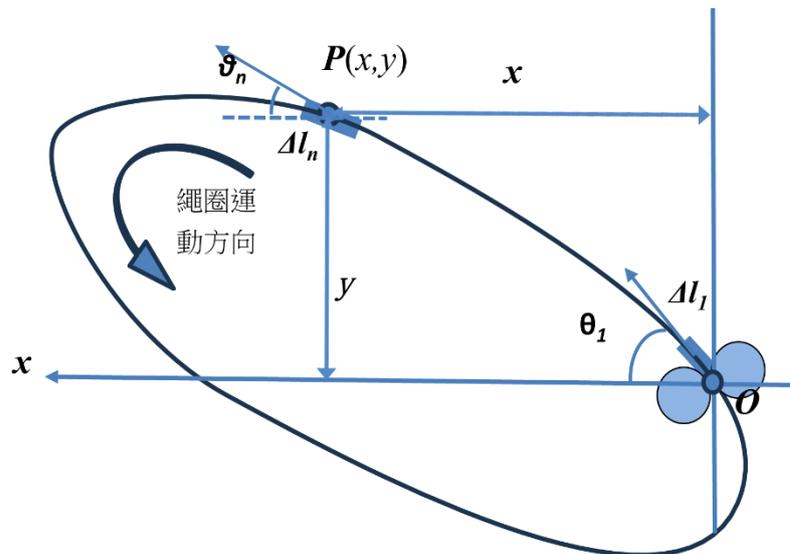


圖 7 (圖片來源：實驗者繪製)

3.  $O$ 、 $P$ 間繩子在水平方向受空氣阻力 $f$ 與張力 $T$ 之水平分力，按照牛頓第二定律

$$T_p \cos\theta_n - f_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\Delta l \lambda (v \cos\theta_n - v \cos\theta_1)}{\Delta t}$$

其中 $\frac{\Delta l}{\Delta t} = v$ ，所以可得到

$$T_p \cos\theta_n - f_x = \lambda v^2 (\cos\theta_n - \cos\theta_1) \quad (\text{式 3})$$

4.  $O$ 、 $P$ 間繩子在鉛直方向受重力、空氣阻力 $f$ 與張力之 $T$ 鉛直分力，所以

$$T_p \sin\theta_n - f_y - \lambda g = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta l \lambda (v \sin\theta_n - v \sin\theta_1)}{\Delta t}$$

其中 $\frac{\Delta l}{\Delta t} = v$ ，所以可得到

$$T_p \sin\theta_n - f_y - \lambda g = \lambda v^2 (\sin\theta_n - \sin\theta_1) \quad (\text{式 4})$$

5. 利用(式 3)、(式 4)，可以求出 $T_p \cos\theta_n$ 、 $T_p \sin\theta_n$ ，則  $P$  點張力

$$T_p = \sqrt{(T_p \cos\theta_n)^2 + (T_p \sin\theta_n)^2}$$

(二)步驟：利用實驗一所得到的穩定態照片以及單位長度空氣阻力，配合上述方法，計算繩上不同位置張力。

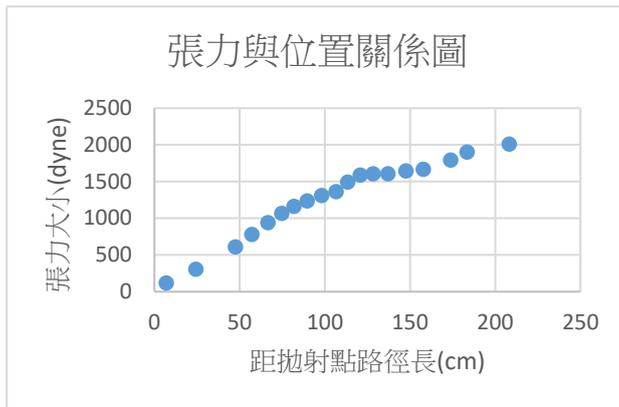
(三)結果：在仰角為 $25^\circ$ ，不同速度下，繩上不同位置之張力如下列各圖所示，我們也計算各分段單位長度張力差 $\Delta T$ ，也就是

$$\Delta T = \frac{P_{n+1} \text{ 點的張力} - P_n \text{ 點的張力}}{P_{n+1} \text{ 到 } P_n \text{ 的繩長}}$$

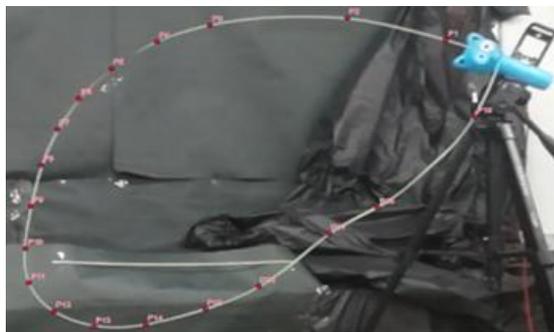
限於篇幅，此處只列出仰角為 $25^\circ$ 之數據， $20^\circ$ 、 $30^\circ$ 之數據請參考附錄。

# 1. 仰角25°

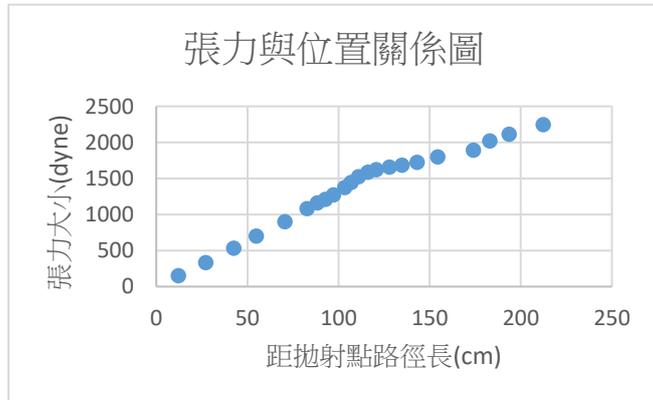
(1) 速度  $v = 473.7 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 7.51 \text{ dyne/cm}$



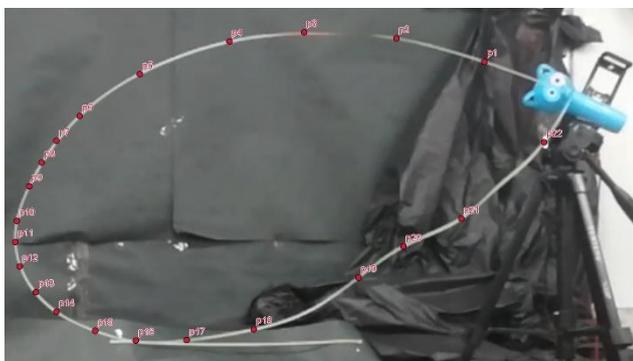
分段	分段單位長度張力差 (dyne/cm)
P1~P2	10.997
P2~P3	12.993
P3~P4	17.838
P4~P5	16.856
P5~P6	15.739
P6~P7	12.928
P7~P8	10.010
P8~P9	8.712
P9~P10	5.802
P10~P11	18.898
P11~P12	13.154
P12~P13	2.539
P13~P14	-0.254
P14~P15	3.693
P15~P16	2.387
P16~P17	7.763
P17~P18	11.250
P18~P19	4.424



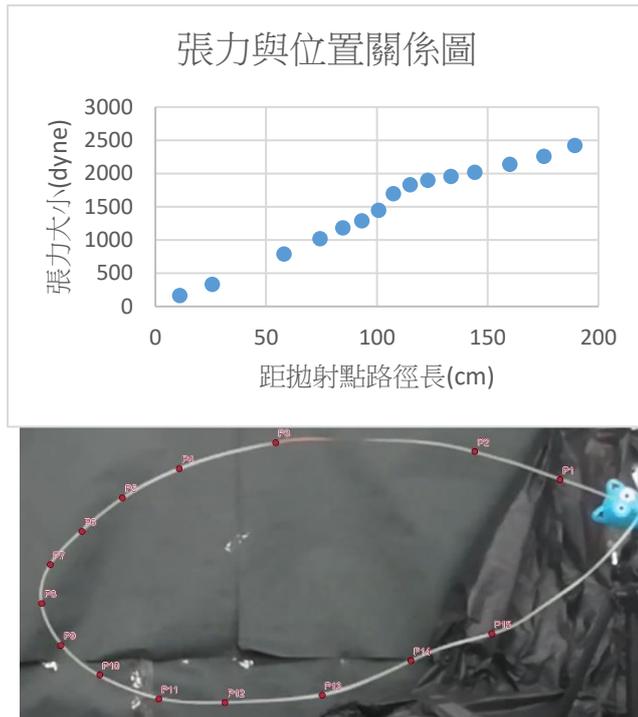
(2) 速度  $v = 496.6 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 8.75 \text{ dyne/cm}$



分段	分段單位長度張力差 (dyne/cm)
P1~P2	12.117
P2~P3	13.013
P3~P4	13.537
P4~P5	12.565
P5~P6	14.836
P6~P7	14.869
P7~P8	10.480
P8~P9	13.705
P9~P10	16.865
P10~P11	20.595
P11~P12	18.620
P12~P13	12.637
P13~P14	7.335
P14~P15	5.121
P15~P16	3.847
P16~P17	4.548
P17~P18	6.804
P18~P19	4.834
P19~P20	13.735
P20~P21	9.014
P21~P22	7.107

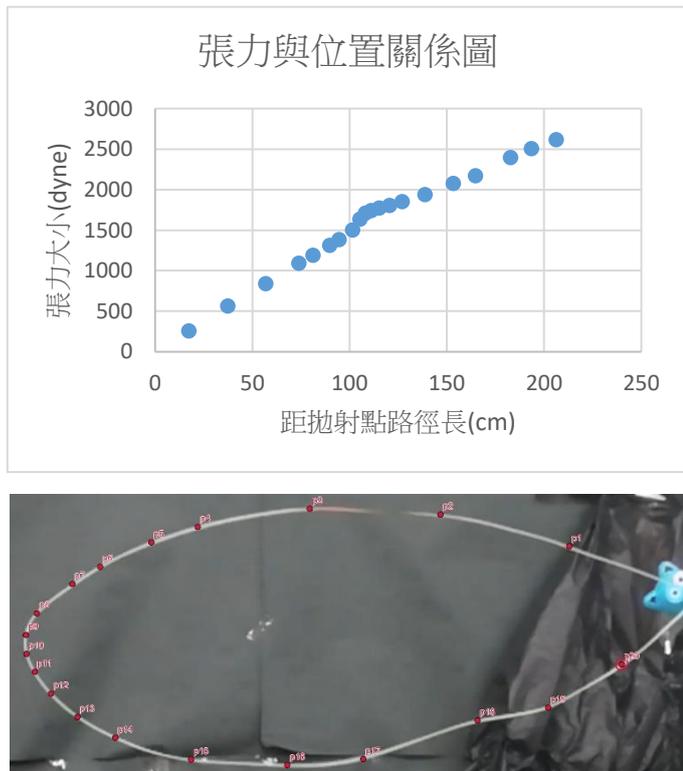


(3) 速度  $v = 537.5 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 9.78 \text{ dyne/cm}$



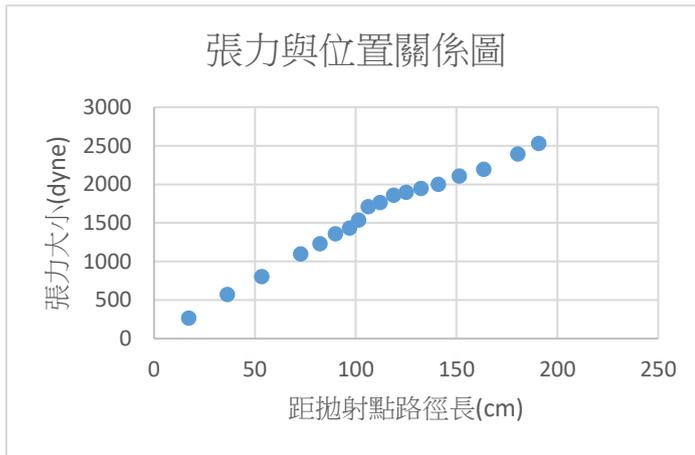
分段	分段單位長度張力差(dyne/cm)
P1~P2	11.511
P2~P3	14.070
P3~P4	14.077
P4~P5	15.832
P5~P6	12.302
P6~P7	20.806
P7~P8	37.908
P8~P9	17.585
P9~P10	8.043
P10~P11	5.910
P11~P12	5.755
P12~P13	7.444
P13~P14	7.793
P14~P15	11.714

(4) 速度  $v = 549.7 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 12.0 \text{ dyne/cm}$

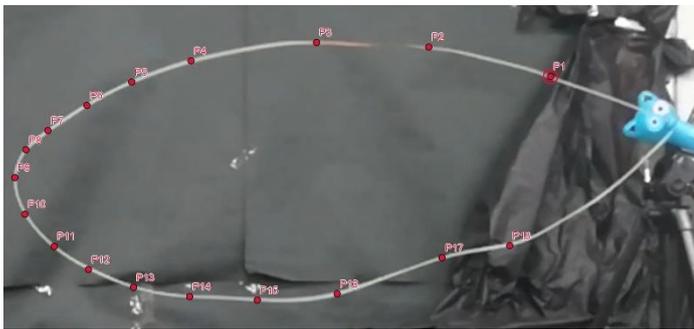


分段	分段單位長度張力差(dyne/cm)
P1~P2	15.344
P2~P3	14.219
P3~P4	14.670
P4~P5	13.430
P5~P6	14.333
P6~P7	14.793
P7~P8	16.850
P8~P9	36.436
P9~P10	25.311
P10~P11	11.035
P11~P12	7.910
P12~P13	6.118
P13~P14	7.103
P14~P15	7.149
P15~P16	9.524
P16~P17	8.357
P17~P18	12.411
P18~P19	10.447
P19~P20	8.563

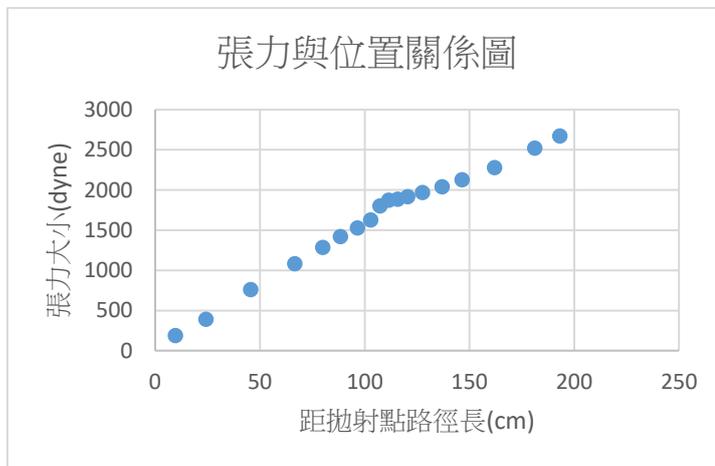
(5) 速度  $v = 553.9 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 11.9 \text{ dyne/cm}$



分段	分段單位長度張力差 (dyne/cm)
P1~P2	16.039
P2~P3	13.658
P3~P4	15.345
P4~P5	13.582
P5~P6	16.741
P6~P7	10.853
P7~P8	23.050
P8~P9	37.319
P9~P10	8.774
P10~P11	14.045
P11~P12	6.293
P12~P13	6.850
P13~P14	5.877
P14~P15	10.510
P15~P16	7.202
P16~P17	11.687
P17~P18	13.141



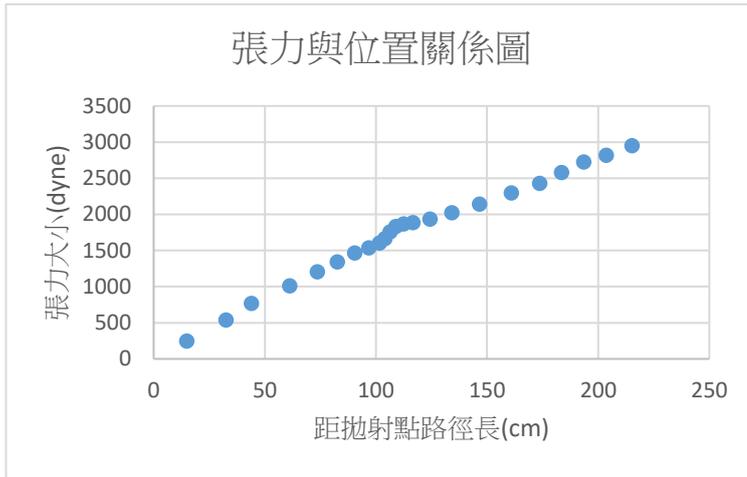
(6) 速度  $v = 571.6 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 13.1 \text{ dyne/cm}$



分段	分段單位長度張力差 (dyne/cm)
P1~P2	15.961
P2~P3	16.136
P3~P4	16.729
P4~P5	15.913
P5~P6	16.815
P6~P7	17.870
P7~P8	14.150
P8~P9	25.739
P9~P10	56.069
P10~P11	24.277
P11~P12	7.874
P12~P13	7.634
P13~P14	7.826
P14~P15	7.345
P15~P16	9.907
P16~P17	9.581
P17~P18	11.590
P18~P19	15.367
P19~P20	9.900
P20~P21	8.612



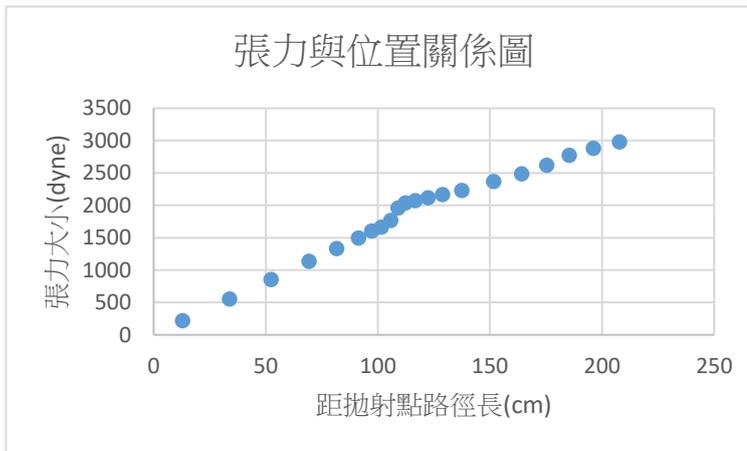
(7) 速度  $v = 580.7 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 13.8 \text{ dyne/cm}$



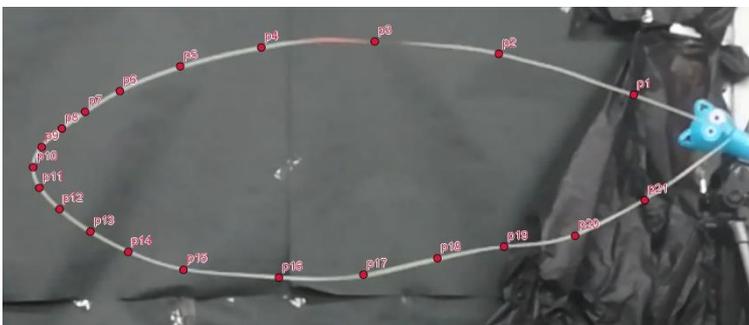
分段	分段單位長度張力差(dyne/cm)
P1~P2	13.719
P2~P3	17.262
P3~P4	15.342
P4~P5	15.056
P5~P6	16.347
P6~P7	13.248
P7~P8	16.013
P8~P9	38.409
P9~P10	17.362
P10~P11	3.363
P11~P12	6.445
P12~P13	7.276
P13~P14	7.797
P14~P15	8.930
P15~P16	9.721
P16~P17	12.718
P17~P18	12.667



(8) 速度  $v = 590.5 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 13.1 \text{ dyne/cm}$



分段	分段單位長度張力差(dyne/cm)
P1~P2	16.473
P2~P3	19.931
P3~P4	13.986
P4~P5	15.736
P5~P6	15.516
P6~P7	15.319
P7~P8	11.324
P8~P9	14.509
P9~P10	24.585
P10~P11	40.362
P11~P12	29.367
P12~P13	9.081
P13~P14	4.497
P14~P15	6.172
P15~P16	9.027
P16~P17	9.714
P17~P18	10.757
P18~P19	10.501
P19~P20	15.021
P20~P21	14.888
P21~P22	9.067
P22~P23	11.472



## 四、 實驗三：驗證繩張力計算

### (一)方法

- 為了知道我們計算出的張力是否合理，我們選取繩圈上一段長1cm的部分，將它的運動視為等速率圓周運動，先用GeoGebra算出其曲率半徑，計算出向心力的實際值。再用實驗二計算的張力推算出向心力的理論值，兩者互相比對。

- 如(圖 8)，選取繩圈上一段長1cm的部分，其質量為0.0048g，取 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點， $P_1$ 、 $P_3$ 為兩端點， $P_2$ 為中點，用GeoGebra畫出通過這三點的圓，令圓心為 $O$ ，半徑為 $R$ ，而向心力實際值為

$$m \times \frac{v^2}{R} = 0.0048 \times \frac{v^2}{R}$$

- 畫出這段繩子的力圖

- 重力為4.7 dyne，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_2$
- 利用(式 3)、(式 4)，計算 $P_1$ 和 $P_3$ 之張力，令 $P_1$ 處的張力 $T_1$ ，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_1$ ， $P_3$ 處的張力 $T_3$ ，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_3$
- 在指向圓心方向，合力為

$$T_1 \cos\theta_1 + T_3 \cos\theta_3 - 4.7 \cos\theta_2$$

此為向心力的理論值

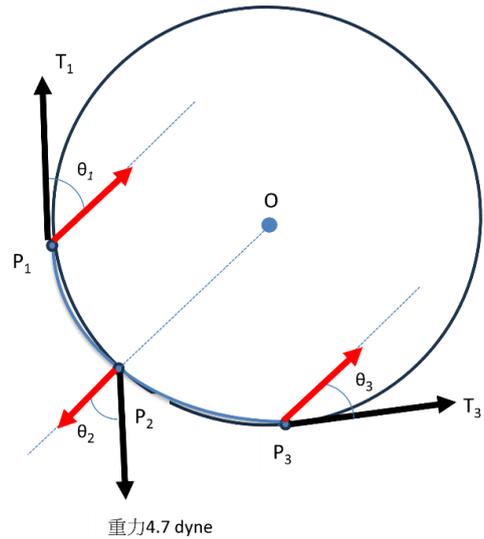


圖 8 (圖片來源：實驗者繪製)

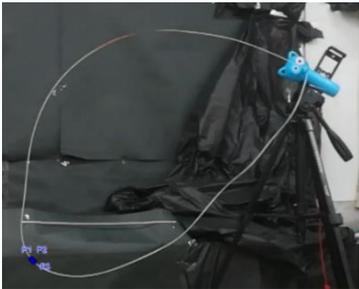
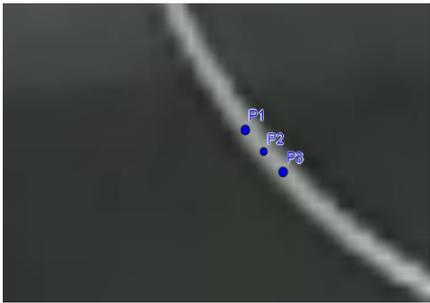
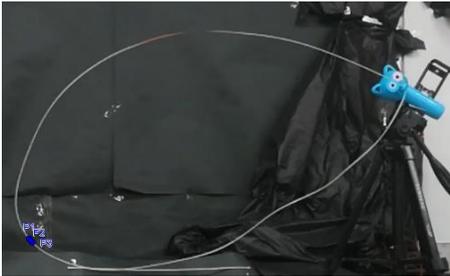
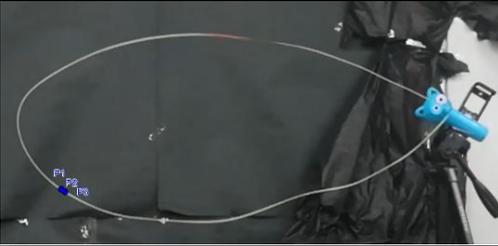
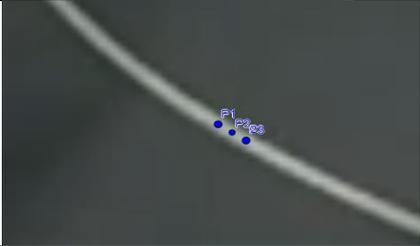
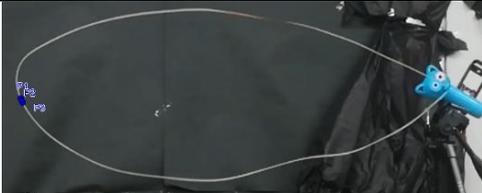
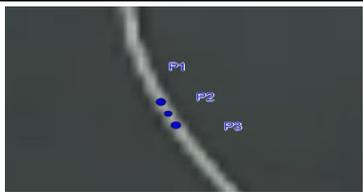
- 步驟：**在實驗二中選取五個不同的穩定態，並任意選取繩圈上一段1cm長度如表 3，並依上述方法分析。

- 結果：**分析的結果如表 2 所示

表 2 五個不同穩定態向心力理論值與實際值比較

組別	理論值			實際值				
	$T_1$ 向心分力 (dyne)	$T_3$ 向心分力 (dyne)	重力向心分力 (dyne)	向心力理論值 (dyne)	速度 (cm/s)	質量 (g)	$R$ (cm)	向心力實際值 (dyne)
第 1 組	33.1	73.7	-3.3	103	452.8	0.0048	9.49	104
第 2 組	30.8	53.2	-3.09	81.0	483.3	0.0048	14.19	79.0
第 3 組	18.0	35.9	-2.51	51.4	514.3	0.0048	24.68	51.4
第 4 組	7.30	12.1	-3.95	15.4	537.4	0.0048	84.61	16.4
第 5 組	37.6	49.1	-1.97	84.8	562.6	0.0048	18.52	82.0

表 3 在五個不同穩定態中繩圈上分析的部分

組別	全景圖	放大圖
第 1 組		
第 2 組		
第 3 組		
第 4 組		
第 5 組		

## 五、 實驗四：繩圈發生凹陷時張力分析

(一) 繩圈在高速時，會在末端發生凹陷(如圖 9)，這是一個非常奇特的現象，也是在相關文獻中還沒有被討論的現象。因此我們想探討這個現象的成因。

(二)方法：

1. 繩圈在高速時，由於整體向上抬升，無法確定最低點的位置，無法用實驗一的方式來計算空氣阻力，因此我們用實驗一所得到的經驗公式

$$f = 10^{-6.797}v^{2.857} \quad (\text{式 } 1)$$

來估計不同速度下的單位長度空氣阻力。

2. 以和實驗二相同的方法計算繩圈上不同位置的張力。



圖 9 當速度增加時，繩圈會上升，且在末端發生凹陷。(圖片來源：實驗者拍攝並後製)

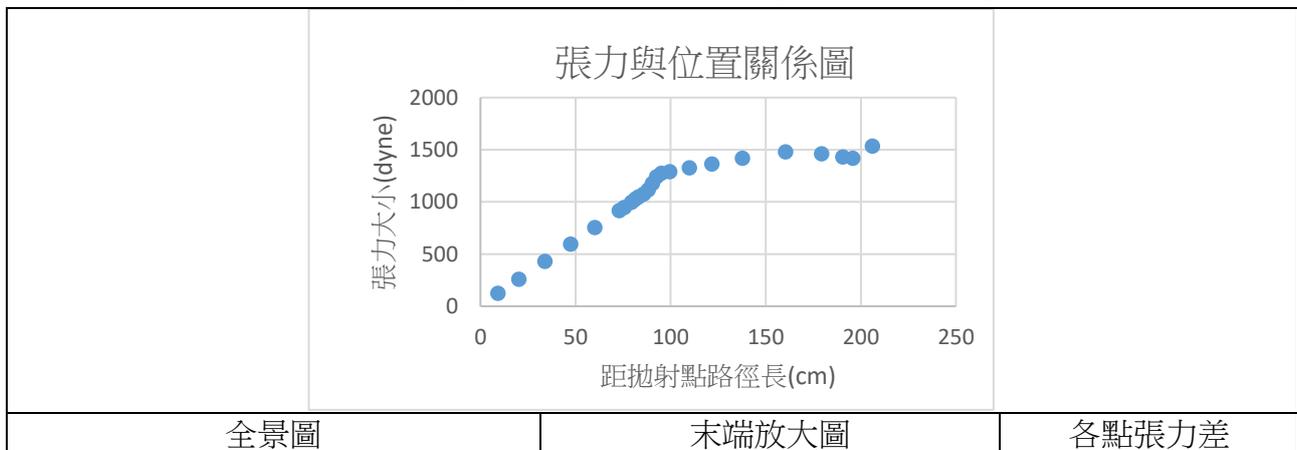
(三)步驟

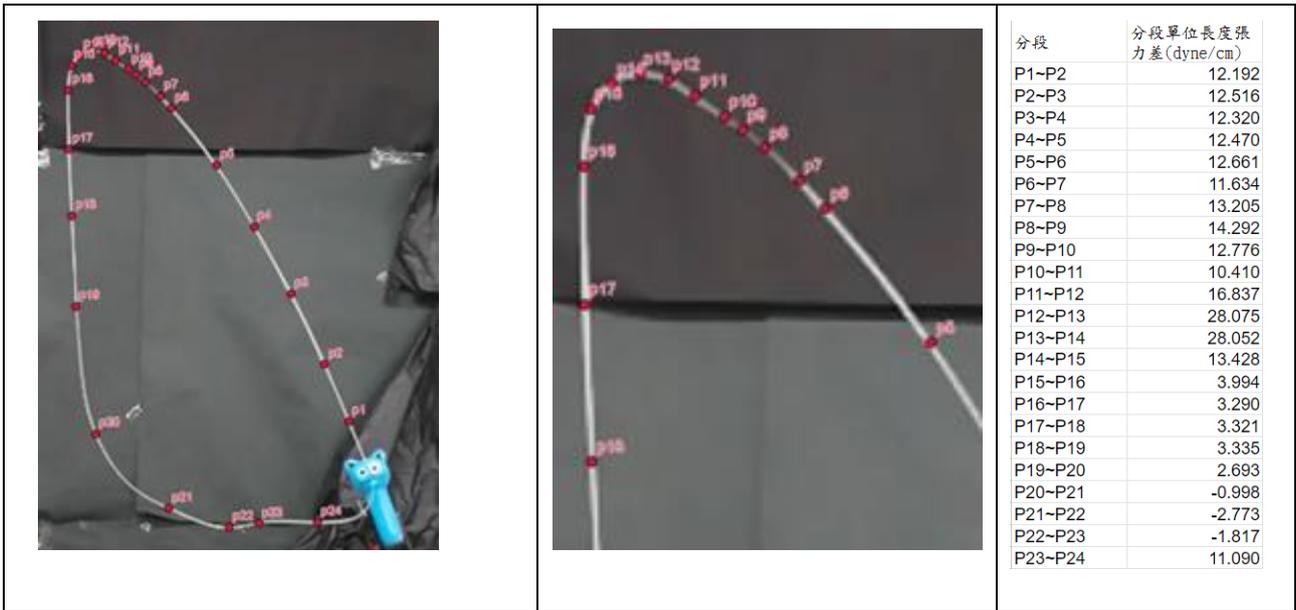
1. 調整繩圈發射器仰角分別為 $50^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $70^\circ$
2. 改變電源供應器電壓，因此改變繩圈速度，將繩圈運動錄影，並擷取穩定態之照片。
3. 由影片計算繩圈速度。
4. 分析照片，利用(式 1)計算單位長度空氣阻力
5. 利用(式 3)、(式 4)計算繩圈上不同位置的張力。

(四)結果

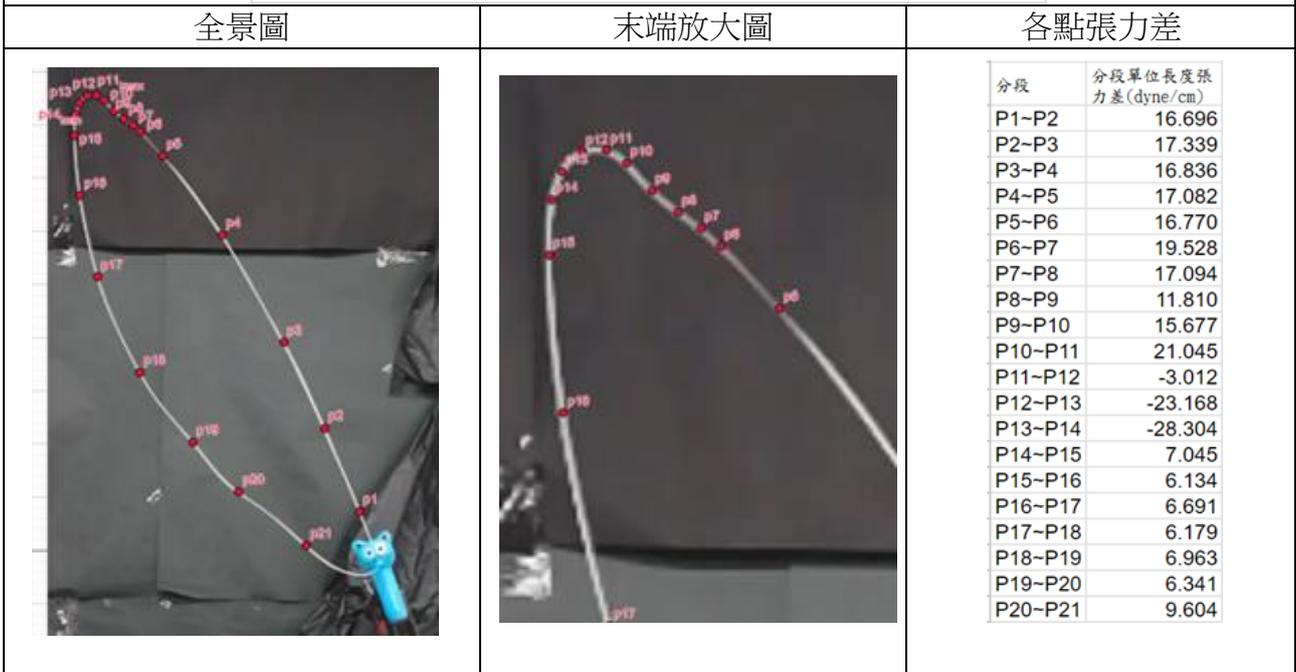
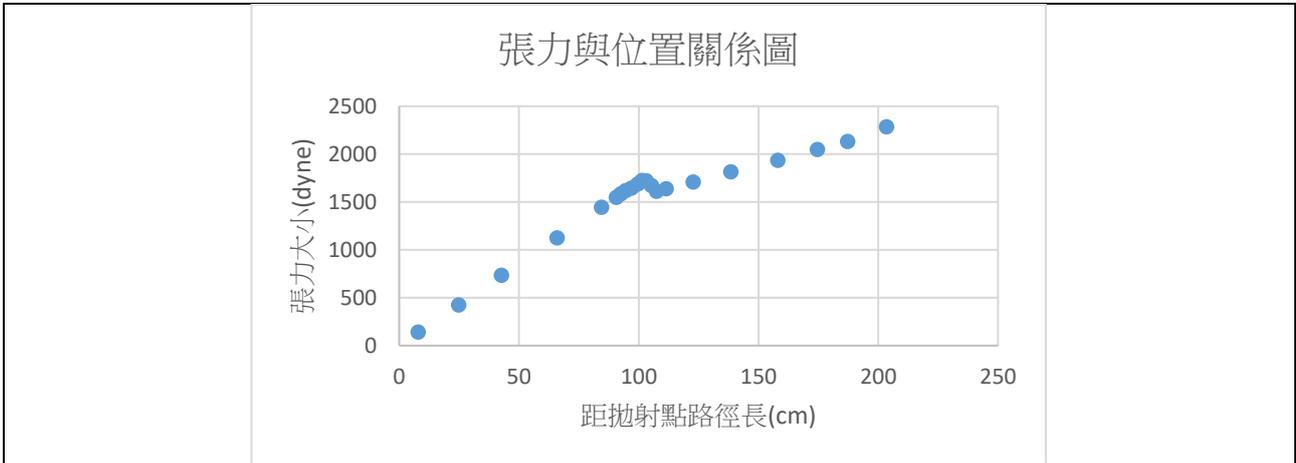
限於篇幅，此處只列出仰角為 $70^\circ$ 之數據， $50^\circ$ 、 $60^\circ$ 之數據請參考附錄。

1. 速度 $v = 496.9 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力 $f = 8.06 \text{ dyne/cm}$

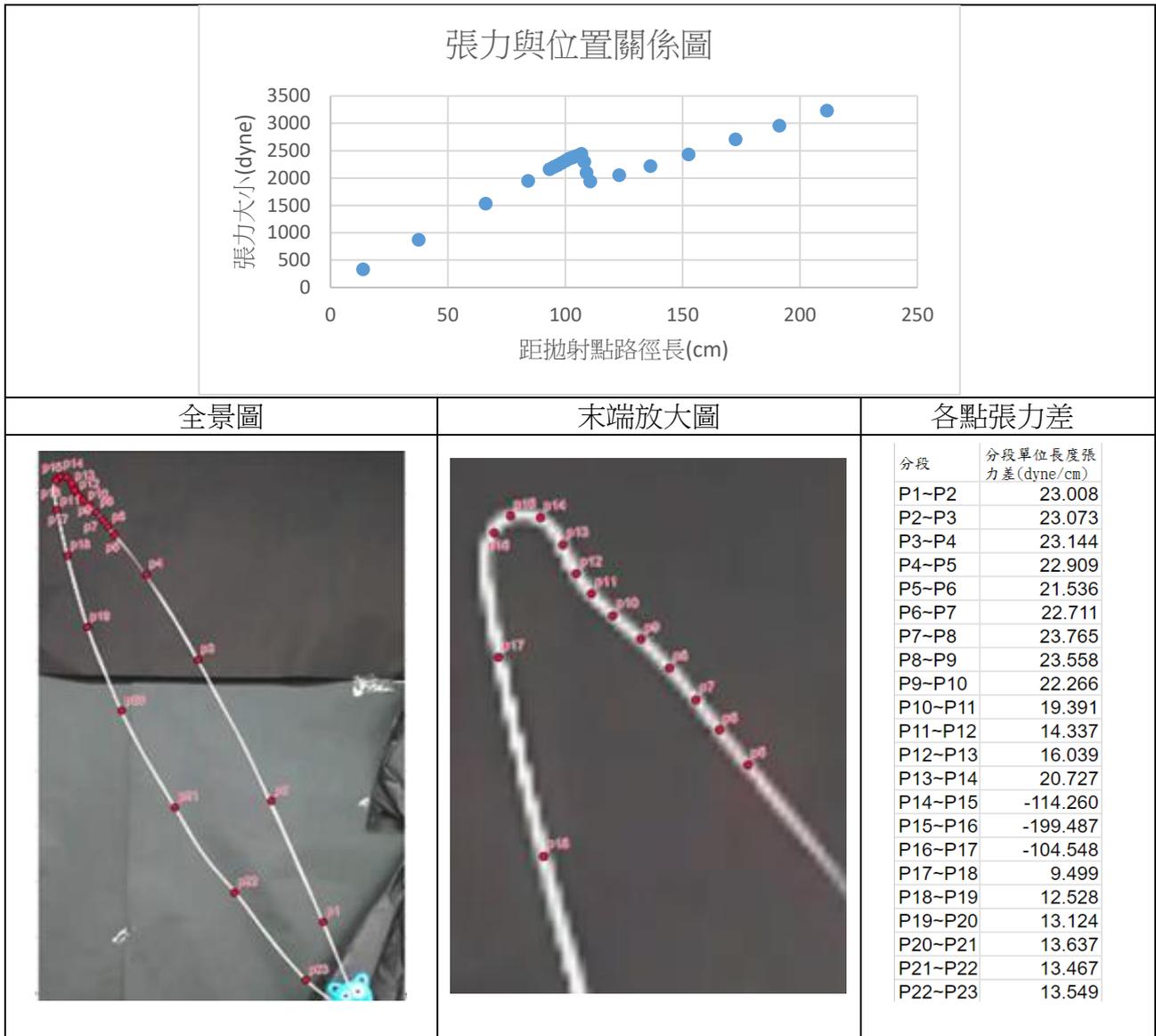




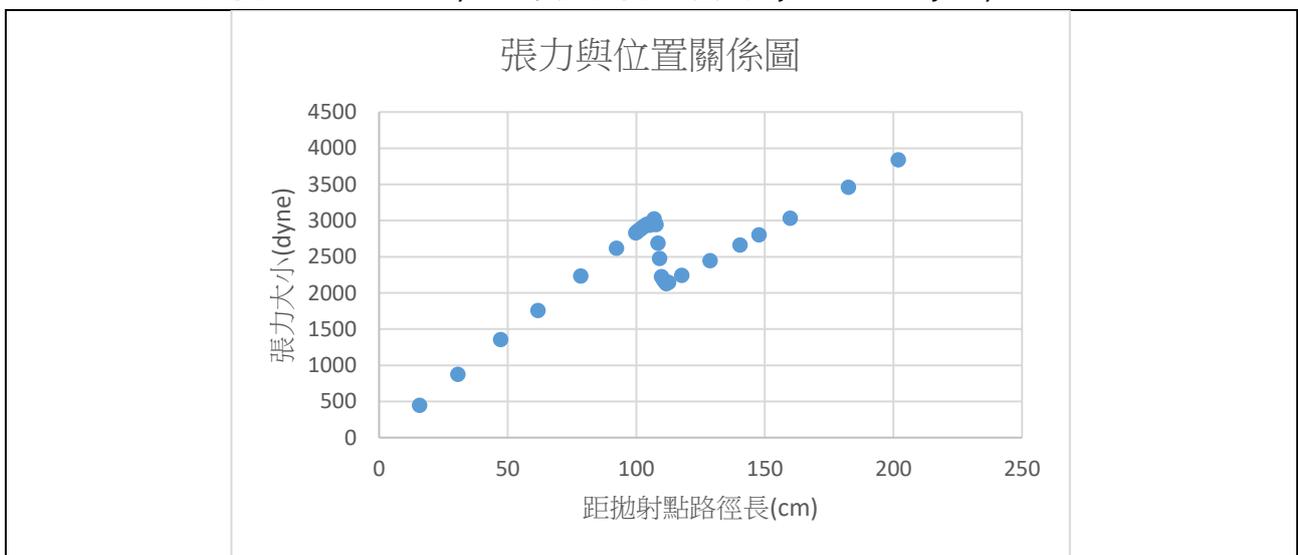
2. 速度  $v = 580.7 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 12.6 \text{ dyne/cm}$

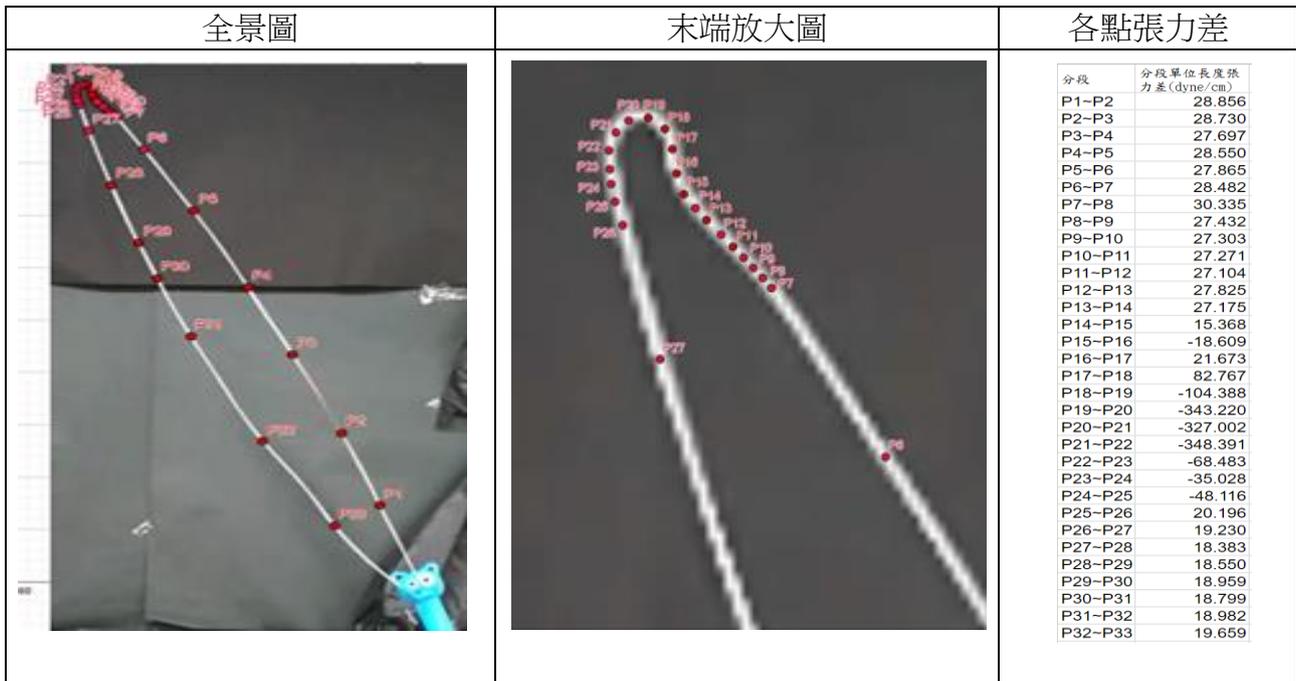


3. 速度  $v = 667 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 18.7 \text{ dyne/cm}$



4. 速度  $v = 727.3 \text{ cm/s}$ ，單位長度空氣阻力  $f = 23.9 \text{ dyne/cm}$





## 陸、研究結果與討論

### 一、 單位長度空氣阻力計算之討論：

- (一) 在實驗一中可以看到在不同發射角度之下， $\log v$ 與 $\log f$ 大致成線性關係，因此可看出單位長度所空氣阻力與發射角度關係不大。
- (二) 但由於繩圈即使在穩定態下也會出現輕微抖動，導致最高點與最低點間距離不固定，此外，繩圈的運動也會帶動周圍氣體的流動，而氣體的流動可能導致繩圈各處受空氣阻力不同，甚至可能不沿切線方向。這些因素都使得我們利用(式 1)計算單位長度受空氣阻力時會出現難以避免的不確定性。

### 二、 張力計算之討論：

- (一) 在實驗二可以明顯地觀察到，不論在何種發射角度、繩速，當繩子距拋射點的距離越遠，繩張力會逐漸的遞增，也就是對任一段繩子來說，其前方的張力大於其後方的張力。我們認為這是非常合理的，因為繩圈在穩定態時，前方的張力應該要大於後方的張力，才能克服空氣阻力，維持等速率運動。
- (二) 在實驗三中，我們想驗證張力的計算是否正確，結果理論值與實際值非常接近，考慮到計算空氣阻力的不確定性、以及我們所做的假設(發射器和繩圈接觸點繩張力為0、空氣阻力沿切線方向且各處相同)，能得到如此接近的結果真的讓我們感到非常驚訝！雖然這不代表繩圈運動就如同我們的假設般單純，但這讓我們對自己的分析具有更大的信心！

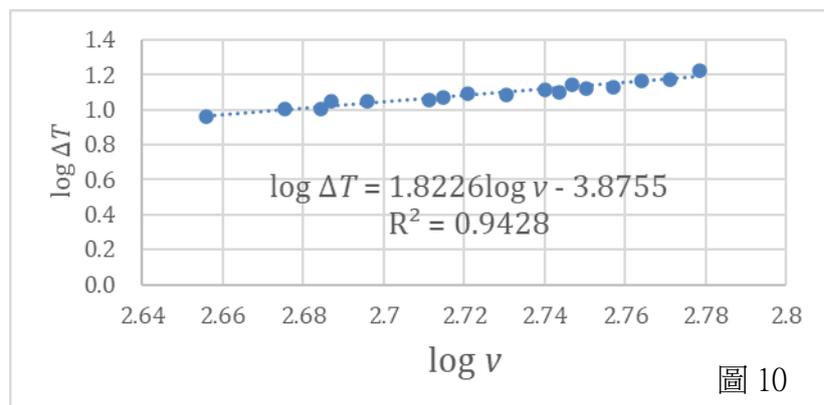
### 三、 不同速度時空氣阻力、平均張力差、最大張力差之比較

- (一) 由實驗二的計算，我們發現在速度較快的情況下，繩圈的末端由於角度變化較大因而有較為劇烈的動量變化，造成末端附近單位長度張力差會遠大於其餘部份。
- (二) 我們將各實驗計算的不同速度下單位長度空氣阻力 $f$ 、平均單位長度張力差 $\Delta T$ 、最大單位長度張力差，加以整理後如(表 4)。

表 4

速度 $v(cm/s)$	單位長度空氣阻力 $f$ ( $dyne/cm$ )	平均單位長度張力差 $\Delta T$ ( $dyne/cm$ )	最大單位長度張力差 ( $dyne/cm$ )
452.8	6.80	9.16	19.3
473.7	7.51	10.0	18.9
483.3	7.98	10.1	16.0
486.5	6.95	11.2	26.8
496.6	8.75	11.2	20.6
514.3	9.11	11.4	25.1
518.4	8.32	11.8	26.5
525.8	8.16	12.4	37.9
537.5	9.78	12.1	37.9
549.7	12.0	13.1	36.4
553.9	12.0	12.6	37.3
558.1	9.87	13.9	49.3
562.6	11.9	13.3	34.1
571.6	13.1	13.4	38.4
580.7	13.8	14.8	40.4
590.5	13.2	14.9	56.1
600.3	13.1	16.7	97.5

若將 $\log \Delta T$ 對 $\log v$ 作圖，可得到(圖 10)：



可以看出以下兩點。

- (三) 隨著速度增加，繩圈單位長度空氣阻力、張力差、最大張力差都逐漸增加。其中，單位長度張力差 $\Delta T$ 和速度 $v$ 滿足

$$\Delta T = 10^{-3.876} v^{1.823}$$

相對於單位長度空氣阻力

$$f = 10^{-6.797} v^{2.857}$$

可以看出在速度逐漸加快時，空氣阻力對繩圈整體運動、形狀的影響會比張力差更為重要。

- (四) 但由於發生在繩圈末端曲率較大處之最大張力差在高速下會急遽增加，因此在繩圈末端，張力差對繩圈的影響是最大的。

#### 四、 速度對繩圈形狀的影響：

- (一) 如(圖 11)所示，當速度增加時，繩圈不僅會上升，並且形狀會趨於狹長，為了討論這個現象，我們定義了狹長比。

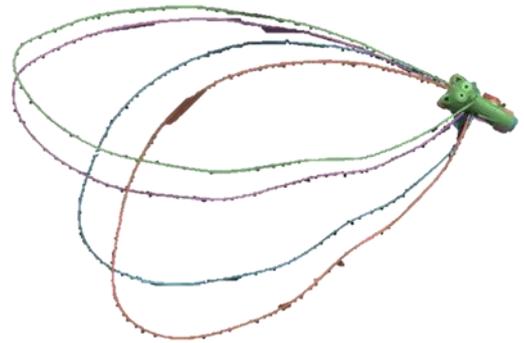


圖 11 當速度增加時，繩圈會上升，也更加狹長 (圖片來源：實驗者拍攝並後製)

- (二) 我們定義通過發射點且與發射角度垂直的直線，和繩子的交點為折返點，而折返點到發射點的線段為長軸 $a$ ，長軸中垂線與繩子兩交點形成線段為短軸 $b$ 。狹長比即為長軸與

短軸的比值  $\frac{a}{b}$ 。(圖 12)

- (三) 我們分析了在發射角 $70^\circ$ 時，不同速度的狹長比，如(圖 13)

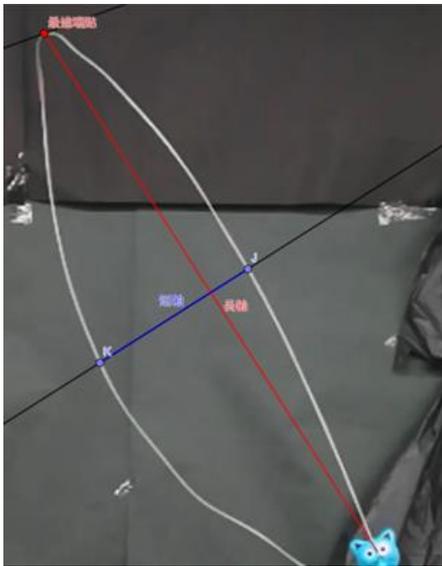


圖 12 狹長比示意圖

(圖片來源：實驗者拍攝並後製)

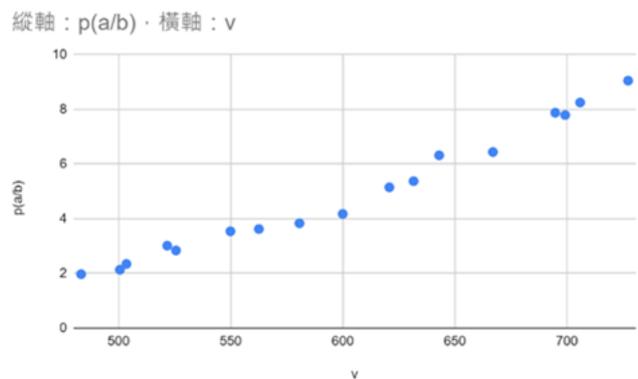


圖 13 狹長比與速度關係圖

(四) 為什麼速度增加時，繩圈的形狀會趨於狹長呢？我們的解釋如下：

1. 考慮繩圈最上方的一小段 $\Delta l_{上}$ ，當速度增加時，其受的空气阻力也會增加，但空气阻力沒有朝上的分量，無法使其往上移動，必須要等其前方的部分移動到比 $\Delta l_{上}$ 更高的位置，才能藉由張力把 $\Delta l_{上}$ 往上拉。
2. 相反的，繩圈下方的一小段 $\Delta l_{下}$ ，當速度增加時，其受的空气阻力也會增加，而空气阻力有往上的分量，因此使其往上移動。
3. 綜合以上所述，當速度增加時，繩圈下方的部分都受到往上的空气阻力，因而大幅往上移動，而上方的部分則只能小幅往上移動，使上、下兩部分距離縮短，因此趨於狹長。

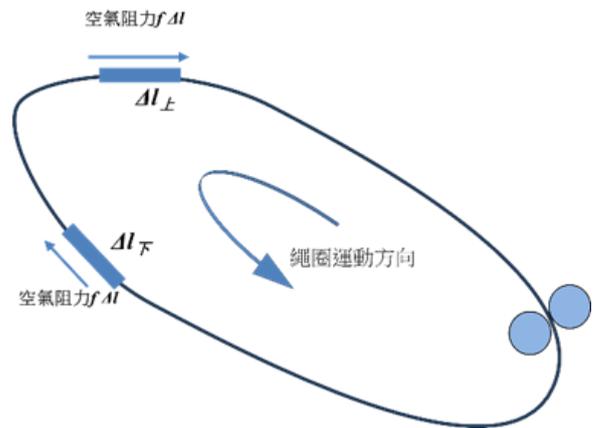


圖 14 (圖片來源：實驗者繪製)

## 五、 繩圈在高速下末端凹陷時張力差之討論

(一) 在實驗四中，繩圈發生凹陷時，在張力與位置關係圖上，張力有下降的趨勢。為了更深入討論這個現象，我們將仰角在  $50^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $70^\circ$  時不同速度下張力與位置關係整理於(圖 15)~(圖 17)。

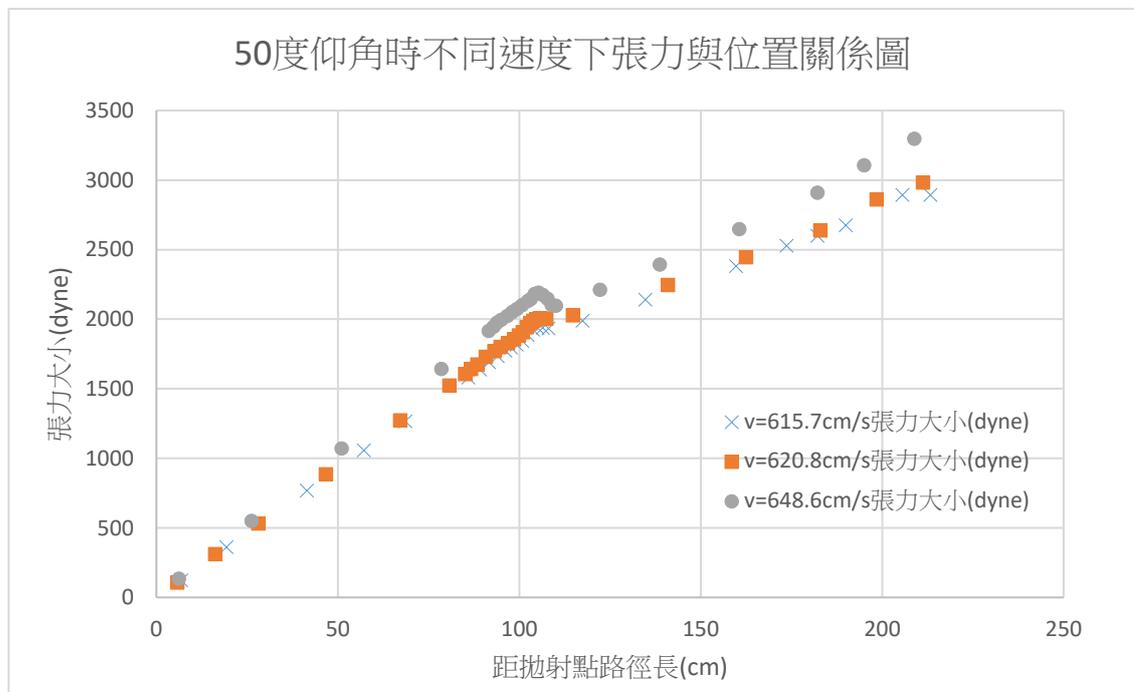


圖 15

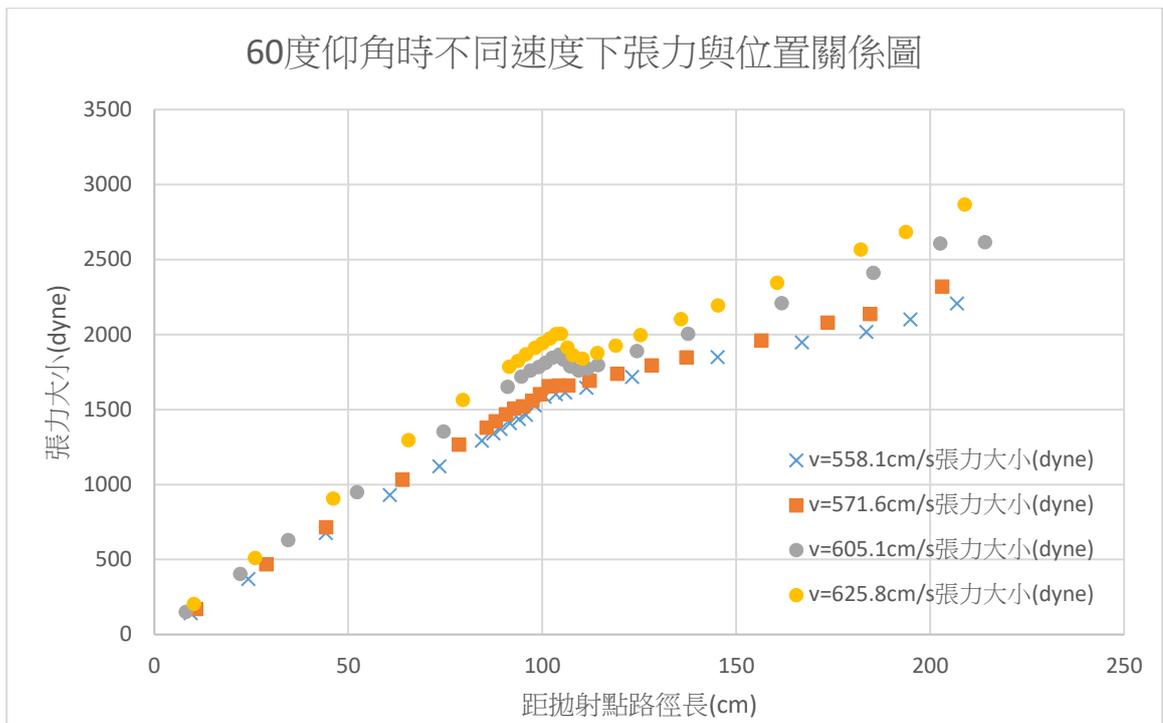


圖 16

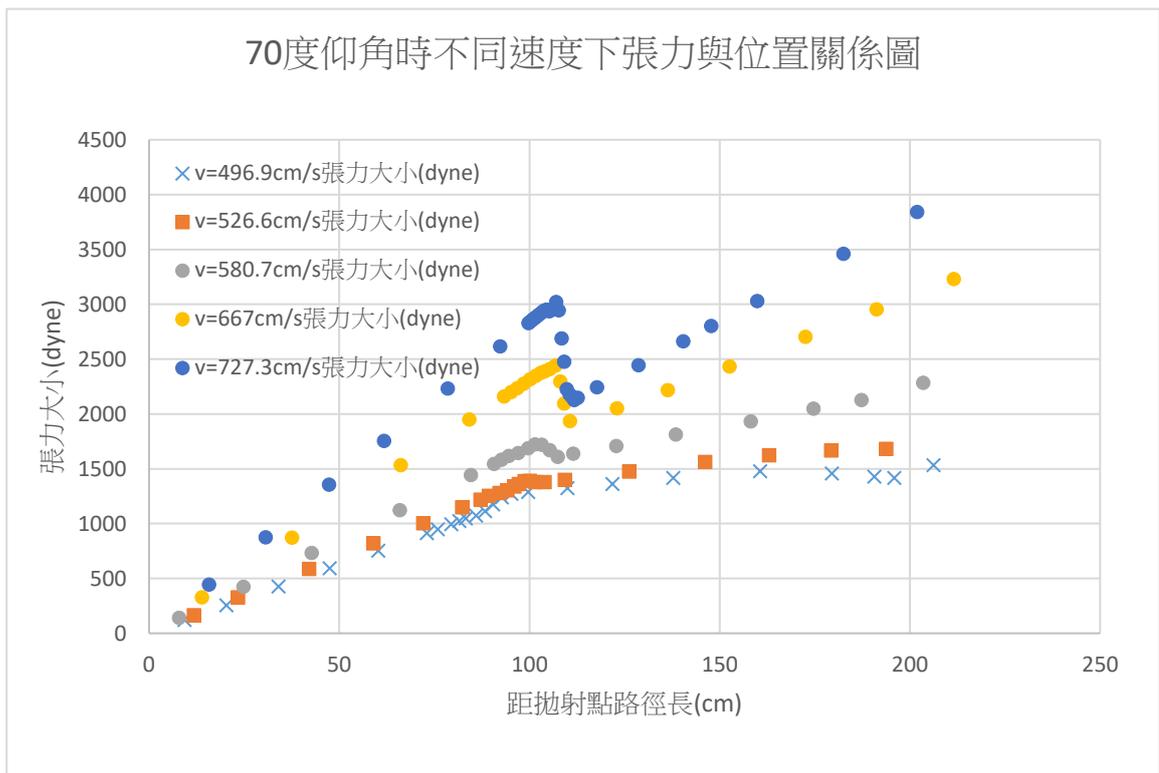


圖 17

(二) 在張力與位置關係圖上，張力的下降代表在這部分，各段平均張力差為負值，即各段所受前方的張力小於後方的張力。一般來說，繩圈在空氣中等速前進，為了克服空氣阻力，前方的張力應該要大於後方的張力，為什麼在發生凹陷時，卻是前方的

張力小於後方的張力？針對此點，我們提出如下解釋。

(三) 在發生凹陷時，繩圈末端附近必可找到一點其曲率最大(曲率半徑最小)，而由此點向前，曲率會逐漸減小(曲率半徑逐漸增大)，參見(圖 18)。

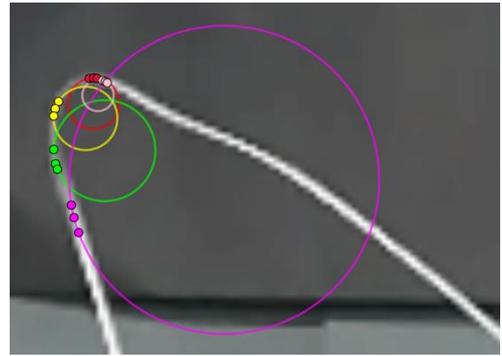


圖 18 末端各處曲率變化示意圖  
(圖片來源：實驗者拍攝並後製)

(四) 參考(圖 19)，在末端附近選取 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點，其中 $P_2$ 為 $P_1$ 、 $P_3$ 之中點。這三點中最後方的 $P_1$ 曲率最大，而從 $P_1$ 向前，曲率逐漸減小，因此 $P_3$ 的曲率最小，若將 $P_1 \sim P_3$ 這一小段視為作等速率圓周運動，且以通過 $P_2$ 之切線為這小段的切線方向，令 $P_1$ 處的張力 $T_1$ ，和切線方向之夾角 $\theta_1$ ， $P_3$ 處的張力 $T_3$ ，和切線方向之夾角 $\theta_3$ ，則切線方向合力應為 0，即

$$T_1 \cos \theta_1 = T_3 \cos \theta_3$$

由於 $\theta_1 > \theta_3$ ，因此 $T_1 > T_3$ ，故後方張力需大於前方張力。(註：此處繩圈受重力及空氣阻力遠小於張力，故重力、空氣阻力忽略不計)

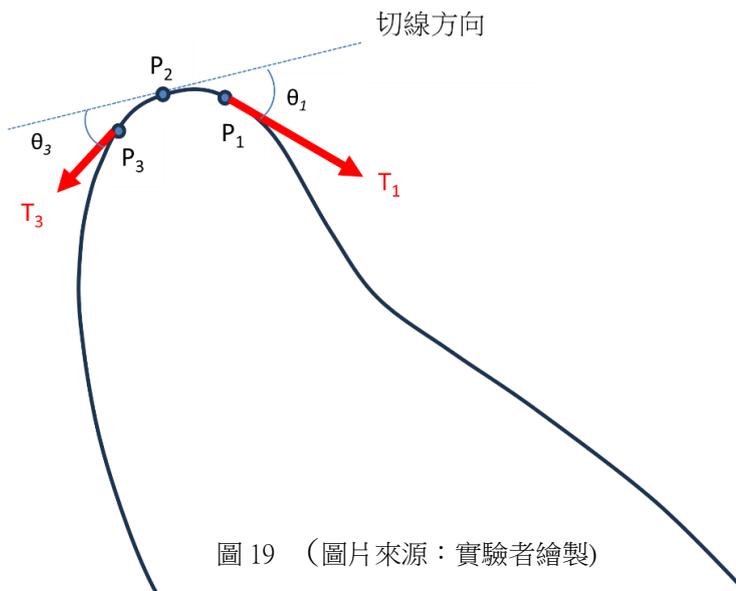


圖 19 (圖片來源：實驗者繪製)

(五) 為了驗證上述說法，我們在仰角為  $70^\circ$  時，選取發生凹陷時繩圈末端 1cm 之長度，依上述方法計算，將結果整理於(表 5)。由表中可以看出， $\theta_1$  皆大於  $\theta_3$ ，而  $T_1 \cos \theta_1$  和  $T_3 \cos \theta_3$  也極為接近。

表 5

速度 (cm/s)	$T_1$ (dyne)	$\theta_1$	$T_3$ (dyne)	$\theta_3$	$T_1 \cos \theta_1$ (dyne)	$T_3 \cos \theta_3$ (dyne)
580.7	1690	$9.5^\circ$	1660	$5.4^\circ$	1660	1660
620.8	1950	$21.0^\circ$	1860	$13.9^\circ$	1820	1800
643.0	2190	$28.4^\circ$	2040	$20.4^\circ$	1930	1910
699.2	2610	$36.4^\circ$	2230	$18.4^\circ$	2100	2120
727.3	2930	$36.5^\circ$	2520	$20.5^\circ$	2360	2360

## 六、 繩圈在高速下末端凹陷之原因探討：

- (一) 觀察(圖 15)~(圖 17)，我們發現隨著速度加快，張力下降的趨勢更明顯，即各段受到向後之張力差持續增加，我們將這部份單位長度張力差、單位長度空氣阻力整理於(表 6)。

表 6

繩圈速度(cm/s)	496.9	580.7	667	727.3
分段	P12~P15	P11~P14	P14~P17	P18~P25
單位長度張力差 (dyne/cm)	22.8	-19.1	-133	-188
單位長度空氣阻力 (dyne/cm)	8.06	12.6	18.7	23.98

- (二) 為了要說明末端凹陷的成因，我們先觀察繩上某一小段 $\Delta l$ 之運動。參見(圖 20)，假設 $\Delta l$ 最初位於繩上  $P$  點，若此時繩圈保持穩定態(圖 20 中藍色部分)， $\Delta l$ 經一小段時間後會等速率移動到  $P'$ 。但若繩圈正在加速，此時繩圈就不處於穩定態，繩圈末端也會移動，因此當繩圈成為(圖 20)中紅色部分時， $\Delta l$ 會移動到  $P''$ 。相較於最初穩定態， $\Delta l$ 不再是等速率運動，而是減速運動。

- (三) 而 $\Delta l$ 為什麼會減速？如前述討論，當處於末端凹陷的穩定態時， $\Delta l$ 所受後方張力大於前方張力，使 $\Delta l$ 保持等速率運動。而在繩圈加速時， $\Delta l$ 所受向後之張力差持續增加，使 $\Delta l$ 無法維持等速率運動，而得到向後之加速度。由於 $\Delta l$ 之速度和加速度方向大致相反，因此減速。

- (四) 以仰角  $70^\circ$  為例，參考(表 6)。當繩圈速度為  $496.9\text{cm/s}$  時，繩上各段所受重力、張力差、空氣阻力滿足牛頓第二運動定律，呈現如(圖 21-1)之穩定態。但是在繩圈速度增加為  $580.7\text{cm/s}$  的過程中，各段所受向後方的空氣阻力增加( $8.06\text{dyne}\rightarrow 12.6\text{dyne}$ )，而張力差也由正改為負( $22.8\text{dyne}\rightarrow -19.1\text{dyne}$ )，即後方張力大於前方張力，且空氣阻力與張力差大致沿切線方向，因此各段得到沿切線向後方的加速度，而各段速度和加速度大致反向，因此會減速，達到如(圖 21-3)之穩定態。同理，當速度繼續增加到  $667\text{cm/s}$  的過程中，各段所受向後方的空氣阻力增加( $12.6\text{dyne}\rightarrow 18.7\text{dyne}$ )，向後方的張力差更是大幅增加( $-19.1\text{dyne}\rightarrow -133\text{dyne}$ )，因此減速而達到如(圖 21-5)之穩定態。速度繼續增加到  $727.3\text{cm/s}$  的過程也是如此。由此可得到結論：繩圈的凹陷主要是因為速度增加時，末端各段受向後之張力差大幅增加，使各段具有一向後之加速度，因而減速所造成。

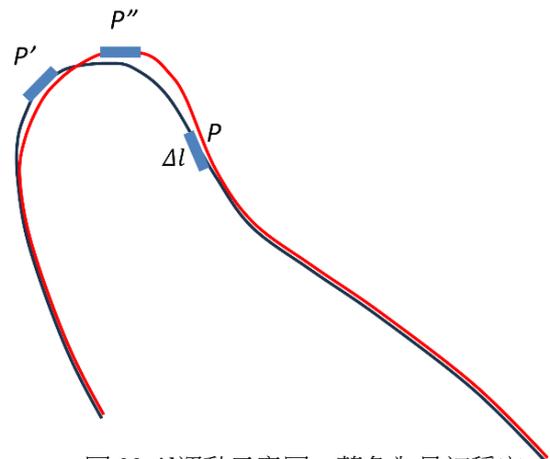


圖 20  $\Delta l$ 運動示意圖，藍色為最初穩定態，紅色為後來穩定態(圖片來源：實驗者繪製)

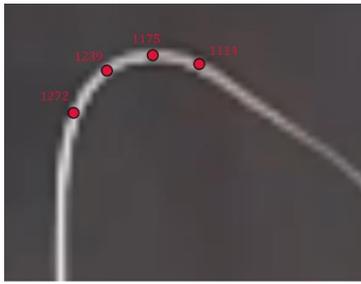


圖 21-1

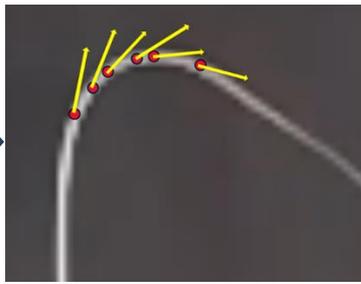


圖 21-2

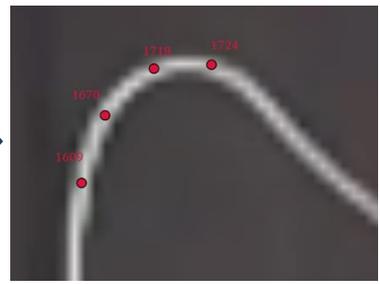


圖 21-3

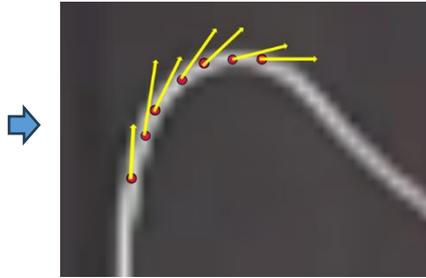


圖 21-4

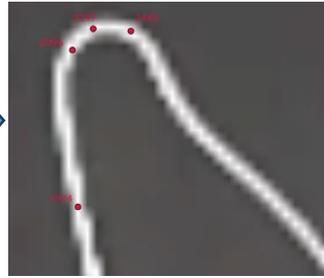


圖 21-5

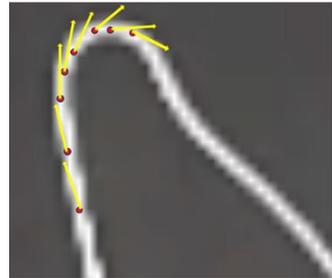


圖 21-6

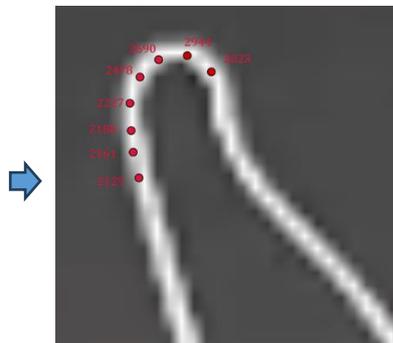


圖 21-7

圖 21 繩圈末端發生凹陷之過程  
(圖片來源：實驗者拍攝並後製)

## 七、 末端凹陷臨界速率之探討：

- (一) 觀察(圖 15)~(圖 17)，可以發現在低速時，繩圈末端處之張力為上升趨勢，但繩圈在高速時，張力的上升趨勢減小，一旦速度夠快使末端發生凹陷，張力呈現下降趨勢。我們定義在張力與位置關係圖上，繩圈末端張力不升不降，為恰發生凹陷之狀態，此時繩圈之速率為臨界速率。
- (二) 欲精確找出臨界速率並不容易，因此我們利用實驗四的數據找出最接近臨界速率之約略值，整理如(表 7)。
- (三) 由(表 7)中可看出，隨著仰角越高，臨界速率越小，即末端越容易發生凹陷。

表 7

仰角	臨界速率(cm/s)
50°	約 620.8
60°	約 571.6
70°	約 496.9

## 柒、研究結論

- 一、 繩圈運動時單位長度空氣阻力大約滿足

$$f = 10^{-6.797} v^{2.857}$$

而平均單位長度張力差 $\Delta T$ 則滿足

$$\Delta T = 10^{-3.876} v^{1.823}$$

當速度增加時，空氣阻力對繩圈整體運動、形狀的影響會比張力差更為重要。只有在末端曲率較大處之最大張力差在高速下會急遽增加，因此在繩圈末端，張力差對繩圈的運動、形狀影響是最大的。

- 二、 我們大膽假設發射器和繩圈接觸點繩張力為0，然後依據牛頓第二運動定律計算各點的張力。為了驗證計算結果，我們將各段視為圓周運動，計算的向心力理論值和實際值極為接近，代表我們的假設與方法大致是正確的。
- 三、 當繩圈速度加快時，形狀會趨於狹長，我們認為是繩圈下方的部分受到往上的空氣阻力，因而大幅往上移動，而上方的部分則只能小幅往上移動，使上、下兩部分距離縮短，因此趨於狹長。
- 四、 當繩圈速度極快時，會出現末端凹陷的現象，此時末端附近各段受前方的張力小於後方的張力。針對這個特殊的現象，我們認為這是因為末端附近必可找到一點，其曲率為最大，而由此點向前，曲率逐漸減小。對這部分的任一小段來說，後方的張力和切線方向夾角較大，而前方的張力和切線方向夾角較小，為了使切線方向合力為0，因此後方的張力必須大於前方的張力。
- 五、 關於末端凹陷的成因，我們認為這是因為速度增加時，末端各段受沿切線向後之空氣阻力與張力差皆增加，因此各段無法維持等速率運動，而是具有向後之加速度，使各段減速，因此繩圈發生凹陷。在此過程中，各段受張力差的影響遠大於空氣阻力，也可以說，繩圈末端是被自己拉過去，因而發生凹陷的！
- 六、 繩圈發射仰角越高，恰發生凹陷之臨界速率越小。

## 捌、未來展望

雖然我們已了解繩圈末端凹陷的原因，但仍有以下問題值得討論。

- 一、 恰發生凹陷的臨界速率由那些因素決定呢？
- 二、 在更高速的情況下，繩圈末端的凹陷會有什麼變化呢？另外繩圈能上升到多大的角度？是否存在一極限值呢？
- 三、 我們目前的實驗只著重於繩圈速度、發射仰角對繩圈運動及形狀的影響，但仍有其他變因是我們還沒有考慮的，例如繩長、線密度等，若能對這些變因加以研究，能使我們對

繩圈的運動有更全面的了解。

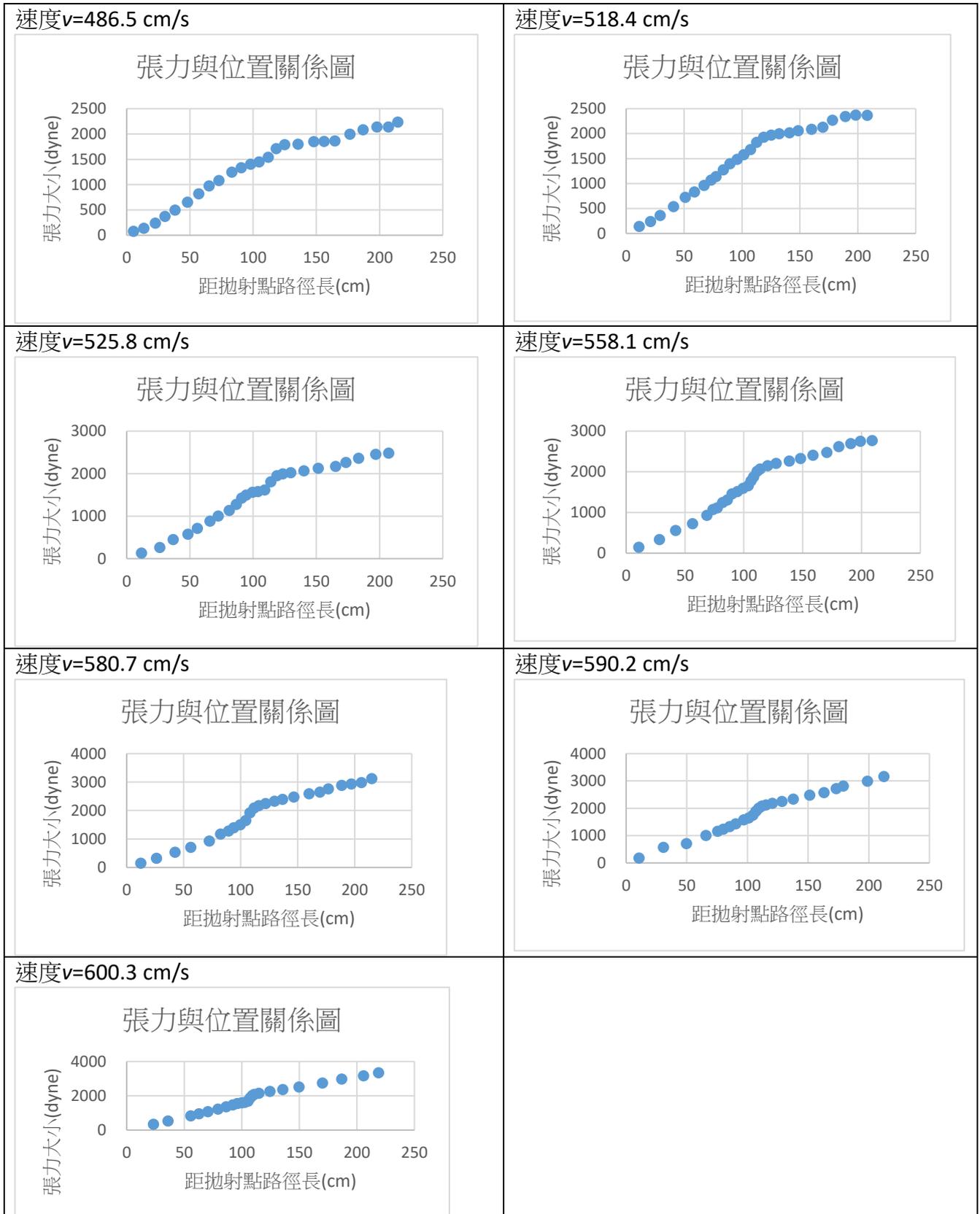
## 玖、參考資料

- 一、Margaux Abello、Juliette Courson、Arnaud Maury、and Julian Renaud(2019)、*String Shooter's overall shape in ambient air*、*Emergent Scientist* 4(1)
- 二、Nicolas Taberlet, Jeremy Ferrand, and Nicolas Plihon(2019)、*Propelled strings : rising from friction*、*Physical Review Letters*、doi: 10.1103/PhysRevLett.123.144501

## 拾、附錄

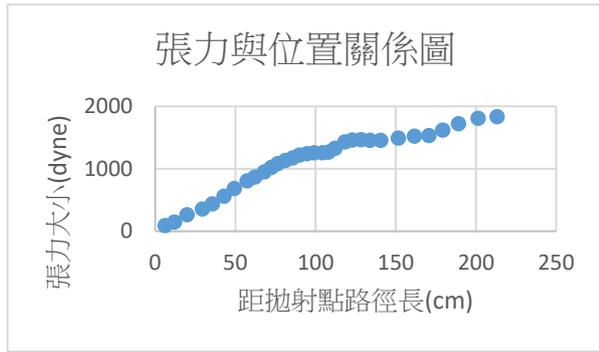
### 一、繩圈在不同速度及仰角時，繩上各處張力

#### (一)、仰角 $20^\circ$

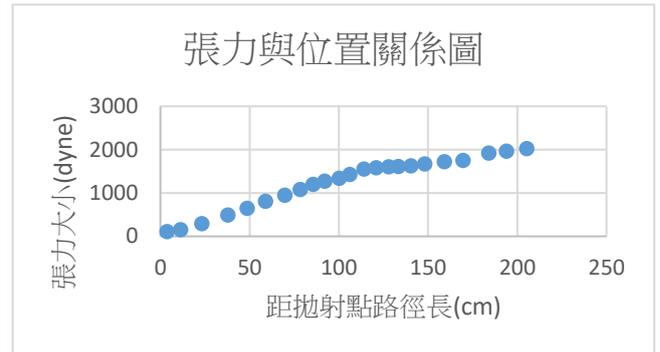


(二)、 仰角 30°

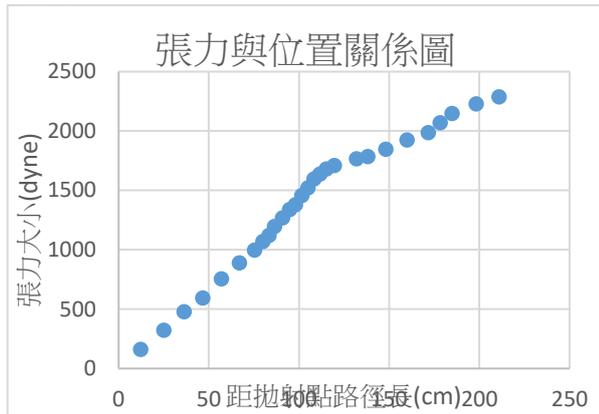
速度  $v=452.8\text{cm/s}$



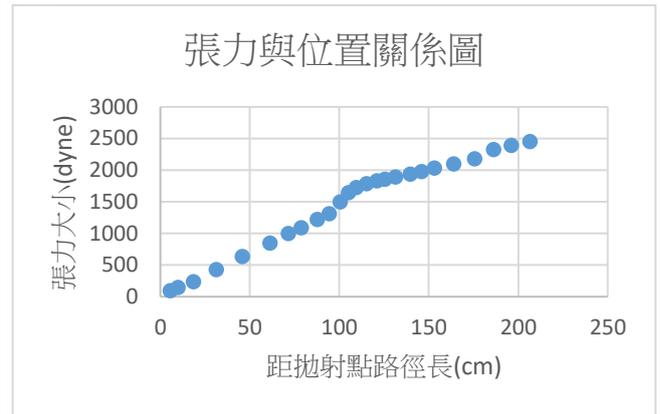
速度  $v=483.3\text{cm/s}$



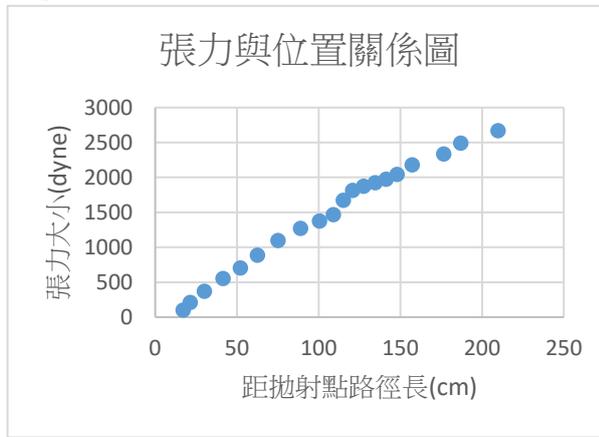
速度  $v=514.3\text{cm/s}$



速度  $v=537.4\text{cm/s}$



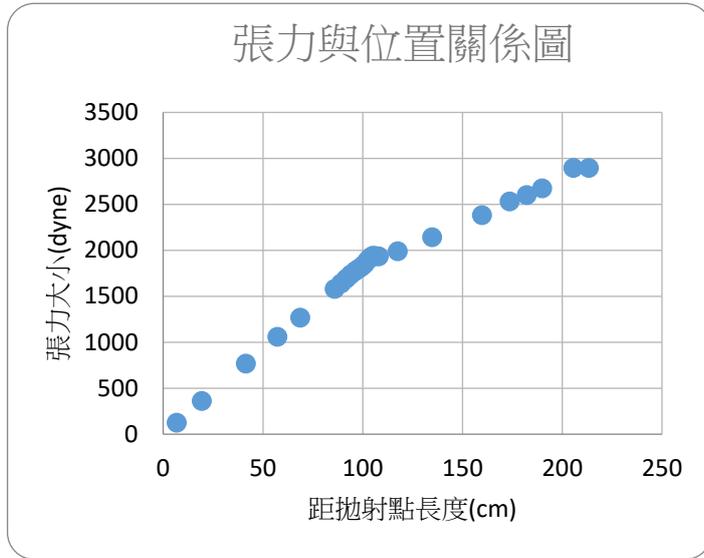
速度  $v=562.6\text{cm/s}$



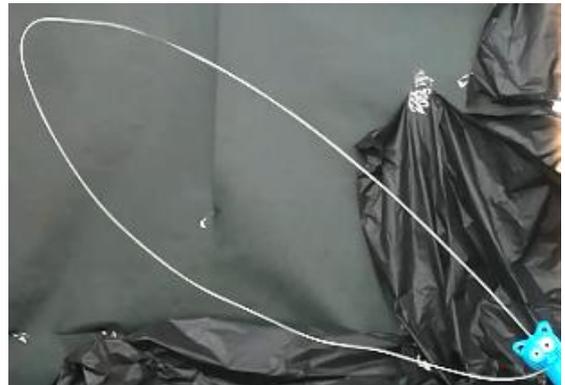
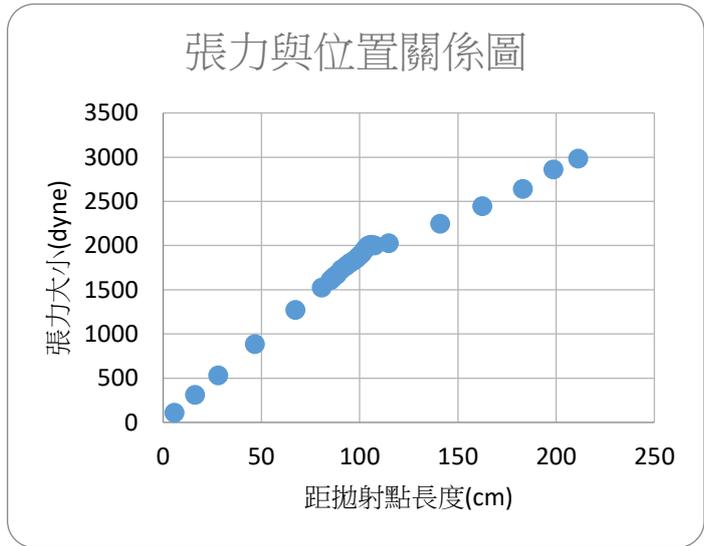
## 二、繩圈末端凹陷時各處張力

(一)、 仰角  $50^\circ$

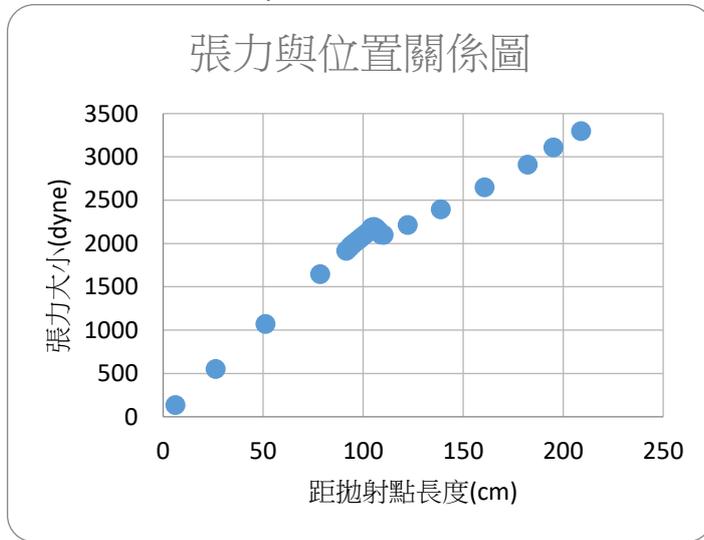
速度  $v = 615.7 \text{ cm/s}$



速度  $v = 620.8 \text{ cm/s}$

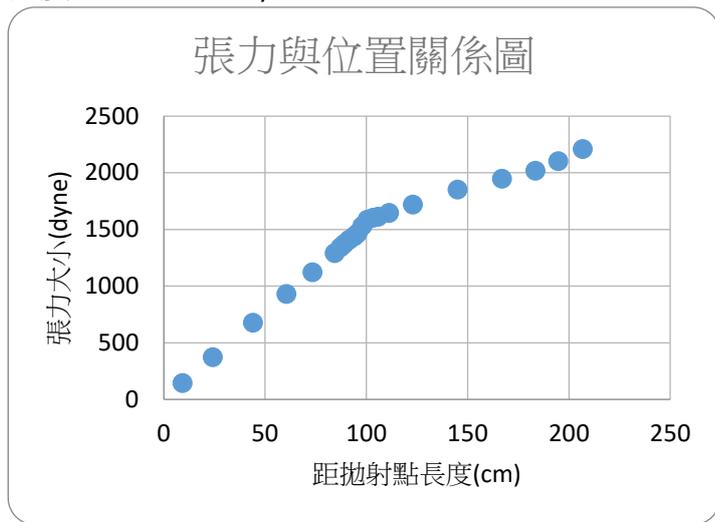


速度  $v = 648.6 \text{ cm/s}$

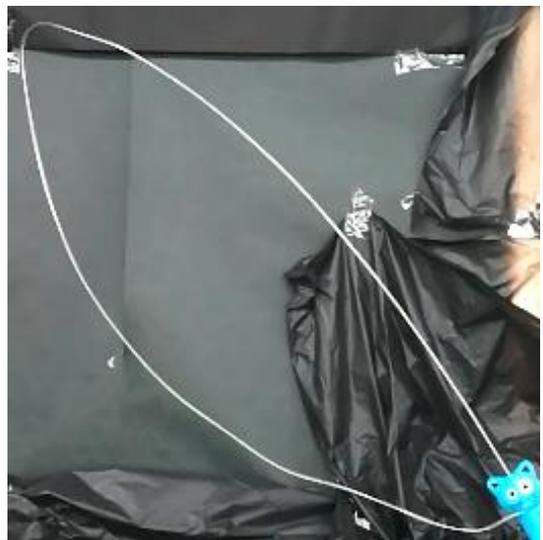
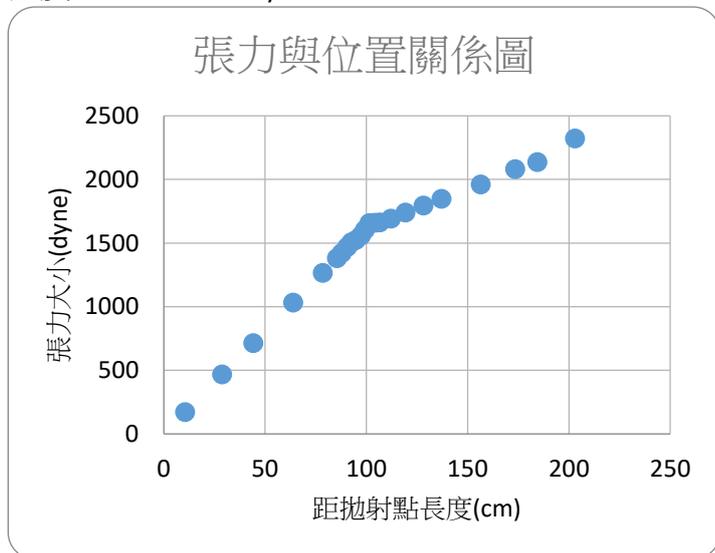


(二)、 仰角  $60^\circ$

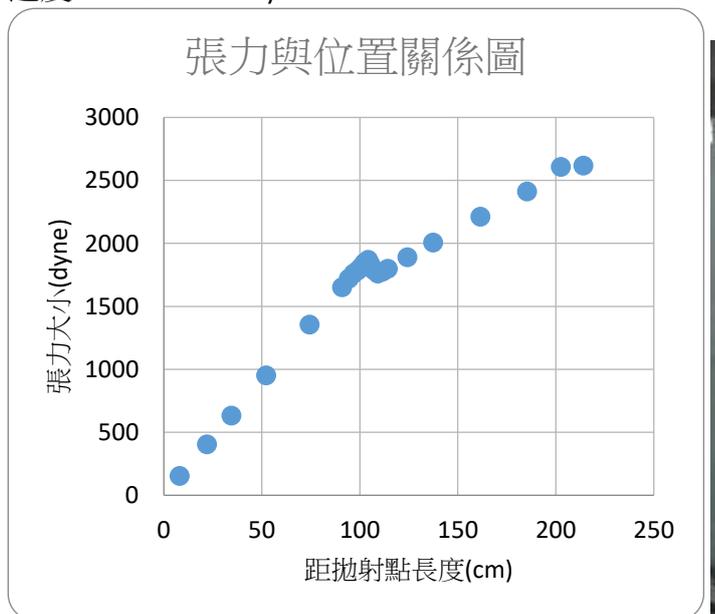
速度  $v = 558.1 \text{ cm/s}$



速度  $v = 571.6 \text{ cm/s}$

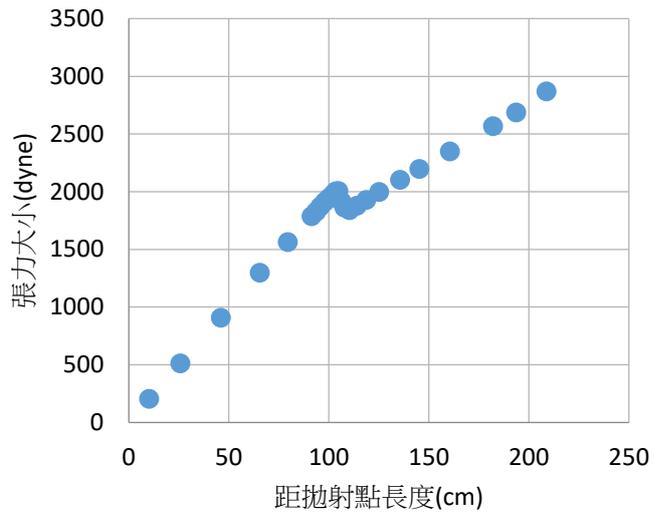


速度  $v = 605.1 \text{ cm/s}$



速度  $v = 625.8 \text{ cm/s}$

張力與位置關係圖

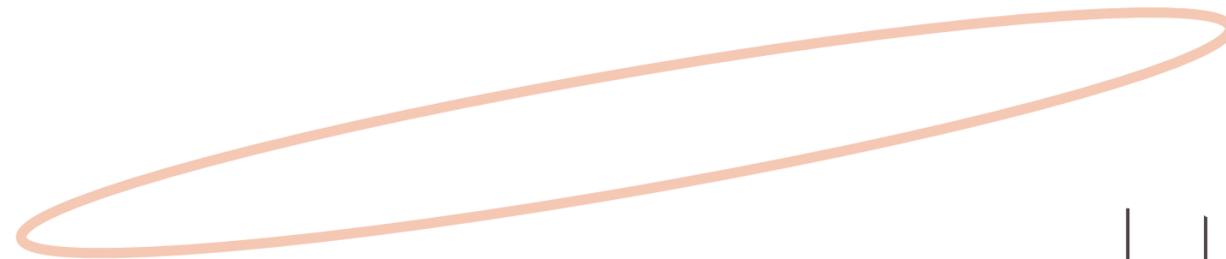
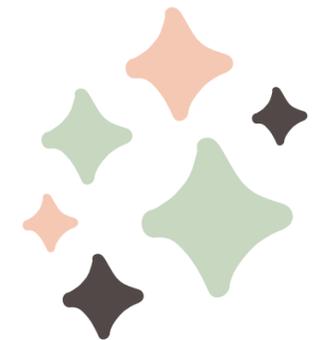


## 【評語】 051810

以繩圈轉動速度為實驗度參數，拍攝繩圈的運動軌跡，討論線圈在旋轉時受到空氣阻力、重力及張力的影響。利用改變不同角度與速度，以物理受力的方式來分析並解釋，並進行繩圈在高速運動下末端凹陷時張力差之討論。此工作利用現有的線圈產生器來做實驗，沒有進行儀器設計。主要計算繩圈多數點上的受力與張力分析，來進行歸納。

## 作品簡報

# 飛揚的繩圈



# 摘要

我們利用繩圈發射器研究繩圈在不同速度下的運動及形狀。假設繩圈只受重力、空氣阻力、張力作用，且發射器和繩圈接觸點張力為零，我們發展出計算繩圈受空氣阻力、張力的方法。我們認為，繩圈的速度越快，空氣阻力使繩圈整體向上抬升使繩圈變得狹長，但繩圈末端的曲率與張力出現極大變化，相較於空氣阻力，張力對末端的形狀有更重要的影響。而在高速下末端會出現特別的凹陷現象，末端的繩圈，受到的張力及空氣阻力，使末端各部份具有向後之加速度，使各段減速導致繩圈形狀發生凹陷。在這個過程中，張力的重要性遠大於空氣阻力，因此我們可以說，繩圈的末端是被自己拉過去的！



圖1 凹陷示意圖

## 壹、研究動機

在網路上看到一個影片，介紹一發射器利用轉輪的摩擦將繩圈以固定速率拋出，在空中維持固定形狀，若改變發射仰角，繩圈的形狀也會發生變化。我們對這個現象感到好奇。我們是否能改變速率來探究對繩圈運動、形狀的影響？最特別的是，我們注意到在高速時繩圈末端會出現凹陷的形狀(圖1)，這是為什麼？我們期待能對這些問題進行探究與討論。

## 貳、研究目的

- 一、探討繩圈單位長度受空氣阻力和速度之關係。
- 二、探討繩圈上單位長度張力差與位置、速度之關係
- 三、探討速度增加時繩圈上升之機制。
- 四、探討繩圈末端凹陷之現象。

## 參、研究原理

根據Margaux Abello、Juliette Courson、Arnaud Maury、and Julian Renaud(2019)，以及Nicolas Taberlet, Jeremy Ferrand, and Nicolas Plihon(2019) 等人之研究，繩圈的運動主要受三個力的作用：重力、空氣阻力、張力，透過實驗，他們確認繩圈能升起，是因為空氣阻力造成往上之升力。他們也計算出以某仰角、速度發射之繩圈，在穩定態下之形狀。

## 肆、研究過程與方法

一、名詞與符號定義：繩圈線密度( $\lambda$ )、單位長度受空氣阻力( $f$ )、單位長度張力差( $\Delta T$ )、穩定態(繩圈形狀固定之狀態)

二、實驗一：繩圈單位長度受空氣阻力與繩圈速度之關係

### (一)方法

- 1.在繩上塗上顏色作為記號，慢動作觀察影格，即可計算繩圈速度。
- 2.如(圖2)，在繩圈上找出最高點A與最低點B，取A、B兩點間之繩子加以分析，設此部分之繩長為 $l$ 。若將此部分切分為無限多段 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ 、...、 $\Delta l_n$ ，在極短時間內，A、B間繩子之運動可以視為 $\Delta l_1$ 移動至 $\Delta l_n$ ，而中間各段不動，而 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_n$ 動量都在水平方向，故A、B間之繩子動量變化在水平方向，鉛直方向動量變化為0。而A、B間之繩子在鉛直方向只受重力與空氣阻力，所以兩力必然有相同的量值。
- 3.繩圈線密度為 $\lambda$ ，A、B間之繩子受重力可表示為 $\lambda l g$ 。而所受空氣阻力之鉛直分量可用以下方法計算：假設空氣阻力沿繩子切線方向且與運動方向相反，令單位長度受空氣阻力 $f$ ，則各段 $\Delta l$ 受空氣阻力為 $f \Delta l$ ，又設各段 $\Delta l$ 與水平方向夾角為 $\phi$ ，則各段 $\Delta l$ 受空氣阻力之鉛直分量為 $f \Delta l \sin \phi$ ，見(圖3)，令 $y$ 為A、B間鉛直距離。則A、B間之繩子受空氣阻力之鉛直分量為：

$$\sum_{i=1}^n f \Delta l_i \sin \phi_i = f \sum_{i=1}^n \Delta l_i \sin \phi_i = f y$$

- 4.綜合以上所述，可以得到： $\lambda l g = f y$  (式1)，並可由此式計算單位長度受空阻 $f$ 。

### (二)步驟

- 1.固定繩圈發射器A仰角分別為20°、25°、30°、45°，改變電源供應器電壓，造成繩圈速度改變，錄影後擷取穩定態照片。
- 2.利用Geogebra分析照片，找到繩圈上切線斜率為零的點：即最高點A及最低點B，以及兩點間之鉛直距離 $y$ 。
- 3.再利用Geogebra繪製曲線擬合A、B間繩子的形狀，得到方程式後便可知A、B間繩長 $l$ 。
- 4.利用(式1)計算單位長度受空氣阻力 $f$ 。

### (三)結果

- 1.實驗結果：不同仰角在不同速度下之單位長度受空氣阻力

仰角20°		仰角25°		仰角30°		仰角45°	
$v$ (cm/s)	$f$ (dyne/cm)						
441.8	5.58	473.7	7.51	452.8	6.80	450.2	5.81
486.5	6.95	496.6	8.75	483.3	7.98	473.7	7.75
518.4	8.32	537.5	9.78	514.3	9.11	496.6	8.44
525.8	8.16	549.7	12.0	537.4	10.1	533.3	8.68
558.1	9.87	553.9	11.9	562.6	11.9	558.3	8.73
580.7	10.6	571.6	13.1				
590.2	12.8	580.7	13.8				

- 2.由以上實驗，我們發現繩圈單位長度空氣阻力和速度成正相關，但和發射器仰角關係不大，因此我們綜合上述所有數據，並假設單位長度空氣阻力 $f$ 和速度 $v$ 之關係為： $f = av^b$ ，利用上述數據，以 $\log f$ 對 $\log v$ 作圖，得到如右圖形(圖4)。

- 3.得到回歸曲線：

$$\log f = 2.857 \log v - 6.797 \quad R^2 = 0.9097$$

$$\text{單位長度空氣阻力} f \text{和速度} v \text{之關係：} f = 10^{-6.797} v^{2.857} \quad (\text{式2})$$

## 三、實驗二：計算繩圈在不同速度及仰角時，繩上各處張力

### (一)方法

- 1.基本假設：發射器和繩圈接觸點繩張力 $T_1$ 為0。參考圖(5)，將整個繩圈切分為無限多段 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ 、...、 $\Delta l_n$ ，繩圈透過兩個轉輪提供的摩擦 $F$ 而發射，因此和轉輪接觸的 $\Delta l_n$ 受此摩擦，拉動後方各段 $\Delta l_{n-1}$ 、 $\Delta l_{n-2}$ 、...、 $\Delta l_1$ 前進，而繩上的張力 $T_n$ 、 $T_{n-1}$ 、...、 $T_1$ 也向後逐漸遞減。而位於最後方的 $\Delta l_1$ 和 $\Delta l_n$ 間張力 $T_1$ 若不為0，代表最後方的 $\Delta l_1$ 也會拉動 $\Delta l_n$ ，這似乎是不合理的。因此我們大膽假設 $\Delta l_1$ 和 $\Delta l_n$ 間張力 $T_1 = 0$ 。

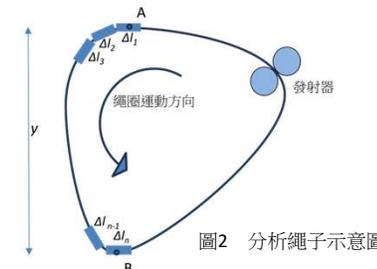


圖2 分析繩子示意圖

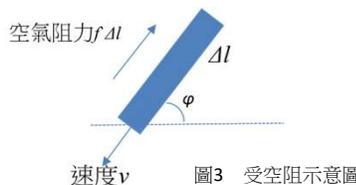


圖3 受空阻示意圖

圖4  $\log f$  與  $\log v$  關係圖

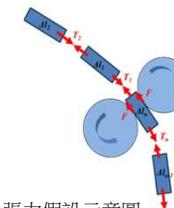
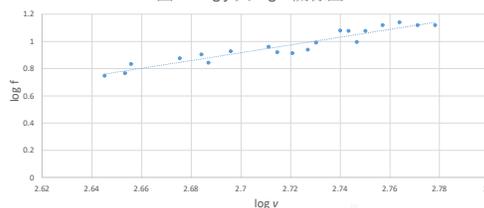


圖5 張力假設示意圖

2. 參考圖6，欲計算繩上某點P之張力 $T_p$ ，以O為原點，P之座標為 $(x, y)$ ，設O、P間繩子之繩長為 $l$ 。若將此部分切分為無限多段，每段質量為 $\Delta l$ ，在極短時間內，O、P間繩子之運動可以視為 $\Delta l$ 移動至 $\Delta l_n$ ，而中間各段不動，若 $\Delta l_n$ 和水平方向夾角 $\theta_n$ ，則O、P間繩子的動量變化為：

$$\Delta p_x = \Delta l(v \cos \theta_n - v \cos \theta_1), \Delta p_y = \Delta l(v \sin \theta_n - v \sin \theta_1)$$

3. O、P間繩子在水平方向受空氣阻力 $f$ 與張力 $T$ 之水平分力，按照牛頓第二定律

$$T_p \cos \theta_n - f_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\Delta l(v \cos \theta_n - v \cos \theta_1)}{\Delta t} = \lambda v^2 (\cos \theta_n - \cos \theta_1) \quad (\text{式3})$$

4. O、P間繩子在鉛直方向受重力、空氣阻力 $f$ 與張力 $T$ 之鉛直分力，按照牛頓第二定律

$$T_p \sin \theta_n - f_y - \lambda g = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta l(v \sin \theta_n - v \sin \theta_1)}{\Delta t} = \lambda v^2 (\sin \theta_n - \sin \theta_1) \quad (\text{式4})$$

5. 利用(式3)、(式4)，可以求出 $T_p \cos \theta_n$ 、 $T_p \sin \theta_n$ ，則P點張力 $T_p = \sqrt{(T_p \cos \theta_n)^2 + (T_p \sin \theta_n)^2}$

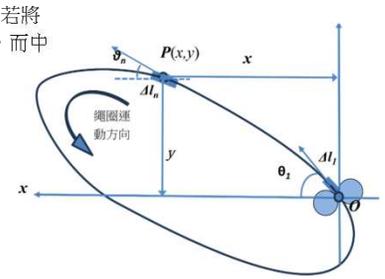


圖6 張力計算示意圖

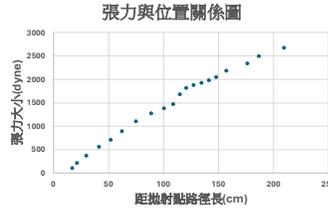
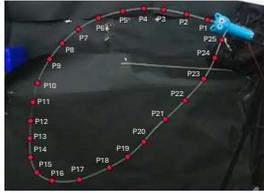
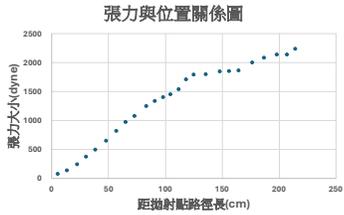
(二)結果：展版僅呈現兩組張力數據作為代表

第1組：

20°，速度 $v = 486.5 \text{ cm/s}$ ，單位長度受空氣阻力 $f = 6.95 \text{ dyne/cm}$

第2組：

30°，速度 $v = 562.6 \text{ cm/s}$ ，單位長度受空氣阻力 $f = 11.9 \text{ dyne/cm}$



分段	P1-P	P2-P	P3-P	P4-P	P5-P	P6-P	P7-P	P8-P	P9-P	P10-P	P11-P	P12-P	P13-P	P14-P	P15-P	P16-P	P17-P	P18-P	P19-P	P20-P	P21-P	P22-P	P23-P	P24-P
單位長度張力差 (dyne/cm)	7.284	11.247	17.297	15.448	15.859	19.031	18.794	13.300	16.457	11.764	8.979	7.186	12.545	26.771	11.907	0.714	4.042	0.816	1.190	11.141	8.202	5.164	0.052	13.284

分段	P1-P	P2-P	P3-P	P4-P	P5-P	P6-P	P7-P	P8-P	P9-P	P10-P	P11-P	P12-P	P13-P	P14-P	P15-P	P16-P	P17-P	P18-P	P19-P	P20-P
單位長度張力差 (dyne/cm)	25.481	18.739	16.124	14.047	17.756	16.601	12.424	9.381	10.314	34.089	24.219	9.339	6.612	7.757	10.167	15.218	8.085	14.671	7.678	

### 四、實驗三：驗證張力計算

#### (一)方法

1. 為了知道我們計算出的張力是否合理，我們選取繩圈上一段長1cm的部分，將它的運動視為等速率圓周運動，計算出向心力的實際值。再用我們所計算出的張力推算出向心力的理論值，兩者互相比對。

2. 選取繩圈上一段長1cm的部分，其質量為0.0048g，取 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點， $P_1$ 、 $P_3$ 為兩端點， $P_2$ 為中點，用GeoGebra畫出通過這三點的圓，令圓心為O，半徑為R，而向心力實際值為 $m \times \frac{v^2}{R} = 0.0048 \times \frac{v^2}{R}$

3. 畫出這段繩子的力圖

(1) 重力為4.7 dyne，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_2$

(2) 利用(式3)、(式4)，計算 $P_1$ 和 $P_3$ 之張力，令 $P_1$ 處的張力 $T_1$ ，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_1$ ， $P_3$ 處的張力 $T_3$ ，和 $OP_2$ 連線方向之夾角 $\theta_3$

(3) 在指向圓心方向，合力為 $T_1 \cos \theta_1 + T_3 \cos \theta_3 - 4.7 \cos \theta_2$  此為向心力的理論值

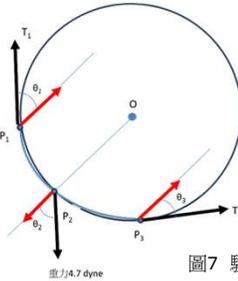


圖7 驗證張力示意圖

#### (二)結果：

五個不同穩定態向心力理論值與實際值比較

組別	向心力理論值(dyne)	向心力實際值(dyne)	全景圖	放大圖
第一組	103	104		
第二組	81.0	79.0		
第三組	51.4	51.4		
第四組	15.4	16.4		
第五組	84.8	82.0		

### 五、實驗四：繩圈凹陷處張力分析

#### (一)末端凹陷

繩圈在高仰角的状态下，若速度夠快，會在末端發生凹陷(如圖8)，這是一個非常奇特的現象，也是在相關文獻中還沒有被討論的現象。因此我們想做進一步的探討。

#### (二)方法

1. 在高仰角情況下，由於無法確定繩圈最低點的位置，已無法用實驗一的方式來計算空氣阻力，因此我們用實驗一所得到的經驗公式 $f = 10^{-6.797} v^{2.857}$  (式1)來估計不同速度下的單位長度空氣阻力。

2. 以和實驗二相同的方法計算繩圈上不同位置的張力。

#### (三)步驟

1. 固定繩圈發射器A仰角為70°

2. 改變電源供應器電壓，因此改變繩圈速度，將繩圈運動錄影，並擷取穩定態之照片。

3. 由影片計算繩圈速度。

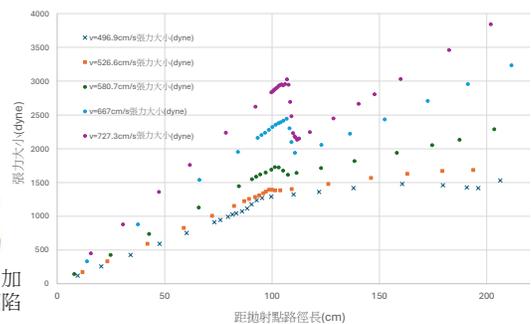
4. 分析照片，利用(式1)計算單位長度空氣阻力，利用(式3)、(式4)計算繩圈上不同位置的張力。



圖8 隨著速度增加繩圈末端發生凹陷

#### (四)結果

圖9 末端發生凹陷時，四個不同速度下張力與位置關係圖



## 伍、研究結果與討論

### 一、單位長度空氣阻力計算之討論

1. 在實驗一中可以看出不同發射角度之下， $\log v$ 與 $\log f$ 大致成線性關係，表示單位長度所受空氣阻力與發射角度無關，只受速度影響，因此得出經驗公式(式2)。

2. 但由於繩圈即使在穩定態下也會出現輕微抖動，導致最高點與最低點間距離不固定，此外，周圍氣體的流動也可能導致繩圈各處受空氣阻力不同，也不一定沿切線方向。這些因素都使得我們計算單位長度空氣阻力時會出現不確定性。

### 二、張力計算之討論

在實驗二中，我們做了一個大膽的假設：發射器和繩圈接觸點繩力為0。之後的計算顯示不論何種發射角度、速度，當繩子距拋射點的距離越遠，繩張力會逐漸的遞增，也就是對任一段繩子來說，其前方的張力大於其後方的張力，這符合我們的預期。隨後在實驗三中，我們將繩圈上1cm長度視為圓周運動，計算向心力的理論值與實際值，結果兩者非常接近，這讓我們對自己的假設與分析方法具有更大的信心。

### 三、不同速度時空氣阻力、張力差、最大張力差之比較

1. 實驗二中我們發現在速度較快的情况下，繩圈的末端由於角度變化較大因而有較為劇烈的動量變化，造成末端附近單位長度張力差會遠大於其餘部份。
2. 隨著速度增加，繩圈單位長度所受的空氣阻力、張力差、最大張力差都逐漸增加(如表1)。可以看出在速度逐漸加快時，空氣阻力對繩圈整體運動、形狀的影響會比張力差更為重要。
3. 由於繩圈末端之張力差在高速下會急遽增加，因此在繩圈末端，張力差對繩圈的影響是更大的。

表1

速度 $v$ (cm/s)	單位長度空氣阻力 $f$ (dyne/cm)	平均單位長度 張力差 $\Delta T$ (dyne/cm)	最大單位長度張力差 (dyne/cm)
452.8	6.80	9.16	19.3
473.7	7.51	10.0	18.9
483.3	7.98	10.1	16.0
486.5	6.95	11.2	26.8
496.6	8.75	11.2	20.6
514.3	9.11	11.4	25.1
518.4	8.32	11.8	26.5
525.8	8.76	12.4	37.9
537.5	9.78	12.1	37.9
549.7	12.0	13.1	36.4
553.9	12.0	12.6	37.3
558.1	9.87	13.9	49.3
562.6	11.9	13.3	34.1
571.6	13.1	13.4	38.4
580.7	13.8	14.8	40.4
590.5	13.2	14.9	56.1
600.3	13.1	16.7	97.5

### 四、速度對繩圈形狀的影響

當速度增加時，繩圈最上方的 $\Delta l_{上}$  受的空氣阻力也會增加，但空氣阻力沒有朝上的分量，無法使其往上移動，必須要等其前方的部分移動到比 $\Delta l_{上}$  更高的位置，才能藉由張力把 $\Delta l_{上}$  往上拉(參見圖11)。相反的，繩圈下方的 $\Delta l_{下}$ ，當速度增加時，其受的空氣阻力也會增加，而空氣阻力有往上的分量，因此使其往上移動。因此，當速度增加時，繩圈下方的部分都受往上的空氣阻力大幅向上移動，而上方的部分則只能小幅往上移動，使上、下兩部分距離縮短，因此趨於狹長。

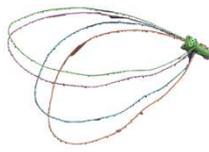


圖 10

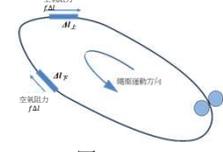


圖 11

### 五、繩圈在高速下末端凹陷時張力差之討論

1. 在發生凹陷時，繩圈末端附近必可找到一點其曲率最大(曲率半徑最小)，而由此點向前，曲率會逐漸減小(曲率半徑逐漸增大)，參見(圖12)。
2. 在末端附近選取 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點，其中 $P_2$ 為 $P_1$ 、 $P_3$ 之中點。這三點中最後方的 $P_1$ 曲率最大，而從 $P_1$ 向前，曲率逐漸減小，因此 $P_3$ 的曲率最小，若將 $P_1 \sim P_3$ 這一小段視為作等速率圓周運動，且以通過 $P_2$ 之切線為這小段的切線方向，令 $P_1$ 處的張力 $T_1$ ，和切線方向之夾角 $\theta_1$ ， $P_3$ 處的張力 $T_3$ ，和切線方向之夾角 $\theta_3$ ，則切線方向合力應為0，即 $T_1 \cos \theta_1 = T_3 \cos \theta_3$ ，由於 $\theta_1 > \theta_3$ ，因此 $T_1 > T_3$ ，故後方張力需大於前方張力。(註：此處繩圈受重力及空氣阻力遠小於張力，故重力、空氣阻力忽略不計)
3. 為了驗證上述說法，我們在仰角為 $70^\circ$ 時，選取發生凹陷時繩圈末端1cm之長度，依上述方法計算，將結果整理於(表2)。由表中可以看出， $\theta_1$ 皆大於 $\theta_3$ ，而 $T_1 \cos \theta_1$ 和 $T_3 \cos \theta_3$ 也極為接近。

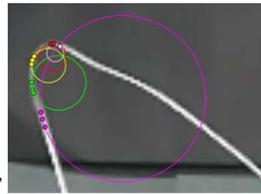


圖 12

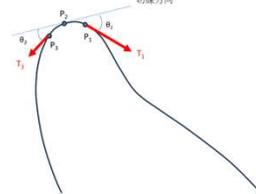


圖 13

速度 (cm/s)	$T_1$ (dyne)	$\theta_1$	$T_3$ (dyne)	$\theta_3$	$T_1 \cos \theta_1$ (dyne)	$T_3 \cos \theta_3$ (dyne)
580.7	1690	9.5°	1660	5.4°	1660	1660
620.8	1950	21.0°	1860	13.9°	1820	1800
643.0	2190	28.4°	2040	20.4°	1930	1910
699.2	2610	36.4°	2230	18.4°	2100	2120
727.3	2930	36.5°	2520	20.5°	2360	2360

表 2

### 六、繩圈在高速下末端凹陷之探討

1. 我們發現隨著速度加快，張力下降的趨勢更明顯，我們將這部份單位長度張力差、單位長度空氣阻力整理於(表3)。
2. 為了要說明末端凹陷的成因，我們先觀察繩上某一小段 $\Delta l$ 之運動(參見圖14)，當在繩圈加速時， $\Delta l$ 所受向後之張力差持續增加，使 $\Delta l$ 無法維持等速率運動，而得到向後之加速度。由於 $\Delta l$ 之速度和加速度方向大致相反，因此減速。
3. 隨速度繼續增加，各部份所受向後方的空氣阻力增加，向後方的張力差更是大幅增加，因此減速而達到如(圖15-5)之穩定態。
4. 結論：繩圈的凹陷主要是因為速度增加時，末端各段受向後之張力差大幅增加，使各段具有一向後之加速度，因而減速所造成。

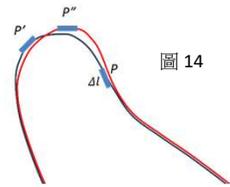


圖 14



圖15-1

圖15-2

圖15-3

圖15-4

圖15-5

繩圈速度 (cm/s)	496.9	580.7	667	727.3
單位長度 張力差 (dyne/cm)	22.8	-19.1	-133	-188
單位長度 空氣阻力 (dyne/cm)	8.06	12.6	18.7	23.98

表 3

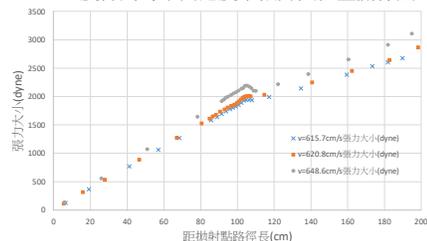
### 七、末端凹陷臨界速率之探討：

繩圈末端張力不升不降，為恰發生凹陷之狀態，此時繩圈之速率為臨界速率。欲精確找出臨界速率並不容易，因此我們利用實驗四的數據找出最接近臨界速率之約略值，整理如(表4)。從中可看出，隨著仰角越高，臨界速率越小，即末端越容易發生凹陷。

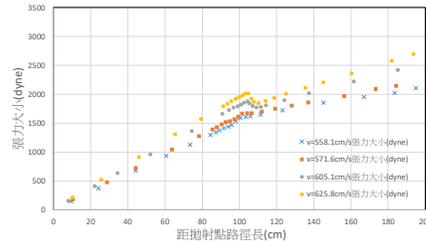
仰角	臨界速率(cm/s)
50°	約620.8
60°	約571.6
70°	約496.9

表 4

50度仰角時不同速度下張力與位置關係圖



60度仰角時不同速度下張力與位置關係圖



## 陸、研究結論

- 一、當速度增加時，空氣阻力對繩圈整體運動、形狀的影響會比張力差更為重要。只有在末端曲率較大處之最大張力差在高速下會急遽增加，因此在繩圈末端，張力差對繩圈的運動、形狀影響是最大的。
- 二、我們大膽假設發射器和繩圈接觸點繩張力為0，而張力計算的理論值和實際值極接近，代表我們的假設與方法大致是正確的。
- 三、當繩圈速度加快時，形狀會趨於狹長，我們認為是繩圈下方的部分受到往上的空氣阻力，因而大幅往上移動，而上方的部分則只能小幅往上移動，使上、下兩部分距離縮短，因此趨於狹長。
- 四、當繩圈速度極快時，會出現末端凹陷的現象。此時末端各段張力差為負值。我們認為這是因為末端附近必可找到一點，其曲率為最大，而由此點向前，曲率逐漸減小。對這部分的任一小段來說，後方的張力和切線方向夾角較大，而前方的張力和切線方向夾角較小，為了使切線方向合力為0，因此後方的張力必須大於前方的張力。
- 五、關於末端凹陷的成因，我們認為這是因為速度增加時，末端各段受沿切線向後之空氣阻力與張力差皆增加，因此各段無法維持等速率運動，而是具有向後之加速度，使各段減速，因此繩圈發生凹陷。在此過程中，各段受張力差的影響遠大於空氣阻力，也可以說，繩圈末端是被自己拉過去，因而發生凹陷的！
- 六、繩圈發射仰角越高，恰發生凹陷之臨界速率越小。