

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051808

一點一滴——以水滴撞擊液面的動態過程探討水滴斷裂之機制

學校名稱： 國立新竹女子高級中學

作者： 高二 劉馨甯 高二 陳柔臻 高二 鄒逸凡	指導老師： 江翊
---	-----------------

關鍵詞： 福祿數、水柱斷裂高度、噴射水滴

摘要

本研究將水滴撞擊液面的動態過程分為三個階段：水滴撞擊液面形成水窪、水窪形成水柱以及水柱分裂為水滴，在此三個階段，我們皆找出了良好的量化關係。根據我們推導的公式可看出，水滴撞擊液面速度愈快則水窪則愈大，且水窪形狀皆相同。水窪愈大則會形成初速度較慢且較粗的水柱。在水柱分裂為水滴的機制探討中，我們發現分裂的水滴可分為三種，分別為噴射水滴、滯留水滴、凹陷水滴，其中噴射水滴僅在撞擊速度慢時出現，而滯留水滴與凹陷水滴涵蓋近所有撞擊速度。最終，我們找到了噴射水滴斷裂高的預測公式，故可利用撞擊水滴的物理性質，精準預測噴射水滴的出現與否，且與實驗數據極為相近。

壹、前言

一、研究動機

我們在網路上曾經看過一部廣告，水滴由上到下撞擊水面後，先由水面向下深入形成水窪，再向上反彈產生了噴濺的水柱，最後會有完整的水滴分出。生活中液滴撞擊液面的現象非常常見，例如：雨水落入池塘、滴定實驗中滴定管內液體落至燒杯。仔細觀察會發現，不同撞擊條件下，水滴會有不同的噴濺模式，有時水柱較細且分離水滴數較多，有時水柱較粗且分離水滴較少。不禁好奇：液滴撞擊的條件和噴濺模式有何關聯，希望找出兩者間的規律，並探究現象背後的物理原理。

二、文獻回顧

第 51 屆高中科展《「彈」何容易—水珠的反彈》中，他們運用高速攝影機錄製水滴下落的過程，並改變水滴質量、下落高度、水深等操縱變因，以觀察水窪深及反彈高度等應變變因。其後，以能量的觀點，說明最終形成的水珠數的多寡[1]。然而其著重於現象觀察而並未說明相關物理原理。而在第 47 屆高中科展《當我們撞在一起-液體碰撞》中，他們探討液體不同下落速度後反彈過程能量損失之不同，進而影響水窪深入之深度及水柱彈起之高度。然而其分析方法並未由非彈性碰撞著手，且未詳細說明反彈過程細部的作用原理[2]。第 63 屆高中科展《玩水珠珠》述及了水珠的形成原因，是由於普拉托—瑞利不穩定性，噴射水柱內產生擾動，表面張力會傾向最小化其表面積，因而分裂成水珠[3]。在上述科展作品中，大部分討論都關注在「落水水滴」和「反彈水柱」之間的關聯性，尤其是能量耗損的比例，少有針對液滴反彈的動態過程進行全面深入的探討。

論文《Jet dynamics post drop impact on a deep pool》中，將反彈過程分為「形成水窪」「形成水柱」兩階段，分析了落水速度和水窪、水柱形成機制之關聯[4]。論文中提到，僅在適當的撞擊速度下，水柱才會形成極高的奇異噴流（singular jet）。這篇論文雖未談論水柱斷裂的

機制，但將反彈過程分為數階段分析之研究方法，給了我們非常大的啟發。

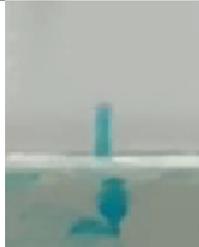
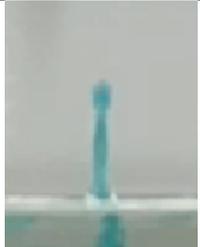
論文《Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool》中，分析三種不同液體（水、乙醇、矽油）撞擊液面的過程[5]。文中提到了將撞擊動能轉變為水窪的理論公式，本科展作品中，我們會參考論文的水窪分析方式，並進一步修正之。

論文《Generation and Breakup of Worthington Jets After Cavity Collapse》中以數學方程式分析了反彈水柱的理論速度與寬度[6]。裡面大部分的討論都超出高中生的數學能力範圍，但論文中提及水柱收縮至斷裂的時間 $T \propto \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}$ ，其中 R 為水柱半徑、 ρ 為密度、 σ 為表面張力，這個結論為我們提供了思考斷裂機制的可能方向。

三、試作實驗初步觀察

為了測試實驗設備的穩定性，並釐清未來的研究方向，我們以不同落水高（10公分~60公分，每5公分為間距），讓水滴以不同的落水速度撞擊水面，我們觀察到水滴反彈的現象可粗略分為以下數階段：

表一、水滴反彈階段

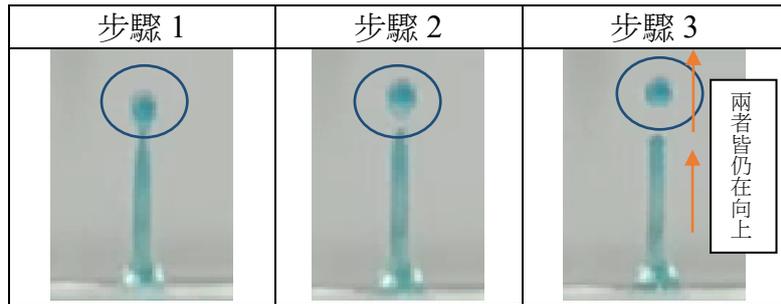
1 水滴下落	2 水滴落水	3 落水形成水窪	4 水窪回彈
			
5 向上欲形成水柱	6 水柱形成	7 水柱分離出水滴	8 水柱回縮
			

其中不同撞擊速度下，水窪大小、水柱粗細、分離珠數皆有所不同。尤其是分離出水滴的階段，會有三種明顯不同機制的水滴種類分離，分別為：

（一）噴射水滴

水柱仍在向上噴濺時，斷裂出初速度向上之水滴（表二圓圈處）。此種水滴通常初速度較快、尺寸較小，有時甚至可飛到比水柱高數倍的極高位置。

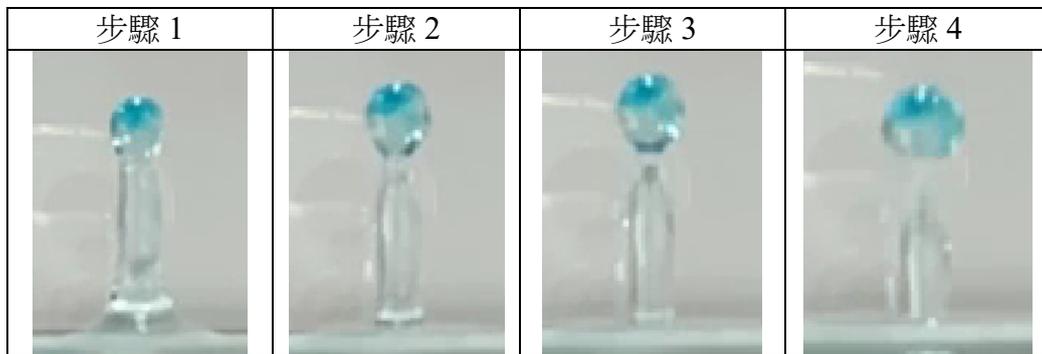
表二、噴射水滴形成過程



(二) 滯留水滴

水柱抵達最高點準備向回收縮時，頂部分離之水滴。此種水滴會滯留於水柱最高點，並隨著下方水柱補充水而逐漸變大。

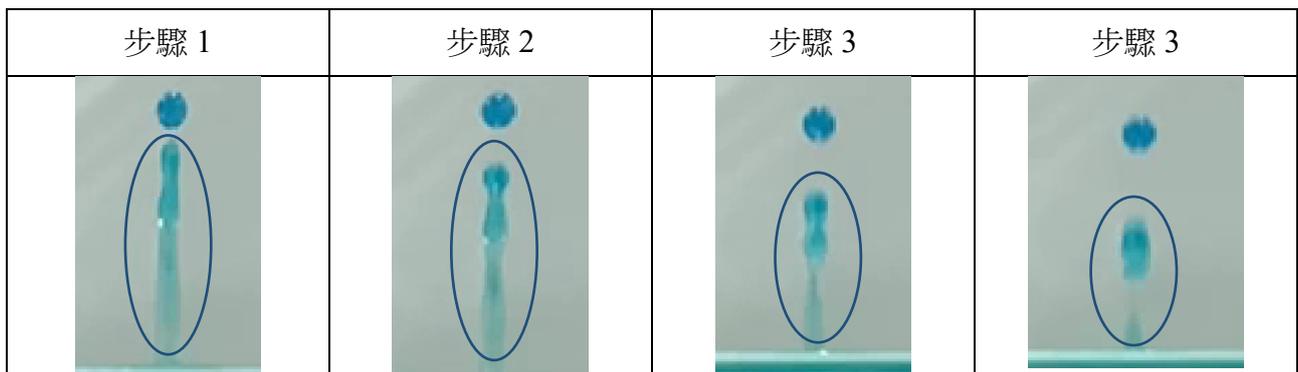
表三、滯留水滴形成過程



(三) 凹陷水滴

靜止水柱斷裂成之水滴（表四圓圈處）。此種水滴原先為水柱，緊接著待水柱不再上升靜止後，水柱表面產生波動，緊接著整根水柱幾乎同時斷裂，形成數個或合併成單一水滴（下圖即為合併成單一水滴）。

表四、凹陷水滴形成過程



四、研究目的

綜合前人的研究和初步的實驗觀察，我們認為水滴反彈的歷程可分為：撞擊水面形成水窪、水窪收縮形成水柱、水柱斷裂形成水滴（不一定發生）。故擬定研究目的如下：

- (一) 探討撞擊水滴速度與分離水滴型態的定性關係

- (二) 探討撞擊水滴速度與水窪形狀的量化關係
- (三) 探討撞擊水窪形狀與水柱性質的量化關係
- (四) 探討水柱性質與三種水滴斷裂機制的量化關係

貳、 研究設備及器材

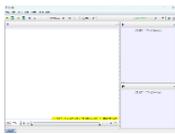
一、 實驗器材表

表五、 實驗器材表

編號	名稱	說明	圖片
1	分度吸量管與安全吸球	裝入染色的水向下滴入水缸。	
2	水缸	裝入 12 公分高的水最為水滴落下地點。	
3	支架	架設分度吸量管。	
4	手機與手機支架	拍攝與記錄；固定相機拍攝角度。	
5	背板	使拍攝背景色彩單一、畫面乾淨，去除色彩雜質。	

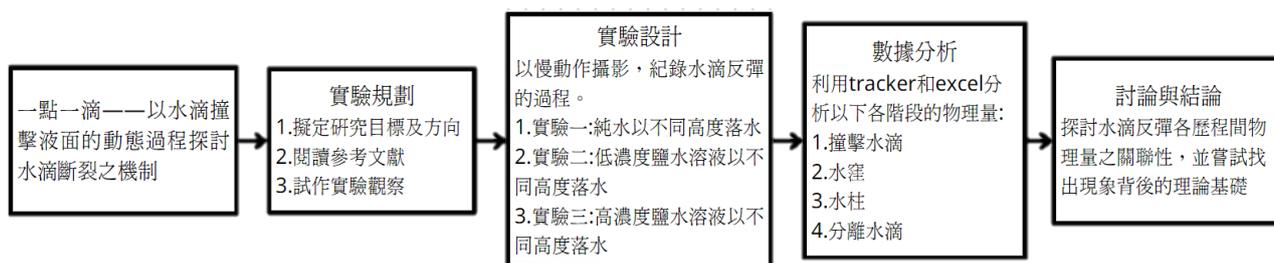
二、 電腦軟體

表六、 電腦軟體

名稱		
	Excel	Tracker
用途	統整數據並繪製關係圖	追蹤並分析水滴

參、研究過程或方法

一、研究架構



圖一、研究架構圖

二、實驗原理

(一) 本實驗中的無綱量數

本作品中，由於形成水窪和水柱的歷程明顯與重力有關，故主要以福祿數作為量化液滴撞擊劇烈程度的主要參數。唯討論到水柱斷裂的機制時，表面張力必定扮演重要角色，才會分析韋伯數對水柱收縮快慢的影響。

1. 福祿數

福祿數 (Froude number, Fr) 為流體力學中的無綱量數，為慣性力和重力效應之比，其公式為 $Fr = \frac{V_I^2}{gd}$ ，其中 V_I 為撞擊速度， g 為重力加速度， d 為水滴半徑。當液滴較大或速度較慢時，重力影響較明顯；反之當液滴較小或速度較快時，重力影響較小[7]。

2. 韋伯數

韋伯數 (Weber number, We) 代表慣性力和表面張力效應之比，其公式為： $We = \frac{\rho V_I^2 (2d)}{\sigma}$ ，其中 V_I 為撞擊速度， σ 為流體之表面張力， $2d$ 為水滴直徑， ρ 為流體之質量密度。當液滴較大或速度較快時，慣性影響較明顯；反之當液滴較小或速度較慢時，慣性影響較小[8]。

(二) 表面張力

兩種不同物態的物質之間界面上的張力被稱為表面張力，其會盡可能使水面達到最小表面位能。其公式為 $U = \sigma A$ ，其中 σ 為表面張力， A 為液體表面積。本作品中僅以動能、重力位能、表面位能等三種力學能為分析基礎，其餘能量形式皆以「能量耗損」概括[9]。

表七、常見物質與空氣間的表面張力[9]

液體	表面張力(mN/m)
水	72.75
汞	476
乙醇	22.55

(三) 水窪的理論深度分析

根據論文《Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool》中提及之水窪深度理論公式，其中假設水窪為半球形、水滴和水面的溶液種類相同，且過程中無能量耗損，僅考慮動能與重力位能的轉換，因此水滴撞擊時的初動能，全數轉換為水窪重力位能。而由積分可知，半球形質心在 $\frac{3}{8}R_{max}$ 處。

$$\chi_{cm} = \frac{\int_0^{R_{max}} \rho_{水} \pi (R_{max}^2 + x^2) dx \chi}{\frac{2}{3} \pi R_{max}^3 \rho_{水}} = \frac{\frac{1}{2} R_{max}^4 \frac{1}{4} R_{max}^4}{\frac{2}{3} R_{max}^3} = \frac{3}{8} R_{max}$$

$$\text{故可列式：} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi d^3 \rho_{水} \right) v^2 = \left(\frac{2}{3} \pi R_{max}^3 \rho_{水} \right) g \left(\frac{3}{8} R_{max} \right)$$

$$\text{整理得：} R_{max} = \left(\frac{8}{3g} \right)^{\frac{1}{4}} d^{\frac{3}{4}} v^{\frac{1}{2}}$$

利用水滴半徑將水窪深度標準化可得

$$\frac{R_{max}}{d} = \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{v^2}{gd} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{8}{3} Fr \right)^{\frac{1}{4}} \dots \text{式(1)}$$

公式中 R_{max} 為水窪最大深度、 g 為重力加速度、 d 為水滴半徑、 v 為入水速度、 $\rho_{水}$ 為液體密度。由式(1)可知，標準化水窪深度僅與福祿數有關。

(四) 無限長靜止水柱的斷裂機制

假設一段無限長且靜止的水柱中有一段長 x 、半徑為 R 的水柱段，而在其斷裂成半徑為 d 水珠時，水柱段和水珠的體積應該為一定值，如圖二。

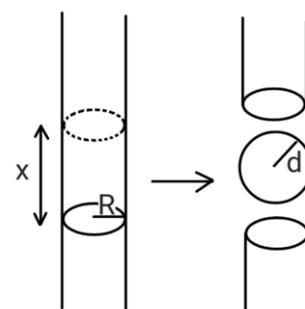
$$\text{故可列式：} \pi R^2 x = \frac{4}{3} \pi d^3$$

$$\text{整理後可得：} d^3 = \frac{3}{4} x R^2$$

當斷裂前水柱的表面積大於水珠的表面積時，水珠即

$$\text{斷裂。故可列式：} 2\pi R x > 4\pi d^2 = 4\pi \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} R^{\frac{4}{3}}$$

整理後得： $x > \frac{9}{2} R$...式(2) 由列式可知，當水柱長 x 大於 $\frac{9}{2} R$ 時，水柱即會斷裂成水珠。

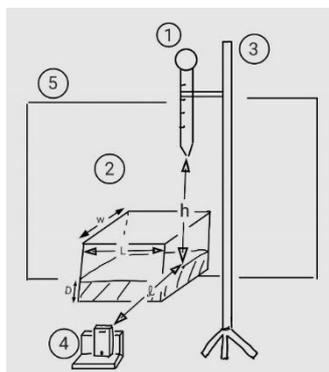


圖二、水柱斷裂之過程

(五) 普拉托－瑞利不穩定性

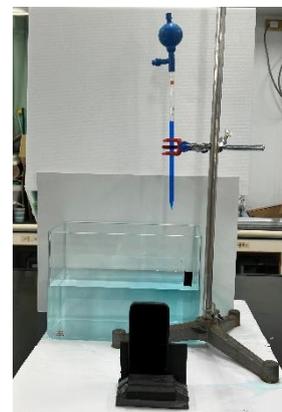
當表面張力使水柱因流體分子隨機運動產生擾動而變得不穩定，就會發生普拉托－瑞利不穩定性(Plateau Rayleigh instability)，此時液體表面張力會傾向最小化其表面積，因而使水柱斷裂。而以奈米的尺度來觀察，此不穩定性是源於熱波動[3]。

(六) 實驗架設圖



圖三、實驗裝置示意圖
(未按照真實比例繪製)

撞擊水滴高度 $h = 10 \text{ cm} \sim 60 \text{ cm}$
 水缸長度 $L = 35 \text{ cm}$
 水缸寬度 $W = 20 \text{ cm}$
 水深 $D = 12 \text{ cm}$
 手機與撞擊點距離 $l = 30 \text{ cm}$



圖四、實驗裝置圖 (實體)

(七) 實驗方法

在第 44 屆《被忽略的神秘力量—表面張力》科展作品中，用自製的表面張力測量儀器透過槓桿和公式換算了不同濃度鹽水的表面張力，結果如表三[10]。本實驗為確認表面張力的影響，故選擇了差異較大的表面張力 0.035 (濃度 16.7%) 和表面張力 0.045 (濃度 19.4%) 的鹽水進行實驗。

表八、不同鹽水濃度的表面張力

鹽水濃度 (%)	0.0%	3.8%	7.4%	10.7%	13.8%	16.7%	19.4%	21.9%	24.2%
表面張力 (N/m)	0.076	0.070	0.041	0.043	0.046	0.035	0.045	0.032	0.039

1. 實驗一：純水水滴撞擊純水水面

- (1) 將水缸注入 12 公分高的純水
- (2) 調製染色水並裝入分度吸量管
- (3) 架設手機調整距離並置中分度吸量管
- (4) 拍攝一張照片確定比例尺
- (5) 由分度吸量管滴水滴，以 5 公分為間距，從分度吸量管的尖端至水面的距離最小 10 公分依序量至最大 60 公分
- (6) 以手機使用慢動作(240 FPS)錄製水滴下落至反彈過程

(7) 將影片匯入 tracker 觀察和分析

(8) 用 excel 計算各項物理量，並繪製散布圖

2. 實驗二：低濃度鹽水水滴撞擊低濃度鹽水水面

配製濃度 16.7% 的鹽水，在 8500 毫升的水中加入 1700 公克的食鹽並攪拌使其完全溶解，將鹽水倒入水缸並調整水深至 12 公分，其餘同實驗一。

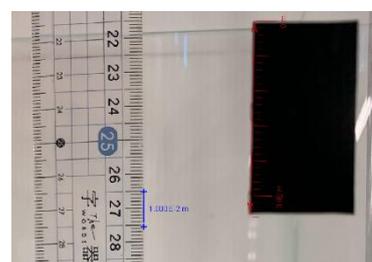
3. 實驗三：高濃度鹽水液撞擊高濃度鹽水水面

配製濃度 19.4% 的鹽水，在 8500 毫升的水中加入 2040 公克的食鹽並攪拌使其完全溶解，將鹽水倒入水缸並調整水深至 12 公分，其餘同實驗一。

(八) 數據分析方法

1. 長度比例尺校正：

將直尺放於水滴入水處水面並拍照，用直尺上的刻度對照事先貼上的黑色膠布，得到黑色膠布對應的公分數，以此作為比例尺，如圖五。



圖五、比例尺示意圖

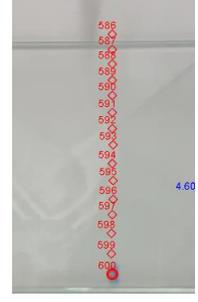
2. Tracker 量測長度：

表九、Tracker 量測分析方法

水窪寬 $W_{窪}$	水窪深 R_{max}	水滴直徑 $2d$	斷裂水柱高 $h_{斷}$	水柱寬 $W_{柱}$	最大水柱高 h_{max}	滯留水珠寬 $W_{珠}$
在水窪到達最大時量測水窪在水面的寬度。	在水窪到達最大時量測水窪在水面的深度。	量測落下時的水滴直徑。	在水柱斷裂時量測水面到頂端的距離。	在水柱高度達到 1.5 公分時量測其高度一半處的寬度。	水柱達最高點時的高度。	滯留水珠在分離後的寬度。

3. Tracker 追蹤水滴下落與水柱出水過程：

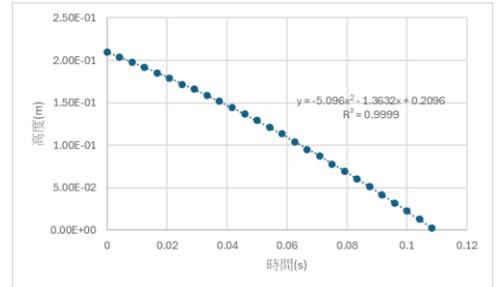
- (1) 新增一質點在水滴（或水柱最頂端上），如圖六。
- (2) 使用 tracker 的自動追蹤，追蹤水滴從分度吸量管到水面的過程（或追蹤水柱從出水到最高點的過程），過程若有自動追蹤無法判讀的改用手動追蹤，如圖七。



圖六、新增質點 圖七、追蹤過程

4. Excel 計算落水速度：

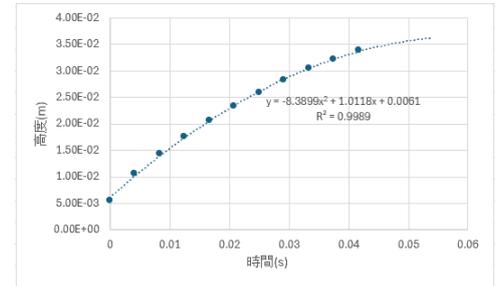
- (1) 將 Tracker 追蹤過程的高度匯入 Excel 和時間繪製散佈圖，如圖八。
- (2) 將拋物線方程式微分一次後，代入水滴入水時間，計算落水速度。



圖八、落水高度對時間散佈圖

5. Excel 計算水柱初速度與水柱加速度：

- (1) 將 Tracker 追蹤過程的高度匯入 Excel 和時間一起繪製散佈圖，如圖九。
- (2) 為避免影格不同產生的誤差，將高度等於零代入方程式中解出剛出水時的時間，再將此解代入拋物線微分一次之方程式，計算出水時的水柱速度。



圖九、水柱高度對時間散佈圖

- (3) 將拋物線方程式微分兩次，計算水柱的加速度

肆、 研究結果

一、三種濃度中不同福祿數與三種水滴出現分布之關係

表十、三種濃度中不同福祿數與三種水滴出現分布之關係

福祿數 Fr(水)	噴射 水滴	滯留 水滴	凹陷 水滴	福祿數 Fr(多鹽)	噴射 水滴	滯留 水滴	凹陷 水滴	福祿數 Fr(鹽)	噴射 水滴	滯留 水滴	凹陷 水滴
112.21	O	O	O	57.02	O	O	X	57.62	O	O	X
115.92	X	X	X	74.73	O	O	O	64.01	O	O	O
118.31	O	O	X	75.77	O	O	X	70.51	O	O	O
118.73	O	O	O	84.49	O	O	X	75.51	O	O	O

118.85	O	O	O	84.96	O	O	X	76.81	O	O	X
122.17	O	O	O	94.31	O	O	X	80.61	O	X	X
156.85	O	X	X	104.47	O	O	O	105.18	O	O	X
171.45	O	O	O	111.75	O	O	O	108.08	O	O	X
176.89	O	X	O	118.21	O	O	O	111.09	O	O	O
180.56	O	X	O	123.78	O	O	O	113.70	O	O	O
183.55	O	O	X	126.89	O	O	X	115.19	O	O	O
187.17	X	O	O	146.97	O	O	X	125.82	O	O	X
187.36	O	O	O	156.02	O	O	X	128.02	O	O	X
193.34	X	X	X	171.98	X	O	O	128.48	O	O	O
194.19	O	X	X	175.92	O	O	X	132.88	O	O	O
206.83	O	X	O	185.65	X	O	O	142.62	X	X	X
226.48	X	O	X	187.01	X	O	O	142.62	O	O	X
233.28	O	O	X	211.24	X	O	O	179.90	X	O	O
260.79	X	O	X	212.68	O	O	O	189.01	X	O	O
262.45	X	O	X	220.16	O	O	X	206.35	X	O	O
272.27	O	X	X	240.28	X	O	O	212.25	X	O	O
273.31	X	O	X	260.22	X	O	O	213.13	X	O	O
293.28	X	O	X	266.32	X	O	O	218.06	X	O	O
299.79	X	O	X	296.08	X	O	O	232.49	X	O	O
312.66	X	O	X	313.02	X	O	O	252.29	X	O	O
315.26	X	O	X	315.20	X	O	O	259.78	X	O	O
315.68	X	O	X	333.68	X	O	O	262.11	X	O	O
317.91	X	O	X	340.86	X	O	O	274.04	X	O	O
329.67	X	O	X	348.72	X	O	O	293.24	X	O	O
339.03	X	O	X	355.76	X	O	O	299.39	X	O	O
348.49	X	O	X	362.64	X	O	O	303.70	X	O	O
354.84	X	O	X	371.20	X	O	O	312.81	X	O	O
365.66	X	O	X	375.38	X	O	O	320.20	X	O	O
367.61	X	O	X	378.11	X	O	O	322.51	X	O	O
370.75	X	O	X	381.25	X	O	O	327.60	X	O	O
375.37	X	O	X	385.76	X	O	O	342.43	X	O	X
377.93	X	O	X	393.79	X	O	O	344.18	X	O	O
383.22	X	O	X	396.32	X	O	O	367.77	X	O	O
408.27	X	O	X	419.60	X	O	O	368.48	X	O	O
409.32	X	O	X	420.01	X	O	O	374.63	X	O	O
451.04	X	O	X	432.04	X	O	O	385.40	X	O	O
452.13	X	O	X	435.89	X	O	O	405.31	X	O	O
454.44	X	O	X	455.09	X	O	O	409.66	X	O	O
454.70	X	O	X	465.49	X	O	O	415.92	X	O	O
464.69	X	O	X	473.64	X	O	O	510.61	X	O	O
479.78	X	O	X	473.98	X	O	O	517.49	X	O	X
502.11	X	X	O	476.49	X	O	O	530.93	X	O	O

511.19	X	O	X	490.19	X	O	X	545.77	X	X	O
516.26	X	O	X	510.49	X	O	X	617.85	X	O	X
527.75	X	O	X	515.20	X	O	O	650.86	X	O	O
548.32	X	O	X	526.99	X	O	O	662.52	X	O	X
549.30	X	O	X	578.55	X	O	X	695.06	X	O	X
560.73	X	O	X	634.81	X	O	O	845.61	X	O	X

二、探討純水撞擊純水液面之各種定性觀察

表十一、純水撞擊純水液面之各種定性觀察

	水滴落水前速度(m/s)	噴射水滴斷裂水柱高(m)	滯留水滴最大水柱高(m)	水柱寬(m)	水漥寬(m)	水漥深(m)	水株直徑(m)	水柱速度(m/s)	水珠寬(m)
10(1)	1.1172				0.0105	0.0083	0.0048		
10(2)	0.9750				0.0126	0.0087	0.0050		
10(3)	1.0184		0.0055		0.0110	0.0080	0.0041		
10(4)	1.0157				0.0113	0.0084	0.0045		
10(5)	1.0267				0.0111	0.0085	0.0047		
10(6)	1.0223		0.0044		0.0109	0.0084	0.0046		
15(1)	1.5853	0.013			0.0151	0.0110	0.0050	0.8215	0.0031
15(2)	1.4870	0.011		0.0024	0.0154	0.0102	0.0044	1.1337	0.0026
15(3)	1.6281	0.016	0.0149	0.0022	0.0137	0.0091	0.0048	0.9108	0.0031
15(4)	1.5470	0.015	0.0158	0.0021	0.0141	0.0095	0.0056	0.9000	0.0025
15(5)	1.6781	0.013	0.0111	0.0017	0.0147	0.0091	0.0043	1.0585	0.0027
15(6)	1.6245	0.013	0.0152	0.0023	0.0147	0.0095	0.0045	0.7547	0.0027
20(1)	1.5677	0.014		0.0034	0.0173	0.0097	0.0049	0.8811	0.0041
20(2)	1.8458	0.015		0.0025	0.0153	0.0097	0.0046	0.9082	0.0033
20(3)	2.0000	0.013		0.0029	0.0160	0.0101	0.0052	0.8841	0.0039
20(4)	1.7351	0.014		0.0025	0.0166	0.0099	0.0050	0.8348	0.0039
20(5)	1.7427	0.015		0.0027	0.0156	0.0102	0.0050	0.8663	0.0038
20(6)	1.9892	0.015		0.0030	0.0159	0.0098	0.0044	0.9745	0.0040
25(1)	2.0346				0.0132	0.0090		0.7957	0.0034
25(2)	2.2144	0.015		0.0032	0.0173	0.0102	0.0045	0.8806	0.0045
25(3)	2.1928	0.015		0.0031	0.0169	0.0103	0.0047	0.8979	0.0045
25(4)	2.2728		0.0130	0.0038	0.0164	0.0102	0.0043	0.9522	0.0049
25(5)	2.2896		0.0162	0.0036	0.0168	0.0110	0.0050	1.0223	0.0045
25(6)	2.1205		0.0209	0.0030	0.0171	0.0094	0.0049	0.9837	0.0049
30(1)	2.4038	0.014		0.0034	0.018	0.0111	0.0050	0.8880	0.0050
30(2)	2.3755	0.020	0.0166	0.0038	0.0173	0.0113	0.0044	1.0796	0.0043
35(1)	2.6206		0.0130	0.0047	0.0180	0.0108	0.0046	0.9521	0.0057
35(2)	2.7291		0.0150	0.0050	0.0194	0.0114	0.0039	0.9168	0.0070

35(3)	2.5000		0.0227	0.0057	0.0183	0.0107	0.0046	0.9337	0.0063
35(4)	2.5420		0.0139	0.0048	0.0184	0.0114	0.0041	0.8971	0.0068
35(5)	2.7689		0.0163	0.0043	0.0185	0.0112	0.0049	0.9598	0.0061
35(6)	2.5764		0.0225	0.0045	0.0180	0.0114	0.0051	0.9215	0.0065
40(1)	2.7879			0.0046	0.0181	0.0118	0.0048	0.8913	0.0073
40(2)	2.8262		0.0130	0.0053	0.0210	0.0112	0.0048	0.9749	0.0070
40(3)	2.6549		0.0216	0.0050	0.0186	0.0112	0.0049	0.8459	0.0062
40(4)	2.7885		0.0148	0.0053	0.0195	0.0114	0.0043	0.8954	0.0068
40(5)	2.8116		0.0139	0.0053	0.0197	0.0112	0.0047	0.8866	0.0071
40(6)	2.7509		0.0231	0.0043	0.0182	0.0117	0.0045	0.9357	0.0068
45(1)	2.9824		0.0107	0.0062	0.0197	0.0117	0.0046	0.8588	0.0074
45(2)	3.0293		0.0151	0.0051	0.0212	0.0125	0.0049	0.9216	0.0075
45(3)	2.8825		0.0187	0.0046	0.0183	0.0114	0.0048	0.9038	0.0074
45(4)	2.8844		0.0114	0.0059	0.0187	0.0119	0.0046	0.8807	0.0069
45(5)	2.9334		0.0119	0.0058	0.0198	0.0126	0.0046	0.8568	0.0074
45(6)	2.9000		0.0205	0.0052	0.0187	0.0120	0.0045	0.8396	0.0069
50(1)	3.1489		0.0227	0.0060	0.0194	0.0126	0.0052	0.8685	0.0081
50(2)	3.1659		0.0224	0.0054	0.0200	0.0121	0.0045	0.8567	0.0073
50(3)	2.9591		0.0203	0.0055	0.0195	0.0114	0.0032	0.8164	0.0063
50(4)	3.1789		0.0221	0.0066	0.0199	0.0126	0.0052	0.8451	0.0074
50(6)	3.1600		0.0196	0.0054	0.0196	0.0115	0.0050	0.8156	0.0074
55(1)	3.1785		0.0223	0.0056	0.0195	0.0126	0.0051	0.9656	0.0072
55(2)	3.3239		0.0238	0.0073	0.0215	0.0127	0.0053	0.9066	0.0073
55(3)	3.3599		0.0233	0.0070	0.0190	0.0117	0.0051	1.0310	0.0086
55(4)	3.3784		0.0238	0.0069	0.0221	0.0122	0.0055	0.9719	0.0084
55(5)	3.3591		0.0263	0.0062	0.0206	0.0127	0.0053	0.9931	0.0078
55(6)	3.3645		0.0206	0.0055	0.0197	0.0117	0.0048	0.9625	0.0078
60(1)	3.4853		0.0254	0.0046	0.0199	0.0113	0.0046	0.9740	0.0056
60(2)	3.5070		0.0243	0.0077	0.0214	0.0134	0.0048	0.8156	0.0077
60(3)	3.5599		0.0215	0.0065	0.0210	0.0114	0.0051	0.8773	0.0083
60(4)	3.5363		0.0258	0.0072	0.0242	0.0136	0.0048	1.0492	0.0085
60(5)	3.4947		0.0268	0.0080	0.0223	0.0133	0.0049	0.9852	0.0087
60(6)	3.4454		0.0212	0.0064	0.0189	0.0134	0.0047	0.8779	0.0081

三、探討多鹽溶液撞擊純水液面之各種定性觀察

表十二、多鹽溶液撞擊純水液面之各種定性觀察

	水滴落水 前速度 v(m/s)	滯留水滴 最大水柱 高(m)	水柱寬 (m)	水漚寬 (m)	水漚深 (m)	水株直徑 (m)	噴射水滴 水柱速度 (m/s)
10(1)	1.42145		0.0063	0.0131	0.0087	0.00439	0.80179
10(2)	1.35082		0.0053	0.0127	0.0082	0.00494	0.86333

10(3)	1.33928		0.0068	0.0139	0.0087	0.00645	0.85859
10(4)	1.34447		0.0067	0.0122	0.0074	0.00436	0.89907
10(5)	1.39680		0.0056	0.0134	0.0075	0.00473	0.75661
10(6)	1.36579		0.0130	0.0130	0.0086	0.00512	0.94728
15(1)	1.69869		0.0080	0.0139	0.0088	0.00379	0.92582
15(2)	1.64293		0.0054	0.0112	0.0053	0.00468	0.99033
15(3)	1.64405		0.0064	0.0143	0.0076	0.00437	1.06430
15(4)	1.65290		0.0076	0.0160	0.0098	0.00501	0.97709
15(5)	1.70984		0.0052	0.0140	0.0085	0.00484	0.93084
15(6)	1.65935		0.0077	0.0203	0.0128	0.00540	0.96037
20(1)	1.81041		0.0103	0.0153	0.0085	0.00457	1.03984
20(2)	2.04766	0.033	0.0080	0.0160	0.0086	0.00463	
20(4)	2.04051		0.0081	0.0170	0.0096	0.00485	
20(5)	1.99062		0.0060	0.0161	0.0097	0.00382	
20(6)	2.01045	0.032	0.0069	0.0170	0.0087	0.00392	
25(1)	2.28172	0.032	0.0034	0.0167	0.0088	0.00444	
25(2)	2.00209	0.029	0.0073	0.0164	0.0097	0.0044	
25(3)	2.12346	0.030	0.0081	0.0151	0.0101	0.00494	
25(4)	2.14189	0.027	0.0103	0.0168	0.0102	0.00427	
25(5)	2.03123	0.030	0.0043	0.0167	0.0094	0.00492	
25(6)	2.10280	0.031	0.0091	0.0168	0.0104	0.00452	
30(1)	2.54474	0.027	0.0054	0.0182	0.0096	0.00421	
30(4)	2.47804	0.034	0.0185	0.0093	0.0093	0.00402	
30(5)	2.34828	0.034	0.0075	0.0166	0.0102	0.00424	
30(6)	2.64519	0.033	0.0075	0.0183	0.0106	0.00551	
35(1)	2.84710	0.036	0.0031	0.0204	0.0109	0.00365	
35(2)		0.036	0.0088	0.0183	0.0096	0.00430	
35(3)	2.69455	0.034	0.0080	0.0177	0.0106	0.00437	
35(4)	2.55835	0.036	0.0055	0.0190	0.0113	0.00453	
35(5)	2.60923	0.034	0.0087	0.0185	0.0104	0.00418	
40(1)	2.84175	0.033	0.0095	0.0205	0.0106	0.00394	
40(2)	2.77131	0.034	0.0089	0.0193	0.0108	0.00413	
40(3)	2.81948	0.033	0.0093	0.0195	0.0115	0.00449	
40(4)	2.82006	0.034	0.0086	0.0201	0.0115	0.00431	
40(5)	2.85153	0.037	0.0083	0.0196	0.0121	0.00397	
40(6)	2.74397	0.032	0.0099	0.0182	0.0108	0.00434	
45(1)	2.87749	0.037	0.0070	0.0198	0.0104	0.00452	
45(2)	2.77137		0.0091	0.0205	0.0106	0.00386	
45(3)	2.79909	0.035	0.0074	0.0189	0.0121	0.00460	
45(4)	3.14118	0.038	0.0091	0.0210	0.0107	0.00468	

45(5)	3.02507	0.035	0.0097	0.0212	0.0106	0.00476	
45(6)	2.83648	0.034	0.0048	0.0198	0.0118	0.00416	
50(1)	3.13553	0.005	0.0088	0.0197	0.0113	0.00411	
50(2)	3.05105	0.033	0.0104	0.0208	0.0122	0.00410	
50(3)	2.98211	0.033	0.0051	0.0202	0.0121	0.00472	
50(4)	3.03265	0.005	0.0030	0.0207	0.0121	0.00474	
50(5)	3.00040		0.0103	0.0198	0.0114	0.00486	
50(6)	3.11125	0.035	0.0033	0.0207	0.0112	0.00419	
55(1)	3.15373	0.032	0.0035	0.0188	0.0123	0.00430	
55(2)	3.26872	0.034	0.0084	0.0217	0.0123	0.00502	
55(3)	3.14768	0.031	0.0081	0.0199	0.0121	0.00426	
55(4)	3.27392	0.035	0.0035	0.0195	0.0099	0.00346	
55(5)	3.24674	0.035	0.0080	0.0197	0.0121	0.00410	
55(6)	3.43352	0.035	0.0066	0.0208	0.0124	0.00651	
60(1)	3.45161	0.034	0.0077	0.0205	0.0111	0.00374	
60(2)	3.10272	0.036	0.0097	0.0212	0.0121	0.00476	
60(3)	3.45473	0.038	0.0085	0.0210	0.0115	0.00479	
60(4)	3.20672	0.035	0.0030	0.0190	0.0103	0.00409	
60(5)	3.41472	0.035	0.0066	0.0204	0.0122	0.00413	

四、探討少鹽溶液撞擊純水液面之各種定性觀察

表十三、少鹽溶液撞擊純水液面之各種定性觀察

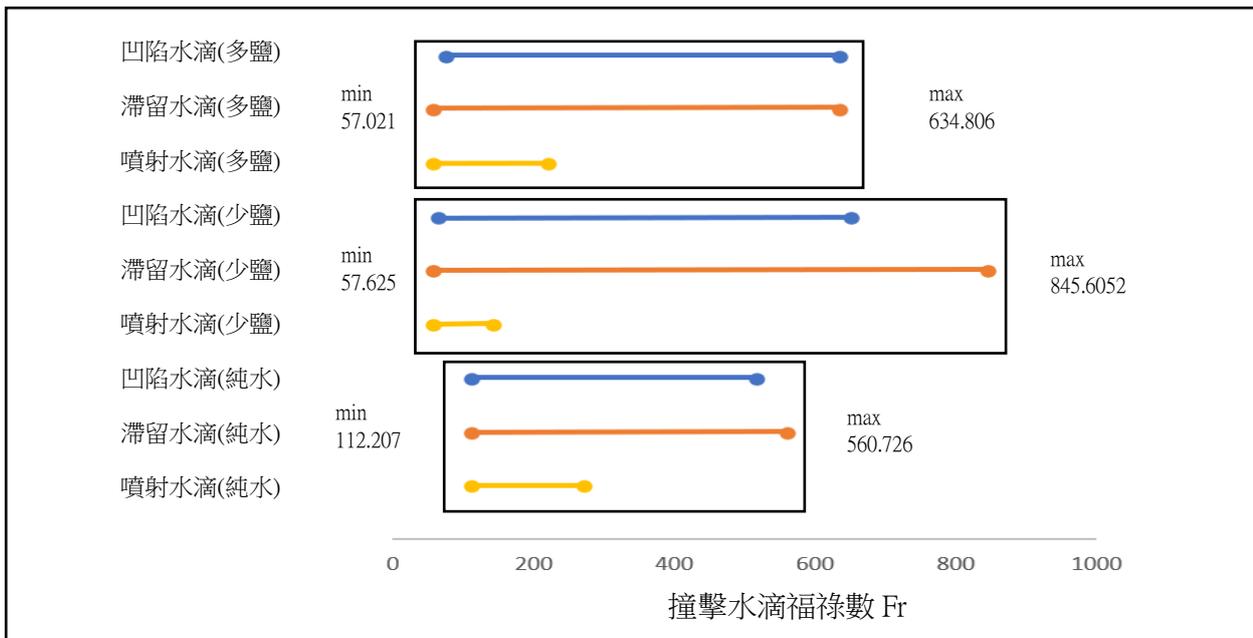
	液滴落水 前速度 $v(m/s)$	滯留水滴 最大水柱 高(m)	水柱寬 (m)	水漥寬 (m)	水漥深 (m)	水株直徑 (m)	噴射水滴 水柱速度 (m/s)
10(1)	1.38125		0.0061	0.0132	0.00861	0.00485	0.84086
10(2)	1.33222		0.0033	0.0121	0.00913	0.00473	0.88407
10(3)	1.32637		0.0068	0.0130	0.00833	0.00563	0.85003
10(4)	1.36141		0.0065	0.0122	0.00849	0.00503	0.91042
10(5)	1.10651		0.0052	0.0129	0.00821	0.00435	0.86931
10(6)	1.33496		0.0056	0.0136	0.00856	0.00517	0.91533
15(1)	1.66285		0.0081	0.0143	0.00978	0.00441	1.08668
15(2)	1.03420		0.0042	0.0147	0.00946	0.00428	1.03994
15(3)	1.61171		0.0062	0.0148	0.00824	0.00492	1.06886
15(4)	1.67564		0.0064	0.0148	0.00874	0.00433	1.16647
15(5)	1.54530		0.0053	0.0145	0.00864	0.00440	0.93617
15(6)	1.61050		0.0071	0.0144	0.00987	0.00505	1.07554
20(1)	1.72928		0.0062	0.0156	0.00881	0.00532	1.00146
20(2)	1.54875		0.0066	0.0155	0.00889	0.00432	1.05896
20(3)	1.83174		0.0075	0.0156	0.01563	0.00482	1.10835
20(4)	1.84521		0.0094	0.0184	0.01040	0.00545	1.01696
20(5)	1.60010		0.0054	0.0157	0.00841	0.00417	1.11162
20(6)	1.83174		0.0075	0.0156	0.01563	0.00482	
25(1)	2.23637	0.0332	0.0061	0.0160	0.00981	0.00470	
25(2)	2.22012	0.0362	0.0070	0.0177	0.00954	0.00473	

25(3)	2.13417	0.0367	0.0024	0.0166	0.01025	0.00452	
25(4)	2.17568	0.0342	0.0053	0.0172	0.00987	0.00457	
25(5)	2.17431	0.0360	0.0069	0.0180	0.01000	0.00416	
25(6)	2.10170	0.0376	0.0078	0.0160	0.00944	0.00478	
30(1)	2.49494	0.0350	0.0047	0.0161	0.00973	0.00420	
30(2)	2.46733	0.0327	0.0064	0.0170	0.01060	0.00386	
30(3)	2.38214	0.0332	0.0062	0.0160	0.01005	0.00460	
30(4)	2.66807	0.0354	0.0066	0.0180	0.00997	0.00426	
30(5)	2.47105	0.0335	0.0083	0.0177	0.00946	0.00400	
30(6)	2.36956		0.0047	0.0159	0.01019	0.00442	
35(1)	2.57575	0.0372	0.0100	0.0192	0.01020	0.00415	
35(2)	2.54753	0.0357	0.0094	0.0170	0.00994	0.00386	
35(3)	2.54579	0.0334	0.0044	0.0180	0.01071	0.00443	
35(4)	2.61118	0.0356	0.0080	0.0190	0.00953	0.00426	
35(5)	2.53247	0.0358	0.0046	0.0185	0.01068	0.00501	
35(6)	2.51506	0.0324	0.0085	0.0182	0.01154	0.00473	
40(1)	2.54503	0.0321	0.0102	0.0171	0.00874	0.00324	
40(2)	2.65716	0.0364	0.0068	0.0192	0.01034	0.00386	
40(3)	2.66880	0.0343	0.0035	0.0188	0.01055	0.00396	
40(4)	1.79498	0.0351	0.0116	0.0191	0.01040	0.00367	
40(5)	2.72092	0.0355	0.0058	0.0186	0.01100	0.00473	
40(6)	2.73546	0.0354	0.0063	0.0180	0.01095	0.00522	
45(1)	2.93358	0.0321	0.0112	0.0192	0.00972	0.00424	
45(2)	2.88699	0.0325	0.0090	0.0192	0.01069	0.00464	
45(3)	2.93120	0.0334	0.0091	0.0182	0.00869	0.00434	
45(5)	2.85568	0.0342	0.0076	0.0209	0.01067	0.00433	
55(1)	3.22346	0.0318	0.0079	0.0210	0.01160	0.00417	
55(2)	3.37985	0.0328	0.0082	0.0210	0.01112	0.00440	
55(3)	3.09492	0.0332	0.0078	0.0195	0.00896	0.00379	
60(1)	3.56909	0.0315	0.0063	0.0223	0.01250	0.00394	
60(2)	3.59723		0.0069	0.0222	0.01270	0.00381	
60(3)	3.38932	0.0331	0.0063	0.0196	0.01253	0.00381	
60(4)	3.63953	0.0335	0.0074	0.0217	0.01330	0.00321	
60(5)	3.49917	0.0331	0.0057	0.0229	0.01163	0.00385	
60(6)	3.44536	0.0335	0.0061	0.0202	0.01172	0.00445	

伍、討論

一、探討撞擊水滴福祿數與分離水滴形態的定性關係

根據試作實驗觀察到了三種水滴分離型態，我們先定性觀察各種撞擊速度下，有無相對應的水滴出現，並記錄如圖十，圖中所示框框即為該實驗福祿數範圍。舉例來說：純水的實驗範圍為福祿數 112.207~560.726，其中低福祿數 ($Fr=150$) 時，三種水滴皆有；而高福祿數 ($Fr=400$) 時，僅有滯留水滴及凹陷水滴。



圖十、撞擊水滴福祿數與分離水滴型態關係圖

從圖十可觀察到在三種溶液中皆有類似的趨勢。其一為噴射水滴，僅在撞擊速度低時出現；滯留水滴出現範圍最大，幾乎涵蓋所有撞擊條件；而凹陷水滴出現範圍與滯留水滴相近，也近於涵蓋所有撞擊條件。

二、水滴變為水窪之過程

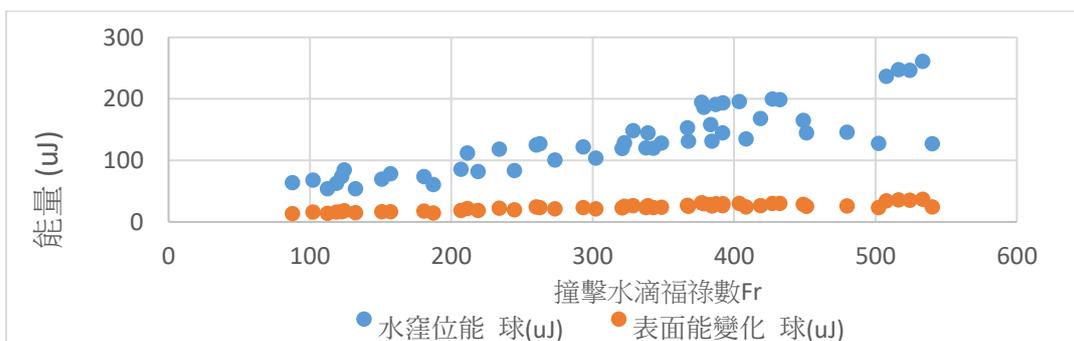
根據實驗原理(四)所提及之理論公式，可以由水滴半徑及撞擊速度推斷形成之水窪深，而公式中進行了三個假設包含：不考慮表面張力之影響、水窪為球形、過程無能量耗損。我們為確保其假設之正確性，進行以下了以下驗證。

(一) 考慮表面張力之影響

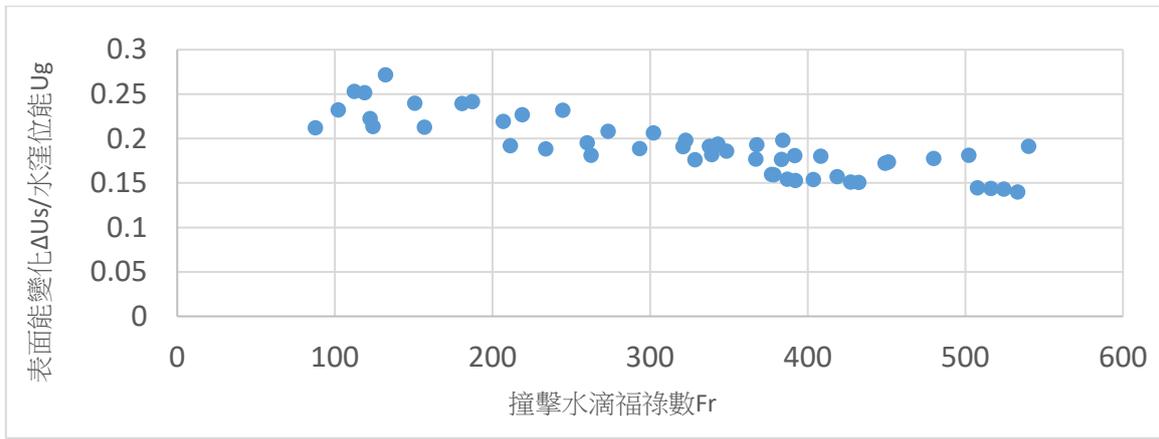
為確保表面張力是否如論文所說可以完全忽略，我們繪製了重力位能 U_g 與表面位能變化 ΔU_s 之比較圖，如圖十一、圖十二。其中：

$$U_g = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R_{max}^3 \rho_{水} \right) g \left(\frac{3}{8} R_{max} \right) \dots \text{式(3)}$$

$$\Delta U_s = 2\pi\sigma_{水} R_{max}^2 - \left(4\pi d^2 \sigma_{水} + \pi R_{max}^2 \sigma_{水} \right) \dots \text{式(4)}$$



圖十一、重力位能與表面能變化比較圖

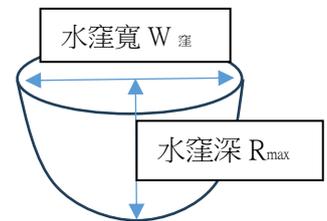


圖十二、重力位能與表面位能之比較圖

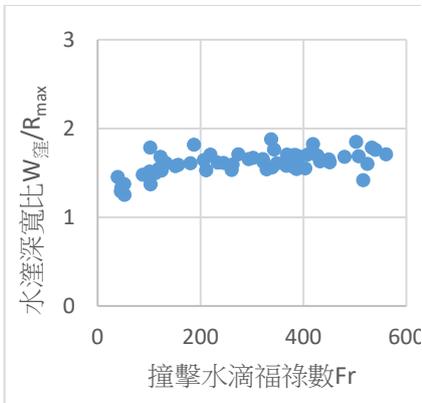
由圖十一、圖十二可知雖比起重力位能，表面位能較小，但在整體能量中還是佔有一定的影響比例，其表面能變化約略為重力位能的 0.1~0.3 倍，因此我們認為表面位能不可忽略。

(二) 水窪並非球形

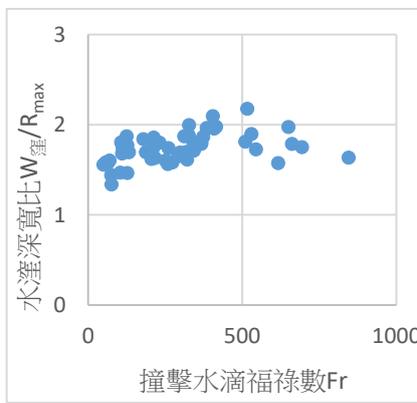
經過實際實驗，我們觀察到水窪形狀近似於橢球，如圖十三，與論文假設之球形相差甚遠，因此繪製水窪長寬比和福祿數之關係圖以觀察其形狀，如下圖十四、圖十五、圖十六。



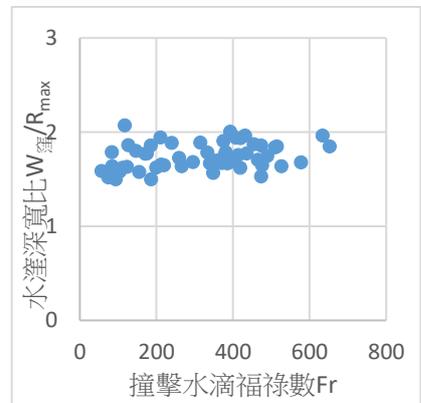
圖十三、水窪形狀



圖十四、純水之水窪深與福祿數關係圖



圖十五、少鹽之水窪深與福祿數關係圖



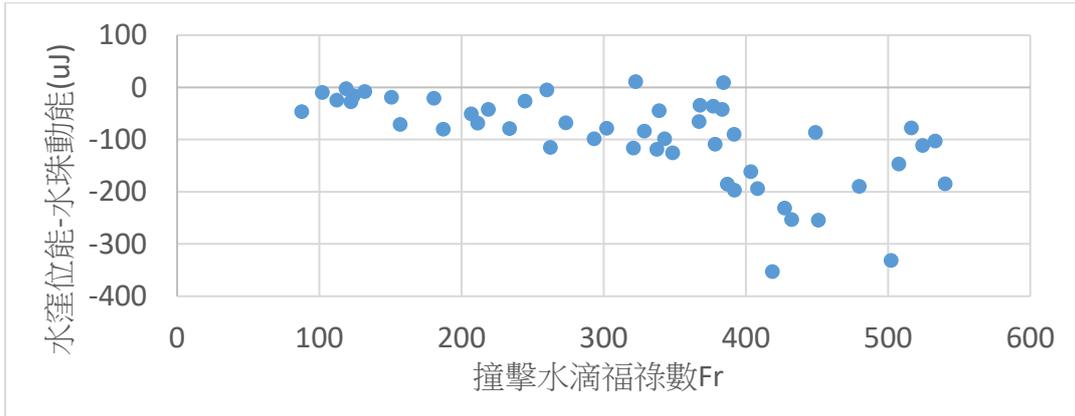
圖十六、多鹽之水窪深與福祿數關係圖

由以上三圖可觀察到，不管撞擊速度如何所形成之水窪寬深比皆相近，其形狀示意圖如圖十三，且寬約為深之 1.5 倍，可知與先前理論公式假設之半球型（寬深比為 2）相差極大。

(三) 過程中有能量耗損

由於實際實驗中必存在許多不可量測之能量耗損，故我們計算出水滴入水形

成水窪之能量耗損比例，並繪出其與福祿數之關係圖，如下圖十七，以驗證其實驗中具有能量耗損，而非如論文公式中之假設。



圖十七、能量耗損圖

由圖十七中可看出此實驗確實具有能量耗損，數量級與總能量相近，不可忽略。且大致隨著撞擊速度的增加，能量耗損逐漸增加。

根據以上三點的驗證，我們將原先的理論公式進行了修正：

1. 公式修正：將表面位能納入討論

有表面張力時，水滴撞擊時的初動能與初表面能，轉換為水窪重力位能與末表面能。故可列式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi d^3 \rho_{\text{水}} \right) v^2 + \left(4\pi d^2 \sigma_{\text{水}} + \pi R_{\text{max}}^2 \sigma_{\text{水}} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R_{\text{max}}^3 \rho_{\text{水}} \right) g \left(\frac{3}{8} R_{\text{max}} \right) + \frac{1}{2} \left(4\pi R_{\text{max}}^2 \right) \sigma_{\text{水}} \end{aligned}$$

$$\text{整理得：} R_{\text{max}} = \sqrt{-\frac{2}{g} \left(\frac{\sigma_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}} \right) + \sqrt{\left[\frac{2}{g} \left(\frac{\sigma_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}} \right) \right]^2 + \frac{8}{3g} \left(d^3 v^2 \right)^4 + \frac{16}{g} \left(\frac{\sigma_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}} \right) d^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{標準化水窪深度} \quad \frac{R_{\text{max}}}{d} &= \sqrt{-\frac{2\sigma_{\text{水}}}{g\rho_{\text{水}}d^2} + \sqrt{\left(\frac{2\rho_{\text{水}}}{g\rho_{\text{水}}d^2} \right)^2 + \frac{8v^2}{3gd} + \frac{16\sigma_{\text{水}}^2}{g\rho_{\text{水}}d^2}}} \\ &= \sqrt{-\frac{2Fr}{We} + \sqrt{\left(\frac{2Fr}{We} \right)^2 + \frac{8}{3}Fr + \frac{16Fr}{We}}} \dots \text{式(5)} \end{aligned}$$

此公式中標準化水窪深度 R_{max} 開始與撞擊水滴韋伯數 We （即表面張力 σ ）有關，若 σ 極小，也就是 $We \approx \infty$ ，則公式退化為 $\frac{R_{\text{max}}}{d} = \left(\frac{8}{3} Fr \right)^{\frac{1}{4}}$ ，和論文相同。

2. 公式修正：將形狀納入討論

假設橢球在水平面上的兩個半徑皆是 αR_{max} 根據討論二(二)， α 約為0.75。由橢球的表面積的近似可列式[11]：

$$S = 2\pi \left(\frac{R_{max}^{2P} + \alpha^P R_{max}^P + \alpha^P R_{max}^P}{3} \right)^{\frac{1}{P}} = 2\pi R_{max}^2 \alpha \left(\frac{\alpha^P + 2}{3} \right)^{\frac{1}{P}} = 2\pi \beta R_{max}^2$$

其中 $P \approx 1.6075$ ， $\beta \equiv \left(\frac{\alpha^P + 2}{3} \right)^{1/P}$

於是考慮動能、重力位能和表面位能之公式可改寫為：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi d^3 \rho_{水} \right) v^2 + \sigma_{水} (4\pi d^2 + \pi \alpha^2 R_{max}^2) \\ & = \left(\frac{2}{3} \pi (\alpha R_{max})^2 R_{max} \rho_{水} \right) g \left(\frac{3}{8} R_{max} \right) + 2\pi \sigma_{水} \beta R_{max}^2 \end{aligned}$$

整理得：

$$R_{max} = \sqrt{-\frac{2}{g} \left(\frac{\sigma_{水}}{\rho_{水}} \right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1 \right) + \sqrt{\left[\frac{2}{g} \left(\frac{\sigma_{水}}{\rho_{水}} \right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1 \right) \right]^2 + \frac{8}{3g\alpha^2} \left(d^3 v^2 \right)^4 + \frac{16d^2}{g\alpha^2} \left(\frac{\sigma_{水}}{\rho_{水}} \right)}}$$

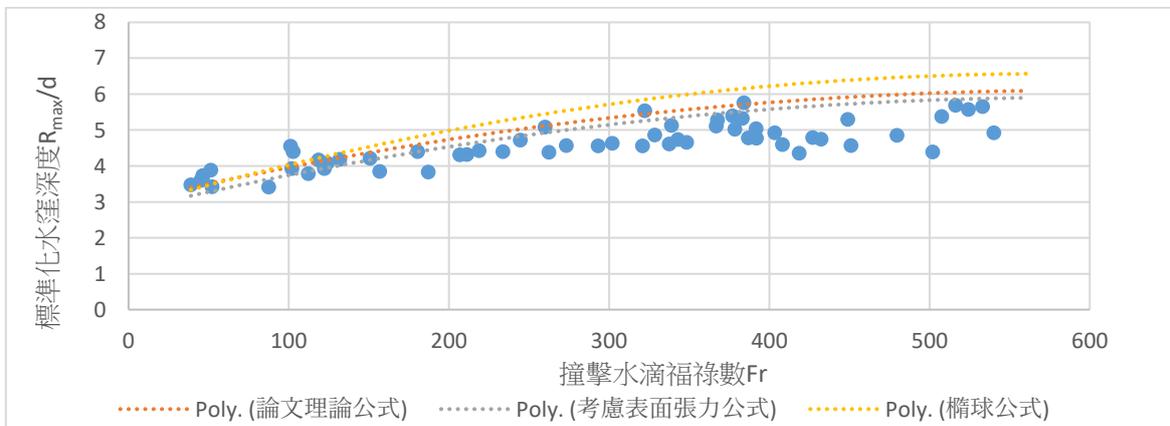
標準化水窪深度 $\frac{R_{max}}{d}$

$$= \sqrt{-\frac{2Fr}{We} \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1 \right) + \sqrt{\left[\left(\frac{2Fr}{We} \right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1 \right) \right]^2 + \frac{8}{3\alpha^2} Fr + \frac{16Fr}{\alpha^2 We}} \dots \text{式(6)}$$

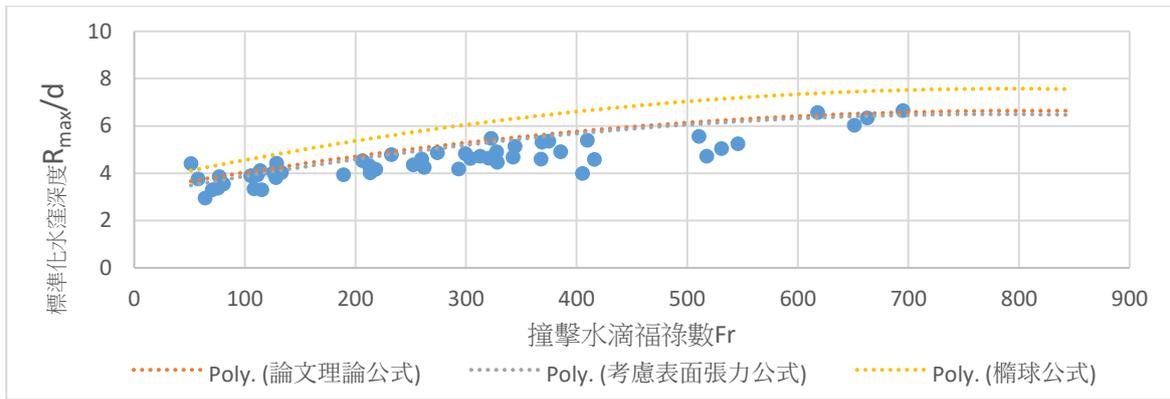
此公式與橢球形狀參數 α 和 β 有關，若水窪為正球型，也就是 $\alpha = \beta = 1$ ，則公式退化為：

$$\frac{R_{max}}{d} = \sqrt{-\frac{2Fr}{We} + \sqrt{\left(\frac{2Fr}{We} \right)^2 + \frac{8}{3} Fr + \frac{16Fr}{We}}} \quad \text{此結果和修正 1.相同。}$$

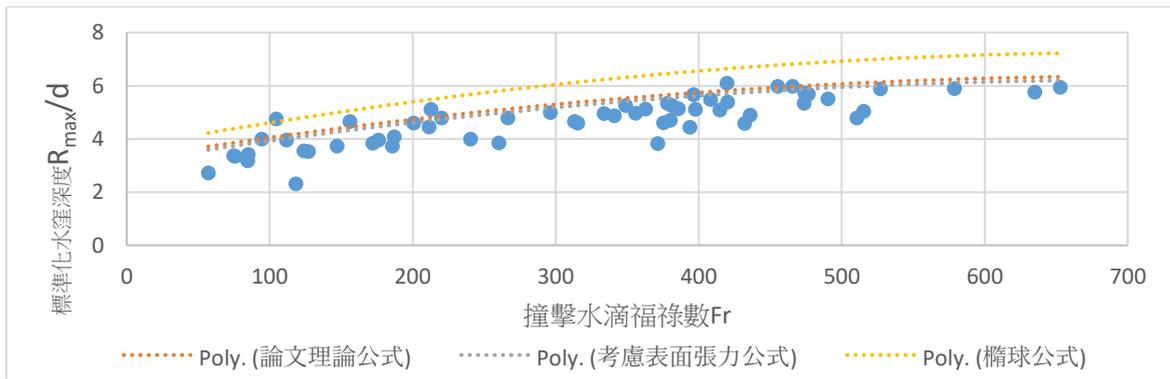
由上述兩點公式修正，我們分別畫出其未修正及修正後的理論水窪深之值，與實際實驗值做比較，如下圖十八、圖十九、圖二十。



圖十八、水之水窪深與福祿數關係圖



圖十九、少鹽之水窪深與福祿數關係圖



圖二十、多鹽之水窪深與福祿數關係圖

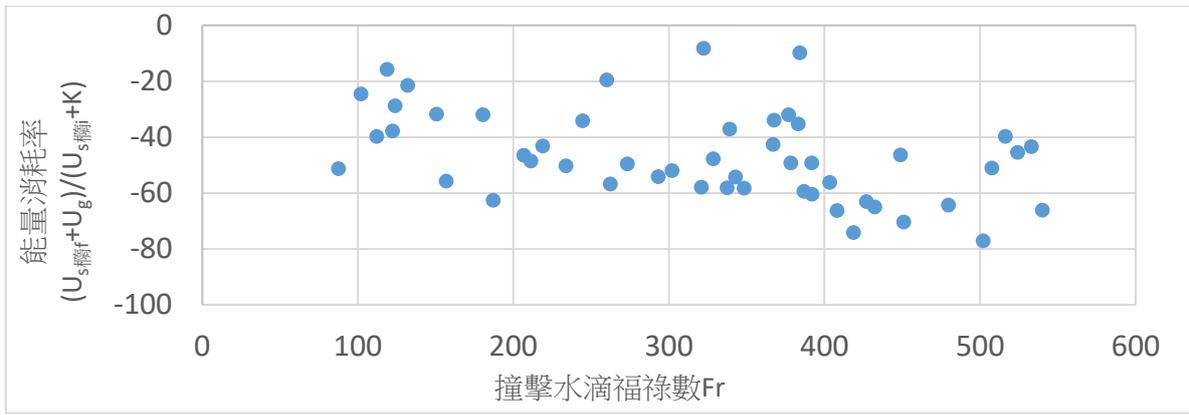
從以上三圖可觀察到，理論公式與實驗值中，撞擊水滴福祿數與標準化水窪深度皆呈正相關，與實驗趨勢相符。此外，所有理論深度較大於實驗值，這是由於實驗過程中的能量耗損使動能無法完全轉換為水窪位能。若以最終的橢球公式估算，我們畫出能量耗損率與撞擊水滴福祿數的關係圖（圖二十一），其中：

$$\text{重力位能 } U_{g\text{橢}} = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \pi R_{max} (\alpha R_{max})^2 \right] \sigma_{\text{水}} g \left(\frac{3}{8} R_{max} \right) = U_{g\text{球}} \alpha^2 \dots \text{式(7)}$$

$$\text{初表面能 } U_{s\text{橢}i} = (4\pi d^2) \sigma_{\text{水}} + \pi (\alpha R_{max})^2 \sigma_{\text{水}} \dots \text{式(8)}$$

$$\begin{aligned} \text{末表面能 } U_{s\text{橢}f} &= \frac{1}{2} \times 4\pi \left(\frac{R_{max}^{2P} + \alpha^P R_{max}^P + \alpha^P R_{max}^P}{3} \right)^{\frac{1}{P}} \sigma_{\text{水}} \\ &= 2\pi \beta R_{max}^2 \sigma_{\text{水}} \dots \text{式(9)} \end{aligned}$$

可看出能量耗損平均約在 50%，且撞擊速度愈快，能量損率愈大，與碰撞的經驗相符。



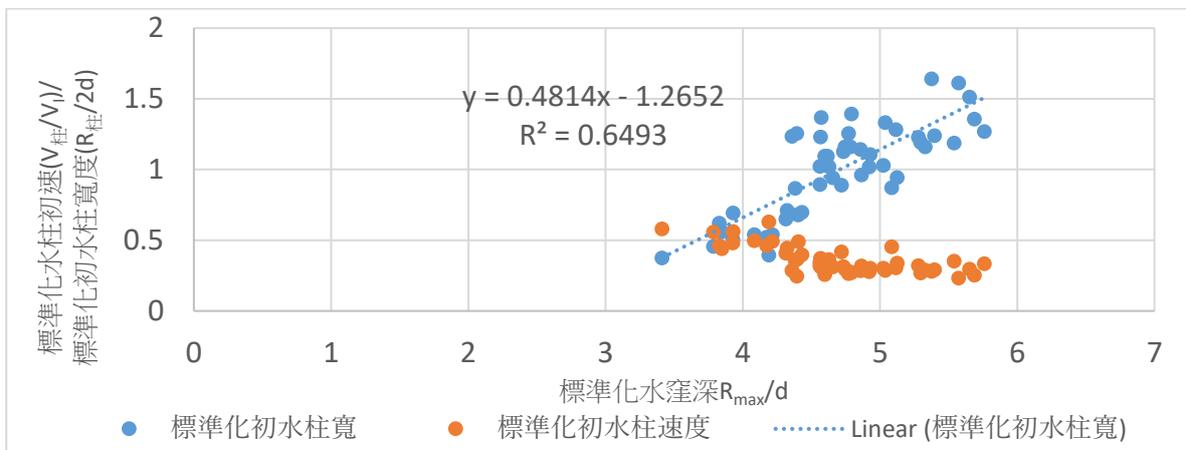
圖二十一、能量耗損率

三、水窪變為水柱之過程

經過實驗影片之分析，我們觀察到了不同撞擊速度下形成之水柱粗細不盡相同，於是進行了以下分析，以找出不同水柱形成條件。

(一) 水柱寬與水窪深之關係

我們推論水窪大小會轉換成水柱形成之能量，以水柱速度和水柱寬度等兩種形式表現。為確認三者間的關係，我們繪製了標準化水柱初速、標準化水柱初寬度和標準化水窪深度之間的關係圖，結果如下圖二十二。



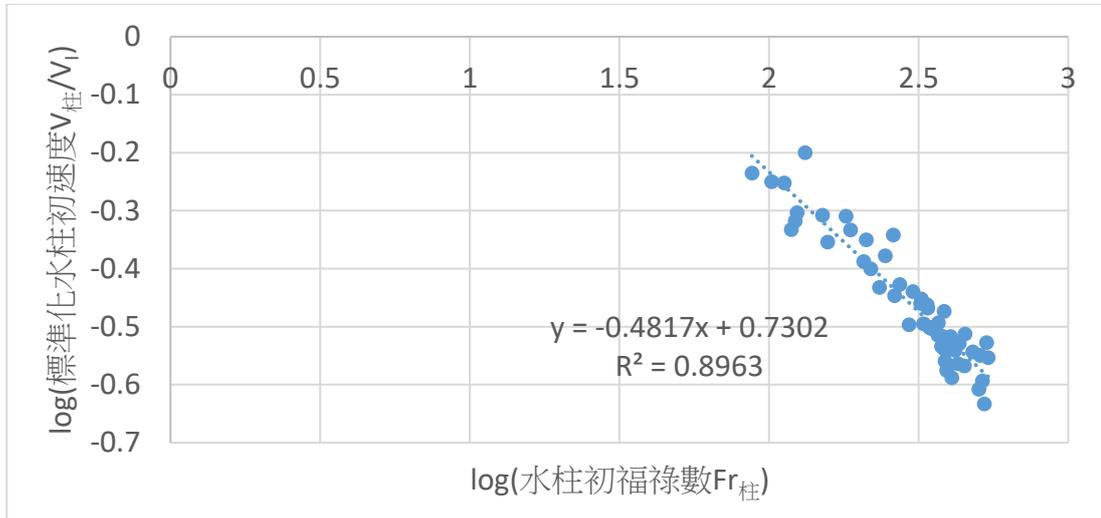
圖二十二、標準化水柱初速、寬度和標準化水窪深度關係圖

可看出當水窪深較大時，水柱初速度反而愈小，與直覺相違背。我們認為這是因為結構較大的水窪會形成較粗的水柱，在相近的水柱初動能下，噴射速率因此變慢。此外由於水柱寬度和水柱深度有明顯的線性關係，我們甚至可以預測，在水窪深度小於某個臨界長度時，可能不會有水柱生成，此預測也可以在《Jet dynamics post drop impact on a deep pool》中找到類似的描述。更進一步的，我們嘗試定量找出水柱初速和水柱寬度，相對於撞擊水滴福祿數的關係式。從圖二十三和圖二十四，可看出撞擊水滴福祿數對兩者皆有非常好的相關性， R^2 接近 0.9。

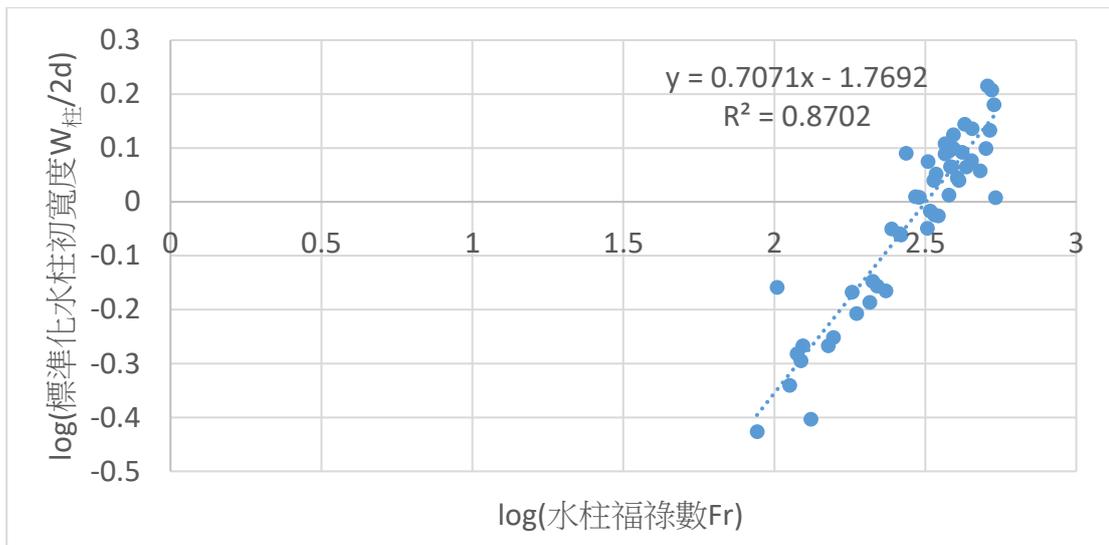
公式為：

$$\frac{v_{柱}}{v_l} \approx 5.37Fr^{-0.5} \dots \text{式(10)}、\frac{W_{柱}}{2d} \approx (1.70 \times 10^{-2})Fr^{0.7} \dots \text{式(11)}$$

因此，只要我們了解撞擊水滴的初始資訊 (d 、 V_l 、 Fr) 就可以非常好的預測噴射水柱的物理性質。



圖二十三、標準化水柱初速度與水柱福祿數關係圖



圖二十四、標準化水柱初寬度與水柱福祿數關係圖

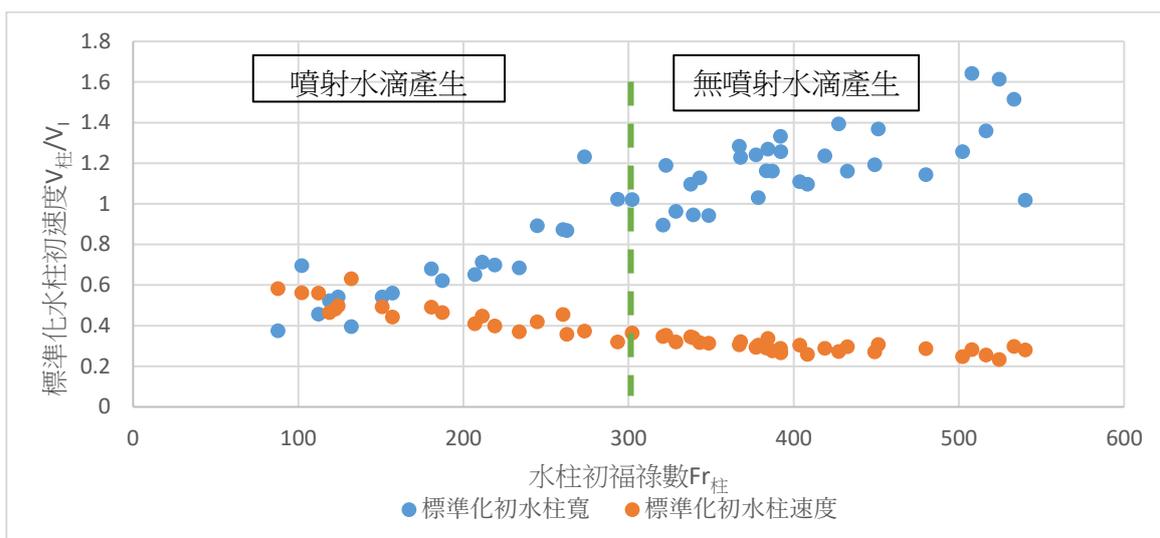
四、水柱與三種水滴之關係

在討論四中，我們將嘗試建立水滴斷裂機制的模型：

(一) 噴射水滴

在討論一中我們已發現：三者中唯有噴射水滴的斷裂條件是與福祿數明顯相關的，另外兩者則在大部分的撞擊條件下皆存在。我們推想是否尚在水柱階段時，其水柱形成時性質便已決定了噴射水滴能否形成，下圖二十五便是產生噴射水滴

和未產生噴射水滴之水柱速度分別與福祿數之關係圖。



圖二十五、標準化水柱初速度及標準化水柱初寬度與水柱福祿數之關係圖

由圖中可發現，產生噴射水滴之水柱初速度較快、寬度較小；反之不產生噴射水滴之水柱初速度較慢、寬度較大。對於噴射水滴由水柱斷裂成水滴之原因，我們提出了以下三種假說，如表十四所示以下分別進行驗證和探討：

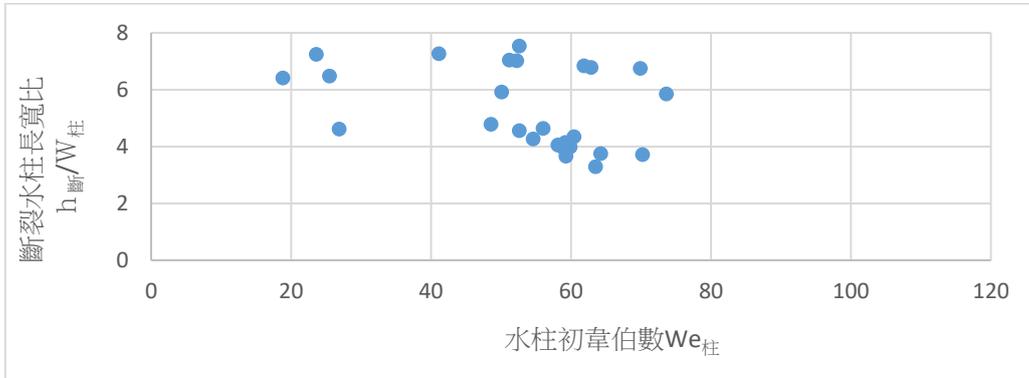
表十四、噴射水滴行程之假說

噴射水滴斷裂條件之假說	說明	預計驗證方式	備註
形狀決定	由於表面張力傾向將液體變為表面積最小的形狀，若圓柱體的高度和直徑比值超過某臨界數值，則會發生斷裂。	確認斷裂瞬間水柱高寬比是否為定值。	此想法曾在科展《「彈」何容易—水珠的反彈》中被短暫提及。
重量決定	水柱向上噴射的過程中，柱體質量也不斷增加，若水柱重量超過液體內聚力所能承受的極限則斷裂。	確認斷裂瞬間的總體積是否為定值。	
時間決定	水柱收縮到斷裂所需的時間完全由水柱寬度和流體性質所決定。若斷裂時間早於水柱抵達最高點的時間，則形成噴射水滴。	確認斷裂時間是否僅為水柱寬度（直徑）流體性質（ σ, ρ ）的函數。	此想法啟發自論文《Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool》

1. 假說一：形狀決定

由於先前推測水柱會於一定高度和直徑比值發生斷裂，因此我們測量水柱斷裂時的高以及寬，並計算其比例，如其比例固定則假說成立。

水柱長寬比 = $\frac{h_{斷}}{W_{斷}}$ ，其中 $W_{斷}$ 為斷裂水柱寬。



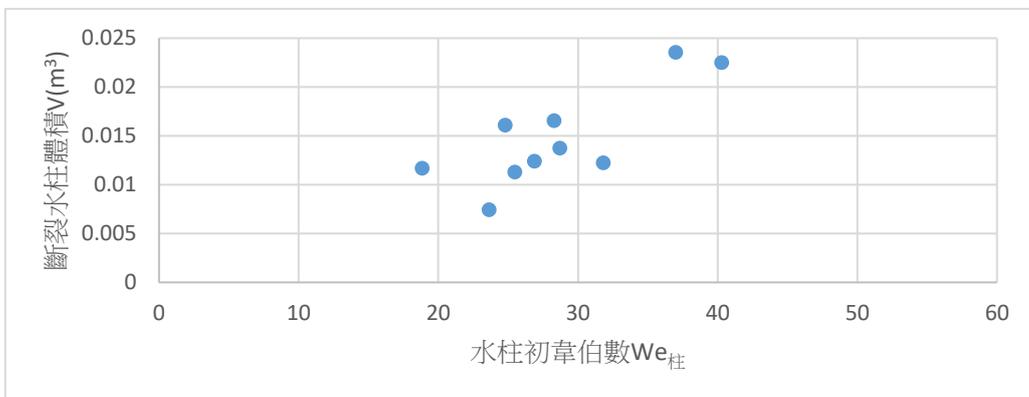
圖二十六、斷裂時水柱長寬比與水柱初韋伯數關係圖

根據此圖，我們推測水柱斷裂時長寬比並非影響噴射水滴形成之變因。

2. 假說二：重量決定

因水柱體積與密度的乘積為水柱質量，又質量與重量成正比，因此我們透過測量水柱體積來驗證假說二。

$$\text{標準化斷裂體積公式 } V = \left(\frac{W_{柱}}{2}\right)^2 \pi h_{斷}$$



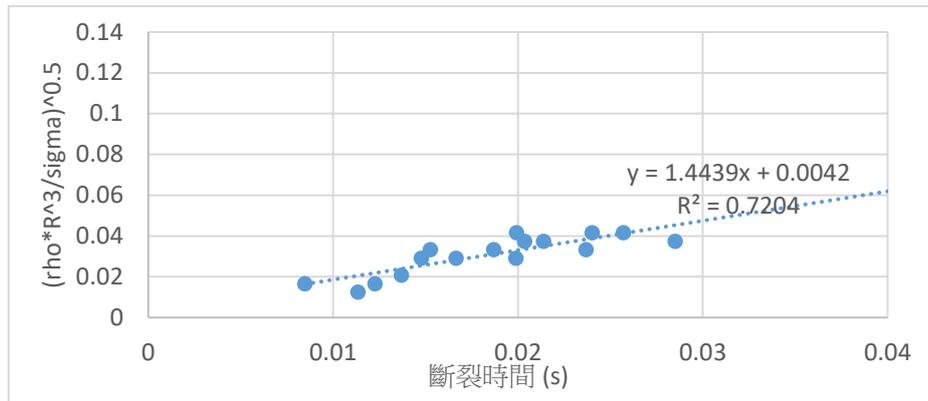
圖二十七、標準化斷裂水柱體積與水柱初韋伯數之關係圖

由圖中可看出斷裂時水柱體積隨著福祿數升高並無明顯趨勢，因此噴水滴的成因與我們假說不相符。

3. 假說三：時間決定

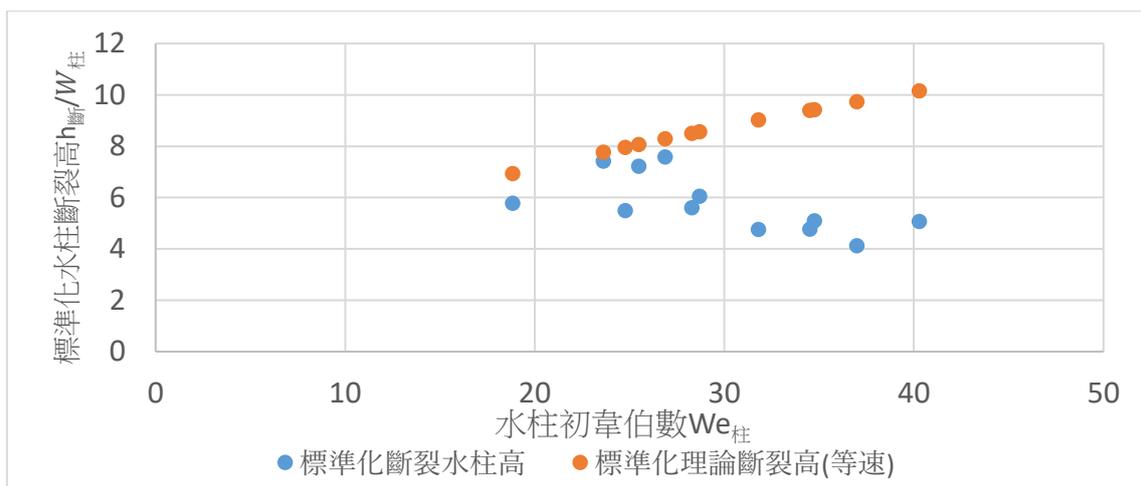
若水柱斷裂時間僅與水柱寬度、表面張力係數、液體密度相關而與鉛直方向的速度和重力無關，我們可以利用因次分析法整理出 $T \propto \sqrt{\frac{\rho W_{柱}^3}{\sigma}}$ ，此關係與論文《Generation and Breakup of Worthington Jets After Cavity Collapse.》

所提及之理論相符。因此，我們繪製斷裂時間 $T_{斷}$ 與 $\sqrt{\frac{\rho W_{柱}^3}{\sigma}}$ 之關係圖，確認是否為正比關係。



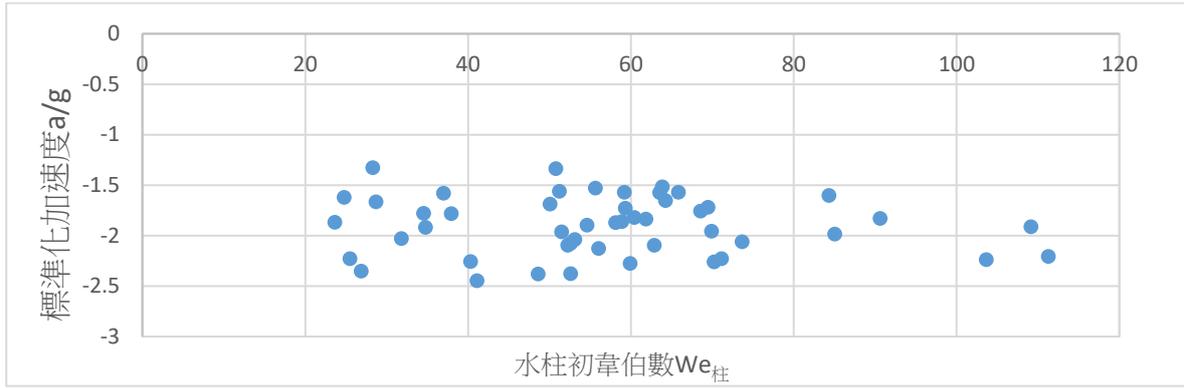
圖二十八、斷裂時間分析圖

由上圖可知， $T_{斷}$ 的確正比於 $\sqrt{\frac{\rho W_{柱}^3}{\sigma}}$ ，且可順利找出兩者間的比例常數，得到公式： $T_{斷} = 1.44 \sqrt{\frac{\rho W_{柱}^3}{\sigma}}$ 。而同篇論文中，述及水柱的運動為等速度運動，並以此基礎下及前述時間公式討論斷裂機制。若水柱為等速度運動，斷裂高度應為： $\frac{h_{斷}}{W_{柱}} = \frac{v_{柱} T_{斷}}{W_{柱}} = 1.44 \sqrt{\frac{\rho v_{柱} W_{柱}^3}{\sigma}} = 1.44 \sqrt{We_{柱}}$...式(12)，在此公式中，斷裂高度僅與水柱初韋伯數有關，我們試若將此理論公式與真實實驗數據做比較，如圖二十七。



圖二十九、理論的標準化水柱斷裂高（等速）對實驗標準化水柱斷裂高之關係圖

由圖中觀察出實際高度皆低於理論高度，我們推測這是因為水柱運動為加速度運動。我們利用 Tracker 量測了水柱上升過程的初加速度，發現在各種水柱韋伯數下，加速度皆大致為定值 $\frac{a}{g} \approx 2$...式(13)

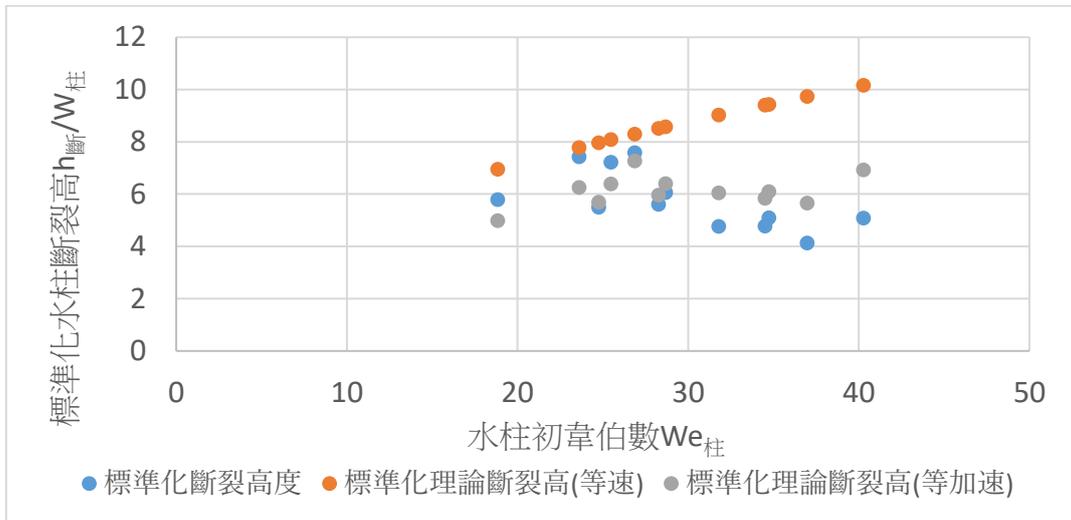


圖三十、標準化水柱加速度與韋伯數關係圖

若水柱上升的過程可視為等加速度運動，則公式應修正為：

$$\frac{h_{斷}}{W_{柱}} = \frac{v_0 T_{斷}}{W_{柱}} - \frac{a T_{斷}^2}{2W_{柱}} = 1.44 \sqrt{\frac{\rho v_0 W_{柱}^3}{\sigma}} - 1.44^2 \times \frac{\rho W_{柱}^2 g}{\sigma} = 1.44 \sqrt{We_{柱}} - \frac{We_{柱}}{Fr_{柱}} \times 1.44^2 \dots \text{式(14)}$$

比較此公式和實驗數據，可發現兩者吻合度非常高，明顯比論文中的等速運動更好，如下圖三十一。



圖三十一、以等加速度運動預測水柱斷裂高與實際實驗比較圖

由式(10)及式(11)我們可找出水滴初福祿數 $Fr_{柱}$ 與水柱初韋伯數 $We_{柱}$ 和

撞擊水滴福祿數 Fr 與水滴韋伯數 We 之間的關係如下：

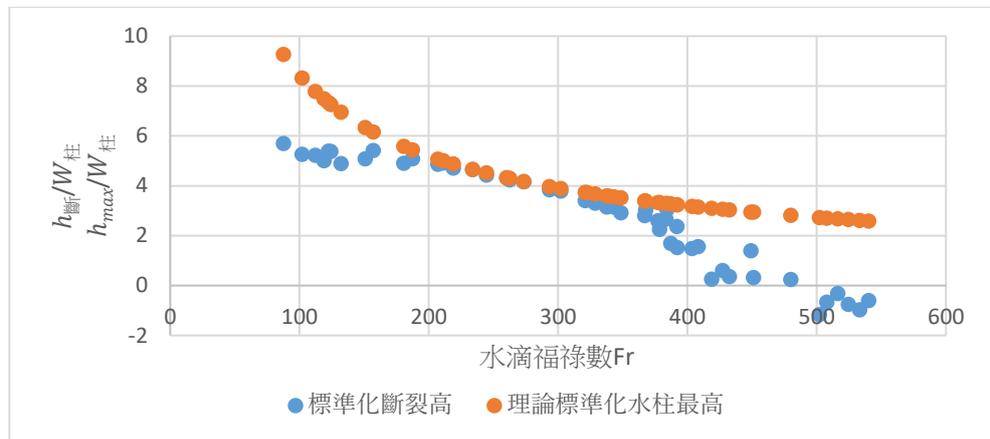
$$\frac{We_{柱}}{We} = \left(\frac{v_{柱}}{v_l}\right)^2 \left(\frac{W_{柱}}{2d}\right) \times 2 \dots \text{式(16)}$$

$$\frac{Fr_{柱}}{Fr} = \left(\frac{v_{柱}}{v_l}\right)^2 \left(\frac{2d}{W_{柱}}\right) \times \frac{1}{2} \dots \text{式(17)}$$

將此二式帶入式(15)中便可得出標準化斷裂高度與標準化理論最大高度，並找出兩者與水滴韋伯數的關係，如下圖。

$$\text{標準化斷裂高 } \frac{h_{\text{斷}}}{W_{\text{柱}}} = 1.44 \sqrt{We_{\text{柱}}} - \frac{We_{\text{柱}}}{Fr_{\text{柱}}} \times 1.44^2 \dots \text{式(18)}$$

$$\text{標準化理論最大高度 } \frac{h_{\text{max}}}{W_{\text{柱}}} = \frac{v_{\text{柱}}^2}{2aW_{\text{柱}}} = \frac{Fr_{\text{柱}}}{4} \dots \text{式(19)}$$



圖三十二、標準化斷裂高度與標準化理論最大高度關係圖

由圖可知，當撞擊水滴福祿數小於 200，斷裂高度小於最大高度，推測會形成噴射水滴。對照討論一當中的圖，可以發現我們的實驗與算出的理論值相符，噴射水滴僅在福祿數約 200 以前出現。因此，只要知道水柱韋伯數與水柱福祿數，我們便可將其帶入公式，預測水柱斷裂高與理論最大高度。由此得出結論，水柱預測斷裂高若小於最大水柱高，便會形成噴射水滴；反之水柱預測斷裂高若大於最大水柱高，便不會形成噴射水滴，

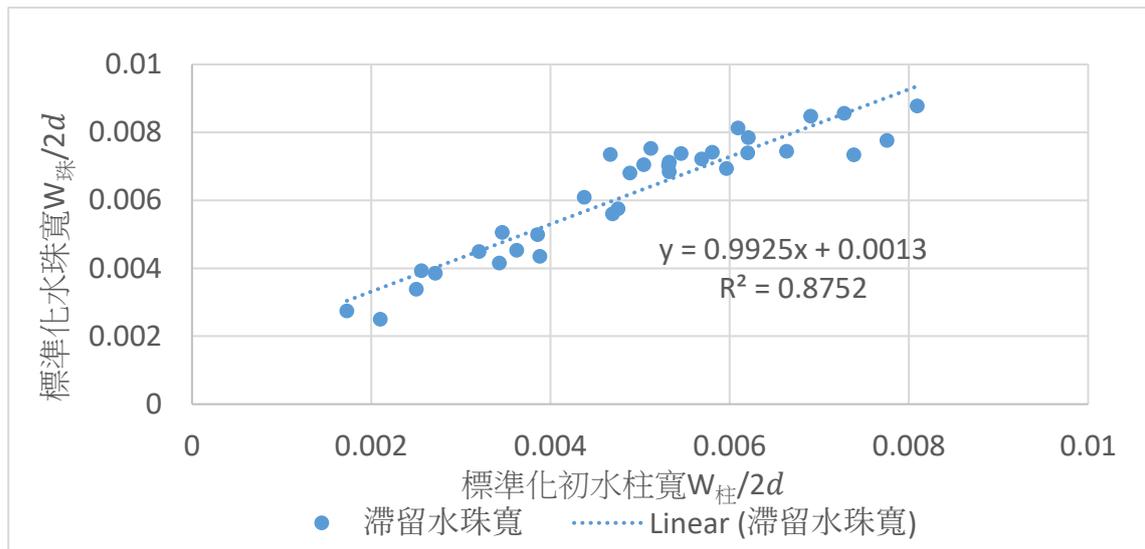
(二) 滯留水滴

表十五、不同水柱寬所形成之滯留水滴

滯留水滴 示意圖				
水柱寬 (cm)	0.3857	0.3881	0.4574	0.5283

若有產生噴射水滴，及上升過程中水柱就已斷裂，則水柱的能量會被噴射水

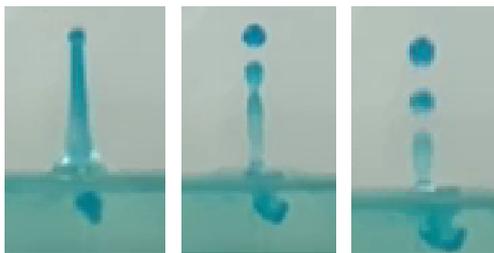
滴帶走，影響後續行為表現，故在滯留水滴和凹陷水滴的討論中，我們僅討論無產生噴射水滴的情況。水柱在上升過程中以等加速度運動上升，越接近水柱最高點處，速度越慢導致水量集中的越多，因此形成沖水膨大的滯留水珠。在過程中影響滯留水滴大小的有加速度大小和水柱寬度兩個因素，而由公式(14)可知大部分水柱的加速度皆大約是 $2g$ ，因此我們推測滯留水滴的大小僅由水柱粗細決定。故繪製滯留水滴寬與初水柱寬之關係圖，如圖三十三。



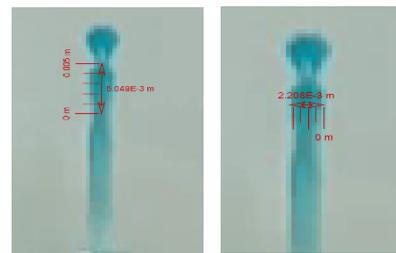
圖三十三、滯留水滴寬與水柱寬關係圖

由圖中可觀察到滯留水珠寬與出水柱寬呈明顯正比關係，當初水柱越寬時，滯留水珠寬度即愈大，符合我們的猜想，散佈圖中的截距我們推測是因為水柱形成過程會略為變粗，故初水柱寬會略小於最高水柱寬。

(三) 凹陷水滴



圖三十四、凹陷水滴示意圖十五



圖三十五、凹陷水滴斷裂間距量測

根據實驗中的觀察，我們推測凹陷水滴之形成與普拉托-瑞利不穩定性息息相關。當水柱由向上噴射轉為向回收縮時，會有一瞬間水柱速度為零，此時靜止水柱之液體表面張力會傾向最小化其表面積，因而使水柱斷裂形成凹陷水滴，而根據實驗原理(四)，在斷裂的過程中，水柱段與水珠應保持體積不變且表面積減少，推論其水柱斷長度應大於水柱半徑 $\frac{9}{2}$ 倍，水柱段長度大約是水柱半徑的 4.57 倍，

與推論相符。

陸、 結論

一、探討撞擊水滴速度與分離水滴型態的定性關係

- (一) 噴射水滴出現於撞擊速度小時，而滯留水滴與凹陷水滴出現範圍涵蓋幾乎所有撞擊速度。
- (二) 產生噴射水滴之水柱初速較大、寬度較小；反之不產生噴射水滴之水柱初速較小、寬度較大。

二、探討撞擊水滴速度與水窪形狀的量化關係

- (一) 水滴撞擊速度愈大，則形成水窪深愈大；反之水滴撞擊速度愈小，則形成水窪深愈小。
- (二) 水窪寬皆約為深之 1.5 倍，由此可知水窪形狀不因為撞擊速度而改變。
- (三) 以論文為基礎推導，其中因表面能約為重力位能之 0.1 倍(式 3)將其納入考慮，又因水窪深寬比並非 1 而將水窪視為橢球，修正出了更符合實驗的理論水窪深公

式：
$$\frac{R_{max}}{d} = \sqrt{-\frac{2Fr}{We} \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{2Fr}{We}\right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right)\right]^2 + \frac{8}{3\alpha^2} Fr + \frac{16Fr}{\alpha^2 We}}$$
。而形成水窪過程中能量耗損率約為 50%，因此實驗水窪深低於理論窪深。

三、探討撞擊水窪形狀與水柱性質的量化關係

- (一) 可從撞擊水滴的初始資訊水柱寬、水滴撞擊速度及水滴福祿數就可預測噴射水柱的寬度 $\frac{W_{柱}}{d} \approx (1.70 \times 10^{-2}) Fr^{0.7}$ 及速度 $\frac{v_{水柱初速}}{v_{撞擊速度}} \approx 5.37 Fr^{-0.5}$ 。
- (二) 水窪愈大則形成水柱速度愈小，水柱寬度愈大；水窪愈小則形成水柱速度愈大，水柱寬度愈小。

四、探討水柱性質與三種水滴斷裂機制的量化關係

- (一) 噴射水滴：水柱可視為加速度運動，由此推測出理論水柱斷裂高度 $\frac{h_{斷}}{W_{柱}} = 1.44 \sqrt{We_{柱} - \frac{We_{柱}}{Fr_{柱}}} \times 1.44^2$ 。預測之水柱斷裂高若小於最大水柱高，便會形成噴射水滴；反之水柱預測斷裂高若大於最大水柱高 $\frac{Fr_{柱}}{4}$ ，便不會形成噴射水滴。經計算，撞擊水滴 Fr 在 200 以下時，噴射水滴才會出現，與實驗結果相符。
- (二) 滯留水滴：滯留水滴大小僅與水柱寬度相關，因所有水柱為等加速度運動，且加速度皆接近兩倍重力加速度。因此，水柱寬度愈大則滯留水滴寬度愈大；

水柱寬度愈小則滯留水滴寬度愈小。

(三) 凹陷水滴：形成是源於普拉托-瑞利不穩定性，因靜止水柱傾向最小化其表面積，而分裂為水滴，經由推算可知水柱斷長度應大於水柱半徑 $\frac{9}{2}$ 倍，此符合我們實驗數據。

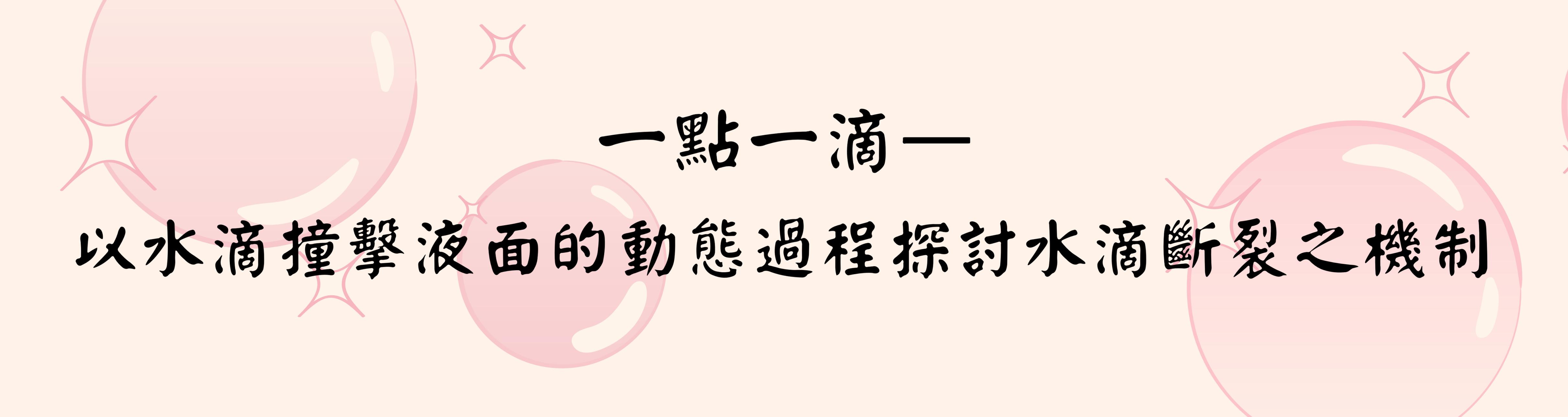
柒、 參考文獻

- [1] 高雅然、林純儀 (2011)。「彈」何容易—水珠的反彈。國立臺中女子高級中學。
- [2] 楊志文、徐英庭、蘇巧慈、倪柏揚 (2007)。「當我們撞在一起-液體碰撞」。國立板橋高級中學。
- [3] 吳俊賢、賴韋丞、魏榮佑 (2023)。「玩水珠珠」。國立臺南第一高級中學。
- [4] Guy-Jean Michon, Christophe Josserand, Thomas Séon. Jet dynamics post drop impact on a deep pool. (2017)
- [5] F. Minami and K. Hasegawa. Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool. (2022)
- [6] Stephan Gekle and J.M. Gordillo. Generation and Breakup of Worthington Jets After Cavity Collapse (2009)
- [7] 維基百科 (最後修訂於 2022 年 3 月 1 日)。「福祿數」。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%A6%8F%E7%A5%BF%E6%95%B8>
- [8] 維基百科 (最後修訂於 2020 年 1 月 8 日)。「韋伯數」。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%9F%8B%E4%BC%AF%E6%95%B8>
- [9] 維基百科 (最後修訂於 2023 年 12 月 25 日)。「表面張力」。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A1%A8%E9%9D%A2%E5%BC%A0%E5%8A%9B>
- [10] 吳尹傑、吳振華、洪鶴祐、林達 (2007)。「被忽略的神秘力量—表面張力」。彰化縣立陽明國民中學。
- [11] 維基百科 (最後修訂於 2022 年 6 月 10 日)。「橢球表面積公式」。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%A4%AD%E7%90%83>

【評語】 051808

研究精確地捕捉了水滴撞擊液面的瞬間，並透過高速度攝影技術詳細記錄了水滴斷裂的過程，計算水窪深度、能量消耗率、水柱斷裂高度。此研究在數據處理與圖像分析上展示了嚴謹的科學態度。實驗設計簡易，並能夠有效地解釋現象背後的物理原理。整體來說，此作品展示了學生對物理學的熱忱和探索精神，未來可加強深層的分析以現新穎。

作品簡報



一點一滴

以水滴撞擊液面的動態過程探討水滴斷裂之機制

摘要

本研究將水滴撞擊液面的動態過程分為三個階段：水滴撞擊液面形成水窪、水窪形成水柱以及水柱分裂為水滴，在每個歷程我們皆有良好的量化關係。在水柱分裂為水滴的機制探討中，我們將分裂水滴分為三種，分別為噴射水滴、滯留水滴、凹陷水滴。最終我們找到噴射水滴斷裂高的預測公式，故可利用撞擊水滴的物理性質，精準預測噴射水滴的出現與否，且與實驗數據極為相近。

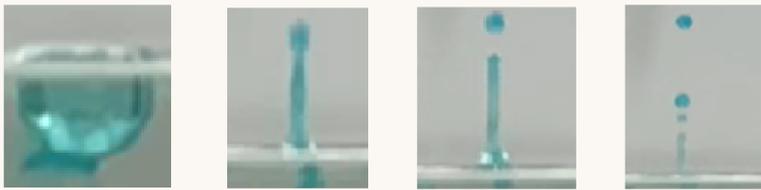
壹、前言

一、研究動機

我們在網路上曾看過一部廣告，水滴由上到下撞擊水面後，由水面向下深入形成水窪，再向上反彈產生了噴濺的水柱，最後會有完整的水滴分出。我們不禁好奇：液滴撞擊的條件和噴濺模式有何關聯，希望找出兩者間的規律，並探究現象背後的物理原理。

三、水滴反彈階段

落水形成水窪 水柱形成 分離出水滴 水柱回縮



圖片來源：研究者拍攝

二、研究目的

- (一) 探討撞擊水滴速度與分離水滴型態的定性關係
- (二) 探討撞擊水滴速度與水窪形狀的量化關係
- (三) 探討撞擊水窪形狀與水柱性質的量化關係
- (四) 探討水柱性質與三種水滴斷裂機制的量化關係

四、三種明顯不同機制的水滴分離種類

(一)噴射水滴： (二)滯留水滴： (三)凹陷水滴：



水柱仍在向上噴濺時，斷裂出初速度向上之水滴
水柱抵達最高點準備向回收縮時頂部分離之水滴
靜止水柱斷裂成之水滴

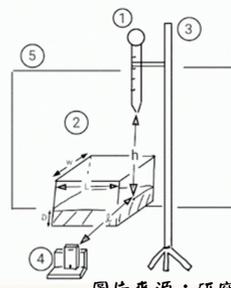
圖片來源：研究者拍攝

貳、研究設備及器材

研究設備及軟體

分度吸量管、安全吸球、水缸、支架、手機與手機支架、背板、Excel、Tracker

實驗裝置示意圖



圖片來源：研究者繪製

h = 10 cm ~ 60 cm
L = 35 cm
W = 20 cm
D = 12 cm
l = 30 cm

參、研究過程及方法

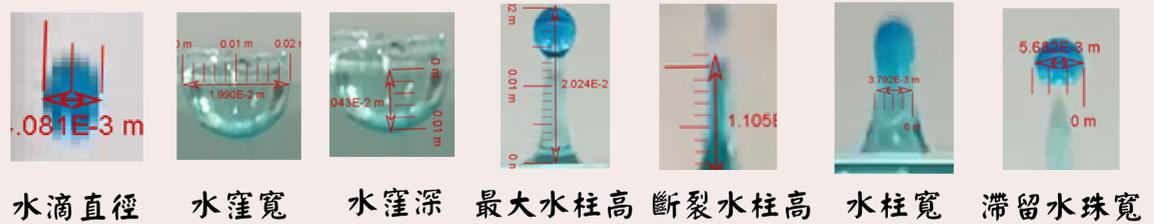
實驗原理

- (一) 福祿數： $Fr = (V_I^2)/gd$
 - (二) 韋伯數： $We = \rho V_I^2(2d)/\sigma$
 - (三) 表面張力： $U = \sigma A$
- V_I ：液滴撞擊速度
 d ：水滴半徑
 σ ：流體之表面張力

數據分析方法

Tracker量測基本物理量、追蹤水滴下落與水柱出水過程
Excel計算落水速度、水柱初速度與水柱加速度

以下為基本物理量的測量：（照片來源為研究者拍攝）



研究架構圖

實驗規劃

- 1.擬定研究目標及方向
- 2.閱讀參考文獻
- 3.試作實驗觀察

實驗設計

以慢動作攝影，紀錄水滴反彈的過程。

- 1.實驗一：純水以不同高度落水
- 2.實驗二：低濃度鹽水溶液以不同高度落水
- 3.實驗三：高濃度鹽水溶液以不同高度落水

數據分析

利用tracker和excel分析以下各階段的物理量：1.撞擊水滴2.水窪3.水柱4.分離水滴

討論與結論

探討水滴反彈各歷程間物理量之關聯性，並嘗試找出現象背後的理論基礎

流程圖來源：研究者繪製

水窪的理論深度分析

根據論文中提及之水窪深度理論公式，其中假設水窪為半球形、水滴和水面的溶液種類相同，且過程中無能量耗損，僅考慮動能與重力位能的轉換，因此水滴撞擊時的初動能，全數轉換為水窪重力位能。而由積分可知，半球形質心在3/8 Rmax處。利用水滴半

徑將水窪深度標準化可得： $(R_{max})/d = (\frac{8}{3})^{\frac{1}{4}} (\frac{V^2}{gd})^{\frac{1}{4}} = (\frac{8}{3} Fr)^{\frac{1}{4}}$

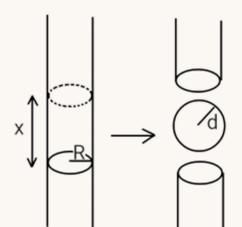
無限長靜止水柱的斷裂機制

圖片來源：研究者繪製

假設一段無限長且靜止的水柱中有一段長x、半徑為R的水柱段，而在其斷裂成半徑為d水珠時，水柱段和水珠的體積應該為一定值。當斷裂前水柱的表面積大於水珠的表面積時，水珠即斷裂。

整理後得： $x > \frac{9}{2} R \dots$ 式(2)

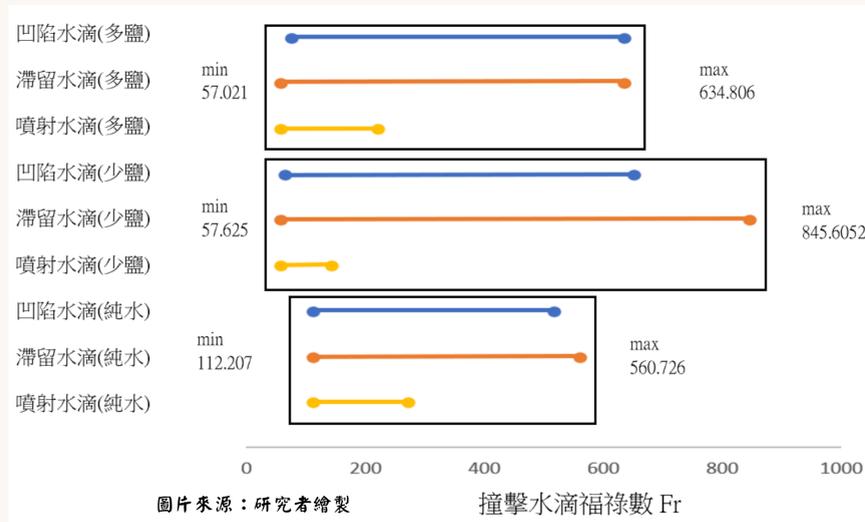
由列式可知，當水柱長x大於 $\frac{9}{2} R$ 時，水柱即會斷裂成水珠。



水柱斷裂之過程

一、探討撞擊水滴福祿數與分離水滴的定性關係

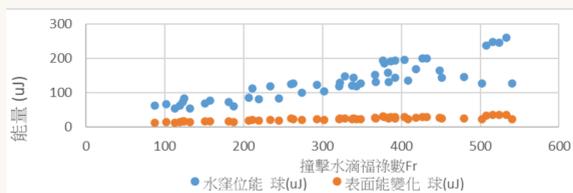
撞擊水滴福祿數與分離水滴型態關係圖



噴射水滴僅在撞擊速度低時出現；滯留水滴出現範圍最大，幾乎涵蓋所有撞擊條件；而凹陷水滴出現範圍與滯留水滴相近，也近於涵蓋所有撞擊條件。

二、水滴變為水窪之過程

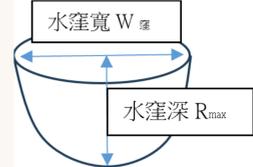
確保水窪深公式中假設之正確性



表面位能佔有一定的影響比例不可忽略

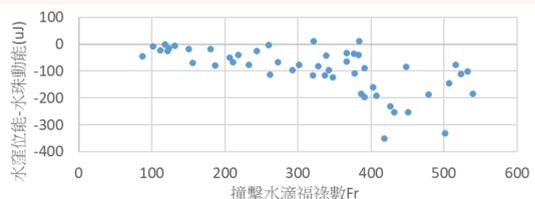
重力位能與表面能變化比較圖

圖片來源：研究者繪製



水窪形狀圖

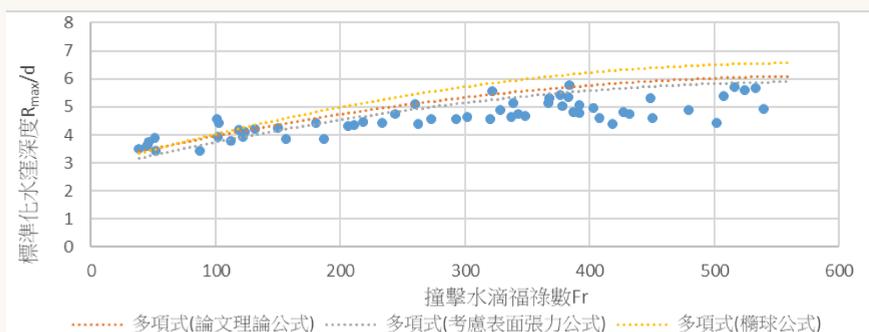
寬約為深之1.5倍，可知與先前理論公式假設之半球型（寬深比為2）相差極大。



能量耗損圖

能量耗損約為50%與總能量相近，不可忽略。且大致隨著撞擊速度的增加，逐漸增加。

修正後的理論水窪深公式



水窪深與福祿數關係圖

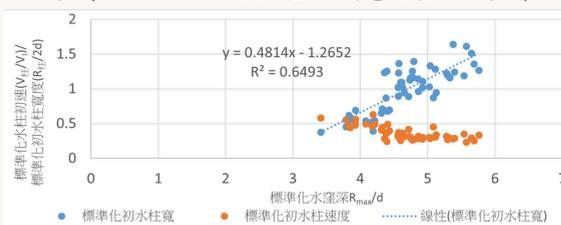
修正後公式為：

$$\frac{R_{max}}{d} = \sqrt{-\frac{2Fr}{We} \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{2Fr}{We}\right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right)\right]^2 + \frac{8}{3\alpha^2} Fr + \frac{16Fr}{\alpha^2 We}}$$

理論公式與實驗值中，撞擊水滴福祿數與標準化水窪深度皆呈正相關，與實驗趨勢相符。此外，所有理論深度較大於實驗值，這是由於實驗過程中的能量耗損使動能無法完全轉換為水窪位能。

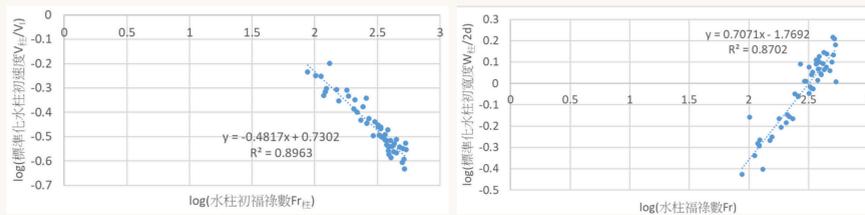
三、水窪變為水柱之過程

標準化水柱初速、寬度和標準化水窪深度關係圖



水窪深較大時，水柱初速度愈小，水柱愈粗。

標準化水柱初速、寬度和水滴福祿數關係圖

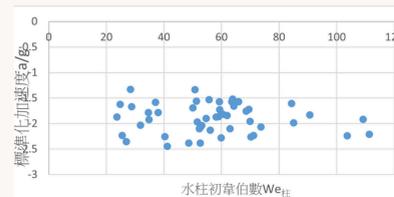


公式為： $\frac{v_{柱}}{v_l} \approx 5.37Fr^{-0.5}$ $\frac{W_{柱}}{2d} \approx (1.70 \times 10^{-2})Fr^{0.7}$

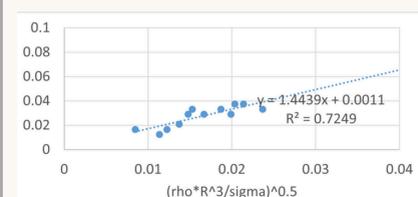
四、水柱與三種水滴之關係

(一) 噴射水滴

假設噴射水滴的形成與時間有關



標準化水柱加速度與韋伯數關係圖

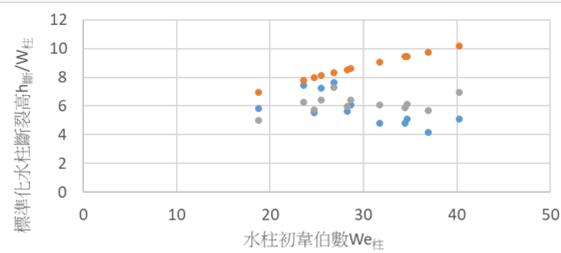


斷裂時間分析圖

兩者呈正比關係

公式為： $T_{斷} = 1.44 \sqrt{\frac{\rho W_{柱}^3}{\sigma}}$

視水柱上升為等加速度運動

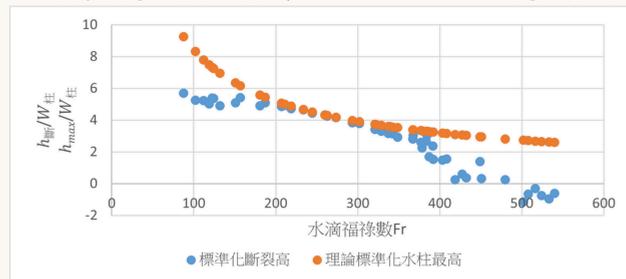


水柱斷裂高與實際實驗比較圖

標準化斷裂高： $\frac{h_{斷}}{W_{柱}} = \frac{V_0 T_{斷}}{W_{柱}} - \frac{a T_{斷}^2}{2W_{柱}} = 1.44 \sqrt{We_{柱}} - \frac{We_{柱}}{Fr_{柱}} \times 1.44^2$

比較此公式和實驗數據，發現較論文中的等速運動吻合度較高。

標準化斷裂高度與標準化理論最大高度關係圖



標準化斷裂高： $\frac{h_{斷}}{W_{柱}} = 1.44 \sqrt{We_{柱}} - \frac{We_{柱}}{Fr_{柱}} \times 1.44^2$

標準化理論最大高度： $\frac{h_{max}}{W_{柱}} = \frac{v_{柱}^2}{2aW_{柱}} = \frac{Fr_{柱}}{4}$

知道水柱韋伯數與水柱福祿數後帶入公式，預測水柱斷裂高與理論最大高度。由此得出：水柱預測斷裂高若小於最大水柱高，便會形成噴射水滴；反之則不會形成噴射水滴。

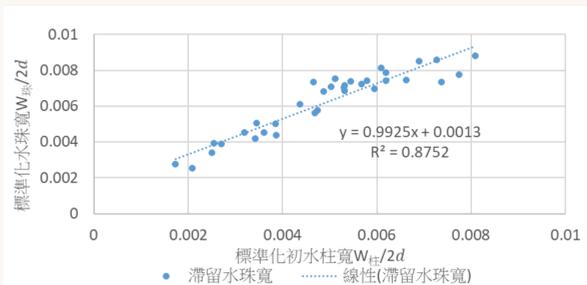
(二) 滯留水滴

圖片來源：研究者拍攝

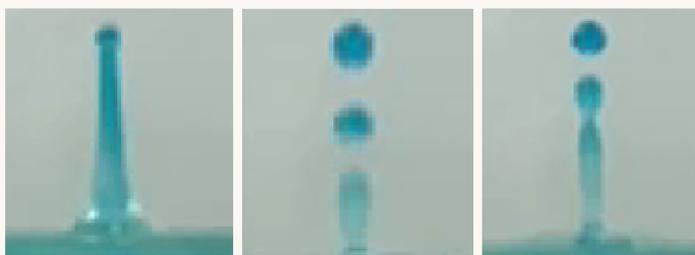
示意圖				
水柱寬 (cm)	0.3857	0.3381	0.4574	0.5283

由示意圖及散布圖可知：滯留水珠寬與初水柱寬呈明顯正比關係

滯留水滴寬與水柱寬關係圖

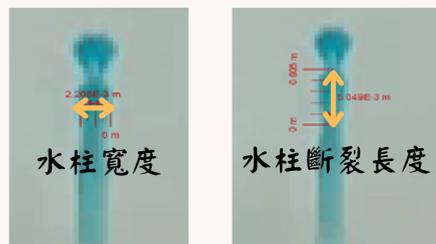


(三) 凹陷水滴



凹陷水滴斷裂過程示意圖

圖片來源：研究者拍攝



水柱斷裂長度 $\approx 4.57 \times$ 水柱半徑與推論相符

圖片來源：研究者拍攝

伍、研究結論

觀察水滴撞擊液面的動態過程

撞擊水滴速度與分離水滴型態的定性關係

撞擊水滴速度與水窪形狀的關係

撞擊水窪形狀與水柱性質的關係

水柱性質與三種水滴斷裂機制的關係

福祿數是否 > 200

是

否

滯留水滴
凹陷水滴

噴射水滴
滯留水滴
凹陷水滴

定性觀察

水滴撞擊速度與水窪深呈正相關

量化關係

水窪深理論公式推倒及修正：
1. 考慮表面位能
2. 形狀為橢球
3. 考慮能量耗損

公式

定性觀察

水窪	水窪大	水窪小
水柱初速度	小	大
水柱寬	大	小

量化關係

可從撞擊水滴的初始資訊
水滴寬
水滴撞擊速度
水滴福祿數
預測噴射水柱寬度、速度

公式

$$\frac{v_{柱}}{v_I} \approx 5.37 Fr^{-0.5}$$

$$\frac{W_{柱}}{2d} \approx (1.70 \times 10^{-2}) Fr^{0.7}$$

噴射水滴

1. 水柱為加速度運動
2. 理論斷裂高小於最大高度時斷裂
3. 撞擊水滴福祿數在 200 以下時才會出現

滯留水滴

1. 滯留水滴大小僅與水柱寬度相關
2. 滯留水珠寬與初水柱寬呈正比關係

凹陷水滴

1. 靜止水柱最小其表面積而分裂為水滴
2. 水柱斷裂長度大於水柱半徑 $9/2$ 倍時斷

$$\frac{R_{max}}{d} = \sqrt{-\frac{2Fr}{We} \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{2Fr}{We}\right) \left(\frac{2\beta}{\alpha} - 1\right)\right]^2 + \frac{8}{3\alpha^2} Fr + \frac{16Fr}{\alpha^2 We}}$$

架構圖來源：研究者繪製

陸、未來展望

一、改變液體性質，確認我們推出的預測公式可在不同表面張力及液體密度下適用。

二、在高福祿數時，噴射水滴的出現範圍，與預測相違背，希冀能夠提出更好的解釋。

柒、參考資料

- [1] 高雅然、林純儀 (2011)。「彈」何容易—水珠的反彈。國立臺中女子高級中學。
- [2] 楊志文、徐英庭、蘇巧慈、倪柏揚 (2007)。當我們撞在一起-液體碰撞。國立板橋高級中學。
- [3] 吳俊賢、賴韋丞、魏榮佑 (2023)。玩水珠珠。國立臺南第一高級中學。
- [4] Guy-Jean Michon, Christophe Josserand, Thomas S eon. Jet dynamics post drop impact on a deep pool. (2017)
- [5] F. Minami and K. Hasegawa. Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool. (2022)
- [6] Stephan Gekle and J.M. Gordillo. Generation and Breakup of Worthington Jets After Cavity Collapse (2009)
- [7] 維基百科 (最後修訂於 2022 年 3 月 1 日)。福祿數。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%A6%8F%E7%A5%BF%E6%95%B8>
- [8] 維基百科 (最後修訂於 2020 年 1 月 8 日)。韋伯數。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%9F%8B%E4%BC%AF%E6%95%B8>
- [9] 維基百科 (最後修訂於 2023 年 12 月 25 日)。表面張力。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A1%A8%E9%9D%A2%E5%BC%A0%E5%8A%9B>
- [10] 吳尹傑、吳振華、洪鶴祐、林達 (2007)。被忽略的神秘力量—表面張力。彰化縣立陽明國民中學。
- [11] 維基百科 (最後修訂於 2022 年 6 月 10 日)。橢球表面積公式。
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%A4%AD%E7%90%83>