

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051806

輪迴轉勢

學校名稱： 國立花蓮高級中學

| | |
|---|------------------|
| 作者： 高一 文宥謙 高一 郭立喆 高一 王晨祐 | 指導老師： 莊文治 |
|---|------------------|

關鍵詞： 雙輪組、摩擦力、阻尼振盪

摘要

一般會認為，螺絲從斜面上側著釋放後只會直線下滑。然而螺絲的頂端與螺桿有半徑大小之區別，故應該會有別於一般輪軸的運動情形。於是我們以一般的螺絲進行實驗，發現螺絲在斜面上滑情形大致分為兩類：擺動且不下滑、邊擺動且邊下滑。為了討論螺絲在各種起始條件下的運動情形，我們將螺絲改成 3D 列印雙輪組，分別操縱雙輪組的大小輪半徑比、軸距、初始角度、總質量、及斜面傾角等變因。我們發現雙輪組的運動情形可以分成三類，第一類為：不下滑且擺角愈來愈小；第二類為：下滑且擺角愈來愈大；第三類為：下滑且擺角愈來愈小。而第一、三類的雙輪組為一**阻尼振盪運動**；第二類的雙輪組為一**反阻尼振盪運動**。甚至有些雙輪組會發生有趣的**反轉**現象。

壹、 研究動機

2023 年 IYPT 的其中一題提到，當螺絲側放在斜坡上並釋放時，螺絲沿著斜坡下滑時可能會有越來越大的擺動。這讓我們十分好奇，用螺絲實際測試後發現不同的釋放方式就會表現出不同的運動行為，並且不同種類、型態的螺絲之運動情形也各異。於是便自製 3D 列印雙輪組進行實驗，希望能了解其運動模式與相關的物理意義。

貳、 研究目的

- (一) 觀察、歸納、分析雙輪組在斜面上釋放後的運動模式
- (二) 探討雙輪組之本身條件對其運動情形之影響
 - 1. 大小輪半徑比值
 - 2. 大小輪之間距(軸長)
 - 3. 雙輪組總質量
- (三) 探討雙輪組之外在條件對其運動情形之影響
 - 1. 雙輪組的釋放角度
 - 2. 斜面傾斜角度

參、 研究設備及器材

一、 實驗設備及器材

| | | | | |
|-----------------|-----------------|---------|----------|----------|
| 1.攝影腳架 | 2.千斤頂 | 3.電子秤 | 4.鹵素燈具 | 5.3D 列印機 |
| 6. PLA3D 線材(黃) | 7. 噴漆 (紅綠藍) | 8.熱熔膠槍 | 9. 水平儀 | 10.手機 |
| 11.木板(75×160) | 12.壓克力板(75×160) | 13.各式螺絲 | 14. 游標卡尺 | 15.金屬墊片 |

二、 實驗軟體

表 (1)

- (一) Tracker：物理影像分析軟體，我們以此軟體分析實驗影像、擷取各項物理量。
- (二) phyphox：物理實驗軟體，我們以此軟體測量斜面傾角。
- (三) tinkercad：3D 模型繪製網站，我們以此繪製各種 3D 列印雙輪組。
- (四) xyz print 3：連接 3D 列印機並印製的軟體，我們以此印製各種 3D 列印雙輪組。

肆、 研究過程或方法

一、 研究架構

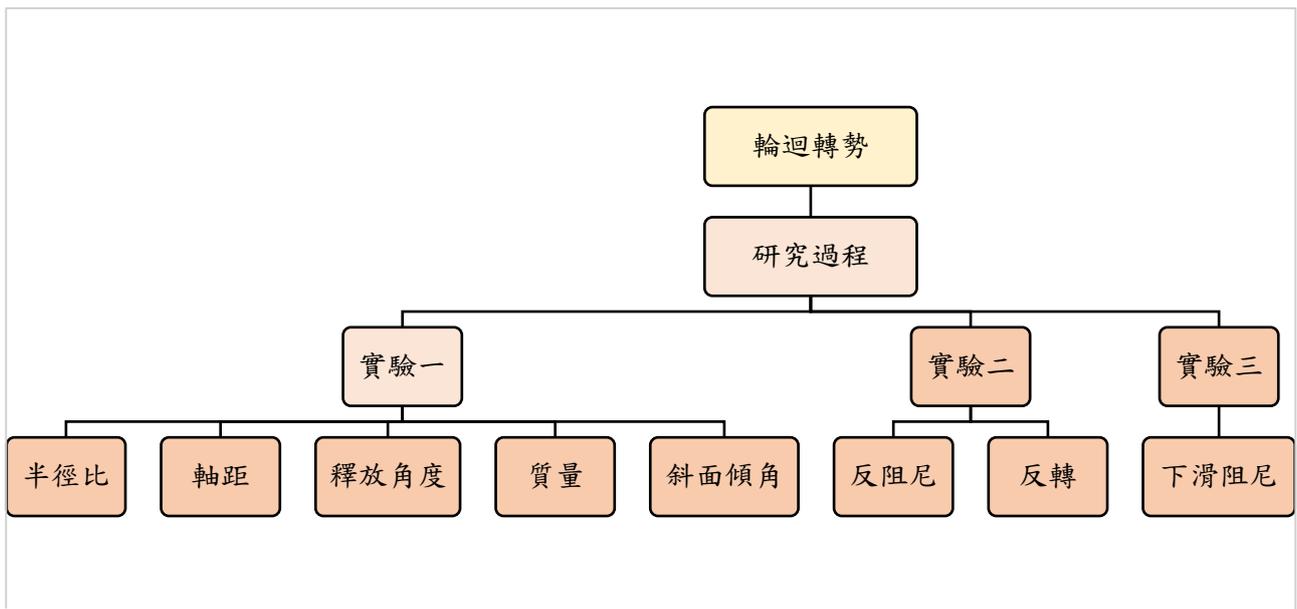


圖 (1) 研究架構

二、 研究過程

(一) 實驗設計及步驟

1. 裝置架設(如圖(2)(3))：

- (1) 用千斤頂撐起並以角鋼支撐壓克力板，用 phyphox 應用程式中的傾斜度功能調整其傾角，並確保壓克力板的平整，沒有凹陷突起。
- (2) 架設保麗龍板在斜面底部（後來改放軟墊），做為緩衝裝置。
- (3) 架起攝影腳架，調整角度讓手機與斜面平行，且讓整個斜面都進入畫面。



圖 (2) (左) 實驗裝置

圖 (3) (上) 實驗裝置示意圖

2. 雙輪組製作方式：

- (1) 首先以螺絲構造進行發想，發現其與接觸面只有兩個接觸點，於是便設計出由半徑不同的大小輪所組裝成的雙輪組(如圖(4))。
- (2) 接著透過 tinkercad 繪製 3D 模型，並將檔案匯入 xyz print3 (如圖(5))。
- (3) 連接 3D 列印機（機型：daVinci Jr. ProX+），並進行印製(如圖(6))。



圖 (4) 3D 雙輪組

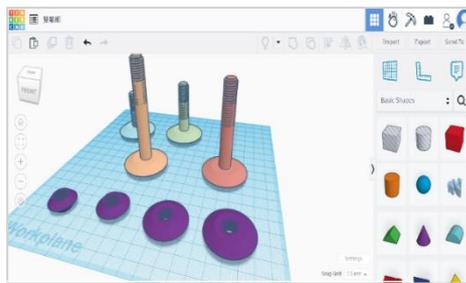


圖 (5) tinkercad 網站



圖 (6) 3D 列印機

- (4) 將印製完雙輪組利用砂紙磨至光滑，再將兩輪分別漆上不同色（紅、綠），並以兩輪半徑平方比計算質心，再以藍色電器膠帶標示質心位置。

3. 實驗步驟：

- (1) 實驗開始前用 phyphox 及水平儀確認傾角是否正確。

- (2) 開啟鹵素燈具照向斜面以方便觀察顏色。
- (3) 將雙輪組於斜面頂端的指定角度擺放（角度以大輪在下小輪在上為 0° ，順時針旋轉依序增加）(如圖(8))，並以透明載玻片頂住。
- (4) 以手機相機錄影，錄影開始 5 秒後釋放，並錄製到 15 秒後停止。
- (5) 每實驗組重複步驟 (3) (4) 五次，並進行不同實驗組的實驗。

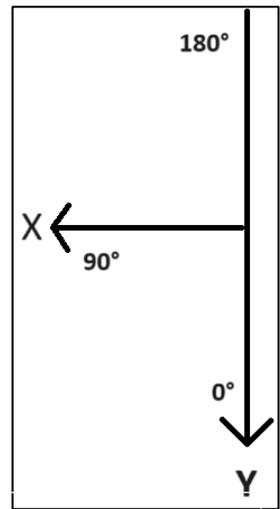


圖 (7) 釋放角及座標軸示意圖

- (6) 用 Tracker 應用程式追蹤質心、大輪及小輪的運動軌跡，設定斜面右上方為座標原點，以向左 (x)、向下 (y) 為正值 (如圖(9))。

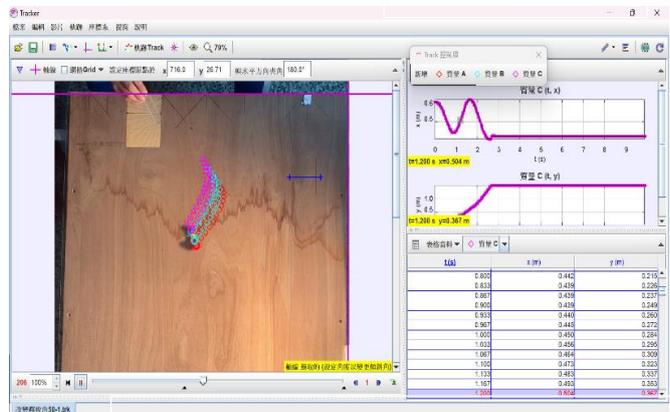


圖 (8) Tracker 追蹤運動軌跡

- (7) 將時間 t 與 x 、 y 方向位移匯入 Excel，並將 5 組數據進行平均，再繪製 $x-t$ 圖及 $y-t$ 圖進行比較。

(二) 前置實驗

為了瞭解一般螺絲在斜面上的運動情形，以不同種類、長短的螺絲進行前置實驗，發現螺絲在斜面上的運動可歸為兩類，分別是邊擺動邊下滑以及在原地擺動不下滑。

1. 邊擺動邊下滑：

從 $x-t$ 圖中發現，螺絲的振幅會越來越大。在 $y-t$ 圖中則發現螺絲先以加速度再以等速度下滑。

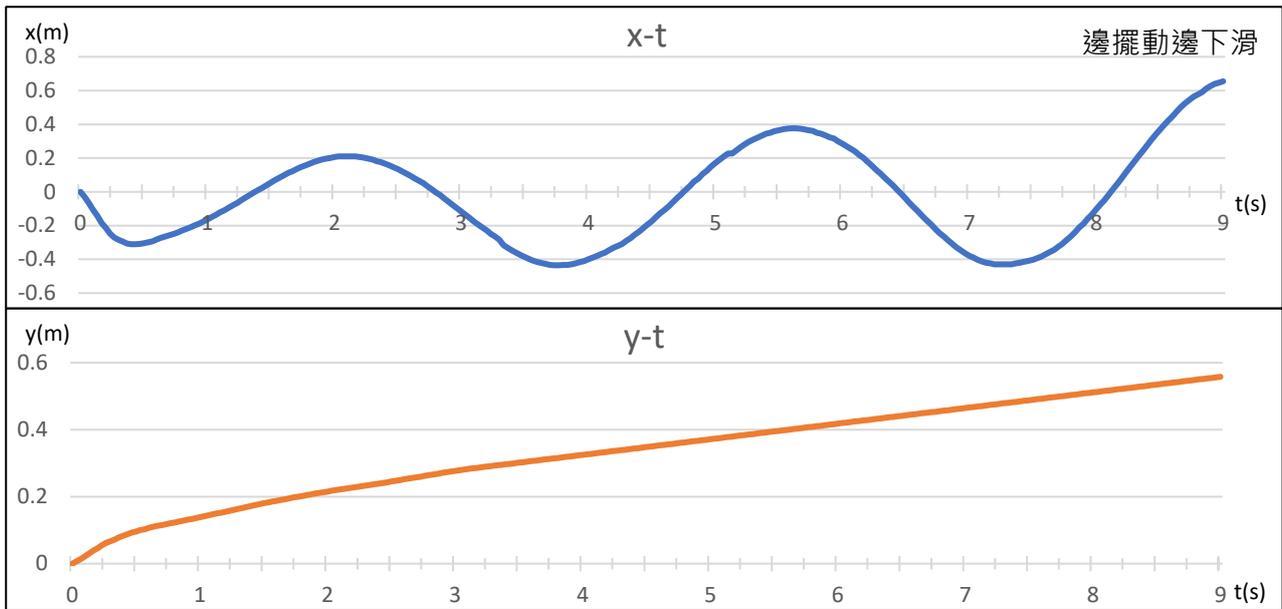


圖 (9-1) (上) 螺絲邊擺動邊下滑 x-t 圖

圖 (9-2) (下) 螺絲邊擺動邊下滑 y-t 圖

2. 原地擺動不下滑：

螺絲的振幅越來越小，且螺絲除一開始向下擺之外，並無明顯下滑。

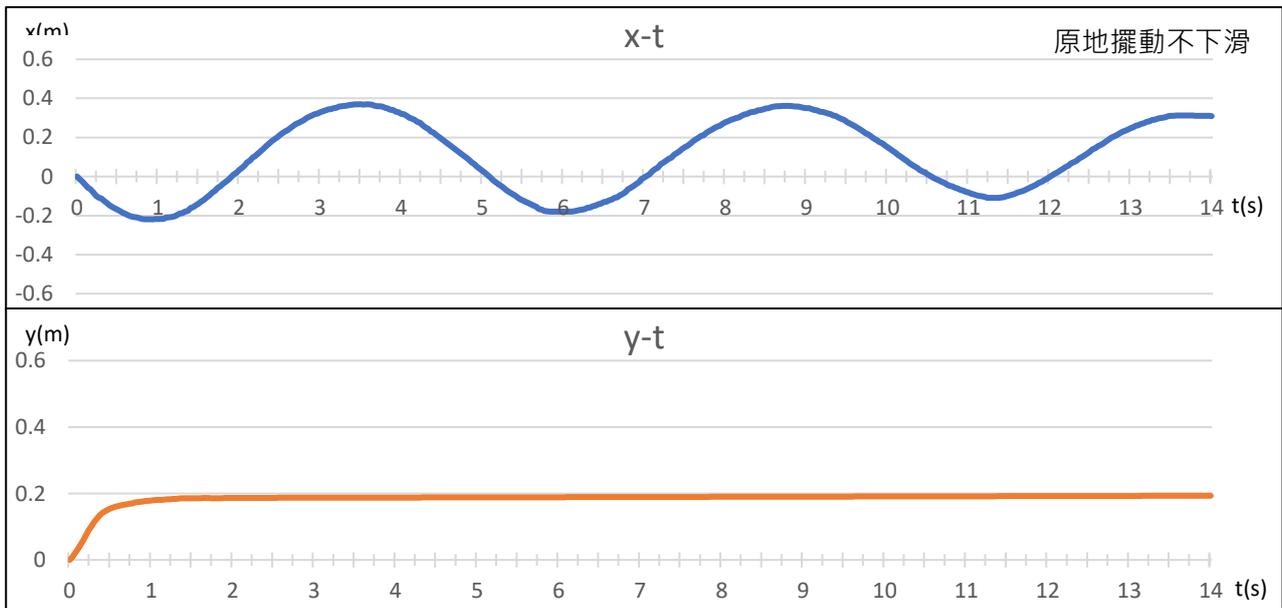


圖 (10-1) (上) 螺絲原地擺動不下滑 x-t 圖

圖 (10-2) (下) 螺絲原地擺動不下滑 y-t 圖

(三) 正式實驗

1. 實驗一：探討不同變因對雙輪組的影響

(1) 改變雙輪組之大小輪的半徑比（以下簡稱**半徑比**）

| | | | | | |
|--------------------------------------|--|-----|-----|-----|-----|
| 控制變因 操縱變因 | 3D 列印雙輪組、大輪半徑 2.0cm、軸距 5.0cm、 釋放角度 80°、斜面傾角 10.5°、有噴漆 | | | | |
| 小輪半徑(cm) | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 |
| 半徑比($\frac{\text{小輪}}{\text{大輪}}$) | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |

(2) 改變雙輪組之軸距

表 (2)

| | | | | | |
|--------------|--|-----|-----|-----|-----|
| 控制變因 操縱變因 | 3D 列印雙輪組、半徑比 0.7、釋放角度 80°、 斜面傾角 10.5°、有噴漆 | | | | |
| 軸距(cm) | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 |

(3) 改變雙輪組之釋放角度

表 (3)

| | | | | | | | | |
|--------------|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 控制變因 操縱變因 | 3D 列印雙輪組、半徑比 0.7、軸距 5.0cm、 斜面傾角 10.5°、有噴漆 | | | | | | | |
| 釋放角度(deg) | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 |

(4) 改變雙輪組之質量

表 (4)

由於 3D 列印的雙輪組質量較輕，因此我們改用金屬墊片製作雙輪組。

| | | | |
|--------------|--|-------|-------|
| 控制變因 操縱變因 | 金屬墊片雙輪組、半徑比 0.7、軸距 5.0cm 、釋放角度 10°、斜面傾角 15°、無噴漆 | | |
| 總質量(g) | 20(小) | 31(中) | 40(大) |

【附註 1】由於觀察到噴漆會對雙輪組的摩擦力有很大的影響，因此接下

表 (5)

來的實驗皆使用沒噴漆的雙輪組。

【附註 2】由於此實驗會增加雙輪組質量，造成其下滑速度較快，無法觀察到完整的來回擺盪。故將釋放角度調為 10°，以便觀察到較完整的週期。

(5) 改變斜面傾斜角度（以下簡稱**傾角**）（如表(6)）

因為斜面傾角較小，從 3D 列印雙輪組無法觀察到下滑的運動行為。因此，此實驗改用金屬墊片雙輪組。

| | | | |
|--------------|---|----|----|
| 控制變因 操縱變因 | 金屬墊片雙輪組、半徑比 0.7、軸距 5.0cm、 釋放角度 90°、總質量 31g | | |
| 斜面傾角(deg) | 10 | 11 | 12 |

2. 實驗二：探討雙輪組下滑與反阻尼運動之關聯

表 (6)

從實驗一可以觀察到，雙輪組在斜面上下滑時會有和我們想像中不一樣的運動模式：擺角會越來越大，有點像反阻尼運動。因此，我們將以這個物理現象為研究方向，繼續接下來的實驗。

| | |
|-----|-----------------------------|
| 第一組 | 傾角 11°，釋放角度 65°，20 克金屬墊片雙輪組 |
| 第二組 | 傾角 14°，釋放角度 10°，20 克金屬墊片雙輪組 |
| 第三組 | 傾角 15°，釋放角度 10°，20 克金屬墊片雙輪組 |

3. 實驗三：探討雙輪組下滑但沒有反阻尼的情形

表 (7)

| | |
|-----|-----------------------------|
| 第一組 | 傾角 9°，釋放角度 110°，20 克金屬墊片雙輪組 |
|-----|-----------------------------|

伍、研究結果

表 (8)

一、比較大輪、小輪及質心的運動軌跡圖

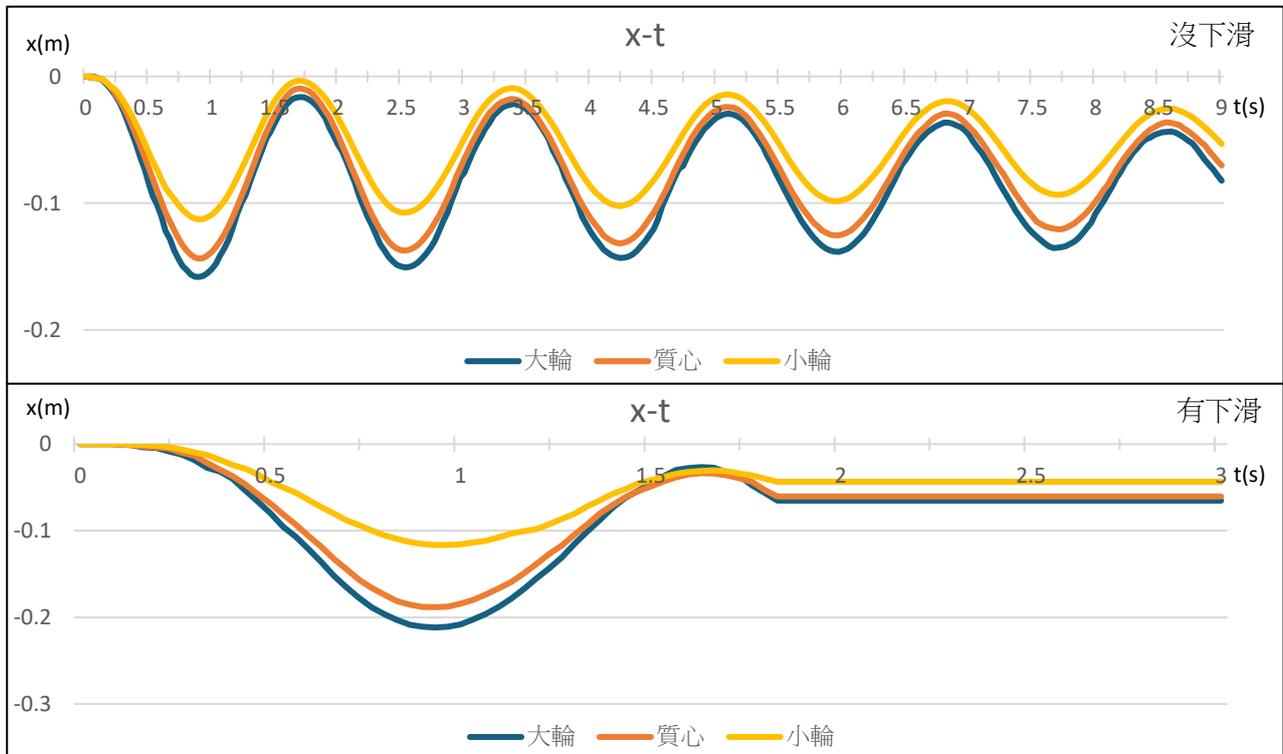


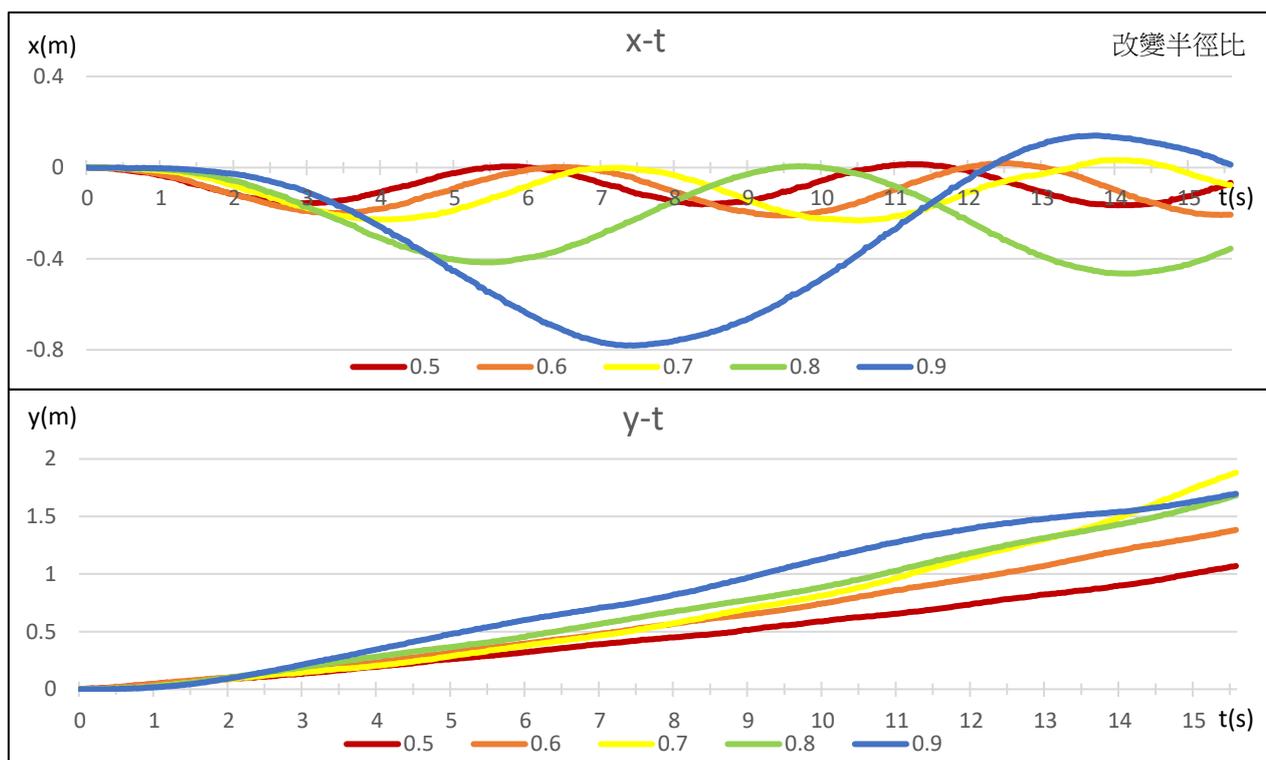
圖 (11-1) (上) 雙輪組沒下滑 x-t 圖

圖 (11-2) (下) 雙輪組有下滑 x-t 圖

圖(11-1)為半徑比 0.7、軸距 5cm、釋放角度 30° 、斜面傾角 15° ，沒下滑的雙輪組。從圖中可以觀察到雙輪組的運動軌跡在質心、大輪和小輪上僅有振幅上的差異。圖(11-2)則是半徑比 0.6、軸距 5cm、釋放角度 90° 、斜面傾角 15° ，有下滑的雙輪組，其質心、大輪和小輪僅有振幅的差異。因此，下列的 x-t 圖、y-t 圖的運動軌跡皆為追蹤質心所得到的結果。

二、實驗一

(一) 觀察、比較不同半徑比的 3D 列印雙輪組的運動行為：



圖(12-1) (上) 不同半徑比 x-t 圖

圖(12-2) (下) 不同半徑比 y-t 圖

| 半徑比 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.081 | 0.101 | 0.115 | 0.211 | 0.461 |
| 週期(s) | 1.350 | 1.517 | 1.650 | 2.175 | 3.150 |

【附註】振幅及週期的數據皆是透過第一個波谷及波峰的數值得出

表(9)

1. x-t 圖：(如圖(12-1))

- (1) 如表(9)，可以發現半徑比越大的雙輪組振幅越大。
- (2) 對於每一個雙輪組而言，振幅越擺越大。
- (3) 如表(9)，半徑比越大，週期越大。

2. y-t 圖：(如圖(12-2))

(1) 如圖可以發現，半徑比 0.5 和 0.6 的雙輪組 y-t 圖形類似二次函數，應為等加速度運動。

(2) 半徑比 0.7 和 0.8 的雙輪組在釋放後 13.5 秒左右斜率突然增加。

(二) 觀察、比較不同軸距的 3D 列印雙輪組的運動行為：

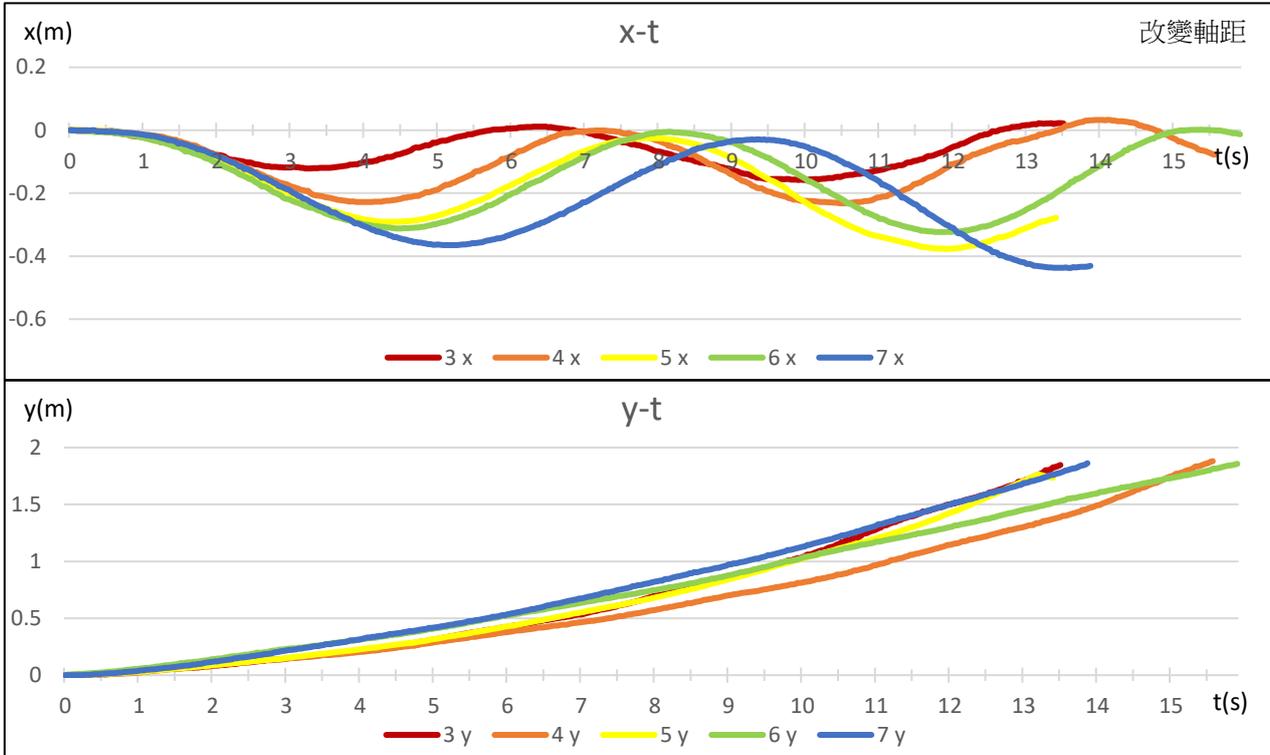


圖 (13-1) (上) 不同軸距 x-t 圖

圖 (13-2) (下) 不同軸距 y-t 圖

| | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 軸距(cm) | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 |
| 振幅(m) | 0.065 | 0.115 | 0.158 | 0.155 | 0.165 |
| 週期(s) | 1.650 | 1.635 | 1.900 | 1.875 | 2.135 |

表 (10)

1. x-t 圖 (如圖 (13-1)):

- (1) 如表(10)，可以發現軸距越大的雙輪組振幅越大。
- (2) 對於每一個雙輪組而言，振幅越擺越大。
- (3) 如表(10)，可以發現軸距越大的雙輪組週期越大。

2. y-t 圖 (如圖 (13-2)):

- (1) 軸距 6cm 和 7cm 的雙輪組的 y-t 圖形類似二次函數，應為等加速度運動。
- (2) 軸距 3cm、4cm 和 5cm 的雙輪組擺到後面斜率都會突然增加。

(三) 觀察、比較釋放角度 20°~90°之 3D 列印雙輪組的運動行為：

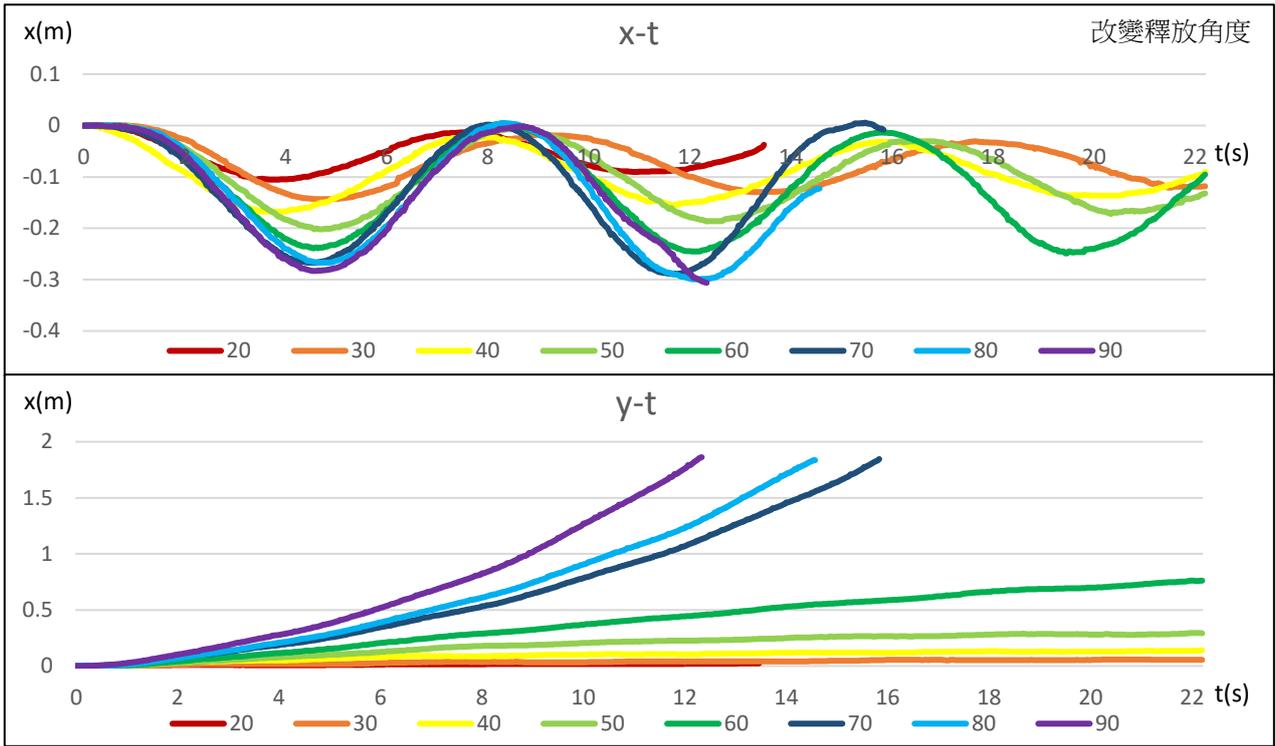


圖 (14-1) (上) 釋放角度 20°~90°x-t 圖

圖 (14-2) (下) 釋放角度 20°~90°y-t 圖

| 釋放角度(deg) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.015 | 0.050 | 0.060 | 0.075 | 0.095 | 0.125 | 0.135 | 0.135 | 0.140 |
| 週期(s) | 1.950 | 1.833 | 2.143 | 2.008 | 1.968 | 1.906 | 1.793 | 1.850 | 2.065 |

表 (11)

1. x-t 圖 (如圖 (14-1)):

- (1) 如表(11)，釋放角度越大的雙輪組振幅越大。
- (2) 觀察 x-t 圖可以發現，釋放角度越大，雙輪組的振幅越大。
- (3) 如表(11)，可推測不下滑的雙輪組，其週期和釋放角度無關；而會下滑的雙輪組，釋放角度越大，其週期越大。

2. y-t 圖 (如圖 (14-2)):

- (1) 如圖，釋放角度 50°以下的雙輪組幾乎不下滑。
- (2) 釋放角度 60°的雙輪組只下滑不到一半。
- (3) 釋放角度 70°以上的雙輪組的 y-t 圖斜率隨著角度增加而變大。

(四) 觀測、比較釋放角度 $100^{\circ}\sim 170^{\circ}$ 之 3D 列印雙輪組的運動行為：

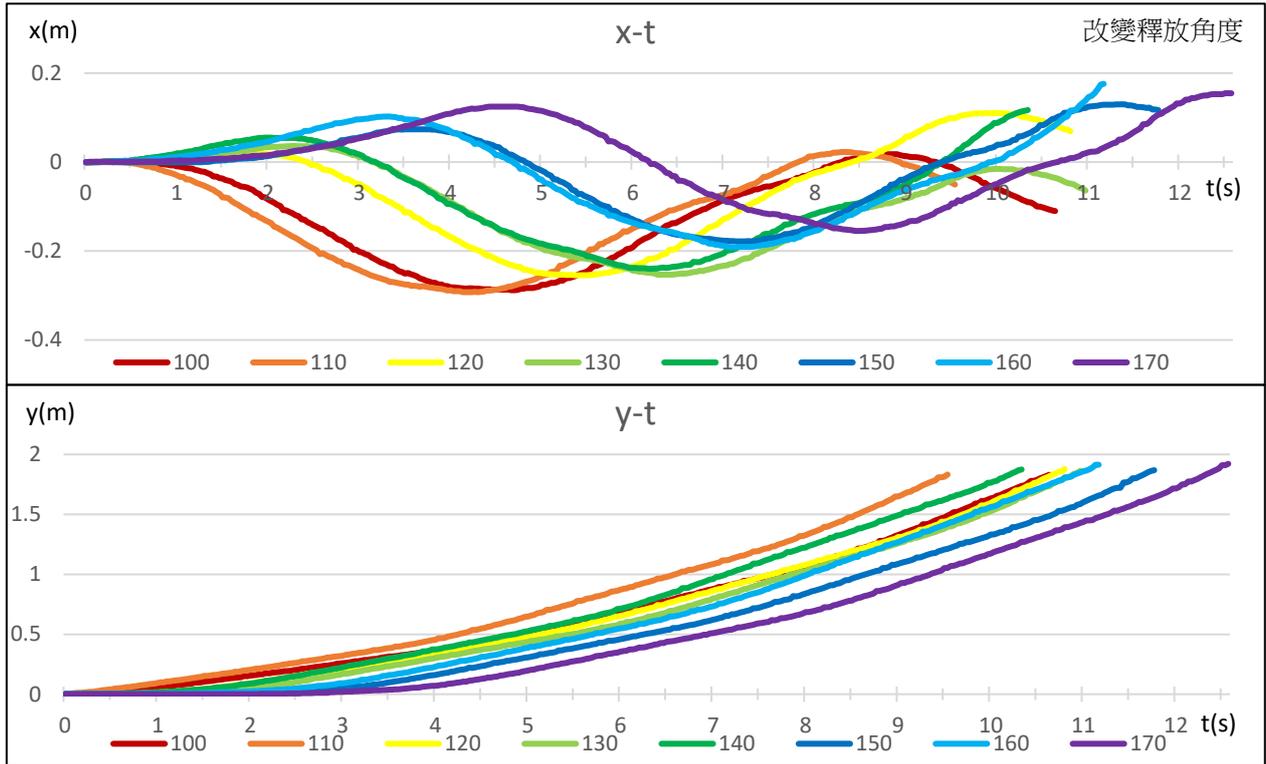


圖 (15-1) (上) 釋放角度 $100^{\circ}\sim 170^{\circ}$ x-t 圖

圖 (15-2) (下) 釋放角度 $100^{\circ}\sim 170^{\circ}$ y-t 圖

| 釋放角度(deg) | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|-----|
| 振幅(s) | 0.155 | 0.155 | 0.180 | 0.135 | | 0.155 | | |
| 週期(s) | 2.180 | 2.120 | 2.270 | 1.870 | | 1.585 | | |

表 (12)

1. x-t 圖 (如圖 (15-1)):

- (1) 如表(12)，可以推測釋放角度和振幅沒有關係。
- (2) 如表(12)，可以推測釋放角度和週期沒有關係。

2. y-t 圖 (如圖 (15-2)):

- (1) 角度越大，下滑速度越慢。

(五) 觀察、比較不同質量之金屬墊片雙輪組的運動行為：

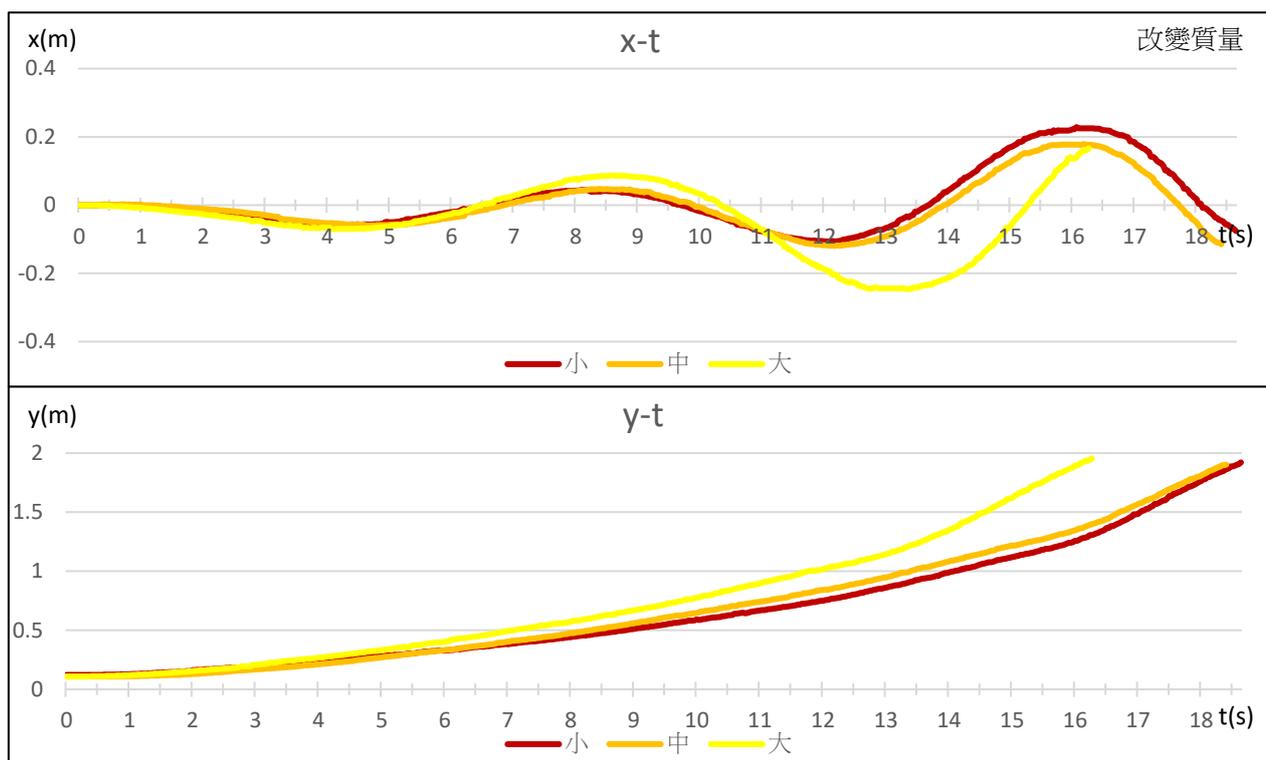


圖 (16-1) (上) 不同質量 x-t 圖

圖 (16-2) (下) 不同質量 y-t 圖

| 雙輪組質量(g) | 20(小) | 31(中) | 40(大) |
|----------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.051 | 0.053 | 0.078 |
| 週期(s) | 2.000 | 1.925 | 2.258 |

表 (13)

1. x-t 圖 (如圖 (20-1)):

- (1) 如表(13)，可推測質量越大，振幅越大。
- (2) 如表(13)，可推測質量與週期無關。

2. y-t 圖 (如圖 (20-2)):

- (1) 每一組的 y-t 圖斜率在 14 秒後都會突然增加。

(六) 觀察、比較不同斜面傾角之金屬墊片雙輪組的運動行為：

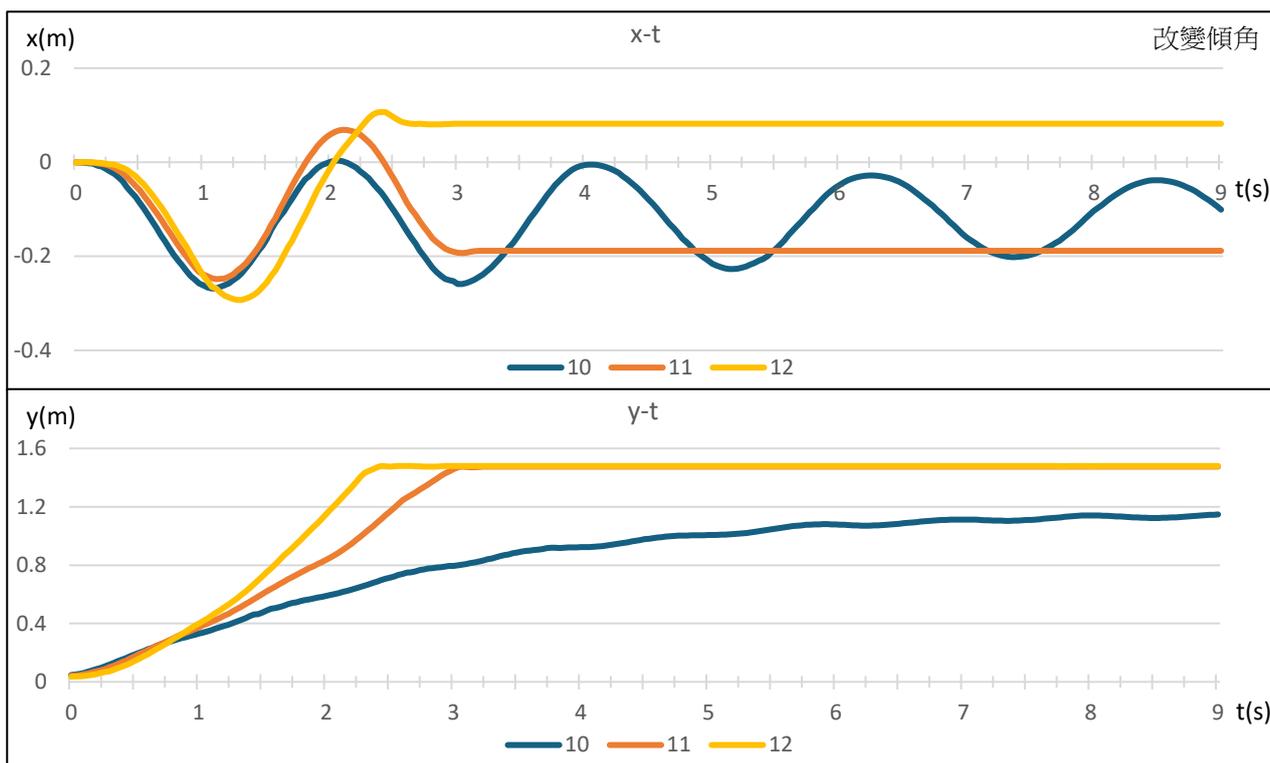


圖 (17-1) (上) 不同傾角 x-t 圖

圖 (17-2) (下) 不同傾角 y-t 圖

| 斜面傾角(deg) | 10 | 11 | 12 |
|-----------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.270 | 0.310 | 0.400 |
| 週期(s) | 1.930 | 2.060 | 2.260 |

表 (14)

1. x-t 圖 (如圖 (21-1)):

- (1) 如表(14)，斜面傾角越大，振幅越大。
- (2) 如表(14)，斜面傾角越大，週期越大。
- (3) 傾角 11°、12°時，可觀察到振幅有變大的趨勢，而傾角 10°時，雙輪組左右擺動的情形類似阻尼諧動，振幅隨時間越來越小。

2. y-t 圖 (如圖 (21-2)):

- (1) 傾角 11°、12°時，y-t 圖像二次曲線，可推測雙輪組在 y 方向為等加速度運動。
- (2) 傾角 11°、12°時，雙輪組皆滑動到斜面底，而傾角 10°則否。

三、實驗二

(一) 分析各組雙輪組的運動行為

1. 第一組：

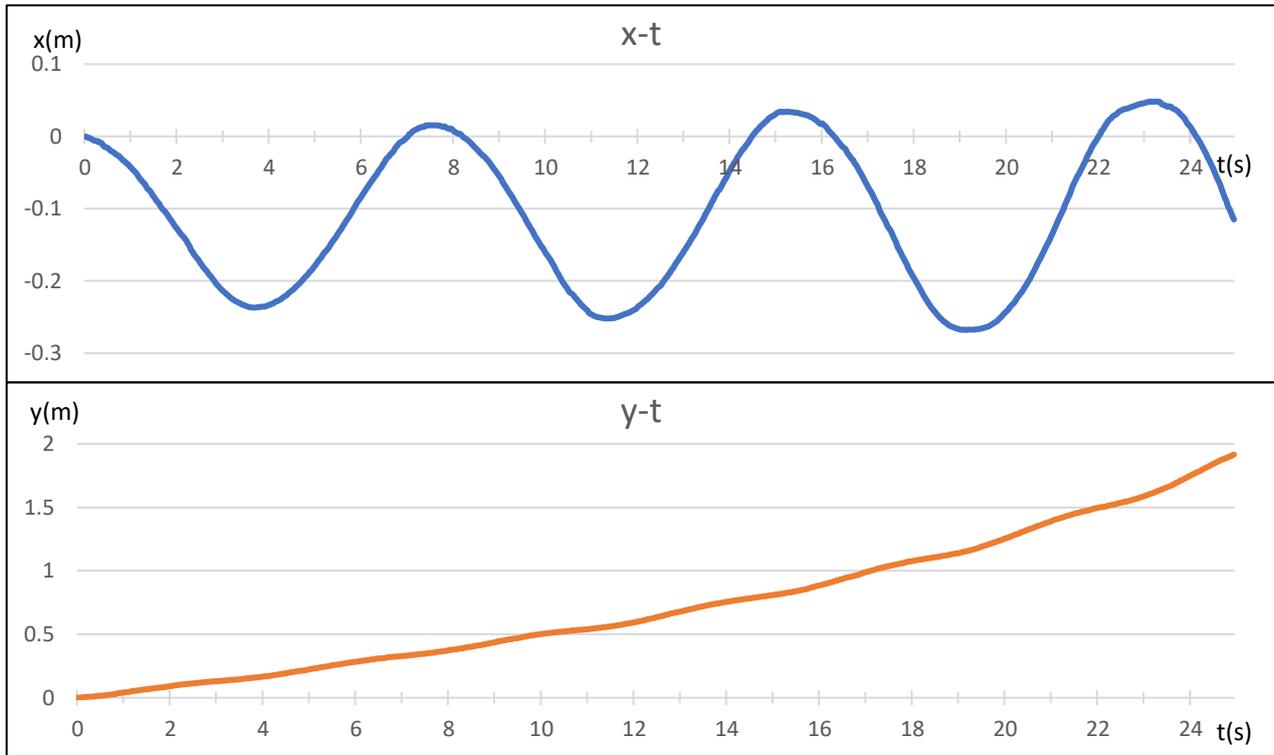


圖 (18-1) (上) 傾角 10 度、釋放角 65 度 x-t 圖

圖 (18-2) (下) 傾角 10 度、釋放角 65 度 y-t 圖

以下表格皆表示同一個雙輪組的振幅、週期隨時間的變化

| | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.126 | 0.134 | 0.143 | 0.151 | 0.316 |
| 週期(s) | 1.900 | 1.933 | 1.943 | 2.025 | |

(1) 如表(15)，可發現雙輪組的振幅越擺越大。

表 (15)

(2) 如表(15)，可推測雙輪組的週期會越來越大。

(3) 在雙輪組下滑的過程中，其 y-t 圖的階梯狀越來越明顯。

2. 第二組：

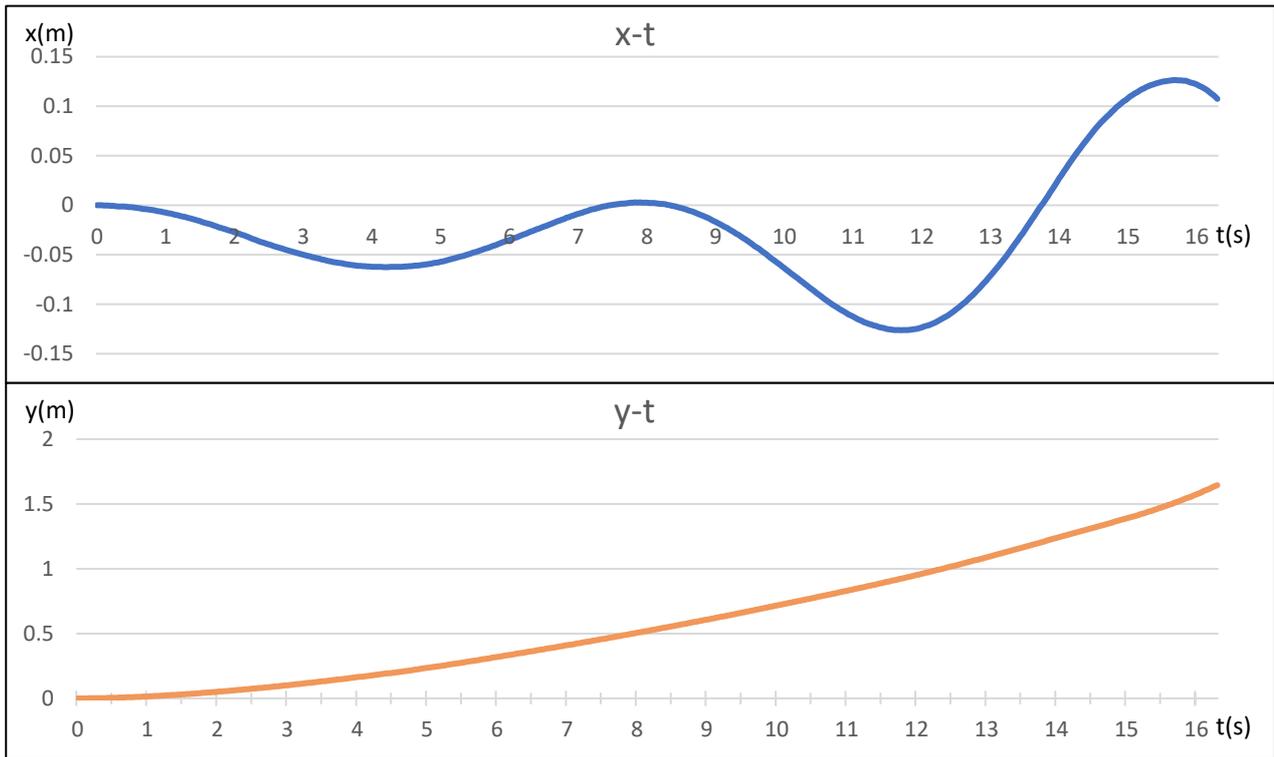


圖 (19-1) (上) 傾角 14 度、釋放角 10 度 x-t 圖

圖 (19-2) (下) 傾角 14 度、釋放角 10 度 y-t 圖

| | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 |
|-------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.033 | 0.064 | 0.125 |
| 週期(s) | 1.875 | 1.950 | |

表 (16)

- (1) 如表(16)，可以發現振幅越擺越大，且振幅的增加以倍數成長。
- (2) 如表(16)，可以發現週期有些微的增加。
- (3) 觀察 y-t 圖，可以發現其斜率越來越大。

3. 第三組：

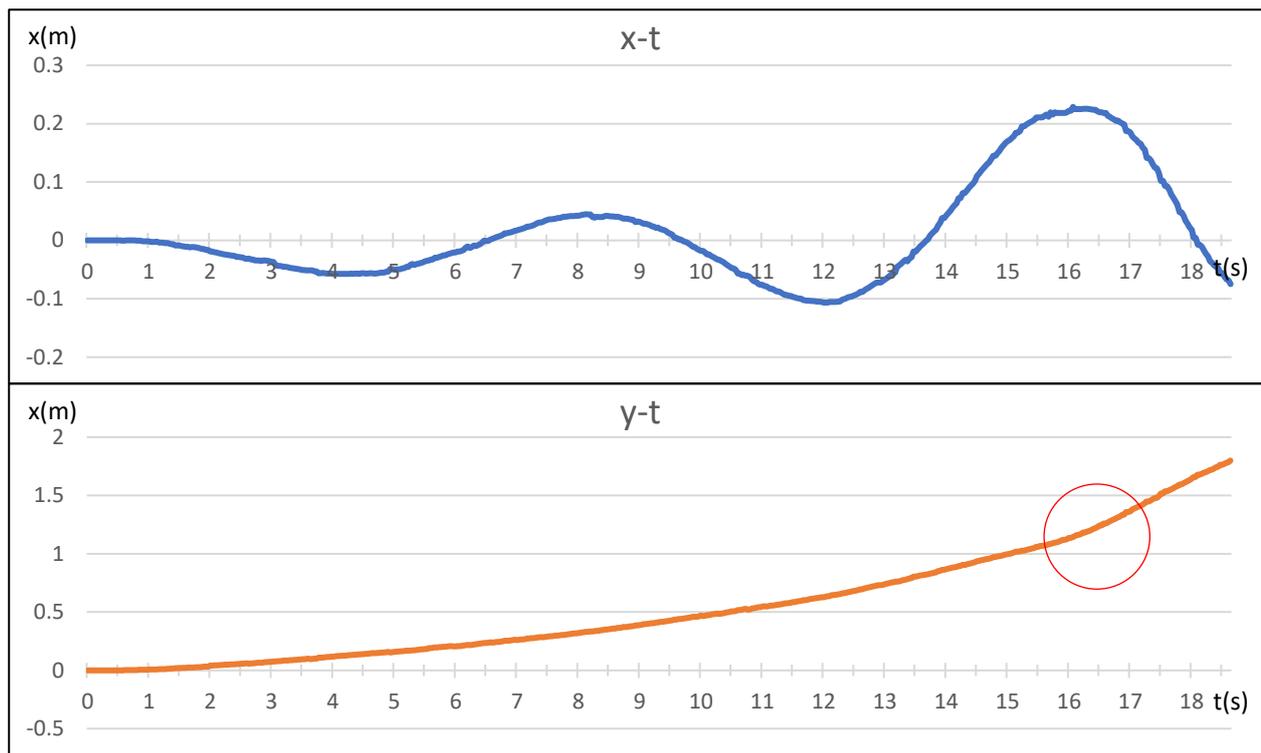


圖 (20-1) (上) 傾角 15 度、釋放角 10 度 $x-t$ 圖

圖 (20-2) (下) 傾角 15 度、釋放角 10 度 $y-t$ 圖

| | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 |
|-------|--------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.0513 | 0.076 | 0.168 |
| 週期(s) | 2.008 | 1.983 | |

表 (17)

- (1) 如表(17)，可以發現振幅越擺越大。
- (2) 可以發現第三個振幅的量值比第二個增加一倍以上。
- (3) 如表(17)，可以發現週期沒什麼變化。
- (4) 觀察 $y-t$ 圖，可以發現在大約釋放 16 秒後，斜率突然增加。

由(4)，我們回去看了之前實驗所做的影片，發現雙輪組擺到最後都可能發生雙輪組的大輪擺超過小輪，也就是擺角大於 90° 的現象。因此，我們在這邊定義這個現象稱為反轉。

四、有關反轉的現象

(一) x-t 圖

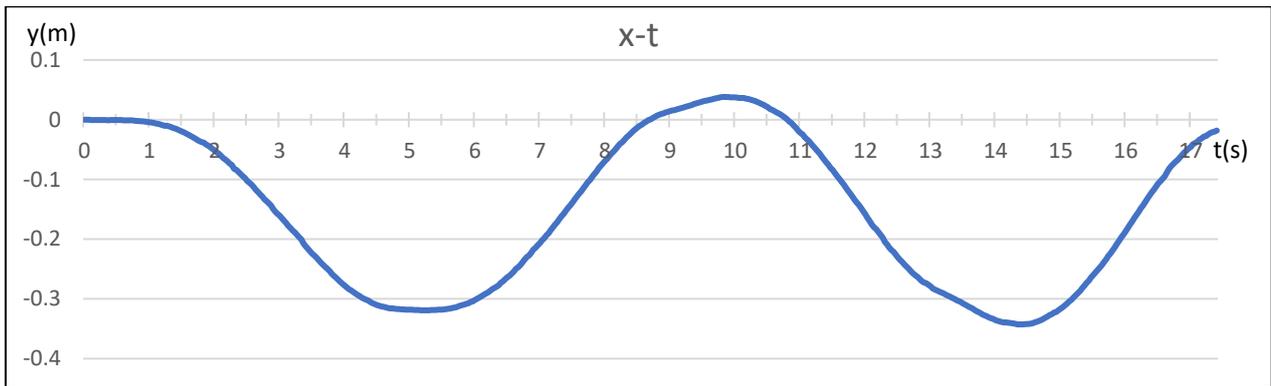


圖 (21) 傾角 10 度、釋放角 90 度 x-t 圖

1. 如圖(21)，在第一個轉折點時，雙輪組還沒有反轉（但幾乎反轉，大小輪接近平行），從第二個波開始有反轉。可以發現，兩者的波形有些不同。有反轉的波看起來有兩個轉折的地方。
2. 如圖(21)，我們知道，擺角會越來越大。觀察第二、三個轉折點，可以發現擺角越大，反轉所造成的轉折越小。

(二) y-t 圖

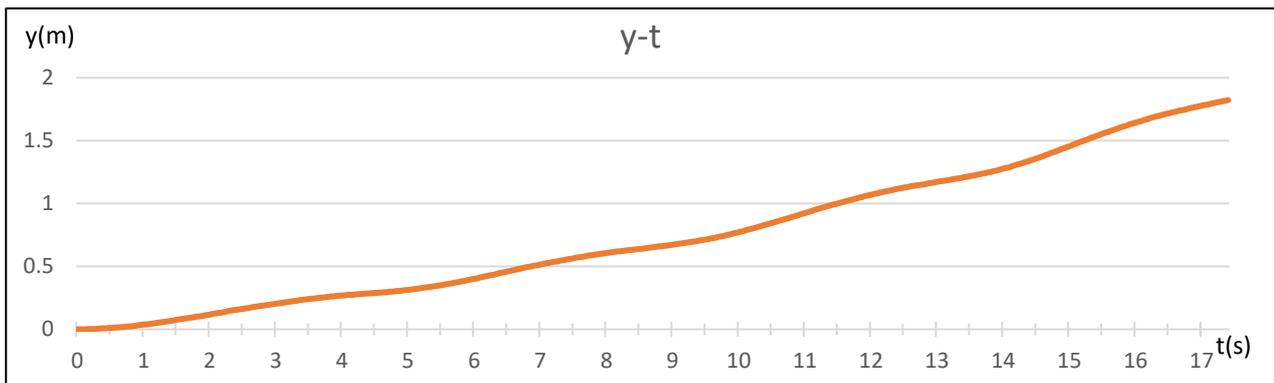


圖 (22) 傾角 10 度、釋放角 90 度 y-t 圖

觀察 y-t 圖，相較一般沒有反轉的二次曲線，可以發現有反轉的 y-t 圖像是一階梯狀的曲線，亦可看作：每經過一次反轉，下滑的速度就會增加，y-t 圖的斜率就會突然增大。

五、實驗三

(一) 分析雙輪組的運動行為

1. θ -t 圖、y-t 圖

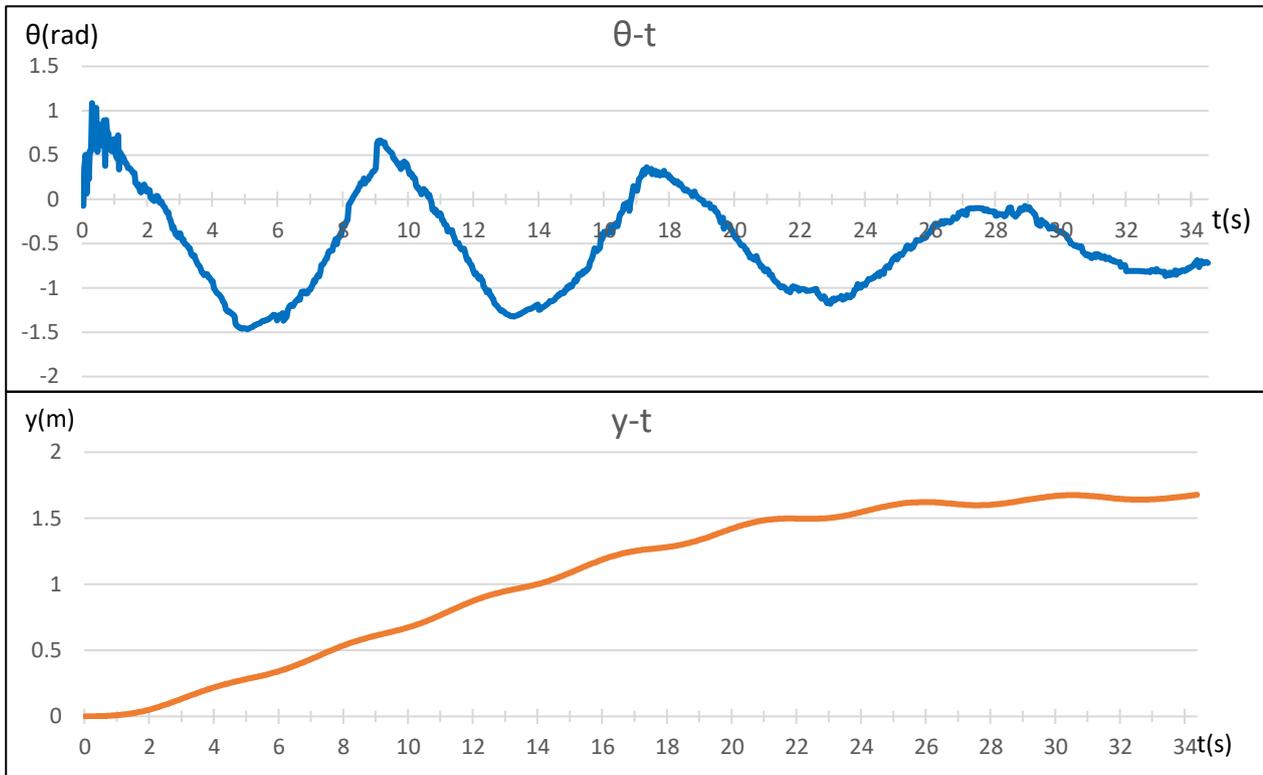


圖 (23-1) (上) 傾角 9 度、釋放角 110 度 θ -t 圖

圖 (23-2) (下) 傾角 9 度、釋放角 110 度 y-t 圖

| | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 | 第 6 次 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 振幅(m) | 0.129 | 0.133 | 0.145 | 0.140 | 0.130 | 0.114 |
| 週期(s) | 1.958 | 1.992 | 2.175 | 2.325 | 2.508 | |

表 (18)

- (1) 觀察 θ -t 圖，發現雙輪組的擺角變小，且 θ 一開始變化並不大。
- (2) 由影片得知，振幅變小的上個波峰是大、小輪大約平行時，振幅比反轉時大。
- (3) 如表(18)，可以發現週期幾乎不變。
- (4) 觀察 y-t 圖，可以發現不下滑時曲線的階梯狀會變明顯。

六、雙輪組的運動模式分類：

(一) 不下滑、擺角愈來愈小

1. 釋放角度 50° 以下的雙輪組
2. 傾角 10° 的雙輪組

(二) 下滑、擺角愈來愈大

1. 每一種半徑比的雙輪組
2. 每一種軸距的雙輪組
3. 釋放角度 70° 以上雙輪組
4. 每一種質量的雙輪組
5. 傾角 11°、12° 的雙輪組

(三) 下滑、擺角愈來愈小

釋放角度 110°、傾角 9° 的 20 克金屬墊片雙輪組

陸、 討論

一、計算雙輪組的轉動慣量：

雙輪組的運動模式可細分成三個部分，分別為：雙輪組繞其中心軸 η 轉動、雙輪組繞其轉動中心點 O （如圖(24) (25)）、雙輪組的大輪和小輪繞質心轉動。

(一) 代號說明

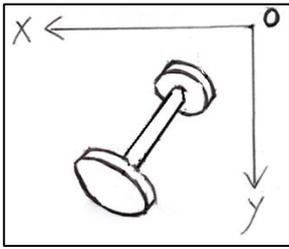
| 物理量 項目 | | 質量 | 半徑 | 摩擦力 | 軸距 | 斜面 傾角 | 釋放 角度 | 質心與 O 點的距離 |
|-----------|----|-------|-------|----------|-----|----------|----------|---------------|
| 代 號 | 小輪 | m_1 | R_1 | f_{x1} | l | ϕ | θ | r_{CM} |
| | 大輪 | m_2 | R_2 | f_{x2} | | | | |
| | 輪軸 | m_0 | R_0 | / | | | | |

(二) 雙輪組繞其幾何對稱中心軸 η 的轉動慣量：

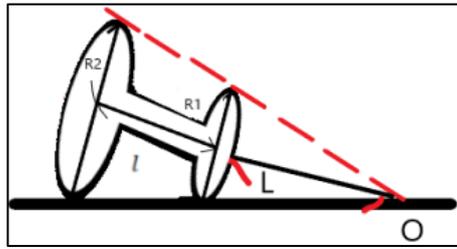
表 (19)

將雙輪組想成一個實心圓柱與兩個圓盤（如圖(26)），可得到轉動慣量 I_η ：

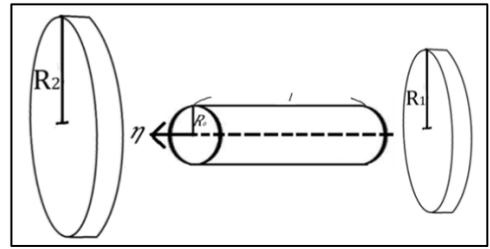
$$I_\eta = \frac{1}{2} m_0 R_0^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 + \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \text{-----(1)}$$



圖(24) O 點位置示意圖-1



圖(25)中心點 O 位置示意圖-2



圖(26)雙輪組示意圖

(三) 雙輪組繞其轉動中心點 O 的轉動慣量 I_O :

考慮中心點 O 的位置，根據相似三角形性質，可得 O 點與小輪圓心的距離 L :

$$L = \frac{lR_1}{(R_2 - R_1)} \text{-----}(2)$$

根據正交軸定理與平行軸定理，可得轉動慣量 I_O :

$$I_O = \frac{1}{4}m_1R_1^2 + m_1L^2 + \frac{1}{4}m_2R_2^2 + m_2(L + l)^2 + \frac{1}{12}m_0(3R_0^2 + l^2) + m_0(L + \frac{l}{2})^2 \text{-----}(3)$$

(四) 雙輪組繞其質心旋轉的轉動慣量 I_{CM} :

同理式(3)，可得轉動慣量 I_{CM} :

$$I_{CM} = \frac{1}{4}m_1R_1^2 + m_1(r_{CM} - L)^2 + \frac{1}{4}m_2R_2^2 + m_2(L + l - r_{CM})^2 + \frac{1}{12}m_0(3R_0^2 + l^2) + m_0(r_{CM} - L - \frac{1}{2}l)^2 \text{-----}(4)$$

(五) 3D 列印雙輪組與金屬墊片雙輪組之轉動慣量 :

根據實驗所得的數據以及式(1) (3) (4)，我們求得 3D 列印雙輪組與金屬墊片雙輪組之轉動慣量

| 雙輪組 轉動慣量(kg * m ²) | 3D 列印雙輪組 (半徑比 0.7、軸距 5cm) | 金屬墊片雙輪組 (質量 20 克) |
|-----------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| I_η | 1.7344×10^{-6} | 7.0849×10^{-6} |
| I_O | 1.1830×10^{-3} | 3.8788×10^{-3} |
| I_{CM} | 1.0047×10^{-5} | 1.6034×10^{-4} |

【附註】轉動慣量數量級小，是因為單位是 kg * m²，與 g * cm² 相差甚遠。

表 (20)

二、分析雙輪組與 y 軸夾角 θ 時的運動模式

(一) 擺動、不下滑：

由實驗得知，雙輪組在某些條件下會遵循擺動、不下滑的運動模式。我們推測其原因可能與摩擦力和重力產生的力矩相關，並猜測其可能為阻尼諧動的運動方程式。所以，我們現在先對雙輪組，這一個剛體，在慣性坐標系中進行力分析：

現在有一雙輪組在斜面上（如圖 27），我們定雙輪組繞的轉動半徑中心點 O 為原點， z 軸通過 O 點垂直斜面， y 軸平行斜面向下， x 軸垂直 y 軸向左。雙輪組與原點的連心線，也就是 η 軸，與 y 軸所夾的角度為 θ ，斜面的傾角為 ϕ 。

如圖(27)，若總質量為 M ，則可知雙輪組的質心會受一沿著斜面向下的重力的分量 $Mg \sin \phi$ 。我們另定一個坐標系，用來推測雙輪組的摩擦力的方向：我們令平行 η 軸指向 O 點為正 y' 軸，垂直 y' 軸的為 x' 軸。可以推測，靜摩擦力 f_x 會平行 x' 軸，指向 x' 軸的負方向，並且還會有 f_y 指向 O 點，使雙輪組在 y' 的方向不下滑。除此之外，因為會滾動，所以還要考慮滾動摩擦力矩。

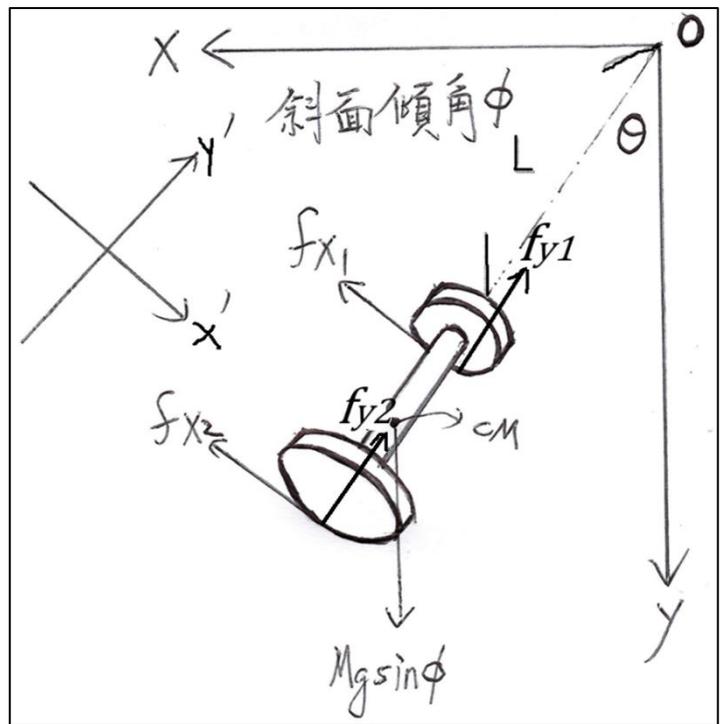
因此，當我們定順時針為正時，可寫出雙輪組的轉動方程式 $\tau =$

$$I_O \ddot{\theta} = -r_{CM} Mg \sin \phi \sin \theta + f_{x1} L + f_{x2} (L + l) - b(L + l)^2 \dot{\theta} - bL^2 \dot{\theta} \text{-----(5)}$$

其中，因為雙輪組不下滑，可推測此時為純滾動，因此，我們可以有一個摩擦力 f_x 在二維平面上的相關方程式：

$$f_{x1} R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \frac{a_{t1}}{R_1} \text{-----(6)}$$

$$f_{x2} R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \frac{a_{t2}}{R_2} \text{-----(7)}$$



圖(27) 不下滑雙輪組之力分析圖

所以，可得到 f_x

$$f_{x_1} = \frac{1}{2}m_1 a_{t_1} = -\frac{1}{2}m_1 L \ddot{\theta} \text{-----}(8)$$

$$f_{x_2} = \frac{1}{2}m_2 a_{t_2} = -\frac{1}{2}m_2(L+l)\ddot{\theta} \text{-----}(9)$$

又因為雙輪組不下滑， θ 可趨近於 0，則：

$$\because \theta \rightarrow 0 \quad \therefore \sin \theta \approx \theta$$

因此，原式可改成：

$$I_O \ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_1 L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_2(L+l)^2 \ddot{\theta} + b[(L+l)^2 + L^2] \dot{\theta} + r_{CM}(Mg \sin \phi)\theta = 0 \text{-----}(10)$$

整理可得

$$\left(I_O + \frac{1}{2}m_1 L^2 + \frac{1}{2}m_2(L+l)^2\right) \ddot{\theta} + b[(L+l)^2 + L^2] \dot{\theta} + r_{CM}(Mg \sin \phi)\theta = 0 \text{-----}(11)$$

我們可以發現，此方程式比一般的角簡諧運動還多了一個 θ 的一次微分項。因此，可以得知當雙輪組在原地擺動不下滑時，其運動模式即為角阻尼運動。

三、分析各種變因對運動模式之影響

(一) 振幅：

1. 從實驗結果可以發現，半徑比越大、軸距越大皆會造成雙輪組擺動的振幅變大，我們可推測：其實改變半徑比和改變軸距是類似的。根據式(5)：當半徑比變大，即小輪的半徑 R_1 變大，所以 L 變大；而當軸距 l 變大， L 也會變大。可以發現：改變半徑比和改變軸距主要影響的都是 O 軸與小輪圓心的距離 L ，若 L 增加，則重力位能變化量也較大，因此產生較大的振幅。
2. 從實驗結果可以發現，在 $20^\circ \sim 90^\circ$ 時，釋放角度越大，振幅越大；然而，在 $100^\circ \sim 170^\circ$ 卻看不出有振幅變大的趨勢。但比較這兩組的振幅，可以發現釋放角度 $100^\circ \sim 170^\circ$ 的振幅會比 $20^\circ \sim 90^\circ$ 的振幅大。從我們推導出的一般解中並沒有受到釋放角度影響的項。因此，我們可推測釋放角度只影響下滑的初速度，不會在下滑的過程中造成影響。所以：初速越大，振幅越大。而且，在釋放角度大於 100° 之後，影響的

初速並不大，可推測雙輪組從不同釋放角度($100^{\circ}\sim 170^{\circ}$)下滑到 90° 的那瞬間，速度幾乎一樣。而這也是為什麼釋放角度 90° 的振幅和釋放角度 $100^{\circ}\sim 170^{\circ}$ 的振幅有差—— $100^{\circ}\sim 170^{\circ}$ 的雙輪組擺到 90° 時已經有速度，不是靜止的。

而釋放角度較小時($10^{\circ}\sim 60^{\circ}$)，雙輪組不會下滑到斜面底部。振幅會隨著角度增加而變大，下滑的距離也會增長；到了角度 60° 時，可以發現雙輪組下滑的距離明顯增加，角度 70° 就會滑到斜面底部。我們推測 $60^{\circ}\sim 70^{\circ}$ 之間有一個釋放角度之臨界值，決定了雙輪組是否下滑。但因為無法量出精準的小角度，所以我們只能大概知道在斜面傾角 10.5° 時，雙輪組下滑與不下滑的臨界點，是釋放角度 $60^{\circ}\sim 70^{\circ}$ 之間。

(二) 週期：

1. 根據實驗結果，我們得到：半徑比越大，週期越大；軸距越大，週期越大。因為我們無法求出下滑的方程式的一般解，因此，我們將雙輪組視為物理擺，推測雙輪組的週期。當半徑比或軸距越大，雙輪組的轉動慣量就越大，週期也就越大。
2. 根據我們得到的數據，雙輪組的週期和初始角度沒有關係，正如我們在一般解中看到的，角度並不是影響週期的其中一個變因。
3. 從改變質量的實驗結果可以觀察到，質量越大，週期越大。我們推測是因為質量較大的雙輪組，轉動慣量較大的原因。從物理擺的週期的方程式可以得知：轉動慣量越大，週期越大。
4. 根據觀察，傾角變大，週期也會變大。當雙輪組下滑時，可推測是因為 ϕ 變大， $\cos \phi$ 就變小，正向力和動摩擦力因此變小。這使雙輪組在轉折點時，動摩擦力需做功比較長的時間，所以週期比較大。而不下滑的雙輪組，可以直接從振幅推測，傾角越大，振幅越大，週期就越大。

四、分析雙輪組下滑時，在斜面上的運動模式：

(一) 用能量守恆定律推論其運動情形

首先，我們討論雙輪組下滑的原因。假設斜面底部位能為 0，釋放瞬間雙輪組總能量為 mgh ， h 為雙輪組所在位置的高度。當雙輪組下滑時，重力位能會先轉換成質心動能，再轉換成轉動動能。所以，當質心先有動能而使雙輪組下滑後，才會轉動。因此，在斜面傾角、或釋放角度不大時，雙輪組質心的位能不大，在被摩擦力消耗後，就無法提供雙輪組足夠的轉動，甚至是下滑。

接下來，我們討論雙輪組振幅越擺越大的原因。我們知道雙輪組下滑時，位能會轉換成平移動能和轉動動能。然而，我們可以看到雙輪組的 $y-t$ 圖斜率並不大，因此，我們推論雙輪組下滑時，位能變化率 $\frac{dU}{dt}$ 應是轉換成轉動動能較多，質心的平移動能較少。所以，我們可以觀察到雙輪組擺角越來越大，振幅越擺越大的情形，也就是反阻尼運動。

最後，我們來討論雙輪組的阻尼運動，和下滑、但擺角卻越擺越小的情形。因為重力位能不足以使雙輪組下滑，又有滾動摩擦力矩作負功，所以雙輪組只能在原地擺動。至於下滑、但越擺越小的原因，可以推論在這個實驗的傾角（斜面傾角 9° ）時，其實本來就應該不會下滑，只是因為釋放角度較大（釋放角度 110° ），所以一開始的位能還足夠轉換成平移動能，而隨著雙輪組越擺越低，位能變化率就不足以提供雙輪組抵抗摩擦力的能量，自然就停在原地不下滑了。

(二) 討論雙輪組反轉的運動情形

根據雙輪組反轉時所看到的 $x-t$ 圖及 $y-t$ 圖，可以發現在 $x-t$ 圖斜率為 0 時， $y-t$ 圖會突然陡增，這可能是因為反轉時，大輪的高度比小輪高，質心所擁有的位能也比沒反轉時的位能大，因此，雙輪組會有更多位能可以轉換成平移動能， $y-t$ 圖斜率也因此突然增加。我們也可以推測，有關雙輪組 $y-t$ 圖階梯狀的原因為：反轉的雙輪組，在下滑的過程中，擺到轉折點前需要耗費比較大的動能去轉換成位能，而因為位能較大，轉換成的動能也比較多，所以轉折點前後的動能的差值比沒有反轉的雙輪組大，所以在 $y-t$ 圖會有較明顯的階梯狀。而隨著雙輪組在斜面上下滑的過程中，擺角會越來越大， $y-t$ 圖斜率增加的幅度就越多，階梯狀也就越明顯。

我們也可以發現，除了反轉會有階梯狀的 $y-t$ 圖，下滑但越擺越小的雙輪組也會有類似的 $y-t$ 圖。然而，和反阻尼即反轉的雙輪組不一樣， y 方向的速度是越來越小。我們推測，在一開始以 110° 釋放時，雙輪組就有反轉的現象，因此有階梯狀的 $y-t$ 圖。然而，我們可以發現，有別於反轉的雙輪組的斜率越增越多，雙輪組的 $y-t$ 圖斜率是遞減的，而且會越減越少，而這就是為什麼雙輪組擺到最後的 $y-t$ 圖看起來為波浪狀。

最後，有關雙輪組反轉時的 $x-t$ 圖，我們可以推論，也許這和小輪在反轉時的運動軌跡有關。我們重新觀察影片，發現其實雙輪組在擺到轉折點的前一刻，雙輪組洽發生反轉。但和我們想像中不同的是，並不是雙輪組的大輪往上擺超過小輪，而是小輪往下擺，形成大輪高於小輪的情形，也就是我們所說的反轉。接著，換大輪擺的速率變快，往下擺直到和小輪平行，也就是 $x-t$ 圖看到的轉折點（斜率為 0 之處）。最後，雙輪組開始往回擺，其在 y 方向的速度同時突然增加，極為 $y-t$ 圖斜率突增之處。

柒、 結論

一、雙輪組在斜面的運動模式分類：

(一) 雙輪組不下滑，而是在原地擺動時，其 η 軸與 y 軸之夾角 θ 為一角阻尼運動，運動方程式如下：

$$\left(I_o + \frac{1}{2}m_1L^2 + \frac{1}{2}m_2(L+l)^2\right)\ddot{\theta} + b[(L+l)^2 + L^2]\dot{\theta} + r_{CM}(Mg \sin \phi)\theta = 0$$

(二) 雙輪組邊擺動、邊下滑時，其 η 軸與 y 軸之夾角 θ 為一反阻尼角簡諧振盪運動。

(三) 下滑，但擺動的角度越變越小的雙輪組為特例，儘管雙輪組會下滑，但在下滑過程中，其 $\theta-t$ 圖振幅越變越小； $y-t$ 圖斜率遞減，且越減越少。

二、各種變因對雙輪組的影響：

(一) 雙輪組的半徑比、軸距越大，其振幅和週期都會越大。

- (二) 雙輪組的釋放角度越大，振幅會越大，但週期不會改變；釋放角度越大，雙輪組越容易發生反轉。
- (三) 雙輪組的質量增加，振幅會增加，而週期則會變長。
- (四) 斜面傾角增加，週期和振幅皆變大；斜面傾角越大，雙輪組越容易發生反阻尼運動，並且伴隨反轉的現象。

三、雙輪組反轉時的運動行為：

- (一) 反轉被定義為：大輪的高度比小輪還高。
- (二) 反轉的整個行為會發生在雙輪組擺到轉折點(斜率為 0 之處)前。
- (三) 反轉現象的發生並不是大輪往上擺超過小輪，而是小輪往下擺所造成的。
- (四) 反轉後，擺到轉折點時，雙輪組在 y 方向的速度會突然增加，而且越增加越多。

捌、參考資料及其他

一、中文部分

【一本書】

Douglas C. Giancoli(民 100)。普通物理上冊(4 版)。臺北市:培生教育、東華。

二、英文部分

【摘要資料】

Rod Cross (2024). An oscillating screw sliding down an incline IOPscience, 50, 750 – 765.

Published 24 November 2023, from : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/ad0b4a>

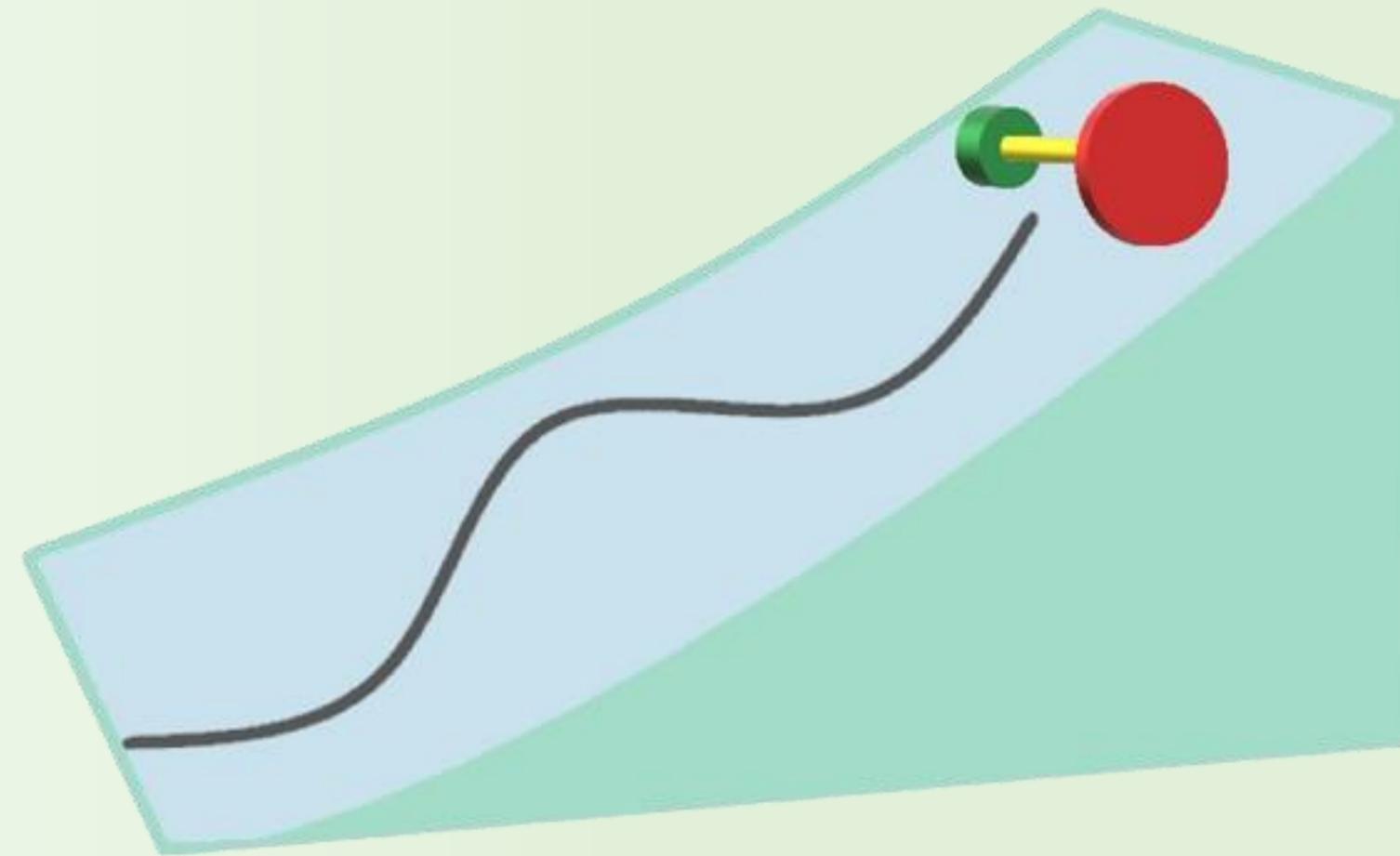
Gábor Csernák(2019)Analysis of pole acceleration in spatial motions by the generalization of pole changing velocity, from : <https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-019-02408-9>

【評語】 051806

參賽者透過簡單的實驗，探討螺絲雙輪組的運動模式與其物理意義。實驗以棍端圓板的大小、單端圓板、雙端圓板、棍長為實驗參數，拍攝棍下滑的運動，繪製振幅及傾斜角，是一個有趣的實驗觀察。參賽者在展示過程中表現出色，能夠清晰地解釋實驗原理和結果，回答問題時反應敏捷，展示出優秀的科學素養。未來可加強實驗結果與理論的比較，進行較深入的分析以現新穎。

作品簡報

輪迴轉勢



壹、研究動機

2023年IYPT的其中一題提到，當螺絲側放在斜面上釋放後，螺絲沿著斜面下滑時可能有越來越大的擺動。這讓我們十分好奇，用螺絲實際測試後發現不同的釋放方式就會表現出不同的運動行為，並且不同種類、型態的螺絲之運動情形也各異。於是便自製3D列印雙輪組進行實驗，希望能了解其運動模式與相關的物理意義。

貳、研究目的

- (一) 觀察雙輪組在斜面上釋放後的運動模式
- (二) 探討雙輪組之本身條件對其運動情形之影響
 1. 大小輪半徑比值
 2. 大小輪之間距(軸長)
 3. 雙輪組總質量
 4. 大小輪之質量分布
- (三) 探討雙輪組之外在條件對其運動情形之影響
 1. 雙輪組釋放之初始角度
 2. 斜面傾斜角度

參、研究設備及器材

一、實驗設備及器材

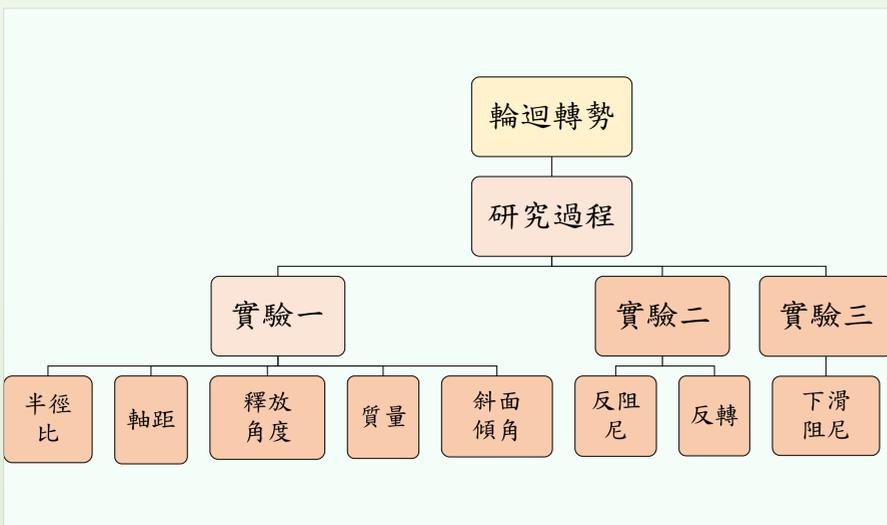
腳架、千斤頂、電子秤、鹵素燈具、3D列印機、PLA 3D線材、噴漆、熱熔膠槍、水平儀、手機、壓克力板、各式螺絲、游標卡尺、金屬墊片

二、實驗軟體

Tracker、phyphox、tinkercad、xyz print 3

肆、研究過程與方法

一、研究架構



二、研究過程

(一) 實驗設計及步驟

裝置架設

- 用千斤頂撐起壓克力板，用phyphox調整傾角。
- 架起腳架，並讓手機與斜面平行。(如圖1、2)

雙輪組製作

- 以螺絲進行發想，設計出有大小輪的雙輪組。
- 用tinkercad繪製3D模型，並印製。(如圖3)

實驗流程

- 將雙輪組於初始角度釋放。(如圖6)
- 手機相機錄影，且每實驗組重複做五次。
- Tracker追蹤運動軌跡(如圖5)，繪製x、y-t圖。

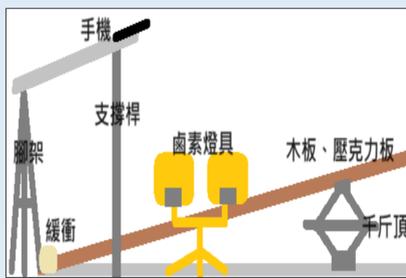


圖1-實驗裝置示意圖



圖2-實驗裝置圖



圖3-自製雙輪組

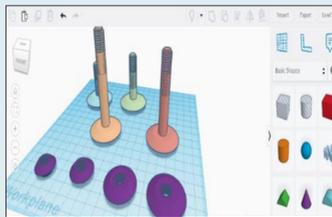


圖4-tinkercad網站

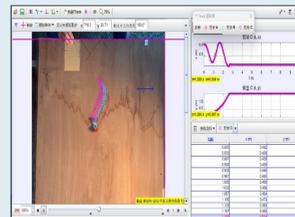


圖5-Tracker追蹤運動軌跡

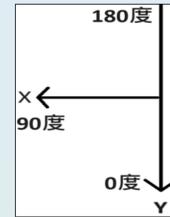


圖6-釋放角示意圖

(二) 前置實驗-螺絲在斜面上的運動模式分析

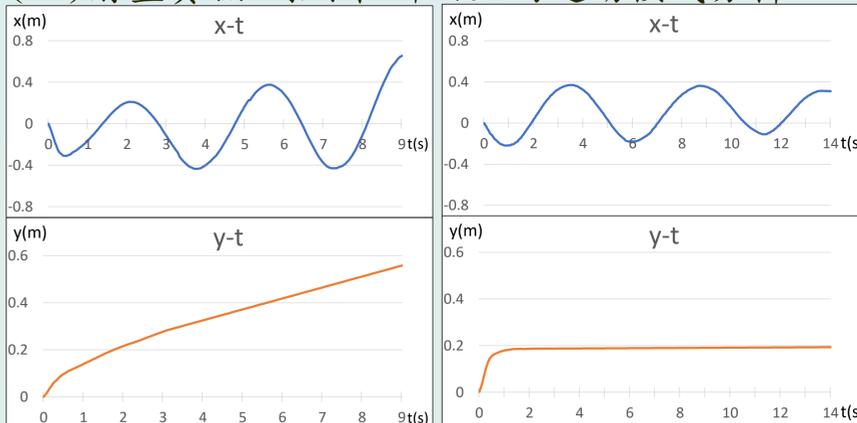


圖7-螺絲邊擺動邊下滑

圖8-螺絲原地擺動不下滑

(三) 正式實驗

• 實驗一 探討不同變因對雙輪組的影響

| 操縱變因 | 控制變因 |
|---|---|
| 一 雙輪組半徑比(小輪/大輪) 大輪半徑固定2cm 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 | 3D列印雙輪組、大輪半徑2.0cm、軸距5.0cm、 初始角度90°、斜面傾角15°、 有噴漆 |
| 二 雙輪組軸距 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 | 3D列印雙輪組、半徑比0.7、 初始角度90°、 斜面傾角15°、有噴漆 |
| 三 雙輪組釋放初始角度 10°~170°(10°一單位) | 3D列印雙輪組、半徑比0.7、 軸距5.0cm、 斜面傾角15°、有噴漆 |
| 四 雙輪組質量 20g 31g 40g | 金屬墊片雙輪組、半徑比0.7 軸距5.0cm 、初始角度90°、斜面傾角 11°、無噴漆 |
| 五 雙輪組質量分布 原重 等重 小輪重 小輪重 4.5g 9g | 3D列印雙輪組、半徑比0.7、 軸距5.0cm、 初始角度90°、斜面傾角11° |
| 六 斜面傾角 10° 11° 12° | 金屬墊片雙輪組、半徑比0.7 軸距5.0cm、 初始角度90°、總質量31g |

• 實驗二 探討雙輪組下滑與反阻尼運動之關聯

| | |
|-----|--------------------------|
| 第一組 | 傾角11°，釋放角度65°，20克金屬墊片雙輪組 |
| 第二組 | 傾角14°，釋放角度10°，20克金屬墊片雙輪組 |
| 第三組 | 傾角15°，釋放角度10°，20克金屬墊片雙輪組 |

• 實驗三 探討雙輪組下滑但沒有反阻尼的情形

| | |
|-----|--------------------------|
| 實驗組 | 傾角9°，釋放角度110°，20克金屬墊片雙輪組 |
|-----|--------------------------|

伍、研究結果

• 實驗一

(一) 改變半徑比

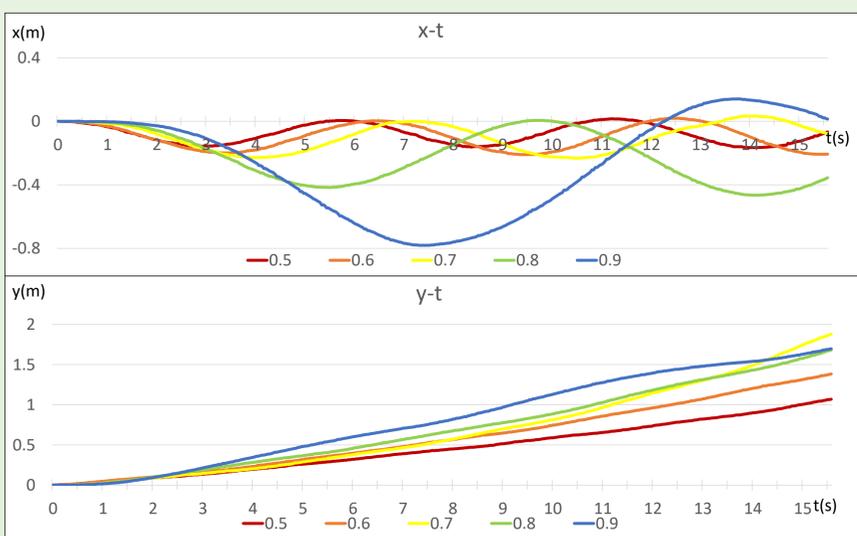


圖9-不同半徑比x-t圖及y-t圖

(二) 改變軸距

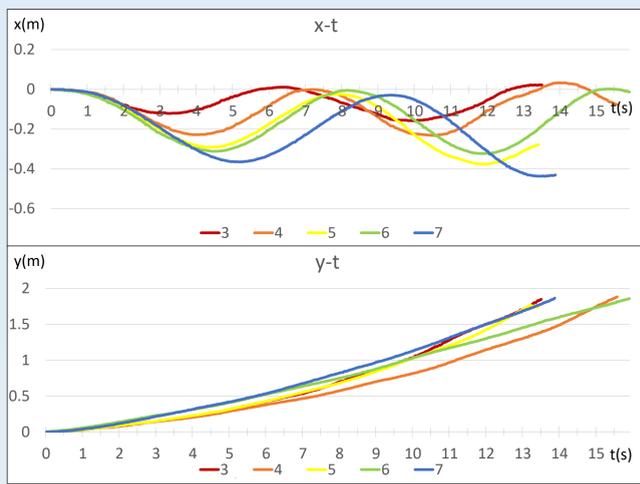


圖8-不同軸距x-t圖及y-t圖

(三) 改變釋放角度

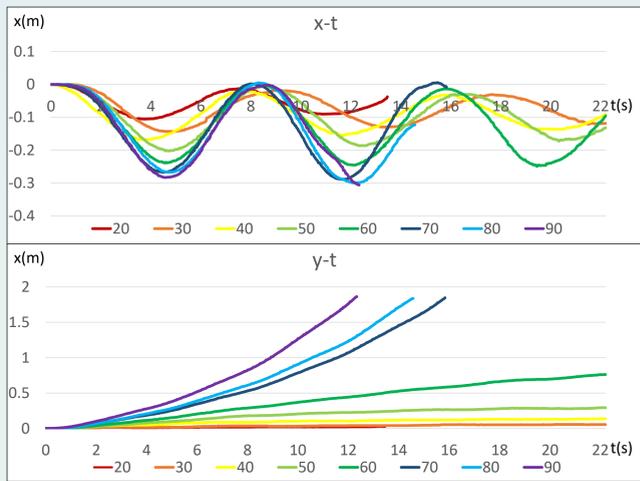


圖10-釋放角度20°-90°x-t圖及y-t圖

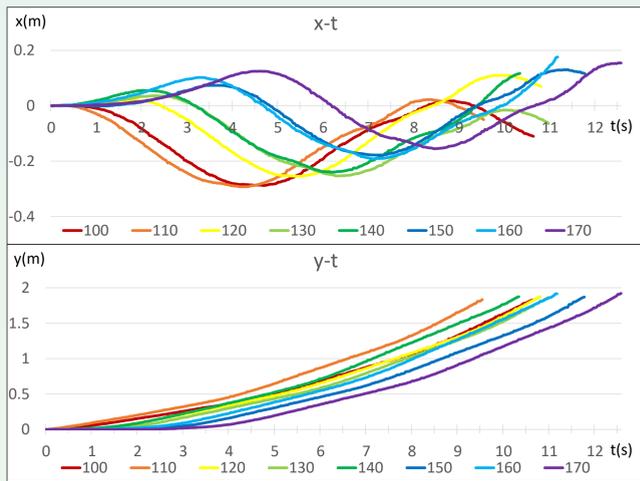


圖11-釋放角度100°-170°x-t圖及y-t圖

(四) 改變質量

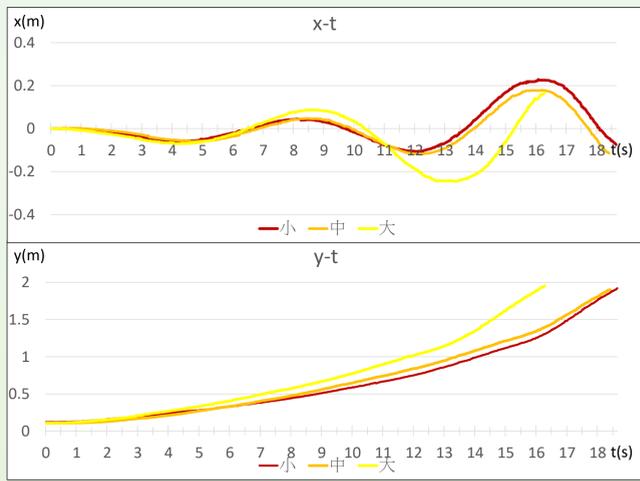


圖12-不同質量x-t圖及y-t圖

(五) 改變傾角

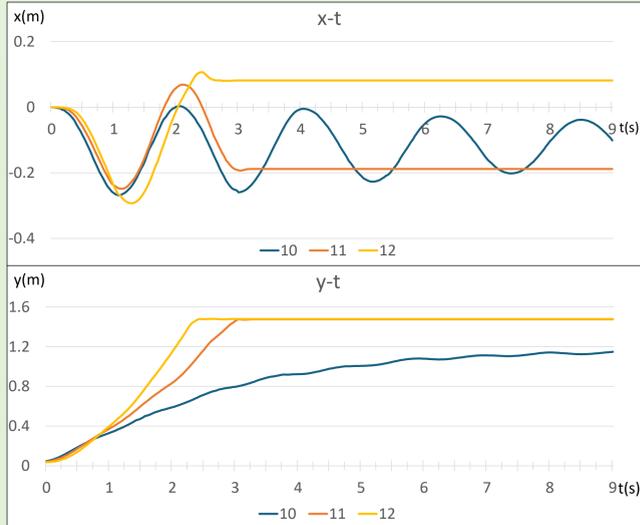


圖13-不同傾角x-t圖及y-t圖

· 實驗二

(一) 第一組

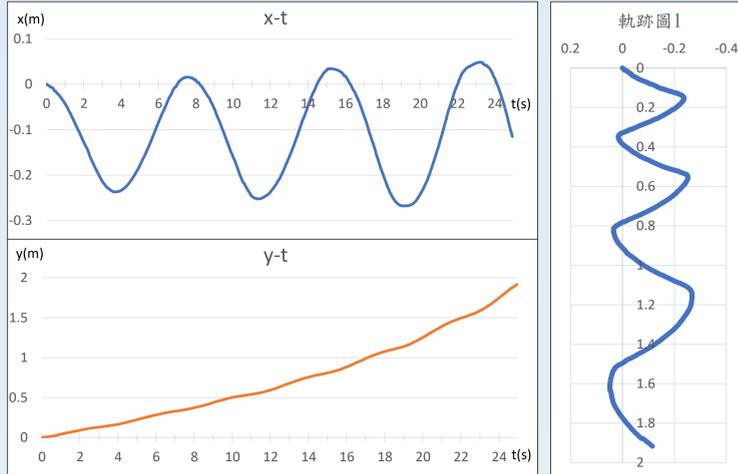


圖14-傾角10度、釋放角65度x-t圖及y-t圖

(二) 第二組

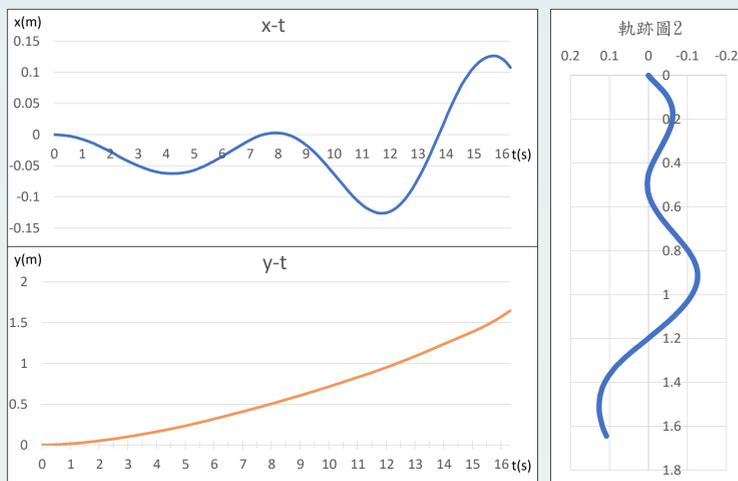


圖15-傾角14度、釋放角10度x-t圖及y-t圖

(三) 第三組

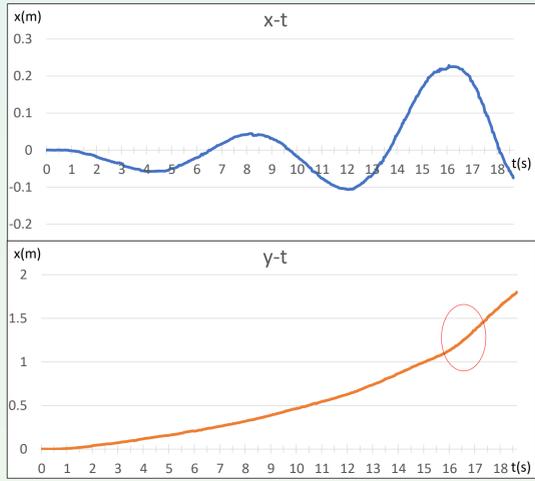


圖16-傾角15度、釋放角10度x-t圖及y-t圖

(四) 反轉現象

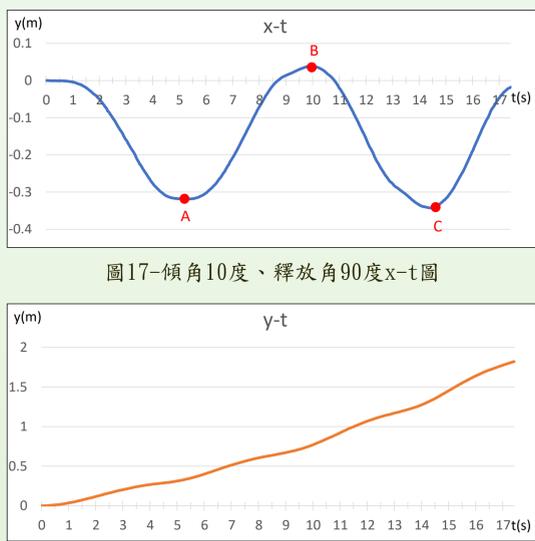


圖17-傾角10度、釋放角90度x-t圖

· 實驗三

雙輪組下滑(沒有反阻尼)

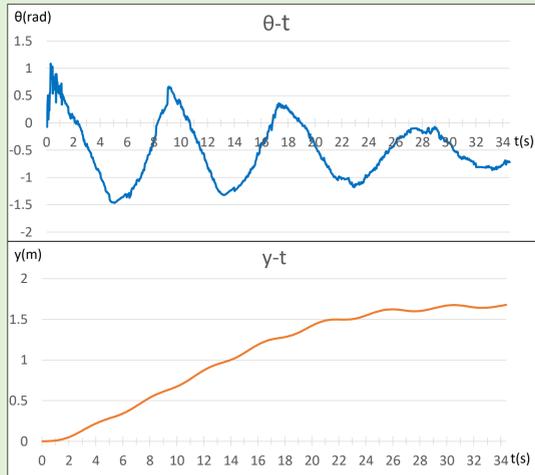


圖19-傾角9度、釋放角110度theta-t圖及y-t圖

1. 雙輪組的振幅越擺越大(如軌跡圖1)。
2. 雙輪組的週期會越來越大。
3. 在雙輪組下滑的過程中，其y-t圖的階梯狀越來越明顯。

1. 振幅越擺越大，且振幅的增加以倍數成長(如軌跡圖2)。
2. 週期有些微的增加。
3. 觀察y-t圖，可以發現其斜率越來越大。

1. 振幅越擺越大，週期變化不明顯。
2. 發現第三個振幅的量值比第二個增加一倍以上。
3. 觀察y-t圖，發現在大約釋放16秒後，斜率突然增加。
4. 看了之前實驗所做的影片，發現雙輪組擺到最後都可能發生雙輪組的大輪擺超過小輪，也就是擺角大於90°的現象。因此，我們定義這個現象稱為反轉。

1. 在A點時，雙輪組還沒有反轉(但幾乎反轉，大小輪接近平行)，從B點開始有反轉。可以發現，兩者的圖形有些不同。有反轉的B點看起有兩個轉折的地方。
2. 觀察第B、C兩點，可以發現擺角越大，反轉所造成的轉折越小。
3. 觀察y-t圖，相較一般沒有反轉的二次曲線，可以發現有反轉的y-t圖像是一個階梯狀的曲線，亦可看作：每經過一次反轉，下滑的速度就會增加，y-t圖的斜率就會突然增大。

陸、討論

一、代號說明

| 項目 | 物理量 | 質量 | 半徑 | 摩擦力 | 軸距 | 斜面傾角 | 釋放角度 | 質心與O點的距離 |
|----|-----|-------|-------|----------|-----|--------|----------|----------|
| 代號 | 小輪 | m_1 | R_1 | f_{x1} | l | ϕ | θ | r_{CM} |
| | 大輪 | m_2 | R_2 | f_{x2} | | | | |
| | 輪軸 | m_0 | R_0 | | | | | |

二、分析雙輪組的轉動慣量

(一) 繞 η 軸的總轉動慣量：

$$I_{\eta} = \frac{1}{2}m_0R_0^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 + \frac{1}{2}m_1R_1^2$$

(二) 雙輪組繞其轉動中心點 O 的轉動慣量 I_O ：

$$1. \text{ 透過相似三角形, 得: } L = \frac{lR_1}{(R_2 - R_1)}$$

$$2. I_O = \frac{1}{4}m_1R_1^2 + m_1L^2 + \frac{1}{4}m_2R_2^2 + m_2(L+l)^2 + \frac{1}{12}m_0(3R_0^2 + l^2) + m_0(L + \frac{l}{2})^2$$

(三) 雙輪組繞其質心旋轉的轉動慣量 I_{CM} ：

$$I_{CM} = \frac{1}{4}m_1R_1^2 + m_1(r_{CM} - L)^2 + \frac{1}{4}m_2R_2^2 + m_2(L + l - r_{CM})^2 + \frac{1}{12}m_0(3R_0^2 + l^2) + m_0(r_{CM} - L - \frac{1}{2}l)^2$$

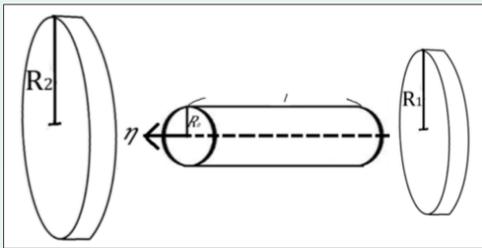


圖21 雙輪組示意圖

三、分析雙輪組的運動模式：

當雙輪組擺動，不下滑

力分析，如圖。

則雙輪組繞 O 軸的合力矩：

$$\tau = I_O \ddot{\theta} = -r_{CM}Mg \sin \phi \sin \theta + f_{x1}L + f_{x2}(L+l) - b(L+l)^2 \dot{\theta} - bL^2 \dot{\theta}$$

$$\text{其中, } f_{x1}R_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 \frac{a_{t1}}{R_1} \quad ; \quad f_{x2}R_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2 \frac{a_{t2}}{R_2}$$

$$\text{得 } f_{x1} = -\frac{1}{2}m_1L\ddot{\theta} \quad ; \quad f_{x2} = -\frac{1}{2}m_2(L+l)\ddot{\theta}$$

$$\text{又 } \because \theta \rightarrow 0 \quad \therefore \sin \theta \approx \theta$$

因此，原式可改成：

$$\left(I_O + \frac{1}{2}m_1L^2 + \frac{1}{2}m_2(L+l)^2 \right) \ddot{\theta} + b[(L+l)^2 + L^2] \dot{\theta} + r_{CM}(Mg \sin \phi)\theta = 0$$

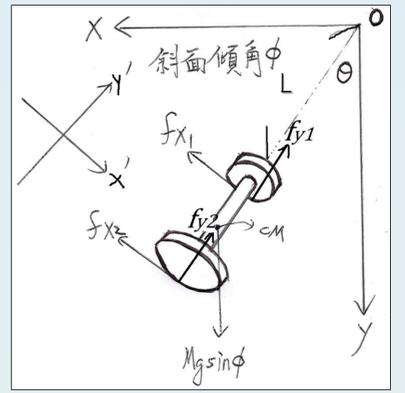


圖20 不下滑雙輪組之力分析圖

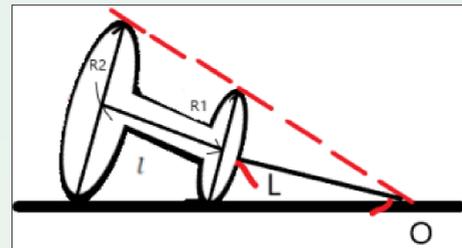


圖22 O點位置示意圖

四、以能量推論雙輪組的運動模式：

(一) 雙輪組下滑時，重力位能先轉換成平移動能，再轉換成轉動動能。

(二) 當質心的位能不大時，剛下滑即被摩擦力做負功所抵銷，在原地做阻尼運動。

(三) 從雙輪組 $y-t$ 圖斜率不大可知，雙輪組的位能變化率轉換成轉動動能較多，所以雙輪組下滑時擺角

($x-t$ 圖振幅) 會越來越大。

柒、結論

一、雙輪組在斜面的運動模式分類：

(一) 雙輪組不下滑，而是在原地擺動時，其 η 軸與 y 軸之夾角 θ 為一角阻尼運動，運動方程式如下：

$$\left(I_O + \frac{1}{2}m_1L^2 + \frac{1}{2}m_2(L+l)^2 \right) \ddot{\theta} + b[(L+l)^2 + L^2] \dot{\theta} + r_{CM}(Mg \sin \phi)\theta = 0$$

(二) 雙輪組邊擺動、邊下滑時，其 η 軸與 y 軸之夾角 θ 為一反阻尼角振盪運動。

(三) 下滑，但擺動角度越變越小的雙輪組，其 $\theta-t$ 圖振幅越變越小； $y-t$ 圖斜率遞減，遞減率越來越小。

二、各種變因對雙輪組的影響：

(一) 雙輪組的半徑比、軸距越大，其振幅和週期都會越大。

(二) 雙輪組的釋放角度越大，振幅會越大，但週期不會改變；釋放角度越大，雙輪組越容易發生反轉。

(三) 雙輪組的質量增加，振幅和週期都會增加。

(四) 斜面傾角增加，週期和振幅皆變大；傾角越大，雙輪組越容易發生反阻尼運動，並伴隨反轉的現象。

三、雙輪組反轉時的運動行為：

(一) 反轉的整個行為會發生在雙輪組擺到轉折點($x-t$ 圖曲線斜率為0之處)前。

(二) 反轉現象的發生並不是大輪往上擺超過小輪，而是小輪往下擺所造成的。

(三) 反轉後，擺到轉折點時，雙輪組在 y 方向的速度會突然增加，而且遞增率越來越大。

捌、參考資料

一、中文部分

【一本書】

Douglas C. Giancoli(民100)。普通物理上冊(4版)。臺北市：培生教育、東華。

二、英文部分

【摘要資料】

Rod Cross (2024). An oscillating screw sliding down an incline. *IOPscience*, 50, 750–765. Published 24 November 2023, from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/ad0b4a>
Gábor Csernák(2019) Analysis of pole acceleration in spatial motions by the generalization of pole changing velocity, from: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-019-02408-9>