

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051804

擺磁必得其解！探討磁擺的運動行為

學校名稱： 國立嘉義高級中學

作者： 高二 方浩宇 高二 林弘唯 高二 賴柏叡	指導老師： 周黛青
---	------------------

關鍵詞： 物理擺、力矩、轉動碰撞

摘要

本研究旨在探討磁擺的運動行為，並建立物理模型及數值模擬探討磁擺運動。我們藉由磁擺擺動軌跡之分析、回復力矩測量及空氣阻力測量實驗釐清影響磁擺運動之重要因素。由實驗及模擬結果可知，磁擺運動中磁鐵棒主要受到重力及磁力之影響，當磁擺接近平衡位置時，磁力之回復力矩達到極大值而主導磁擺運動，而在擺角較大時則由重力主導。磁擺因接近平衡位置時之回復力矩增大，使其角速度、角加速度之變化皆與物理擺明顯不同；且磁擺於通過平衡位置時與支點平面發生碰撞造成磁擺動能損失。此外，當減小擺長時由於磁力不變，使得接近平衡位置之角速度越快，能量損失也越大，擺角衰減也越快。

壹、前言

一、研究動機

將一枚圓柱形磁鐵置於壓克力板上，在壓克力板的對側吸附一磁鐵棒，並將磁鐵棒偏轉至近乎水平，然後釋放磁鐵棒，使磁鐵棒自行來回擺動，我們稱這個實驗為磁擺。磁擺乍看之下與物理擺並無不同，但其在磁力的作用下卻產生了截然不同的運動行為，使我們對於磁擺現象的產生及原理感到十分好奇，也發現在磁鐵顆數不同的情況下產生了不同的結果，因而開始著手進行研究。

二、研究目的

- (一) 磁擺擺動行為及相關物理變因之探討
- (二) 建立力學模型及數值模擬
- (三) 探討改變擺長對擺動行為之影響

貳、研究設備及器材

本實驗所使用之器材如表一所示。

表一、研究設備與器材

磁鐵棒 圓柱形直徑 1cm，高 0.4cm 釹鐵硼磁鐵 20 顆	頂端磁鐵 圓柱形直徑 5cm，高 2.8cm 釹鐵硼磁鐵 1 顆	壓克力板 1 片 厚度 3mm
電子秤 1 台 精密度 $\pm 0.1g$ HD Precision Scale SK-2	Tracker 軟體 版本 6.1.5	輕黏土 1 包
HT201 高斯計 1 台 Range:0~200mT~2000mT, Calibrated with Accuracy : +/- 2% Hengtong magnetolectricity Co. Ltd	PS-3202 拉力計 1 台 解析度 $\pm 0.03N$ PASCO	FDR-AX700 高速攝影機 1 台 Sony
尺 1 支	量角器 1 個	釣魚線 數公尺
定滑輪 1 個	支架 2 副	塑膠夾 1 個

參、研究過程或方法

一、前置實驗

為了解磁擺基本物理性質，我們先進行了以下測量。

(一) 我們將圓柱形磁鐵以 N、S 極相接成磁鐵棒。為了避免不同的排序影響磁場，我們將磁鐵編號以固定每一個圓柱形磁鐵在磁鐵棒中的序列，並以此序列進行所有實驗。

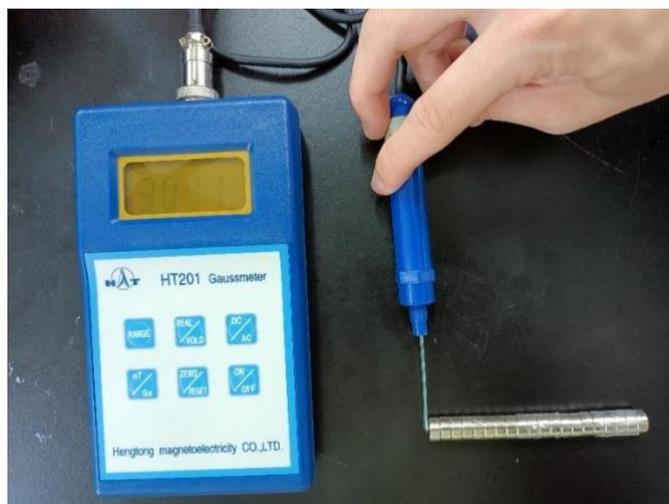
(二) 磁鐵棒質量、長度測量：我們利用尺及電子秤測得磁鐵棒長度 L 、半徑 r 及質量 m ，測量結果如表二所示。

表二、磁鐵棒質量及長度

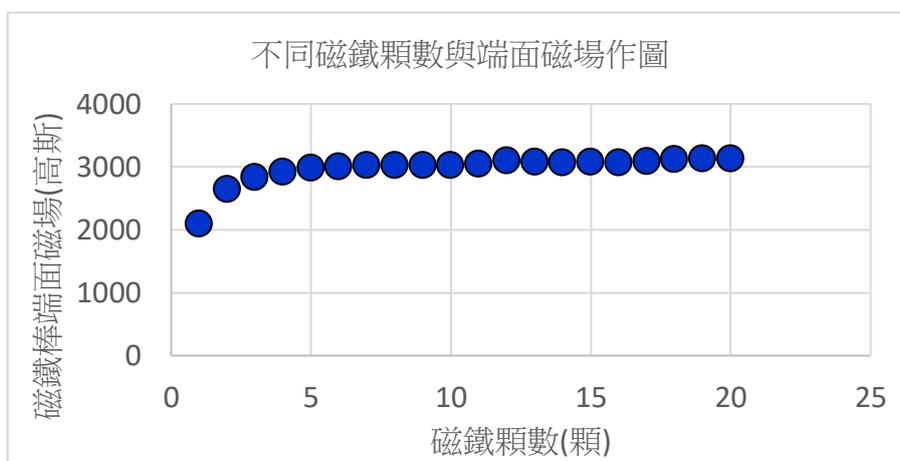
磁鐵棒顆數(顆)	質量 $m(kg)$	長度 $L(m)$	半徑 $r(m)$
20	0.0541	0.095	0.005
18	0.0488	0.0858	0.005
16	0.0434	0.0766	0.005
14	0.0381	0.0674	0.005
12	0.0328	0.0582	0.005
10	0.0275	0.049	0.005
8	0.0221	0.0398	0.005
6	0.0168	0.0306	0.005

(三) 磁鐵棒磁場測量：如圖一(a)，我們將高斯計緊貼磁鐵棒頂面以測量磁場強度，並測量磁鐵顆數對磁場之影響。如圖一(b)所示，磁鐵棒端面的磁場在長度 6 顆以上時，圓柱形磁鐵的磁場便沒有顯著的增長。由此可以知，在磁鐵棒長度大於 6 顆圓柱形磁鐵的情況下，磁鐵擺動所受到磁力的影響差異不大，僅有重力因擺長不同而不同。因此在後續實驗中，我們主要採用磁鐵棒擺長最長的 20 顆至最短的 6 顆之磁擺進行討論。

(a)



(b)



圖一、(a)磁鐵棒磁場測量照片 (b)磁鐵顆數與磁鐵棒末端磁場大小與磁鐵顆數關係

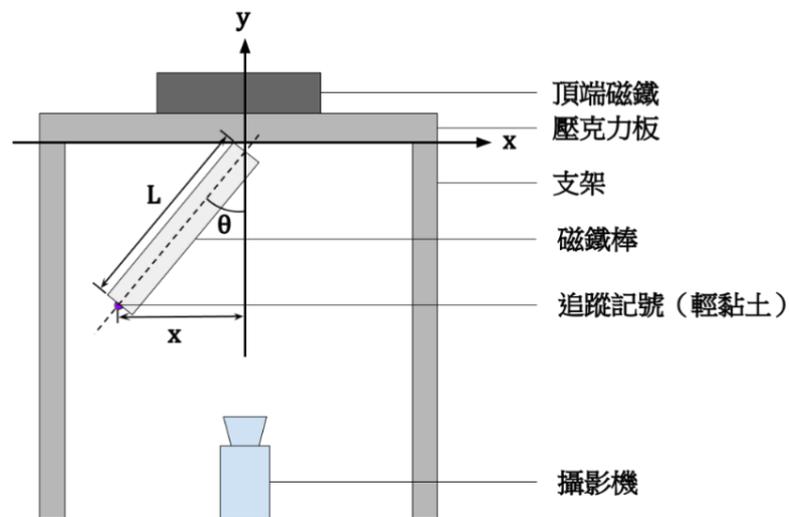
二、實驗架設

為測量磁擺的運動，我們採用以下實驗方法。

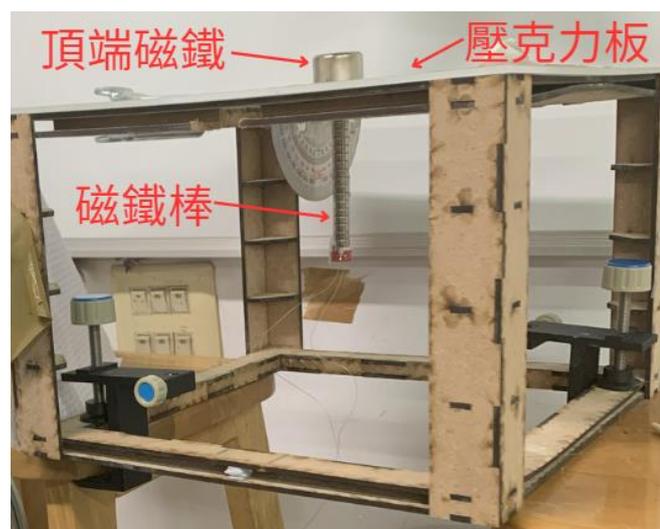
1. 實驗架設如圖二。我們將壓克力板固定在支架上方並在其上方固定頂端圓柱型磁鐵，再利用磁力將磁鐵棒吸附在壓克力板下方。我們在磁鐵棒底部黏貼紫色輕黏土小球作為 Tracker 程式追蹤磁鐵棒末端位置之標記。

2. 以手拉起磁鐵棒至水平，鬆手使其在垂直平面上來回擺動，使用攝影機記錄磁鐵棒擺動影像。
3. 利用 Tracker 程式追蹤黏土小球之軌跡，其中，利用預先貼於板上的校正刻度校正磁鐵棒末端在影像中之位置。
4. 取得 Tracker 程式資料之 x （沿擺動軌跡之長度，含正負），以公式 $\theta = \sin^{-1} \frac{x}{L}$ （ L 為磁鐵棒擺長）換算擺角，並記錄 θ 對時間之關係。
5. 不同磁鐵棒長擺動之分析：為研究磁鐵棒長（後續統稱為擺長）對磁擺行為之影響，我們改變磁鐵顆數，重複上述步驟。

(a)



(b)



圖二、實驗架設圖

三、數據分析方法

為探討磁擺之擺動情形，我們利用以下方法進行對於實驗所測得之磁鐵棒擺角與時間關係之數據分析。

(一) 擺角對時間關係

利用 **Tracker** 程式獲取之資料繪製擺角對時間關係圖。

(二) 擺動週期分析

我們編寫 C++ 程式讀取擺動軌跡數據，當磁擺通過平衡位置時（即擺角數據 $\theta_k < 0 < \theta_{k+1}$ ），利用內插法計算磁鐵棒通過平衡位置瞬間的時間 t ，並求得擺動週期。

(三) 擺動週期對振幅的變化

我們利用程式尋找軌跡中的擺角峰值位置，並計算擺幅大小，將週期對振幅作圖。

(四) 角速度和角加速度分析

我們利用三次樣條插值法（**Cubic Spline Fitting**）擬合擺角與時間之關係，並將擬合函數對時間進行一次微分及二次微分分別求得角速度和角加速度。

四、回復力矩測量實驗

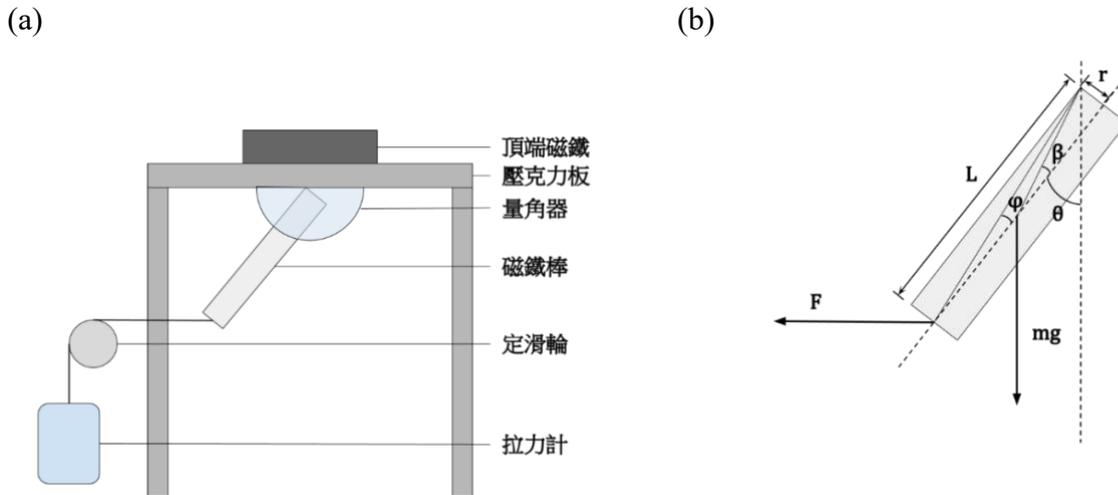
在本研究中，磁力所造成的回復力矩為擺動中最為特殊且重要的因素，我們便採用以下方法測量回復力矩。

1. 實驗架設如圖三(a)，於磁鐵棒底部中心點接一細繩，透過滑輪連接至拉力計。
2. 將磁鐵棒拉至與鉛垂線夾角為 5 度 ($\theta = 5^\circ$)，調整滑輪的高度，使細繩在磁鐵底端中心至定滑輪部分維持水平，並調整拉力計位置，使繩子保持緊繃狀態。
3. 紀錄拉力計測得數據，改變擺角並重複步驟 2~3，並利用三次樣條插值法 (**Cubic Spline Fitting**) 得出拉力對角度的關係。
4. 將測得之拉力對角度關係藉由公式 $\tau = F\sqrt{L^2 + r^2} \cos(\theta - \varphi)$ ，計算磁鐵棒所受之回復力矩對角度之關係。其中 F 為測得拉力， L 為磁鐵棒長度， r 為磁鐵棒半徑， θ 為磁鐵棒圓柱對稱軸（以下稱為軸線）與鉛垂線夾角， φ 為磁鐵棒底面中點到支點與磁鐵軸線的夾角，如圖三(b)。

5. 以下列公式計算磁鐵棒所受之磁力力矩

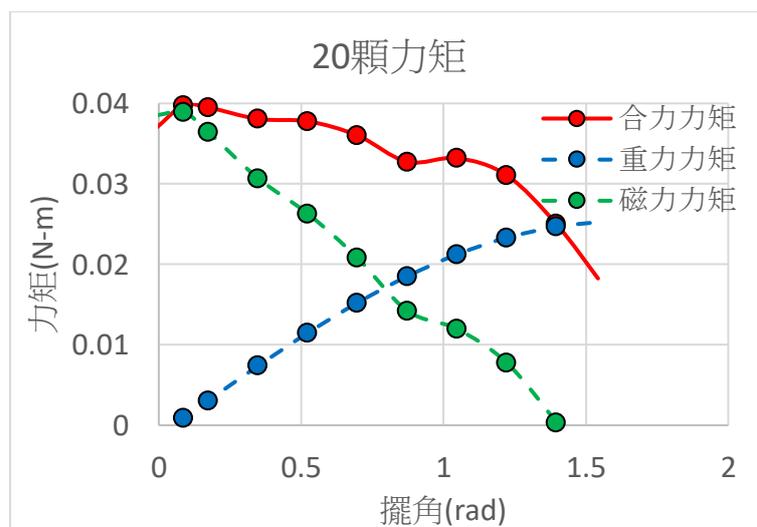
$$\tau_B = F\sqrt{L^2 + r^2} \cos(\theta - \varphi) - mg \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2} \sin(\theta - \beta)$$

磁鐵棒各參數如圖三(b)所示，其中 τ_B 為磁力所造成的力矩， β 為磁鐵棒重心到支點與磁鐵軸線的夾角。



圖三、(a) 回復力矩測量實驗架設圖 (b) 力矩計算參數說明

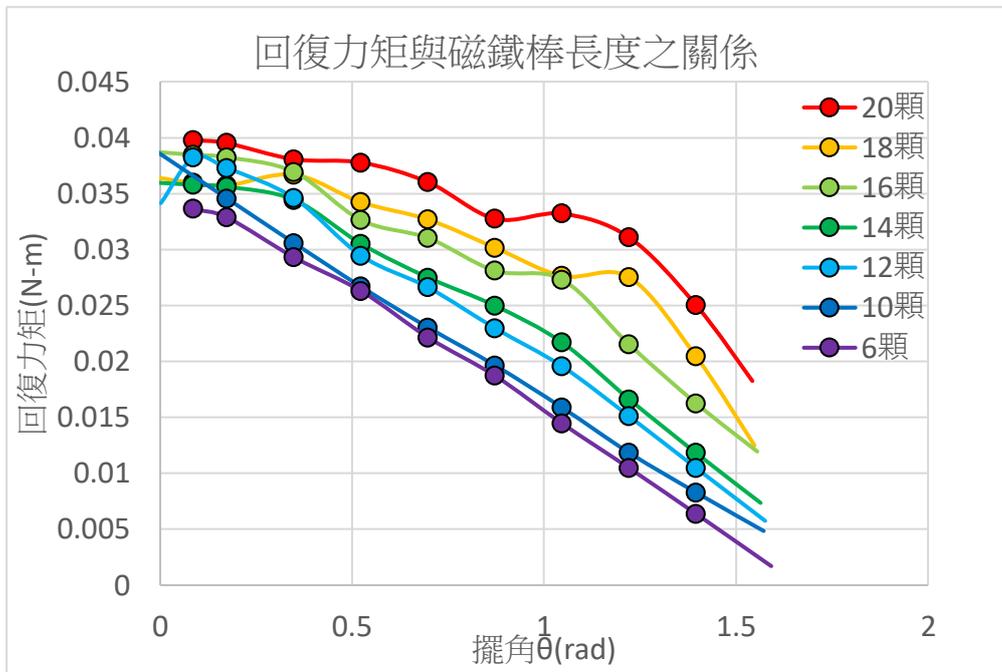
以 20 顆磁鐵所形成之磁鐵為例，力矩與磁鐵棒擺角之實驗數據如圖四所示，我們觀察到，在擺角較大時磁鐵棒重力力矩較大，運動主要由重力主導；而小角度則是由磁力主導。其中可發現，不同於常見物理擺，在接近平衡位置（擺角接近 0）時回復力矩反而增大，且在擺過平衡位置瞬間，回復力矩會直接由約+0.04N·m 跳至-0.04N·m，並非連續的遞減。



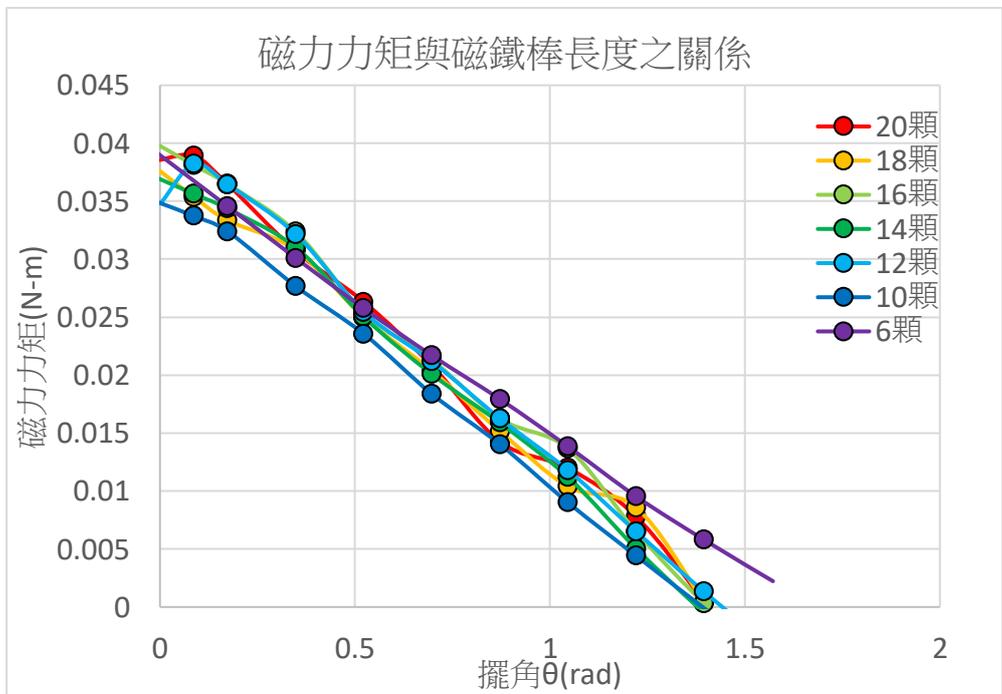
圖四、擺長 20 顆合力力矩、重力力矩及磁力力矩對擺角分佈

此外，我們也分析不同擺長的力矩與擺角關係，結果如圖五所示，圖五(a)顯示當磁鐵棒長度減短，合力力矩隨之減少，主要是因為重力力矩因磁鐵棒質量減少而減少。由圖五(b)可知在擺長越短時，由於不同顆數磁鐵產生的磁場差異並不大，所造成的磁力力矩也十分相似，故減少擺長僅會減少重力力矩，使得擺長越短時回復力矩越偏向磁力主導。

(a)



(b)



圖五、不同擺長測得力矩對角度作圖 (a)回復力矩 (b)磁力力矩

五、空氣阻力測量實驗

在本研究中，空氣阻力對擺動造成衰減，故設計以下實驗測量磁鐵棒擺動之空氣阻力係數。

1. 實驗架設如圖六，將磁鐵棒以細線懸掛於支架上。我們在磁鐵棒底部黏貼紫色輕黏土小球作為 Tracker 程式追蹤磁鐵棒末端位置之標記。
2. 將磁鐵棒移動至擺幅約 5 度($\theta = 5^\circ$)位置，釋放後使其沿直線來回擺動，使用攝影機記錄軌跡，並利用 Tracker 程式追蹤擺動軌跡。
3. 由影像中之 x (沿擺動軌跡之長度) 值，計算擺角 $\theta = \sin^{-1} \frac{x}{L}$ (L 為磁鐵棒長度)。
4. 在空氣阻力測量實驗中，運動方程式如下

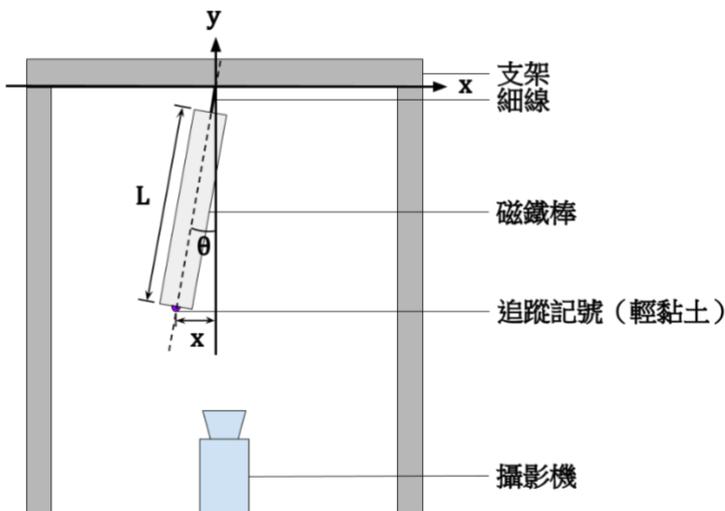
$$-mgL \sin \theta - b\omega = I\alpha$$

由參考資料[2]，可求得擺動軌跡函數關係如下

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\left(\frac{bt}{2I}\right)} \cos \left[\sqrt{-\left(\frac{b}{2I}\right)^2 + \frac{mgL}{I}} t \right]$$

因此，我們以方程式 $\theta = A \cdot e^{-Bt} \cos(\omega t + \varphi) + D$ 進行擬合，以得到各參數值，最後將得到參數 B 乘以 $2I$ (I 為轉動慣量，其值為 $\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mL^2$)，即可得到空氣阻力係數 b 。

(a)



(b)

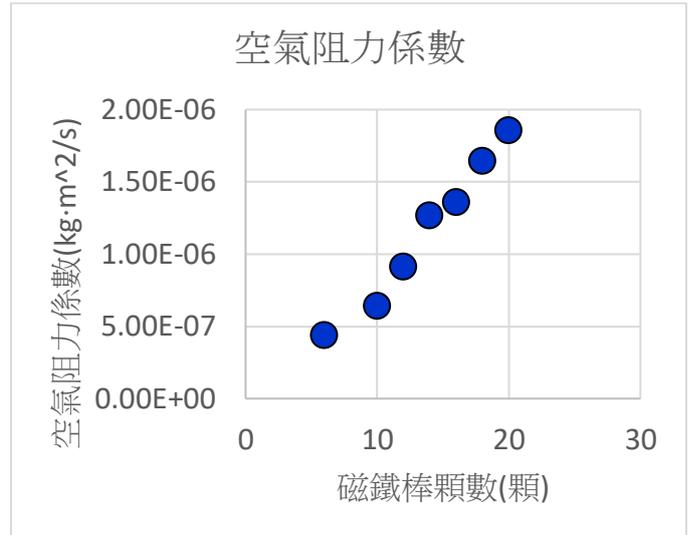


圖六、(a)空氣阻力測量實驗架設圖 (b)空氣阻力測量實驗照片

空氣阻力測量結果如表三及圖七所示，在磁鐵顆數越少時，空氣阻力係數越小，我們認為是由於磁鐵截面積（即磁鐵棒直徑乘以擺長）較小，因此受空氣阻力效應越小。在下文的數值模擬，我們以測得的空氣阻力係數帶入模擬。

表三、磁鐵棒不同擺長之空氣阻力係數量值

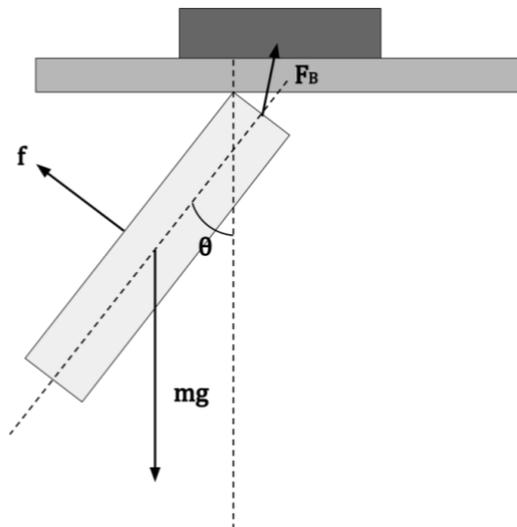
磁鐵棒顆數(顆)	空氣阻力係數(kg·m ² /s)
20	1.859E-06 ± 2.021E-08
18	1.645E-06 ± 9.445E-09
16	1.359E-06 ± 4.298E-08
14	1.269E-06 ± 4.697E-08
12	9.123E-07 ± 1.750E-08
10	6.410E-07 ± 5.578E-09
6	4.385E-07 ± 4.061E-09



圖七、磁鐵棒不同擺長之空氣阻力係數

六、數值模擬分析

為探討各參數對擺動軌跡之影響，我們使用以下物理模型進行數值模擬，並使用 C++ 程式模擬擺動情形。



圖八、磁擺運動模型示意圖

我們以圖八所示之模型進行計算磁擺運動之軌跡，當磁鐵棒偏離平衡位置時，頂端磁鐵對磁鐵棒所施之磁力 F_B 及磁鐵棒所受之重力 mg 會產生回復力矩 τ ，因空氣阻力 f 之作用，磁鐵

棒擺動時也會遭受空氣阻力所產生力矩 $(-b\omega)$ 之影響。因此可得磁擺之運動方程式如下：

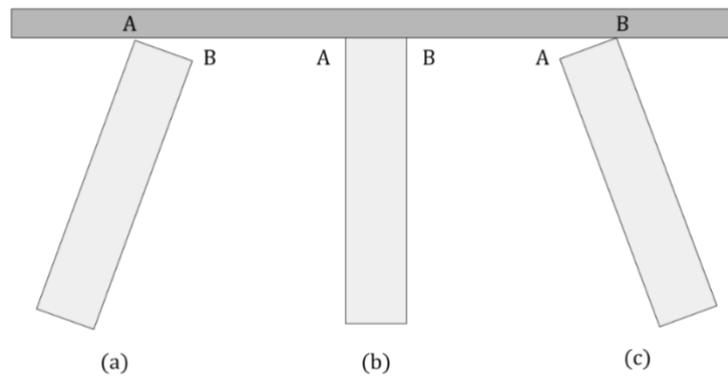
$$\Sigma\tau = \tau - b\omega = I\alpha$$

其中， τ 為磁力及重力所產生的回復力矩， b 為空氣阻力係數， I 為磁鐵棒以與壓克力板之接觸點為支點轉動之轉動慣量，其值為 $I = \frac{5}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mL^2$ 。此外， τ 可由在回復力矩測量實驗中得到之回復力矩與角度關係 $s(\theta)$ 表示，帶入運動方程式整理可得

$$\Sigma\tau = s(\theta) - b \cdot \frac{d\theta}{dt} = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

藉由上述公式，可進行數值計算。在每一時刻 t 中，可計算該時刻之角加速度 $\alpha_{(t)} = \frac{\Sigma\tau}{I}$ ；則 $t = t + \Delta t$ 時角速度 $\omega_{(t)} = \omega_{(t-1)} + \alpha_{(t)}\Delta t$ 、擺角 $\theta_{(t)} = \theta_{(t-1)} + \omega_{(t)}\Delta t$ ，其中 Δt 為數值模擬中每次迭代的時間。

此外，在磁擺通過平衡位置時，會發生支點轉換的現象。如圖九，當磁擺由(a)位置擺至(c)位置時，其支點也由 A 轉換至 B。



圖九、磁擺通過平衡點支點轉換示意圖

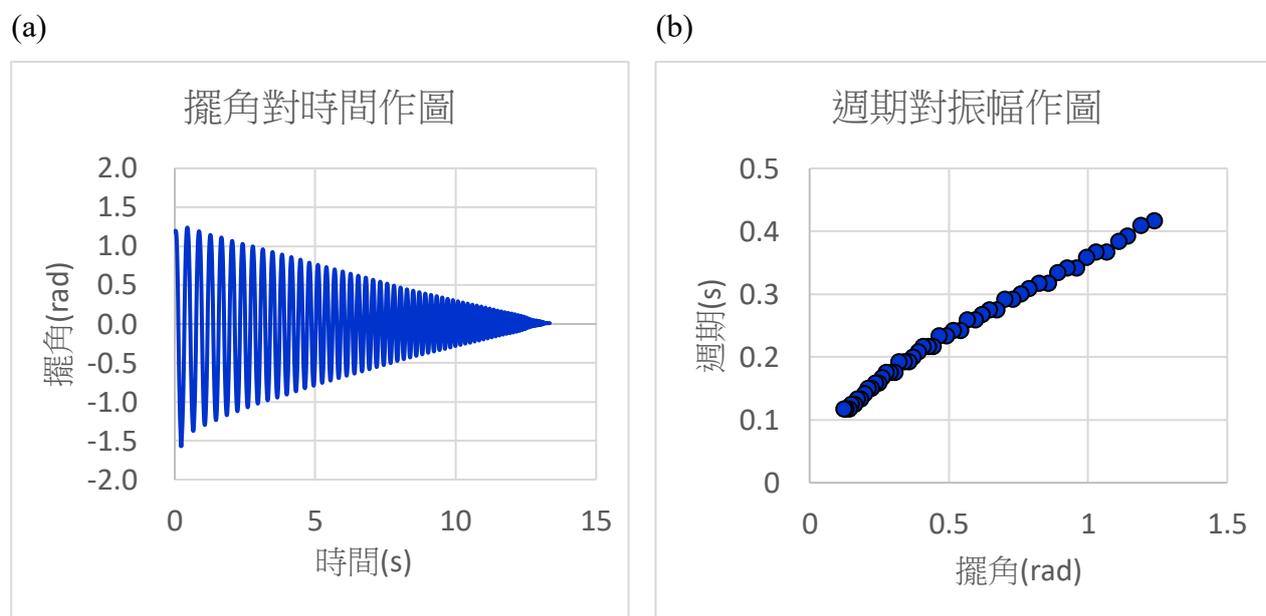
發生支點轉換時（如圖九(b)），磁鐵棒於頂端與支點所在之壓克力板產生碰撞，由於磁擺與壓克力板皆非理想剛體，故碰撞使磁擺損失能量，我們將此過程用轉動碰撞能量損失係數 c 表示，使每次碰撞皆損失一定比例的能量，模擬操作上設定 $\omega_{\text{碰撞後}} = \omega_{\text{碰撞前}} \cdot (1 - c)$ 。我們調整 c 值使數值模擬所得與實驗結果之差異達到最小。

我們基於以上假設撰寫程式，得到模擬軌跡。

肆、研究結果與討論

一、磁鐵棒的擺動實驗結果

首先，以 20 顆磁鐵棒為例，我們分析實驗測得之數據，並繪製成圖十。其中，圖十(a)為擺角對時間作圖，圖十(b)為週期對振幅作圖。

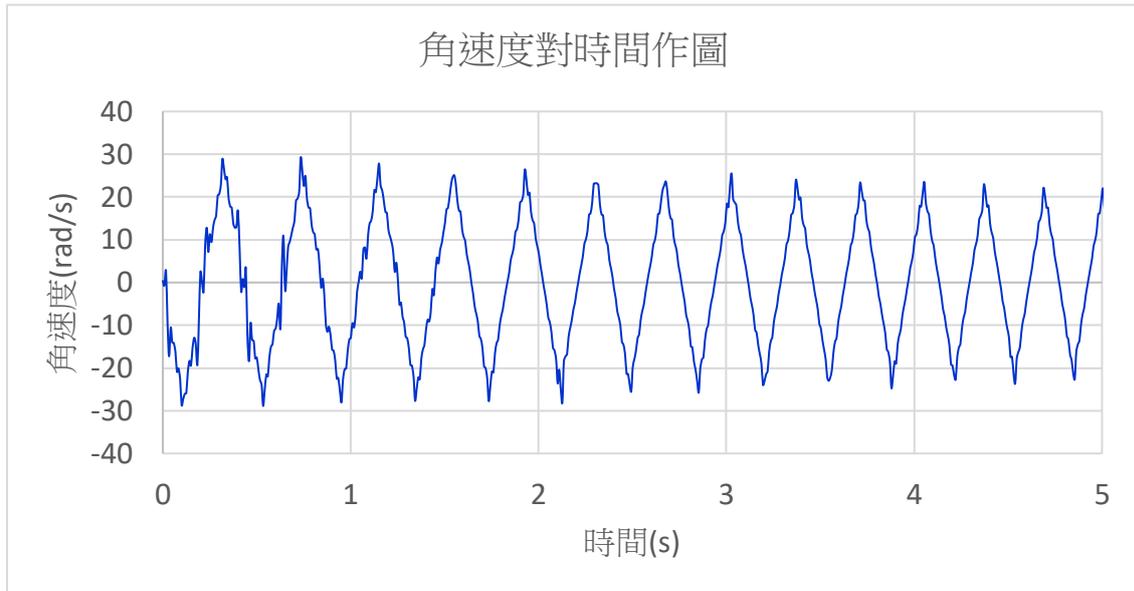


圖十、磁擺擺動軌跡 (a)擺角對時間作圖 (b)週期對振幅作圖

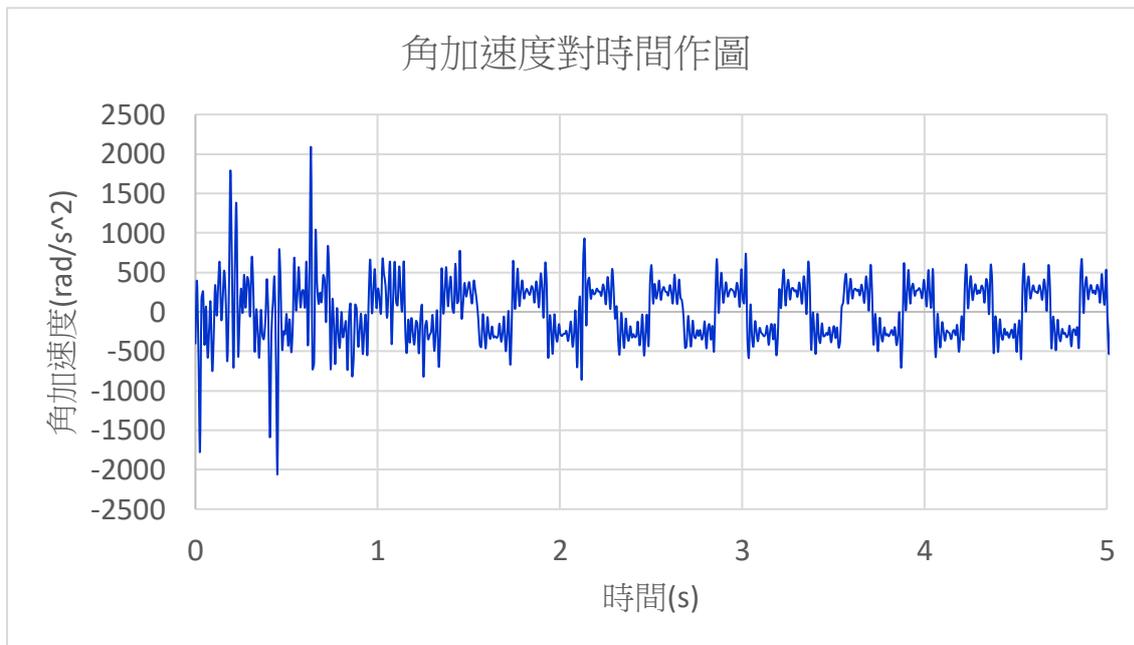
觀察上圖可發現，磁擺振幅隨時間有明顯衰減現象，且週期也有減少之現象。與大擺幅物理擺擺動週期趨勢似乎相同，磁擺的週期隨擺幅減小而減小。

但是，當我們觀察了圖十一中磁擺的角速度及角加速度對時間的關係時，我們發現，圖十一(a)中角速度的變化並非如簡諧震盪般為正弦函數關係，而是以近似三角波的形式呈現，且其斜率在角速度極大或極小值時，近似有不連續的現象發生。如圖十一(b)之中所呈現，角加速度由於器材限制，雜訊較多，不過仍可看出角加速度的變化與簡諧震盪十分不同。

(a)



(b)



圖十一、磁擺擺動之角速度及角加速度對時間作圖 (a)角速度 (b)角加速度

二、模擬磁擺運動之理論模型

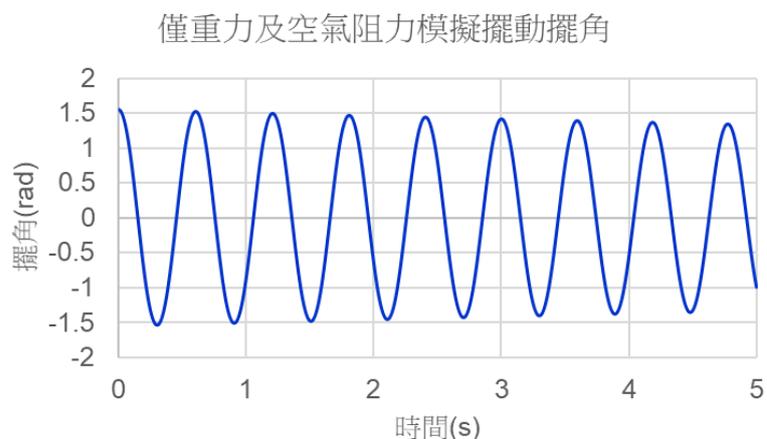
為了研究磁擺與物理擺（僅受重力與空氣阻力作用）之間的差異，我們利用數值模擬並調整各項參數以對比不同條件下磁擺的擺動軌跡。考慮磁擺的物理模型，以下分別就磁擺回復力矩（包含重力、磁力力矩），以及磁擺過平衡位置時碰撞造成的能量損失進行討論。

首先我們先考慮 20 顆磁鐵棒在只有重力與空氣阻力的情況（想像實驗）。在此模型中，運動方程式如下，各參數如圖三(b)所示：

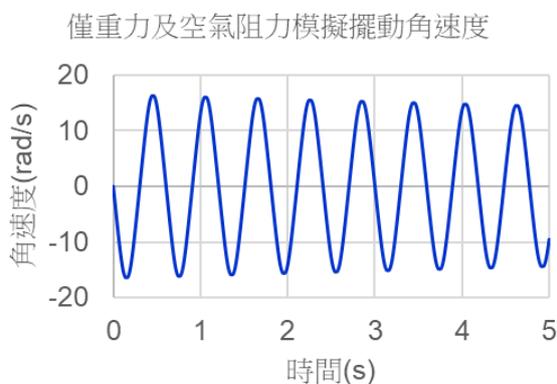
$$\Sigma \tau = mg \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2} \cdot \sin(\theta - \beta) - b\omega = I\alpha$$

利用空氣阻力的測量實驗，我們測得 20 顆擺長的空氣阻力係數約為 $1.86 \times 10^{-6} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2/\text{s)}$ ，我們將此數值加入運動方程式中進行數值模擬，繪製擺角、角速度與角加速度對時間作圖如圖十二。

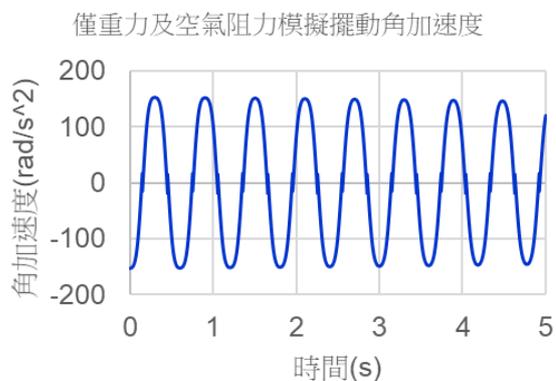
(a)



(b)



(c)



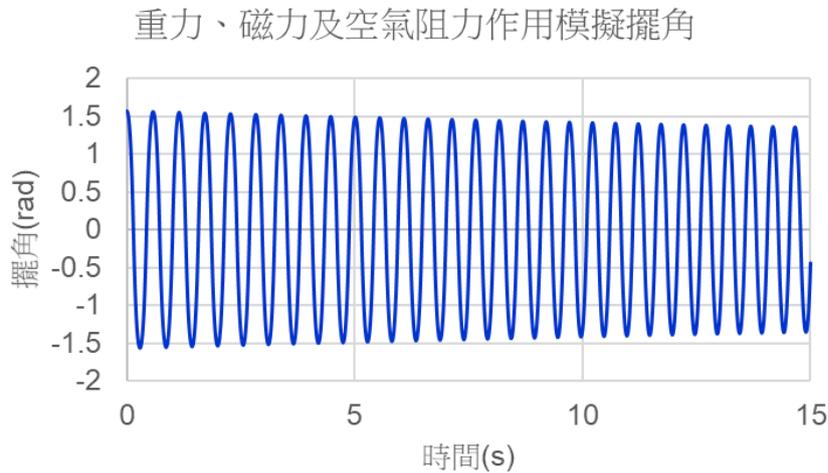
圖十二、模擬僅重力及空氣阻力作用下(a)擺角 (b)角速度 (c)角加速度 對時間作圖

我們觀察程式模擬和實驗結果可知，圖十二(b)磁鐵棒角速度與時間之關係圖與圖十一(a)之近似三角波的形式截然不同；而圖十二(c)中之角加速度與圖十一(b)中之角加速度在趨勢上也大不相同，因此僅有重力和空氣阻力顯然不足以解釋磁擺之整體運動行為，所以，我們加入磁力進行模擬。

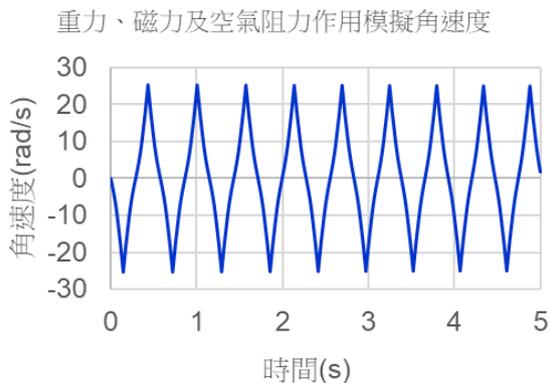
三、磁鐵棒同時受重力、磁力及空氣阻力作用之模擬

考慮磁擺不僅受到重力和空氣阻力，我們於模型中加入磁力以探討其在磁擺中所扮演的角色。我們將先前實驗測得之合力力矩數據（圖四）加入到數值模擬之中，得出磁擺同時受到重力、磁力與空氣阻力作用的運動軌跡如下：

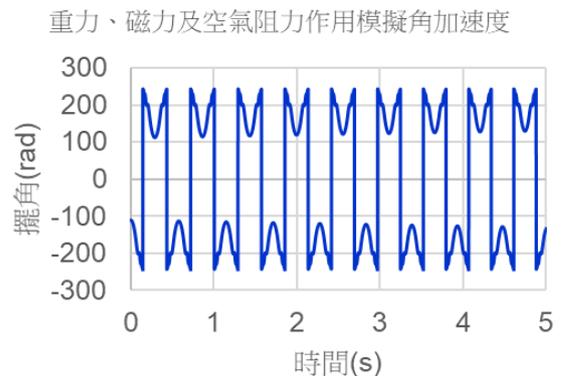
(a)



(b)



(c)



圖十三、重力、磁力及空氣阻力作用下磁擺擺動 (a)擺角 (b)角速度 (c)角加速度 對時間作圖

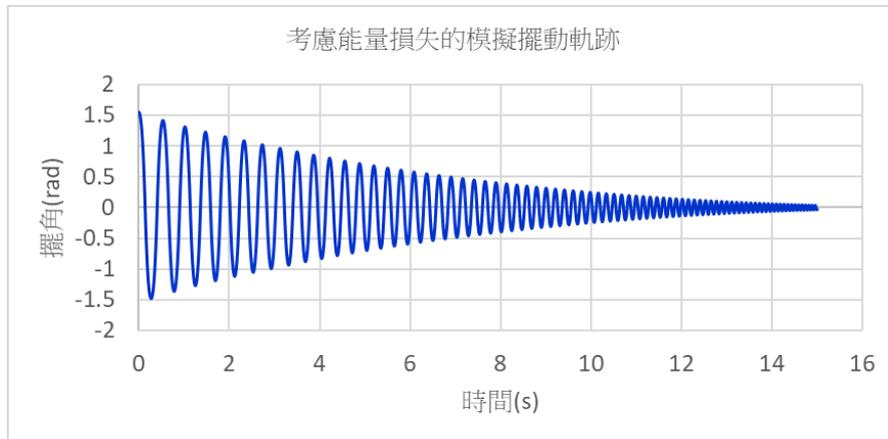
由圖十三(b)、(c)可以發現，在加入了磁力的作用後，角速度與角加速度對時間的作圖都出現了和實驗數據相似的趨勢，代表磁力為造成磁擺與典型物理擺不同之主因。

四、考慮轉動碰撞能量損失之模擬

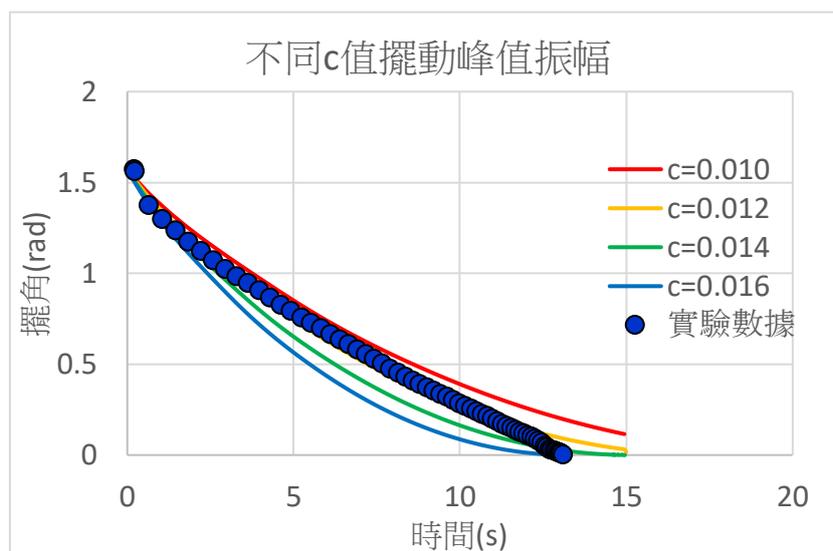
然而，觀察圖十三(a)可發現，模擬的振幅衰減幅度仍遠慢於實驗結果，考量模擬與磁擺在通過平衡位置時，會與壓克力板發生碰撞而損失能量，因此在我們假設的簡化力學模型中，

藉由在通過平衡位置時將角速度乘以 $(1 - c)$ （其中 $0 \leq c \leq 1$ ），以模擬碰撞所造成的能量損失。模擬結果如下。我們嘗試改變轉動碰撞能量損失係數 c ，發現其對振幅衰減有顯著影響，結果如圖十四。

(a)



(b)



圖十四、考慮能量損失之 (a)模擬軌跡 (b)模擬與實驗數據對比

由圖十四(a)可發現，在加入了碰撞能量損失後，整體的擺角衰減速度相較於圖十三(c)快速許多。因此我們推測，碰撞造成的能量損失應為造成磁擺週期衰減的主要原因。

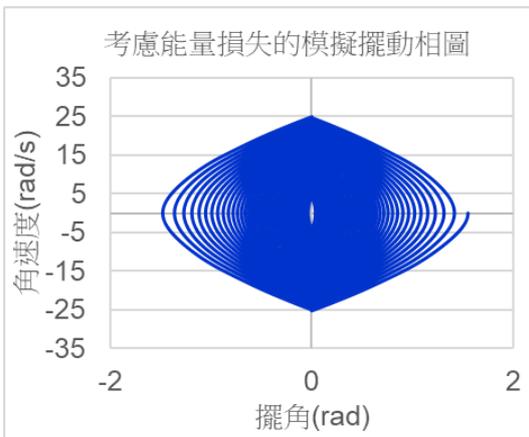
為了瞭解不同能量損失係數 c 對於磁擺衰減的影響，我們利用程式模擬出不同 c 值下的擺動結果。圖十四(b)顯示不同 c 值下的擺動振幅之變化，我們選取擺動軌跡每一週期中之最大振幅，對時間作圖為圖十四(b)。由圖可見，當能量損失越大時，擺角衰減越快，使磁擺較快因能量損耗而停止擺動，而透過調整 c 值，能使得模擬結果中振幅衰減能貼近實驗結

果，以 20 顆為例，最佳 c 值為 0.012。由於 $\omega_{\text{碰撞後}} = \omega_{\text{碰撞前}} \cdot (1 - c)$ ，兩邊整理得 $\frac{1}{2}I(\omega_{\text{碰撞後}})^2 \cong \frac{1}{2}I(\omega_{\text{碰撞前}})^2 \cdot 2c$ ，亦即磁擺每次通過平衡位置損失 $2c$ 比例之能量，以 20 顆為例約損失 2.4% 之能量。

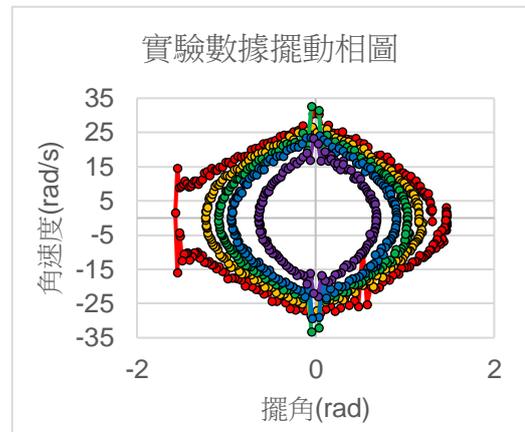
五、相圖 (Phase Diagram) 分析

在運動學中，另一種分析方式為相圖 (Phase Diagram)，即磁鐵棒之擺角與角速度之關係，我們分析實驗及模擬相圖如圖十五。

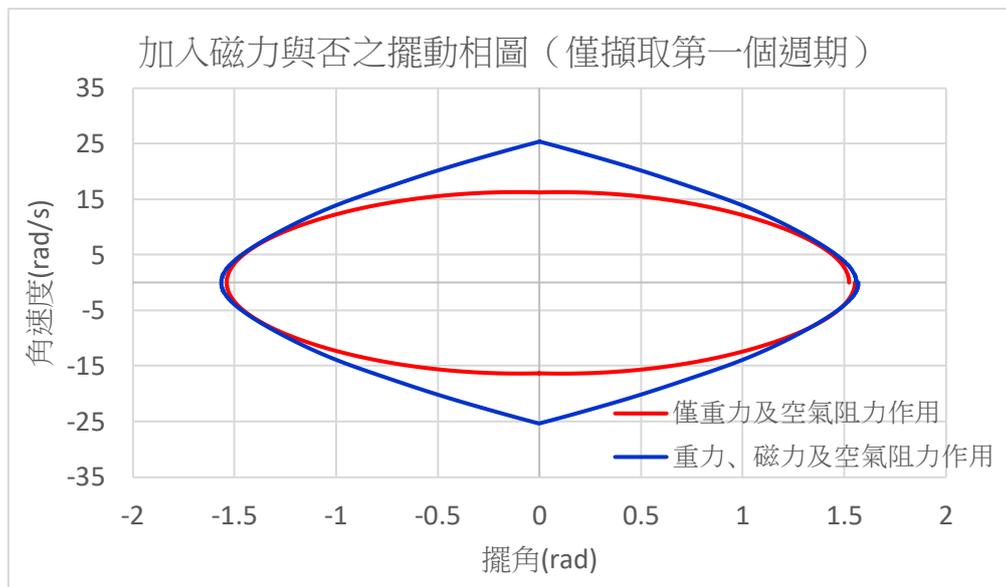
(a)



(b)



(c)



圖十五、各模擬條件之擺動相圖

(a)考慮能量損失 (b)實驗數據 (c)比較加入磁力與否之擺動相圖 (僅擷取第一個週期)

首先，比較加入能量損失之模型（圖十五(a)）與實驗結果（圖十五(b)），其中，實驗結果為我們利用高速攝影（960fps）取得之更詳細的實驗數據，並選取部分週期內的數據進行繪圖。我們發現，在平衡位置附近，磁鐵棒的角速度大幅上升且有斜率不連續之現象，這是因為回復力矩於接近平衡位置時增大，且在擺角經過平衡位置的瞬間，磁鐵棒所受的力矩會由正轉變為負，因此可看到在平衡位置出現了明顯的尖點。此外，實驗結果與模擬之相圖相似，驗證了模型的正確性。

圖十五(c)為我們模擬磁擺在第一個週期內僅重力及空氣阻力作用與重力、磁力及空氣阻力共同作用的擺動相圖，可發現兩者在接近平衡位置時有明顯差異。這是由於加入磁力作用時，在接近平衡位置時磁鐵棒所受到的回復力矩比只有重力和空氣阻力作用時更大，使其產生如圖十三(b)在接近平衡位置時角速度斜率不連續的現象。而從力學能的角度討論，加入磁力作用後，接近平衡點之動能 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 不僅由重力位能 mgh 轉換而來，還包含磁力位能 U_B ，使其接近平衡點之角速度明顯大於未加入磁力之角速度。

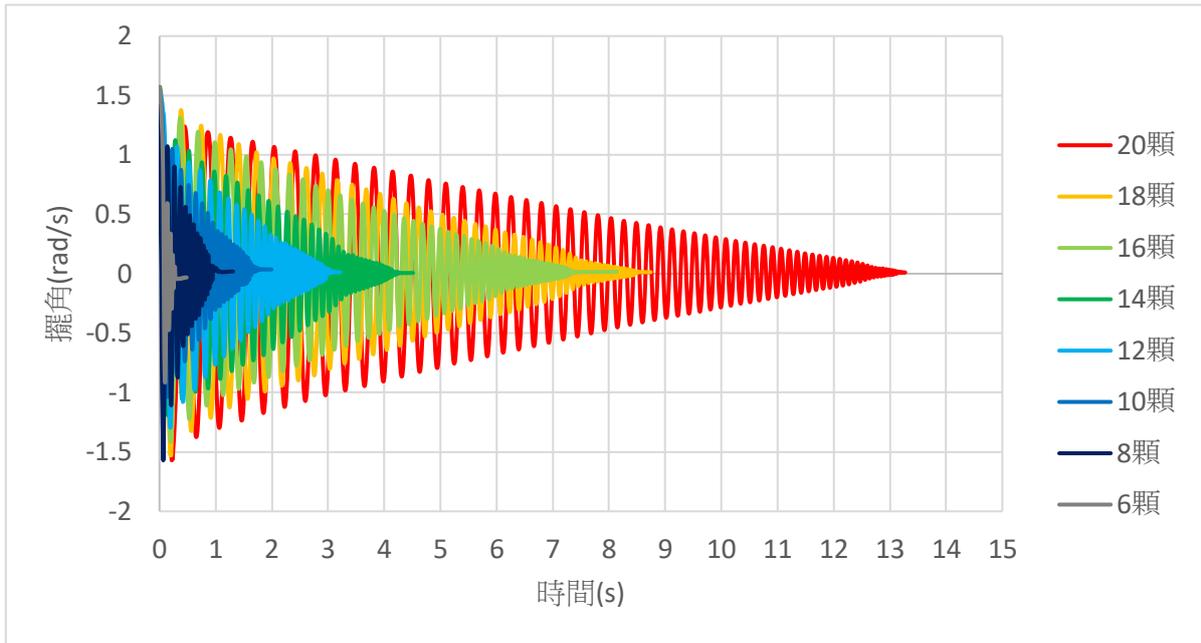
透過以上一至五點之討論，我們釐清影響磁擺之因素。由於接近平衡位置時回復力矩增大，使得磁擺之角速度與角加速度隨時間變化與物理擺有顯著差異。而造成擺動軌跡衰減之主因為通過平衡位置時磁鐵棒與壓克力板發生之碰撞。

六、探討磁鐵棒長度對擺動情況之影響

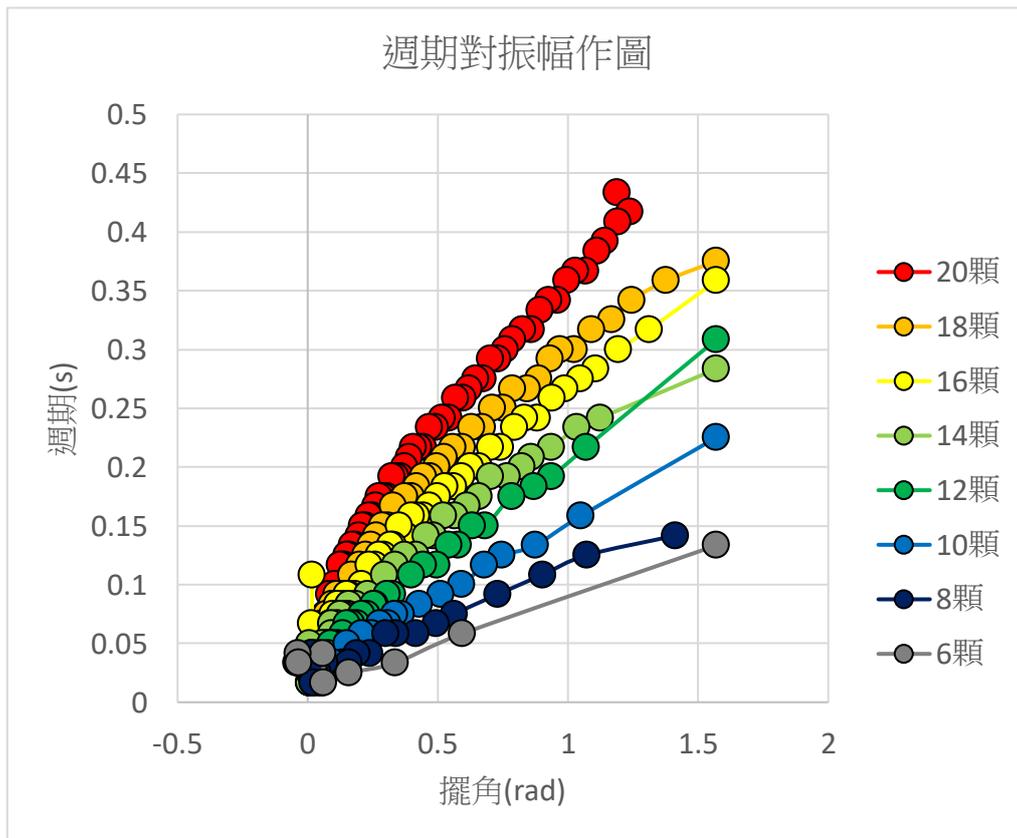
我們接下來探討磁鐵棒長度對磁擺運動之影響。我們透過減少磁擺磁鐵顆數以改變磁擺中重力力矩的影響，但如圖五所示，減少磁鐵顆數並不影響磁力力矩。

首先，我們觀察其擺動軌跡，實驗結果如圖十六(a)所示，當擺長越短，其擺角衰減越快。另外，我們也觀察了週期隨振幅變化，由圖十六(b)可知，在擺長越短時，相同振幅下的擺動週期也越小。

(a)

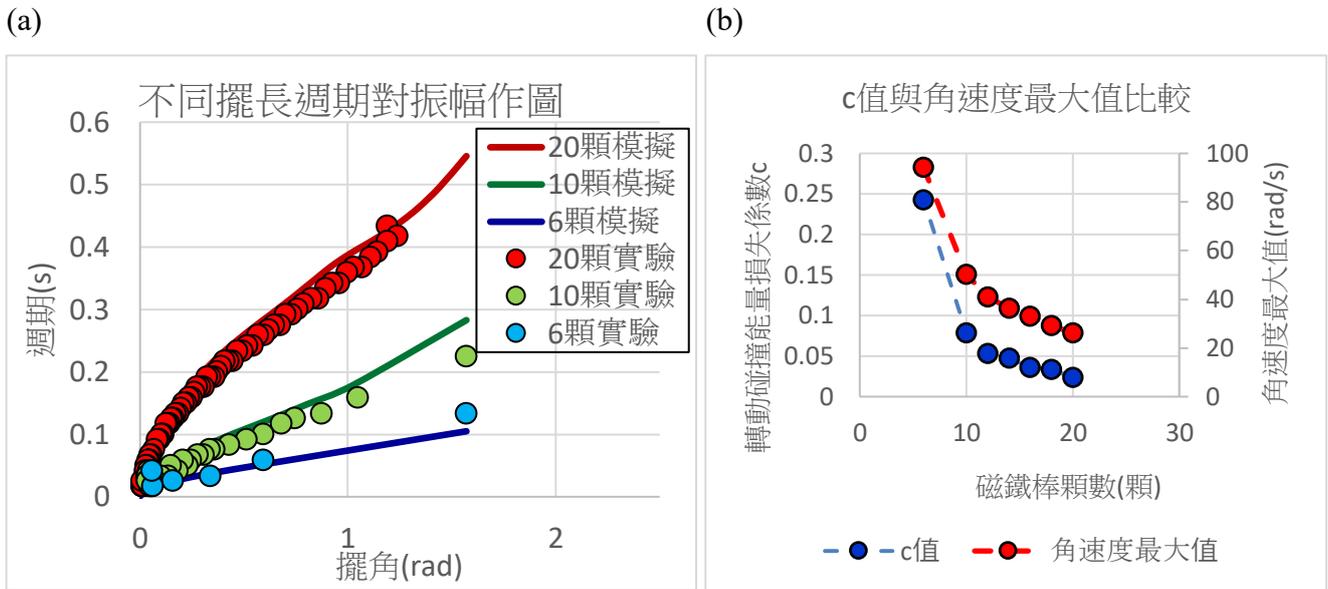


(b)



圖十六、不同磁鐵棒長度 (a)擺角對時間作圖 (b)週期對振幅作圖

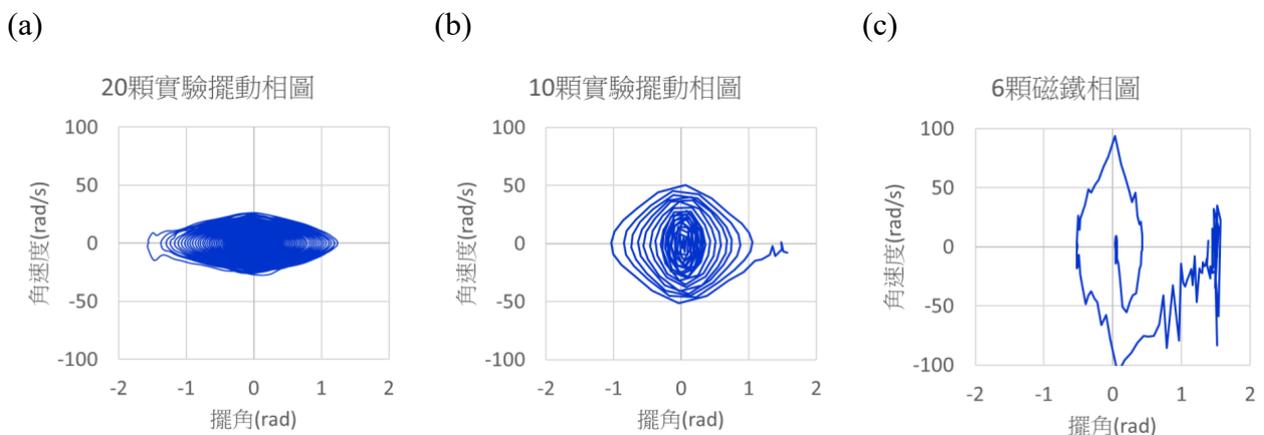
我們針對不同擺長進行數值模擬。我們在程式中調整轉動碰撞能量損失係數 c ，以匹配實驗結果，如圖十七(a)。各組對應轉動碰撞能量損失係數 c 如圖(b)之藍點。



圖十七、(a)不同擺長擺動週期對振幅作圖 (b) c 值與角速度最大值之比較

由圖十七(a)可以看到，在不同擺長的力學模型中，我們可透過改變不同的轉動碰撞能量損失係數 c ，使模擬數據與實驗數據大致吻合。

在圖十七(b)中能量損失係數之變化可由各長度之磁鐵棒接近平衡位置的角速度進行解釋。圖十八顯示實驗所測得不同擺長之相圖比較。由圖中各擺長通過平衡位置之最大角速度可知，磁鐵棒越短，在平衡位置的角速度越大，圖十七(b)中之紅點即為磁鐵棒最大角速度與磁鐵棒長度之關係。由此圖可知，磁鐵棒在平衡點與壓克力板碰撞時，角速度越大，能量損失越大。簡化的能量損失模型可以定性解釋磁擺的行為與擺長的關係。



圖十八、不同擺長擺動相圖 (a)20 顆 (b)10 顆 (c)6 顆磁鐵棒

伍、結論

本研究探討了磁擺的擺動行為及影響因素。實驗結果顯示，磁擺的擺動由於受到磁力的影響，使其擺動軌跡、週期等與典型物理擺有所不同。具體而言，角速度在接近平衡位置因回復力矩增大而有斜率不連續的特點，而由於空氣阻力及通過平衡位置之轉動碰撞，使振幅隨時間衰減。透過建立物理模型，將回復力矩（重力力矩及磁力力矩）、空氣阻力以及碰撞能量損失加入模型並調整參數，使我們能得到接近實驗結果的運動模式。此外，減少擺長也會使擺角衰減加快，以及通過平衡點之能量損失增加。綜上所述，本研究量化了磁擺的擺動模式，初步解析了其中的物理機制，後續研究可進一步提高模型準確性，及考慮非沿平面的擺動，如錐擺之運動現象。

陸、參考文獻資料

[1] Ttk592. (2021). Cubic Spline Interpolation in C++. Kluge.in-Chemnitz.De.

<https://kluge.in-chemnitz.de/opensource/spline/>

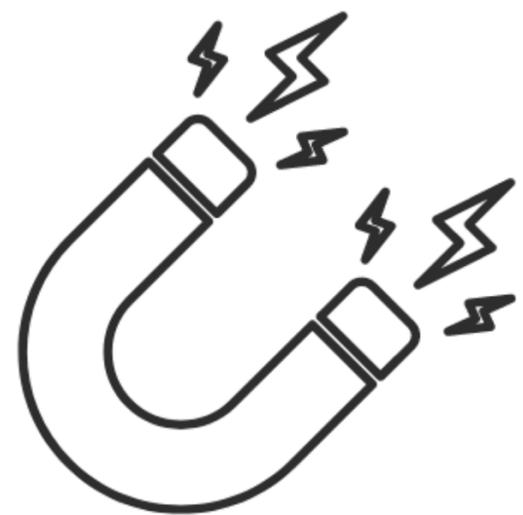
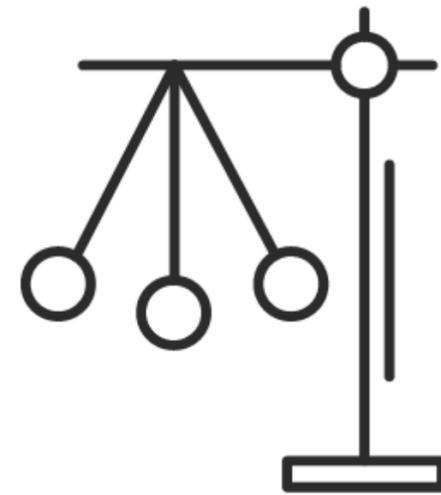
[2] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker. (2013). Fundamentals of Physics (10th edition).

【評語】 051804

此實驗旨在探討磁擺的運動行為及相關物理變因，並建立力學模型。作者的實驗詳細觀察磁擺運動中，磁鐵棒在不同角度下，受到重力和磁力的影響的行為。其中擺角與角速度的相位圖，與作者考慮重力、磁力及空氣阻力作用的理論模型最為接近。若能進一步提高模型的準確性，有工業應用的潛力。

作品簡報

擺磁必得其解！



探討磁擺的運動行為

簡介

本研究旨在探討磁擺的運動行為，並建立物理模型探討其運動。將一枚圓柱形磁鐵置於壓克力板上，在壓克力板的對側吸附一磁鐵棒，並將磁鐵棒偏轉至近乎水平，然後釋放磁鐵棒，使磁鐵棒自行來回擺動，我們稱這個實驗為磁擺。由實驗及模擬結果可知，磁擺運動中磁鐵棒主要受到重力及磁力之影響，當磁擺接近平衡位置時，回復力矩增大而使其角速度、角加速度之變化皆與物理擺明顯不同，且磁擺於通過平衡位置時與支點平面發生碰撞造成磁擺動能損失。此外，當減小擺長時由於磁力不變，使得接近平衡位置之角速度越快，能量損失也越大，擺角衰減也越快。

壹、研究目的

- 磁擺擺動行為及相關物理變因之探討
- 建立力學模型及數值模擬
- 探討改變擺長對擺動行為之影響

貳、研究過程或方法

一、前置實驗

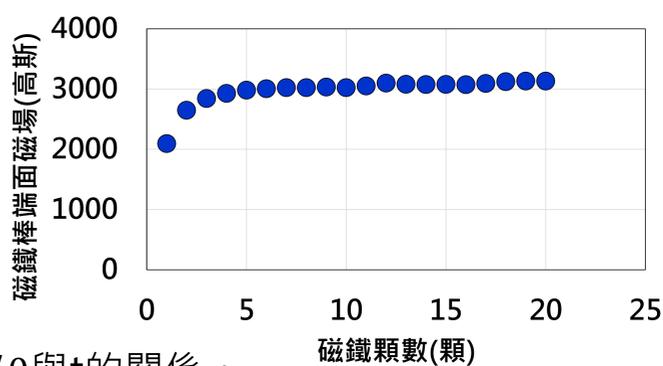
- 以高斯計測量不同顆數磁鐵棒端面磁場

二、實驗裝置與步驟

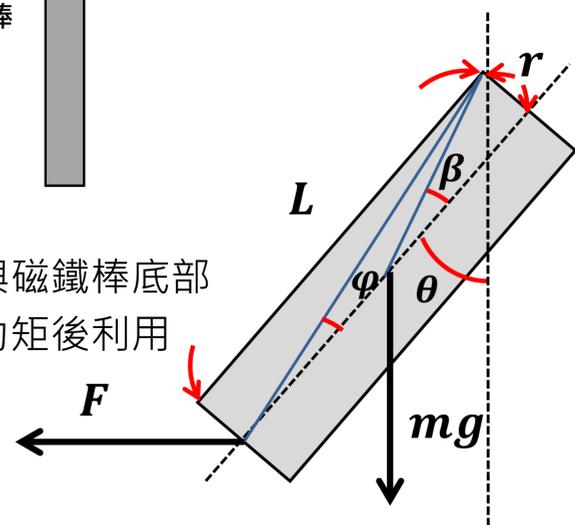
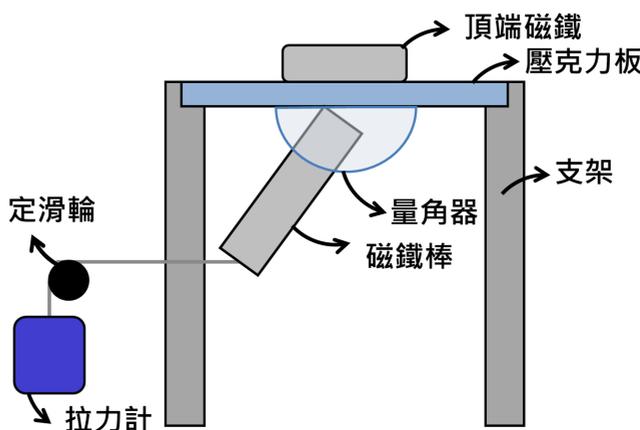
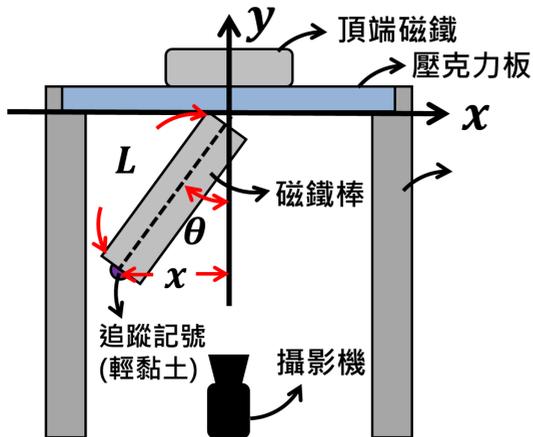
(一) 測量磁擺運動

- 釋放磁擺並使其在同一平面擺動，利用Tracker紀錄

不同磁鐵顆數與端面磁場作圖



各時間點位置。再利用公式 $\theta = \sin^{-1} \frac{x}{L}$ 換算擺角，紀錄 θ 與 t 的關係。



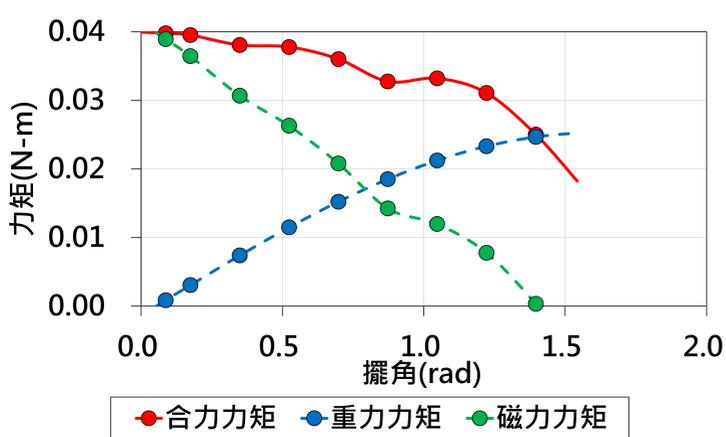
(二) 回復力矩測量

- 利用滑輪連接磁鐵棒底部中點及拉力計，並調整滑輪使其上端與磁鐵棒底部中點位於同一水平面上。記錄不同擺角所測得之拉力，換算成力矩後利用 Cubic Spline Fit 得出力矩-擺角的關係圖。

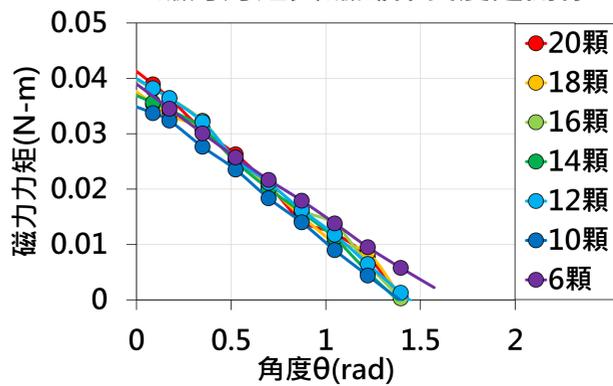
- 計算合力造成力矩： $\tau = F\sqrt{L^2 + r^2} \cos(\theta - \varphi)$

- 計算磁力造成力矩： $\tau_B = F\sqrt{L^2 + r^2} \cos(\theta - \varphi) - mg\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2} \sin(\theta - \beta)$

20顆力矩



磁力力矩與磁鐵棒長度之關係



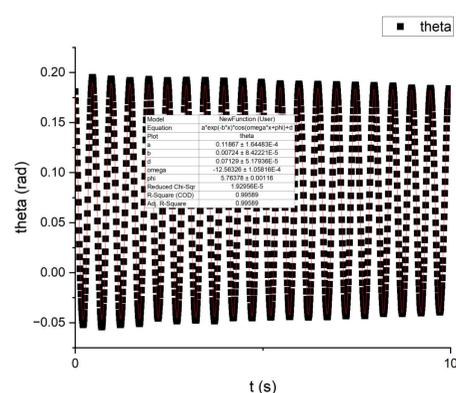
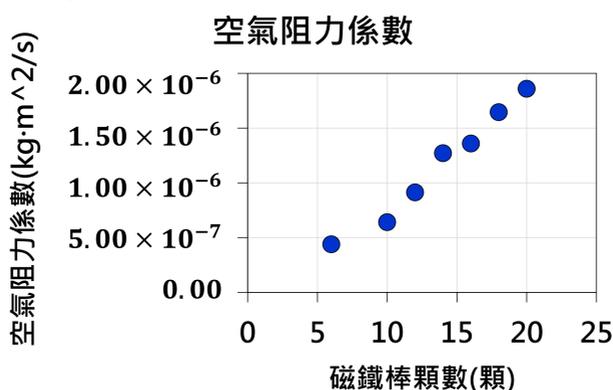
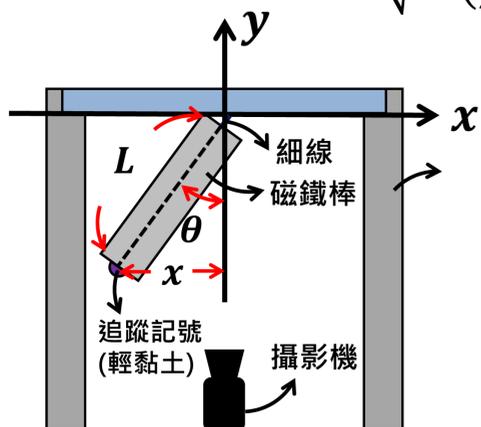
(三) 空氣阻力測量實驗

- 將磁鐵棒移動至擺幅約5度位置，釋放後使其沿直線來回擺動，記錄磁鐵棒擺動情形，換算為擺角

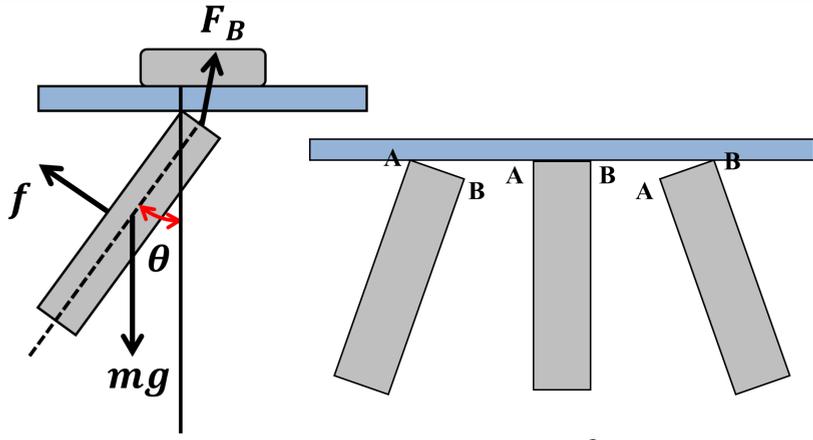
- 運動方程式 $-mgL \sin \theta - b\omega = I\alpha$ ，由參考資料得其軌跡方程式

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\left(\frac{bt}{2I}\right)} \cos\left[\sqrt{-\left(\frac{b}{2I}\right)^2 + \frac{mgL}{I}} t\right]$$

擬合實驗結果得到空氣阻力係數 b



三、數值模擬分析



➤ 運動方程式 $\Sigma\tau = s(\theta) - b \cdot \frac{d\theta}{dt} = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$

($I = \frac{5}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mL^2$, $s(\theta)$ 為實驗測得合力力矩)

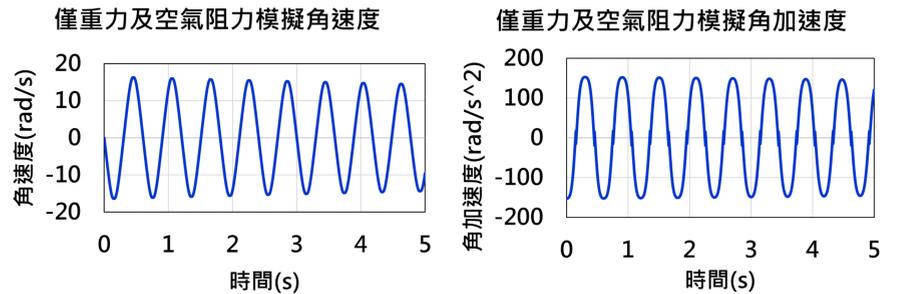
➤ 通過平衡點時，考量磁擺與壓克力板碰撞，以 $\omega_{碰撞後} = \omega_{碰撞前} \cdot (1 - c)$ 模擬能量損失

二、模擬磁擺運動之理論模型

➤ 考慮只有重力與空氣阻力的情況（想像實驗）。運動方程式如下：

$$\Sigma\tau = mg \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2} \cdot \sin(\theta - \beta) - b\omega = I\alpha$$

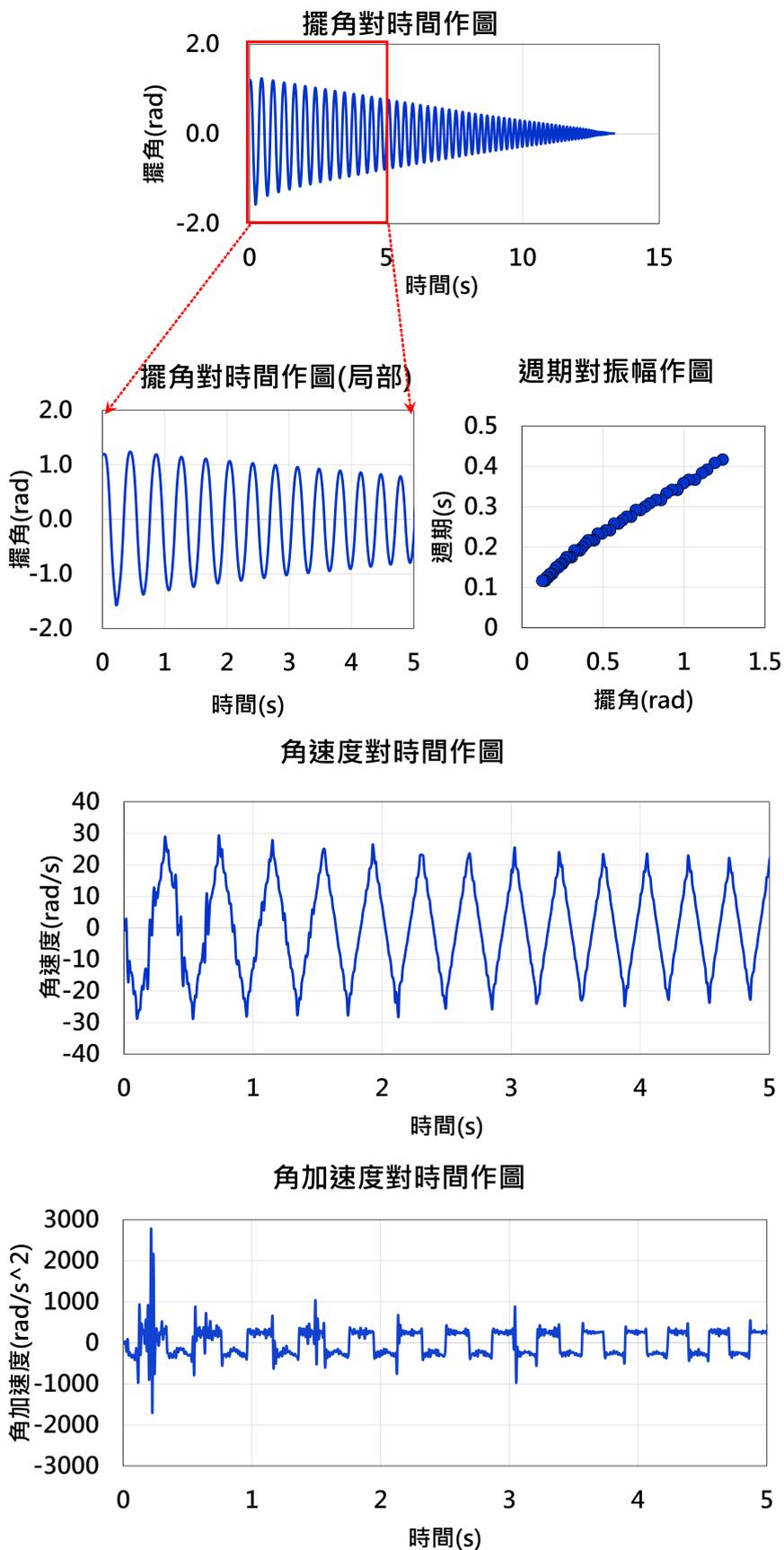
可發現角速度與角加速度與實驗結果截然不同，因此僅有重力和空氣阻力顯然不足以解釋磁擺之整體運動行為。



肆、研究結果與討論

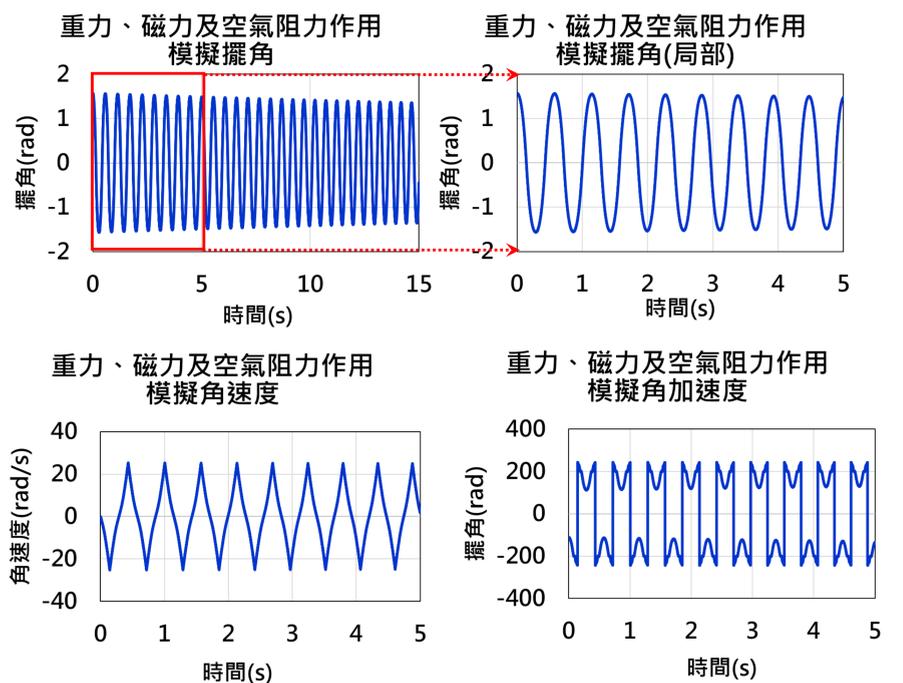
一、擺動實驗結果

- 磁擺振幅隨時間衰減，且週期也有減少之現象。
- 但是，角速度與角加速度變化並非如簡諧震盪般為正弦函數關係，且其斜率在角速度極大或極小值時，近似有斜率不連續的現象發生。



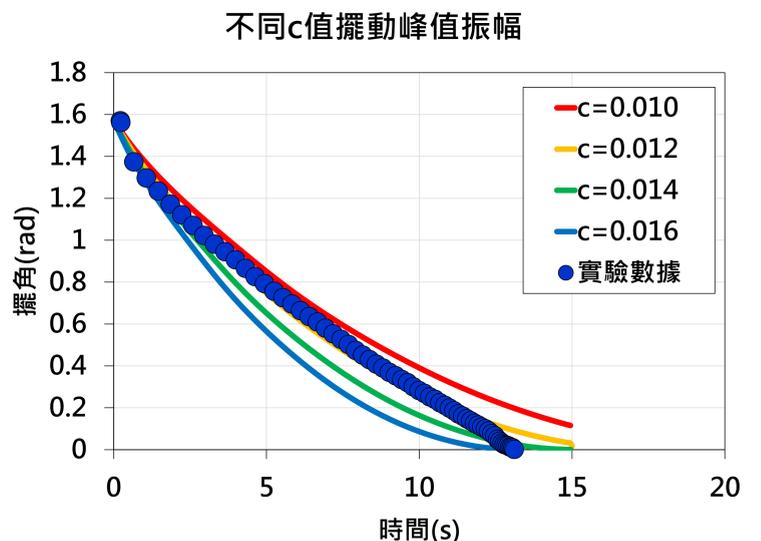
三、同時受重力、磁力及空氣阻力作用之模擬

➤ 加入了磁力作用後，角速度與角加速度對時間的作圖都出現了和實驗數據相似的趨勢，代表磁力為造成磁擺與典型物理擺不同之主因。



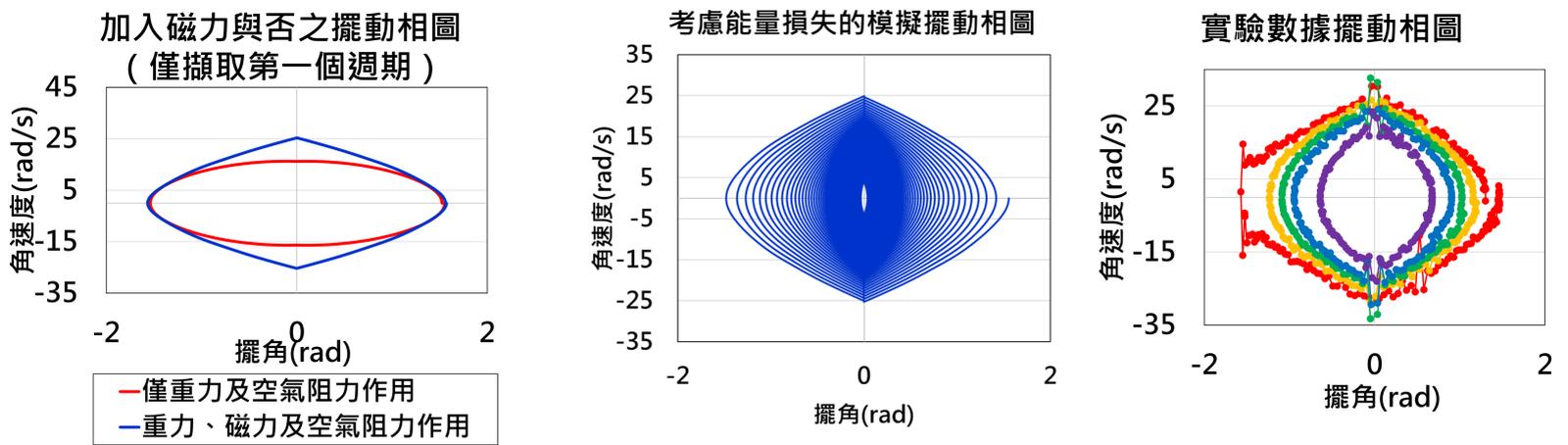
四、考慮轉動碰撞能量損失之模擬

➤ 考量磁擺與壓克力板發生碰撞，藉由在通過平衡位置時將角速度乘以 $(1 - c)$ 模擬能量損失機制。而透過調整 c 值，能使得模擬結果中振幅衰減能貼近實驗結果。



五、相圖 (Phase Diagram) 分析

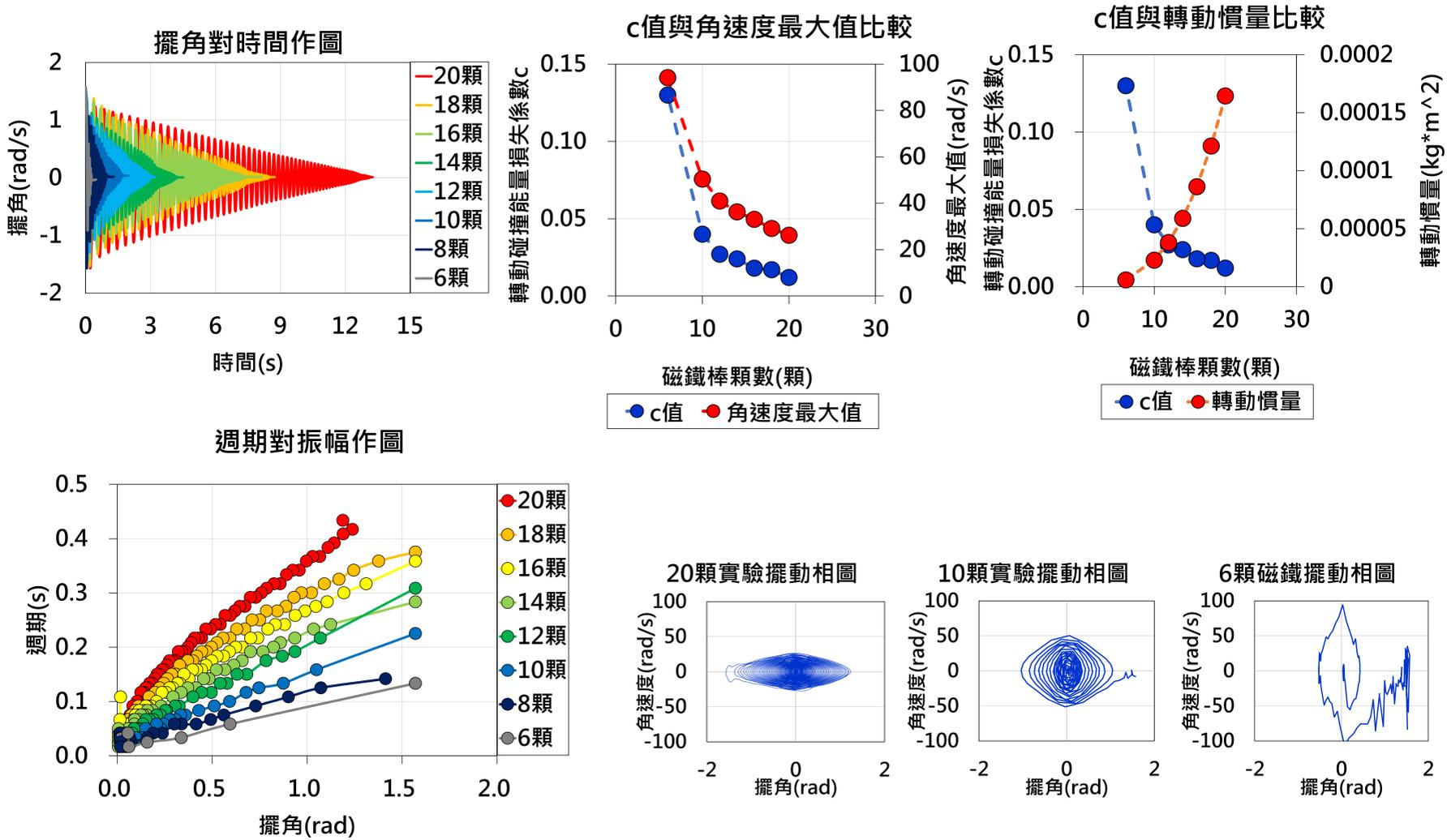
- 在平衡位置附近，磁鐵棒的角速度有斜率不連續之現象，係因回復力矩於平衡位置增大且瞬間由正轉變為負
- 加入磁力作用其動能較大，係因接近平衡點之動能不僅由重力位能轉換而來，還包含磁力位能，使其接近平衡點之角速度明顯較大



六、探討磁鐵棒長度對擺動情況之影響

- 擺長越短，擺角衰減越快，擺動週期也越小
- 擺長越短，能量損失越大

能量損失係數之變化可由各長度之磁鐵棒接近平衡位置的角速度進行解釋，由通過平衡位置之最大角速度可知，磁鐵棒越短，在平衡位置的角速度越大，能量損失越大。



伍、結論

本研究探討了磁擺的擺動行為及影響因素。實驗結果顯示磁擺與典型物理擺有下列不同之處：

- 回復力矩於接近平衡位置增大，使磁擺角速度於通過平衡位置時顯著增加，且有斜率不連續的現象
- 通過平衡位置的碰撞為造成磁擺能量損失之主因，由於擺長減小時磁力不變，使得磁擺通過平衡位置時角速度增大，導致能量損失比例隨擺長減小而增加

綜上所述，本研究量化了磁擺的擺動模式，初步解析了其中的物理機制，後續研究可進一步提高模型準確性，及考慮非沿平面的擺動，如錐擺之運動現象。

陸、參考文獻資料

- [1] Ttk592. (2021). Cubic Spline Interpolation in C++. Kluge.in-Chemnitz.De. <https://kluge.in-chemnitz.de/opensource/spline/>
- [2] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker. (2013). Fundamentals of Physics (10th edition)