

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051802

深深深幾許？橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者： 高二 于興嶸 高二 盧愷祥	指導老師： 簡裕芳
---------------------------------	------------------

關鍵詞：視深、雷射、光槓桿

摘要

本實驗以程式控制雷射光束之觀測角、不同觀察姿勢探討視深的變化，並與教科書的理論做比較，在改變觀察角度下，均證實物體正上方偏向 20° 的範圍內，教科書中的「簡化公式」誤差尚小，但發現觀察角度大於 20° 後，觀測角越大則視深呈現多樣的變化，視深近似公式不再適用，建議應做修改或說明。

光經水折射後產生虛像在司乃耳理論下以數學偏微分計算，顯示此虛像(視深)並非固定且與本實驗結果相同，甚至觀測角接近 90° ，視深呈急速趨於零或緩慢趨於零則與觀測姿勢有關，視深比原來簡化公式複雜，虛像的位置隨著觀測角增加而快速向觀察者移動。並逆向實驗，以水面下觀察地上物，證實理論亦成立，令人不可思議的現象盡在本研究中陸續被挖掘出。

壹、前言

一、研究動機

拿下令人窒息的口罩，期待的第一堂游泳課真如出娘胎般的喜悅。唉！高興太早，誰知沒有死在新冠肺炎，竟讓小流感束縛在游泳池的岸邊，只能無差別的「看三小」-人變小了、腿變短了，甚扭曲並拉近了距離，咦？忌妒的眼神「睨視」同學在水中如「沈浮子」般悠游自在，但滑稽瞬間映入眼，腿未免「太短了」，無詫異，但不可思議笑他「太短了」，「橫」看成嶺「側」成峯，遠近高低各不同，哈！好吧，也許這流感來得正是時候，莫怪老天爺關了我們游泳課悠游自在呢，祂留了一絲探究神遊的空間，讓我們來敲敲物理課的碗，眼見真的不為憑，站在岸邊斜看或蹲在岸前直視，看到的深淺變化如何？希望對水中折射形成的虛擬成像做個徹底的釐清。

二、研究目的

- (一)利用雷射光準直與聚光可觀察的特性模擬人眼睛的視線，使用兩支雷射分別安排成平視與側視的位置，並改變各種角度，找出眼睛的錯覺深度(一般稱為視深)的變化規則。
- (二)利用司乃耳定律、數學微分計算視深的公式，藉此理論與實測結果做比較，確認之間的差異性和可預測性，並找出教科書簡化公式的適用範圍。
- (三)改變眼睛各種姿勢，觀察視深變化的多樣性
- (四)利用光的可逆性驗證本實驗結論亦可適用於水中生物看岸邊的捕掠食者的高度

貳、研究設備及器材

一、研究裝置設備

(一)壓克力透明水箱、底部以瞬間膠固定一小鋼球。



(本照片組合由指導老師拍攝)

水箱長 100cm、寬 20cm、深 40cm (中間口型木條是預防水箱變形)



(本照片由第一作者拍攝)

(二) 投影幕：30cm 直尺、平面鏡(30cm × 30cm)、寶麗龍板兩片

二、自製測量工具器材

(一)雷射筆兩支(雷射頭內部有凸透鏡供調整光點大小)、齒輪組、水平儀四 個、三腳架、Arduino 開發板、藍芽模組、舵機組、平板電腦 (andriod 系統)

(二)研發程式

- 1.APP inventor、
- 2.arduino IDE 程式
- 3.控制雷射眼轉動 APP

(三)裝置圖



(由第一作者拍攝)

水平儀連接齒輪及舵機組



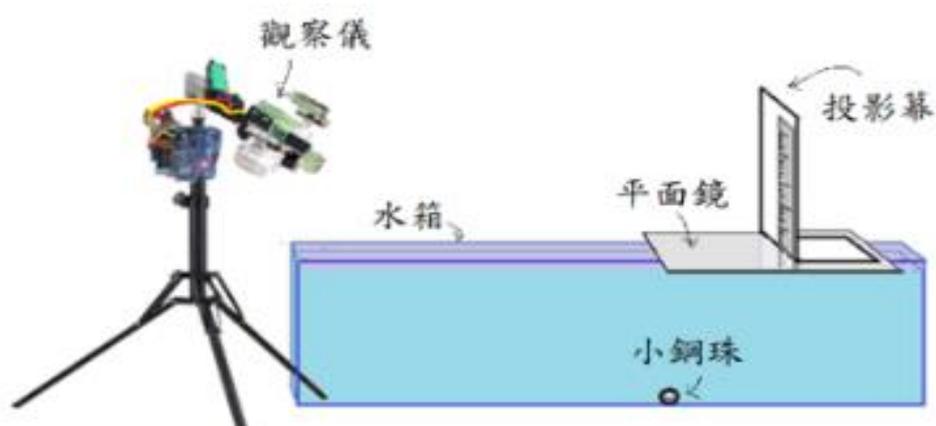
(由第一作者拍攝)

三腳架連接觀察儀



(由第二作者設計拍攝)

自行設計控制程式



實驗裝置圖 (設計圖由第一作者拍攝及繪製)

參、研究過程與方法

一、研究模式一

平視：眼線同一個水平線。

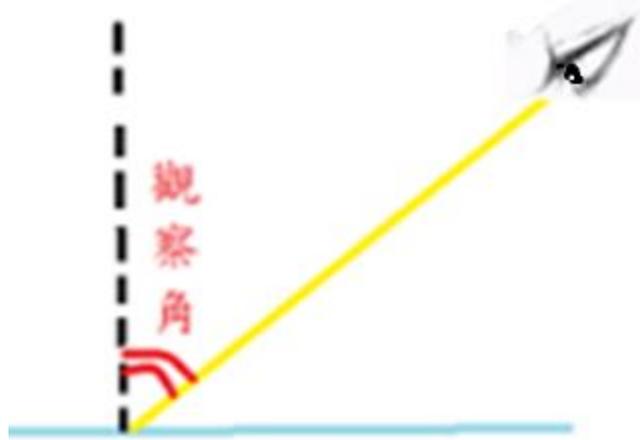


(本照片由第一作者拍攝)

觀察儀在模式一 (雷射頭在同一高度成平視模式)

實驗步驟

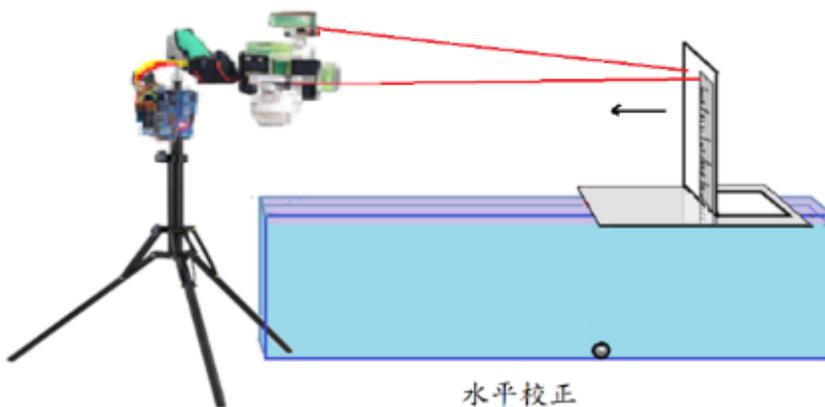
- (一)、測量水箱水面與平面鏡反射面距離 d 。
- (二)、平板電腦執行 LASER 控制程式，選擇模式一，連線 Arduino 藍芽，在面板調至兩支雷射觀察角為 90 度。



(本圖由第一作者繪製)

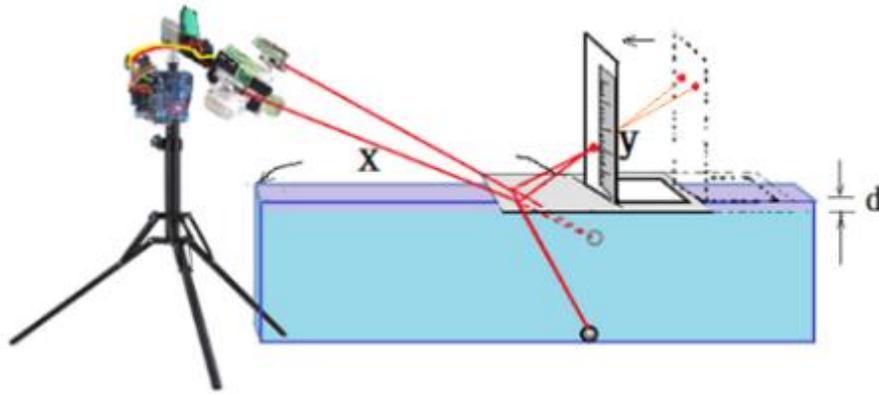
觀察角：定義視線與鉛垂線的夾角

- (三)、利用水平儀校正兩隻雷射使與同一高度且保持水平投射於保麗龍板，將保麗龍板平移，觀察焦點是否改變高度及相對位置以確定保麗龍板垂直水面。



(本圖由第一作者繪製)

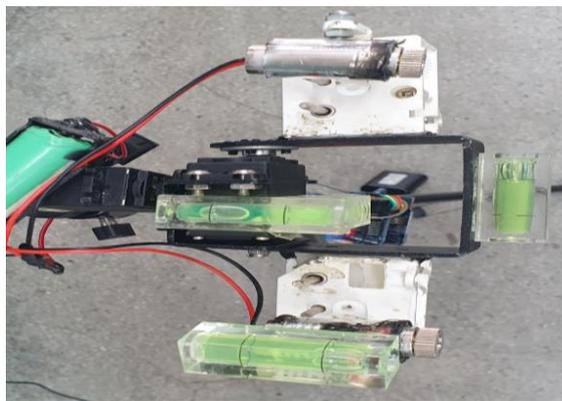
- (四)、在面板調至兩支雷射觀察角為 88 度，移動三腳架(觀察儀)直到雷射射在鋼球位置。
- (五)、手動微調雷射，將兩支雷射微向內使光點會聚於鋼球上表面。
- (六)、移動保麗龍定位板及鏡子至雷射光束前，使雷射光反射至保麗龍板。
- (七)、微調保麗龍板位置使兩雷射光交會於一點，並測量高度 y 及距水缸前端長度 x 。
- (八)、重複 4~7，改變觀察角為 2~90 度，記錄於表格中。



(本圖由第一作者繪製)

一、研究模式二

側視：眼線同一個鉛垂線。



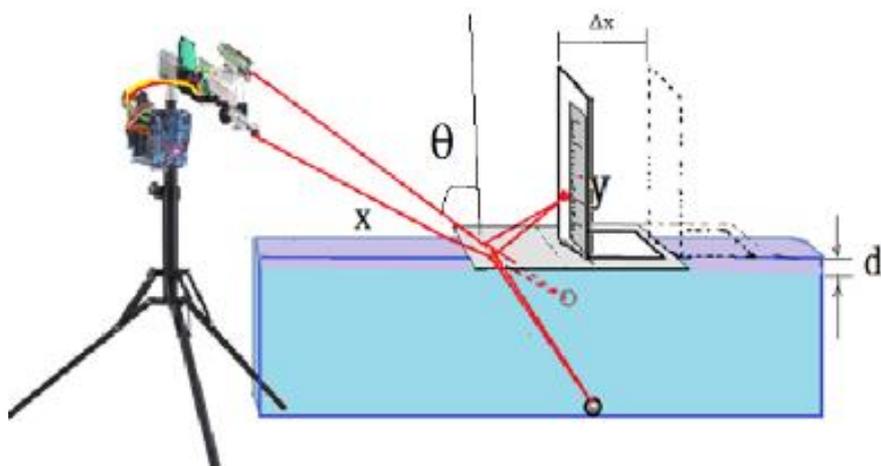
(本圖由第一作者繪製)

觀察儀在模式二 (雷射頭上下同一鉛垂線上成側視模式)

實驗步驟

- (一)、校準雷射光束水平於地面，且在同一鉛垂線上。
- (二)、將平板程式調至模式二，控制 Arduino 面板調整雷射筆觀察角為 90 度，如模式一水平儀校正下方雷射筆。
- (三)、以下方雷射筆為基準，調整雷射筆觀察角為 88 度固定不動，移動三腳架使下方雷射照至球上，手動調整上方雷射也照至球上。
- (四)、移動平面鏡及投影幕，使雷射光經平面鏡反射後投影在投影幕上。
- (五)、移動投影幕使兩雷射光點交會於一點，測量其高度 y 以及距水缸前端長度 x 。

(六)、重複 3~5，改變觀察角為 2~90 度，記錄於表格中。

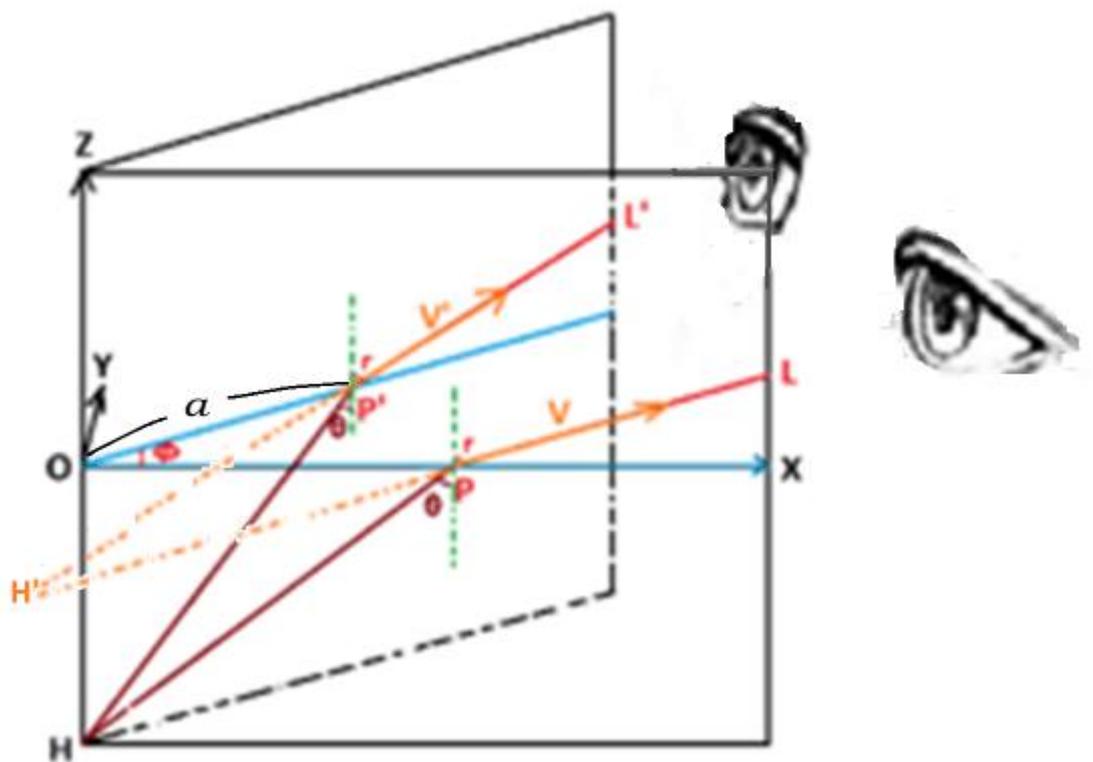


(本圖由第一作者繪製)

三、研究理論探討

(一)、平視之視深原理探討

假設兩雷射光(兩視線)方程式為 L 、 L' ，水面為通過 X - Y 軸的水平面，則兩眼視線分別通過水平面 P 、 P' 。 ϕ 兩眼視線夾角的水平分量



(本圖由指導老師繪製)

假設視線 L 、 L' 在水面的投射點為 P 、 P' 經折射後交於為物體位置 $H(0,0,-h)$ ，則

$$P(a, 0, 0)$$

$$P'(a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$$

$$\vec{V} = [\sin r, 0, \cos r] \quad \text{左眼視線的方向}$$

$$\vec{V}' = [\sin r \cos \phi, \sin r \sin \phi, \cos r] \quad \text{右眼視線的方向}$$

$$a = h \tan \theta$$

L 、 L' 直線參數式可寫為

$$L : \begin{cases} x = a + \sin r \times t \\ y = 0 \\ z = \cos r \times t \end{cases}$$

$$L' : \begin{cases} x = a \cos \phi + \sin r \cos \phi \times t' \\ y = a \sin \phi + \sin r \sin \phi \times t' \\ z = \cos r \times t' \end{cases}$$

求 L 、 L' 兩光線直線方程式的交點即為虛像位置 $H'(x, y, z)$

$$\begin{cases} x = a + \sin r \times t = a \cos \phi + \sin r \cos \phi \times t' \\ y = 0 = a \sin \phi + \sin r \sin \phi \times t' \\ z = \cos r \times t = \cos r \times t' \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} t' &= -\frac{a}{\sin r} \\ t &= t' \end{aligned}$$

$$t = t' = -\frac{a}{\sin r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + \sin r \times t = a + \sin r \times \left(-\frac{a}{\sin r}\right) = 0 \\ y = 0 \\ z = \cos r \times t = \cos r \times \left(-\frac{a}{\sin r}\right) = -\frac{a}{\tan r} \end{cases}$$

根據司乃耳定律

$$n \sin \theta = \sin r$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}}$$

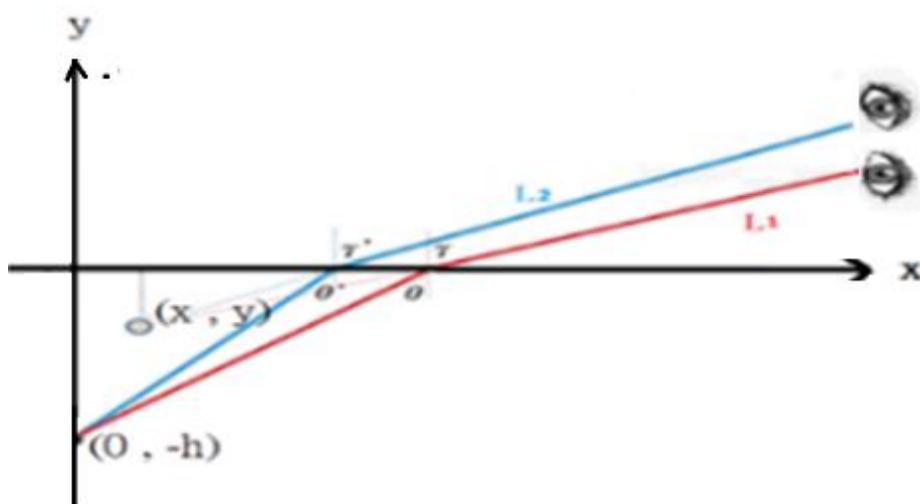
$$z = -\frac{a}{\tan r} = -\frac{h \tan \theta}{\tan r} = -\frac{h \cos r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}}$$

$$x = 0$$

$$H'(0, 0, -\frac{h \cos r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}})$$

$x = 0$ 表示虛像（視深）位置在原物體正上方

(二)、側視之視深原理探討



(本圖由指導老師繪製)

設虛像位置為 (x, y) ，原物位置 $(0, -h)$

而 L1: 直線點斜式 $\frac{y-0}{x-h \tan\theta} = \tan(90^\circ - \gamma) = \cot\gamma$

L2: 直線點斜式 $\frac{y-0}{x-h \tan\theta'} = \tan(90^\circ - \gamma') = \cot\gamma'$

移項可得 $\Rightarrow y = \cot\gamma(x - h \tan\theta) = \cot\gamma'(x - h \tan\theta')$

$$\Rightarrow x = \frac{h(\cot\gamma' \tan\theta' - \cot\gamma \tan\theta)}{\cot\gamma' - \cot\gamma} \dots 1 \text{ 式}$$

而 $\cot\gamma$ 對 γ 微分可表示成 $\frac{d}{d\gamma} \cot\gamma = \frac{\cot\gamma' - \cot\gamma}{d\gamma}$

$$\text{又 } \frac{d}{d\gamma} \cot\gamma = -\frac{1}{\sin^2\gamma} \quad * \text{參考資料 2}$$

$$\text{得 } -\frac{1}{\sin^2\gamma} = \frac{\cot\gamma' - \cot\gamma}{d\gamma}$$

$$\Rightarrow \cot\gamma' - \cot\gamma = -\frac{d\gamma}{\sin^2\gamma}$$

帶回 1 式 之分母得到

$$\Rightarrow x = -\frac{h(\cot\gamma' \tan\theta' - \cot\gamma \tan\theta)}{d\gamma} \sin^2\gamma$$

$$n \sin\theta = \sin\gamma$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\gamma}{n} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2\gamma}}$$

$$\text{令 } f(\gamma) = \cot\gamma \tan\theta = \cot\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2\gamma}} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2\gamma}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-h(f(\gamma') - f(\gamma))}{d\gamma} \sin^2\gamma$$

$$= -h \cdot f'(\gamma) \cdot \sin^2\gamma$$

$$f'(\gamma) = -\frac{\sin\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin\gamma \cos^2\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{最後即可得出 } x = -h \cdot \left(-\frac{\sin\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin\gamma \cos^2\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}} \right) \sin^2\gamma$$

$$= h \left(\frac{\sin^3\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin^3\gamma \cos^2\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

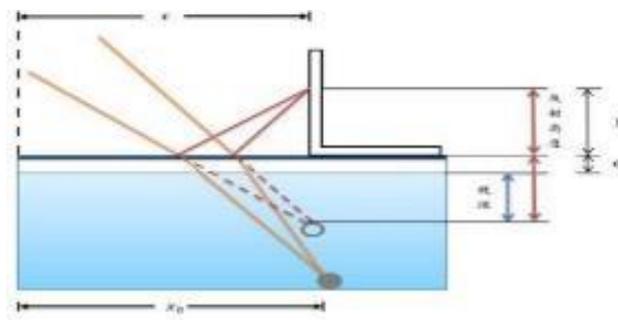
$$= h \frac{\sin^3\gamma(n^2 - 1)}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow y = \cot\gamma(x - h \tan\theta)$$

$$= \cot\gamma \cdot h \left(\frac{\sin^3\gamma(n^2 - 1)}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2\gamma}} \right)$$

$$= -h \frac{n^2 \cos^3\gamma}{(n^2 - \sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad * \text{參考資料 1}$$

四、利用平面鏡反射求視深虛像 y 位置



(本圖由第一作者繪製)

(一)、視深 = 反射高度 - (鏡反射面與水面差)

$$h_e = y - d$$

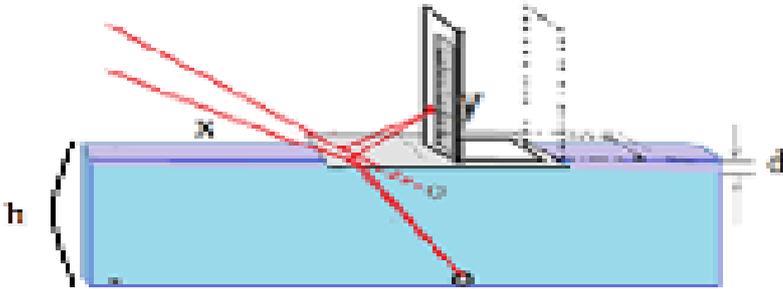
(二)、x 方向位移 = 實際 x_0 位置 - 虛像 x 位置

$$\Delta x = x - x_0$$

肆、研究結果

一、實驗一 (平視模式)

理論 $h_E = \frac{h \cos \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}}$, $\Delta x = 0$ 課本簡化公式 $h_E = \frac{h}{n} = 28.2 \text{ cm}$, $\Delta x = 0$



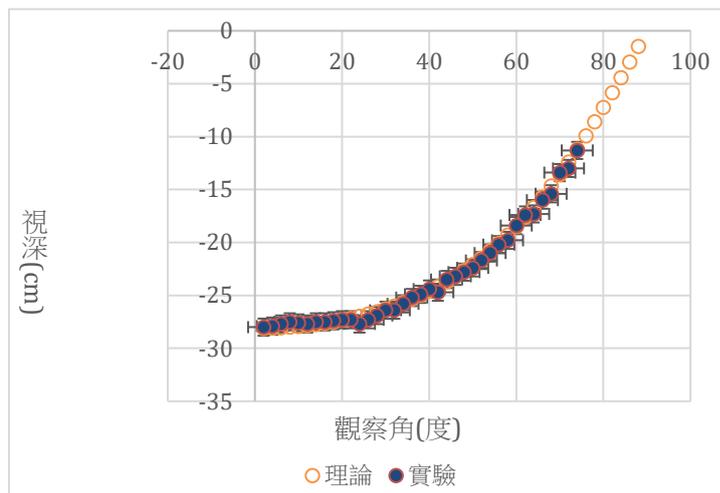
(本圖由第一作者繪製)

$h=37.5 \text{ cm}$ $d=2.5 \text{ cm}$ (水折射率=1.33)

實驗一結果:理論與實驗數據對照表

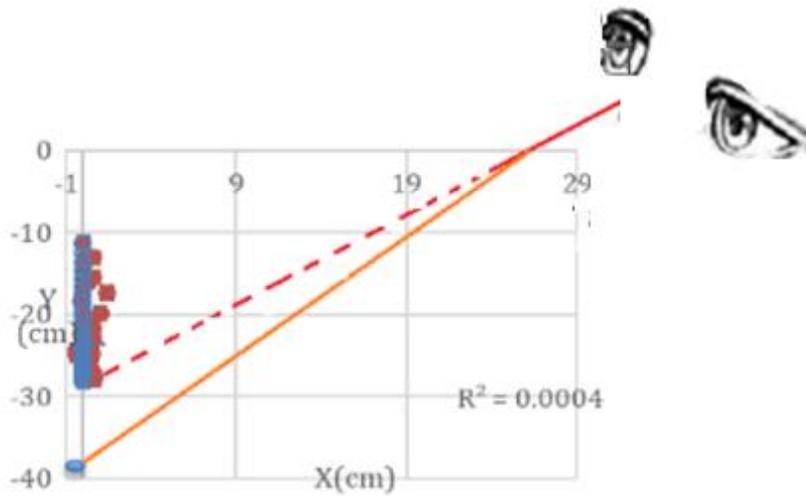
(實驗數據請參照 實驗紀錄簿 1.平視模式-理論與實驗數據對照表)

理論、實驗對照圖 (不同觀察角與視深的關係圖)



(本圖由第一作者繪製)

原物體位置與虛像的位置 (視深位置) 分佈圖



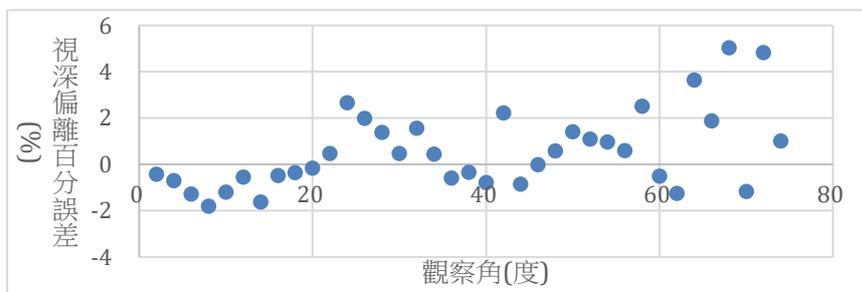
(本圖由第一作者繪製)

(實驗數據請參照 實驗紀錄簿 2.平視模式 -- 課本簡化式、實驗、理論數據百分誤差對照表)

ΔX 的標準差 $s = 0.3515\text{cm}$

Δu_x 的不確定度 $= \frac{s}{\sqrt{36}} = 0.059\text{ cm}$

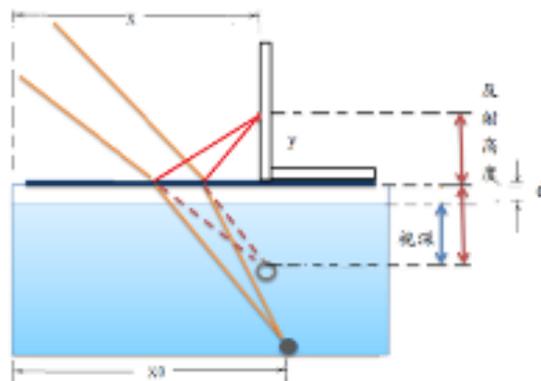
表示虛像的位置在原物正上方偏離左右不到 $\pm 0.6\text{mm}$



(本圖由第一作者繪製)

視深偏離正上方百分誤差與觀察角散布圖

二、實驗二(側視模式)



(本圖由第一作者繪製)

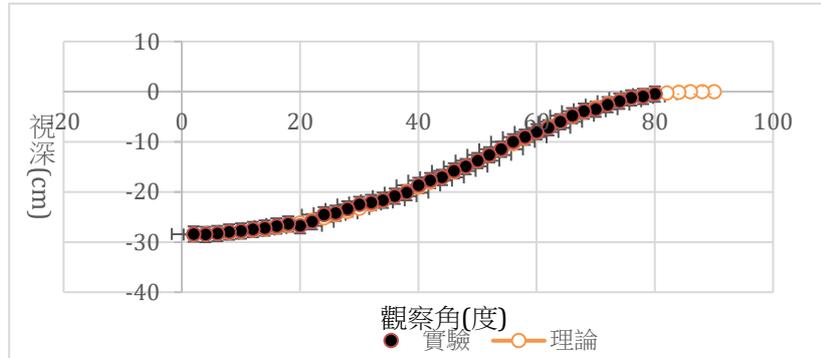
$$\text{理論 } h_E = \frac{hn^2 \cos^3 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Delta x = \frac{h \sin^3 \gamma (n^2 - 1)}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{課本簡化理論 } h_E = \frac{h}{n} = 28.2 \text{ cm}, \quad \Delta x = 0$$

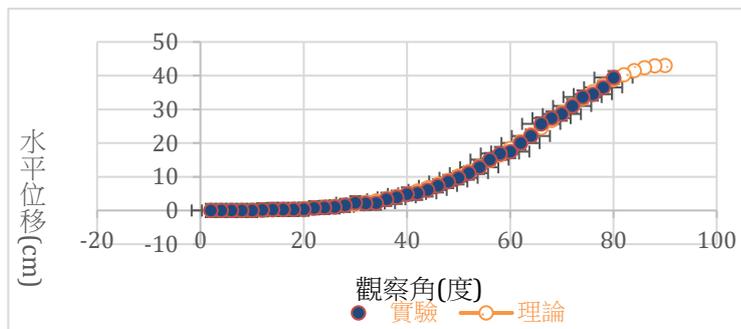
$h=38.0 \text{ cm}$ $d=2.5 \text{ cm}$ (水折射率=1.33)

實驗二結果:理論與實驗數據對照表

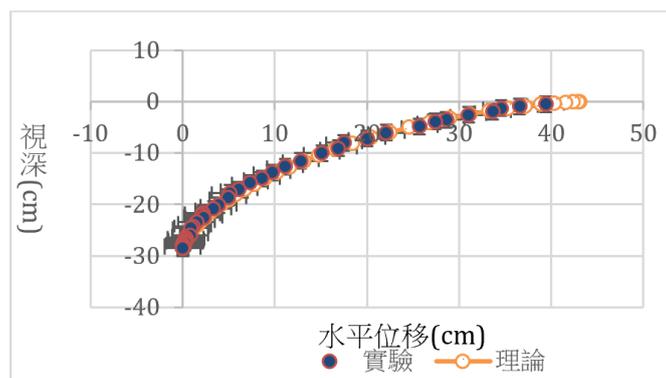
(實驗二數據請參照實驗紀錄簿 3. 側視模式 -- 實驗、理論數據對照表)



理論、實驗對照圖 (不同觀察角與視深的關係圖) (本圖由第一作者繪製)



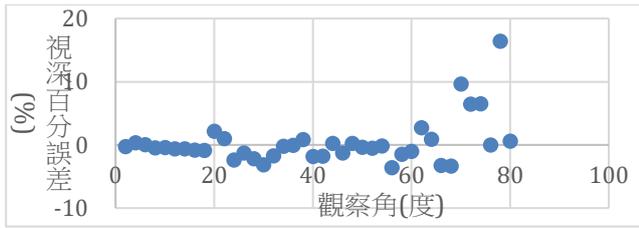
理論、實驗對照圖 (不同觀察角與水平位移 Δx 關係圖) (本圖由第一作者繪製)



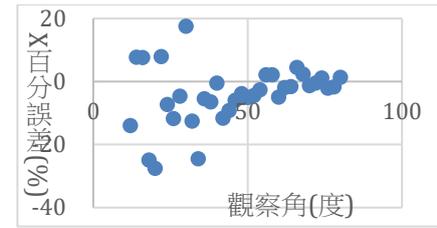
原物體位置與虛像的位置 (視深位置) 分佈圖(本圖由第一作者繪製)

實驗數據對照表

(數據請參照 實驗紀錄簿 4.側視模式 -- 簡化式、實驗、理論數據百分誤差對照表)



視深百分誤差與觀察角散布圖(側視)



X 百分誤差與觀察角散布圖(側視)

為了研究更多可以讓眼睛改變觀察姿勢，取得由平視模式漸漸轉成側視模式對視深的更多數據以獲得視深的完整資訊，也同時為了改善我們對控制雷射方向的準確性，改變設計讓儀器減少人為操作誤差或判斷錯誤的因素，以下為變更後的裝置圖。



雷射改由舵機控制轉動方向，以利研究由平視漸變為側視觀測姿勢，並由前面螺絲調整雷射交會點

(本圖由第一作者繪製)



利用舵機轉動反射鏡以改變雷射入射角度不須移動雷射原位置，處可利用光槓桿原理計算雷射入射角度

(本圖由第一作者繪製)



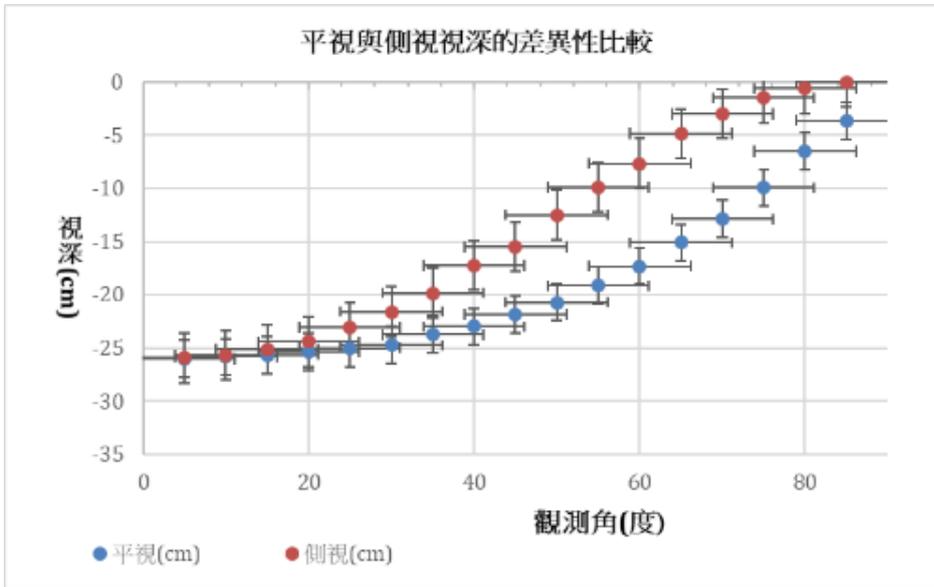
改變測量視深位置的投影幕，在座標控制器上有一直角可定位雷射反射之交點，圖下方為控制觀測物位置滑軌

(本圖由第一作者繪製)

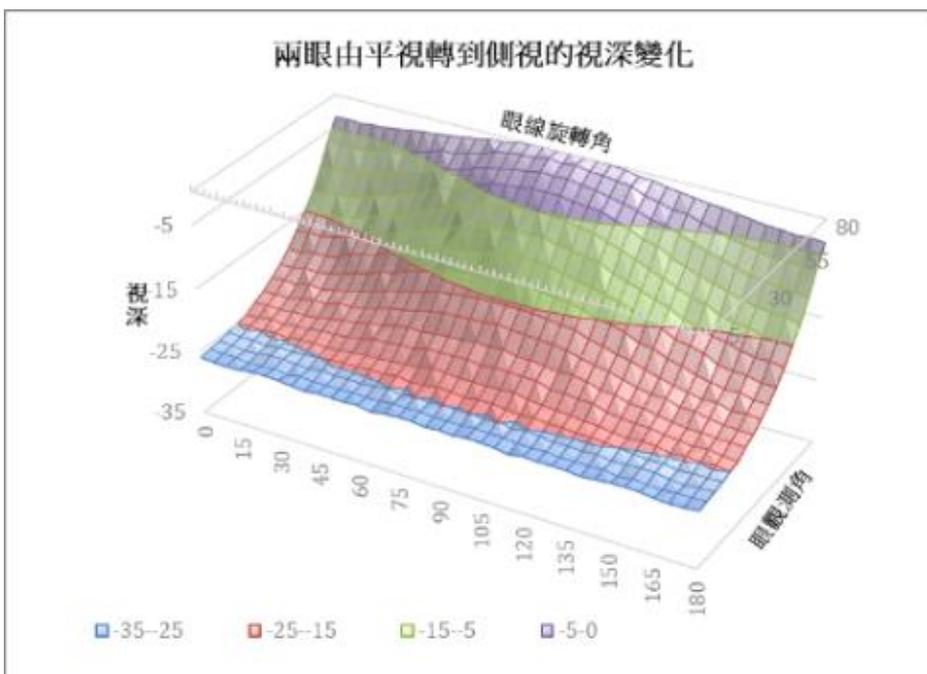
以下將平視與側視模式以不同觀察角更精細的調整測出視深的比較：

實驗數據對照表

(數據請參照實驗紀錄簿 5. 平視與側視模式比較 -- 實驗數據對照表)

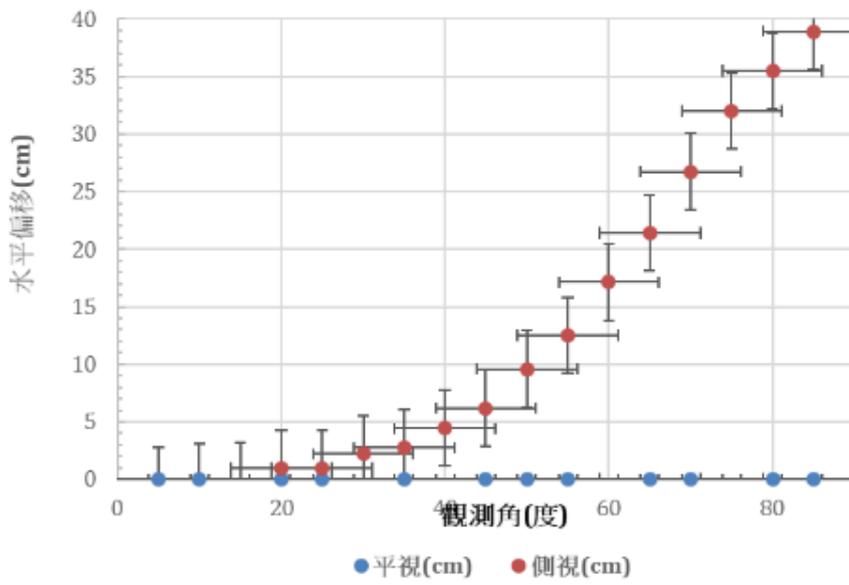


(本圖由第一作者繪製)



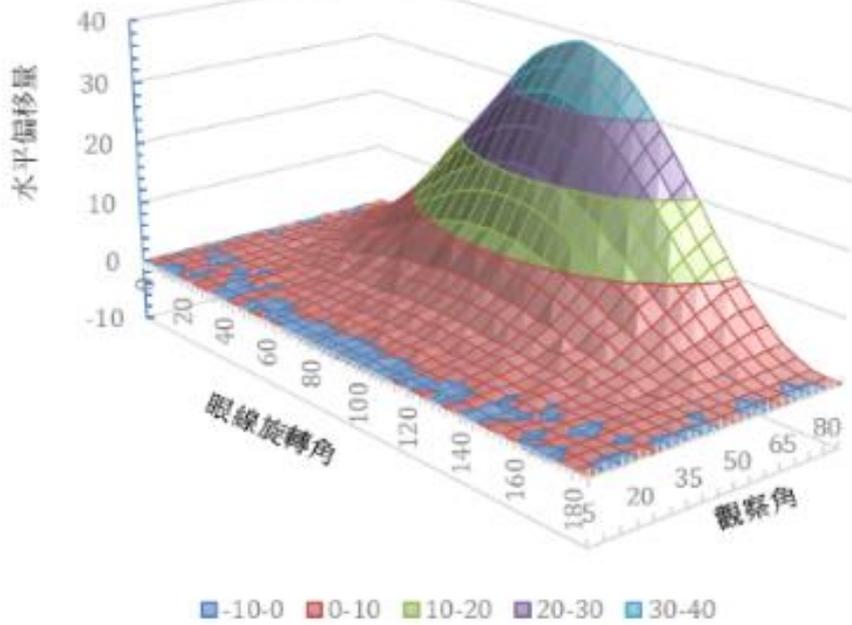
(本圖由第一作者繪製)

平視與側視的水平偏移差異性比較



(本圖由第一作者繪製)

虛像出現在實物正上方往觀察者偏移量



(本圖由第一作者繪製)

伍、討論

一、實驗中，觀察角在大於 80 度不易觀察到視深、小於 20 度時誤差常大:

(一)、觀察角過小時，折射角也會很小，因此只要有小誤差影響就會很大，

(二)、觀察角過大時，水中物體的光已接近水的臨界角，光線的透射率極小

(參考資料 3)，穿透水面的光極少，不易測量。



(本圖由第一作者繪製)

觀察角 60 度

觀察角 75 度

二、平視

(一)、根據實驗前的公式推導，平視時虛像之視深應遵守此公式，且位置為實際物體之

$$\text{正上方。} \begin{cases} x = 0 & \text{物體正上方} \\ y = 0 \\ z = h' = -\frac{a}{\tan r} = \frac{h \cos \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} \end{cases}$$

而經過實驗測試驗證，實驗數值跟理論推導數值誤差都在 5.04% 以內， ΔX 不確定度 = 0.6mm 與深度 40cm 較在 1.8% 以內，可證實此公式正確性。

(二)、課本所用的公式在 20 度內可以約略推算視深的位置，本實驗中理論與實測結果也都吻合。

(三)、我們所算出視深公式與兩個眼睛的視角無關，代表以平視的方法在水面上觀察水中的影像與眼睛到物理的距離無關，

三、側視

(一)、而側視時，虛像之位置並非在實際物體之上方，虛像之 X 位置及 Y 位置理論與實驗都可以證實此結果

$$x = \frac{h \sin^3 \gamma (n^2 - 1)}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{hn^2 \cos^3 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

而經過實驗驗證，此公式結果跟實際實驗數值大部分誤差都在 9.6% 以內只有在觀察角為 80 度時，有較大誤差 16%，因為此為大角度，所以根據以上推論，因為透射率太小，導致儀器不易瞄準，導致有較大誤差。

(二)、以側視的方法，我們發現看到水中的像除了和課本預測結果相差很大，很顯然教科書所述完全無法預測在大角度的視深，還有一點科書完全沒提到，影像除了可能完全浮在水面而且會向觀察者靠近，甚至偏移距離大到比原實深還大，(我們使用的水槽只有 40cm，水平偏移最大超過 40cm)。

(三)、大部分教科書採用的繪圖方式為測視，此種觀察方式在角度小時， h/n 的結果跟理論結果相差小，但隨觀察角越來越大，偏差可達到原本的 50 倍以上。

四、由岸邊看水中浮游物顯現所有事物縮小，反過來是否剛好相反嗎？以上實驗說服了我們「眼見真的不為憑」，「理所不一定當然」，於是參考了下課本視深單元簡單帶過

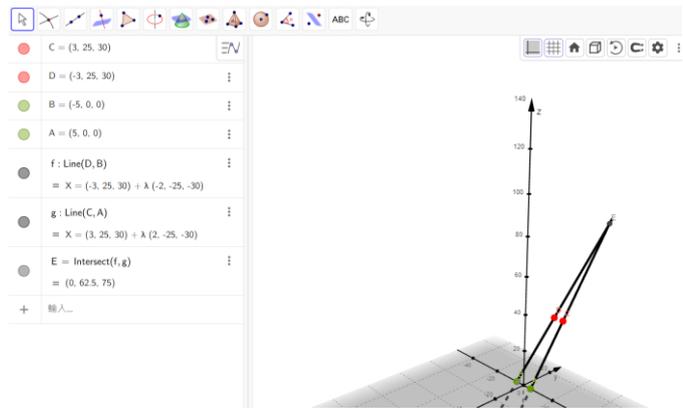
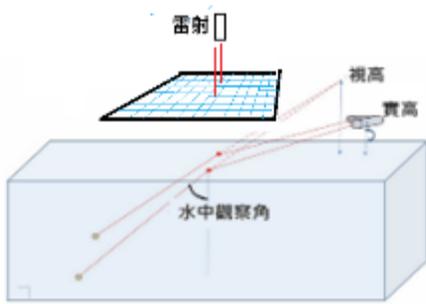
$h_E = \frac{h}{n}$ 岸邊看水中稱視深， $h_E = \frac{h}{n'}$ 水中看岸上稱它視高吧。

光若假設有可逆性則 $n' = \frac{1}{n}$

我們來驗證

$$h_E = \frac{h \cos \gamma}{\sqrt{n'^2 - \sin^2 \gamma}}$$

我們在水中立了兩個點，當作觀察者的兩個眼，再利用雷射在同一個高度但以不同的兩個角度分別照射這兩個點，用本實驗同一個原理讓水面上方的雷射照射在水槽上的方格紙上的兩個點，由方格紙上的座標，利用 GeoGebra 軟體可推出視高，如圖。



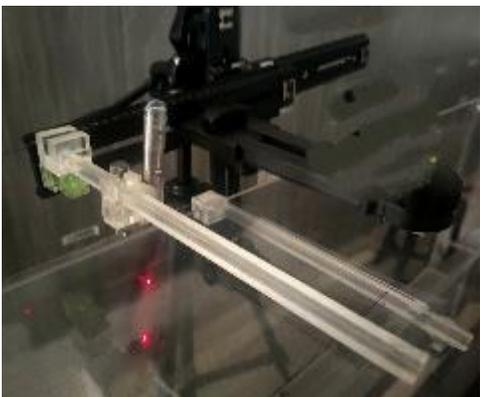
(本圖由第二作者繪製)



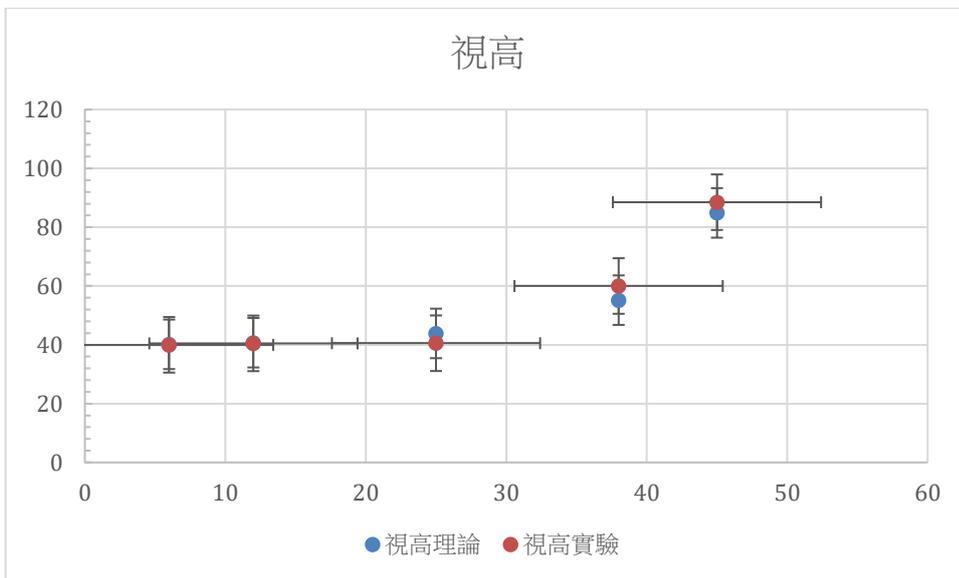
雷射可由一微調齒輪控制方向
(本圖由第一作者繪製)



自制透明方格紙，用來定位雷射
在水面的入射點
(本圖由第一作者繪製)



定位雷射在水面的入射點，垂直
雷射光投射在投影方格紙上，記
錄兩次投影座標在 GGB 上求視高
位置
(本圖由第一作者繪製)



在水中觀察岸邊的物體，所有物體都變成巨無霸了，視野相對變小，超過 45° 以上已無法準確看出水面，這是因為水的臨界角約為 48° ，這個就是水中生物明明垂釣客就在岸邊算計牠們，偏偏就往魚鉤游去送死。

陸、結論

一、平視：

- (一)、隨著觀察角(光線入射角)越來越大，虛像位置越來越淺，觀察角趨近於 90 度時，視深**急速趨近於零**，但 x 方向**並沒有位移**，在實物的正上方。
- (二)、課本中告訴我們在觀察角(光線入射角)接近 0 度時，可代視深=實深/折射率，但幾度內會是差距最小的呢?數據推算出來在 20 度以內，實際視深跟用 h/n 算出的視深僅有 5% 以內誤差，而到達 30 度時就有 10% 以上的誤差了。

二、側視：

- (一)、隨著觀察角(光線入射角)變大，虛像位置越來越淺，觀察角趨近於 90 度時，視深緩慢趨近於零，且 x 方向**有位移**，**越來越急速靠近觀察者**，這也莫怪不識水性又不信告示的溪邊戲水者，每逢暑假溺斃不少學生，遠處岸邊明明近在眼前，但是卻永遠到不了岸。

(二)、我們的實驗 80° 以上無法繼續觀察這是因為物體在水中發出的光線當接近臨界角時透射率以乎為零(參考資料 2)，這個也是我們平常生活中未發現水中生物竟可漂至表面的現象了。

(三) 不管任何觀察姿勢平視或側視或介於中間的眼線轉角我們都無法用簡化的公式預測視深，強烈希望中學教材中能更正或提及我們研究的結果，也許不是誤導，但至少有利將來同學可以做更多有趣的現象觀察。

三、當我們的實驗完成了平視和側視察水中的物體如千變萬化的規之後，我們無法克服了數學的難題，直接找出介於兩種模式間的規則，也試圖用數學幾何和微分的技巧找出關係式，但是陷入了數學的複雜難解的困難，最後我們決定先由實驗測出這些存在的虛像位置，不管是視深或虛像水平沿觀察者快速移動，這些似乎存在有一定的規律性，也許是我們忽略了什麼物理規則，等著我們加緊腳步做推演將兩種觀察模式聯繫起來，但是也許以後有別人會比我們更早發現它。

四、在實驗的終了前，我們要給這個研究做個完整的交代，我們覺得物理定律終歸需具有可逆性，所以我們反過來試著檢驗從水中看世界是否世界變大了呢？答案是肯定的，世界越大越讓我們覺得我們的視野太窄了，有些角落就是看不到，那句話猶言在耳：眼見不為憑，何況眼不見。

柒、參考資料

1.徐國誠 (2004)成淵高中視深研究

檢自 [https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564187381784d09345bf22/2000-232-04\(30-34\).pdf](https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564187381784d09345bf22/2000-232-04(30-34).pdf)

2.微積分/關建宗，東華書局民 91 初版

3.鄭邵家 (2022) 中央大學物理學系 光的偏振

檢自 http://generalphysicslab.phy.ncu.edu.tw/phy_lab/polarization.htm

附錄、實驗紀錄簿

1. 平視模式 -- 實驗、理論與實驗數據對照表

觀察角(°)	理論視深 (cm)	實驗視深 (cm)	$\Delta X(\text{cm})$	誤差		百分誤差(%)
				$\Delta h_e = h_E - h_e$	$ \Delta h_e $	
$\Gamma (^\circ)$	h_E	$h_e = -(y-d)$	X-X0			$\frac{\Delta h_e}{h_E} \times 100\%$
74	-11.19	-11.3	0.7	-0.11	0.11	1.01
72	-12.40	-13	0.1	-0.60	0.60	4.83
70	-13.56	-13.4	0.6	0.16	0.16	1.17
68	-14.66	-15.4	0.1	-0.74	0.74	5.04
66	-15.71	-16	0.4	-0.29	0.29	1.88
64	-16.69	-17.3	-0.7	-0.61	0.61	3.64
62	-17.62	-17.4	0.7	0.22	0.22	1.26
60	-18.49	-18.4	0.8	0.09	0.09	0.51
58	-19.31	-19.8	-0.3	-0.49	0.49	2.52
56	-20.08	-20.2	0.6	-0.12	0.12	0.59
54	-20.80	-21	0.7	-0.20	0.20	0.97
52	-21.47	-21.7	0.1	-0.23	0.23	1.09
50	-22.09	-22.4	0.8	-0.31	0.31	1.41
48	-22.67	-22.8	0.1	-0.13	0.13	0.59
46	-23.20	-23.2	0.2	0.00	0.00	0.02
44	-23.70	-23.5	0.7	0.20	0.20	0.85
42	-24.16	-24.7	1.1	-0.54	0.54	2.22
40	-24.59	-24.4	0.2	0.19	0.19	0.78
38	-24.99	-24.9	1.1	0.09	0.09	0.34
36	-25.35	-25.2	0.7	0.15	0.15	0.59
34	-25.68	-25.8	0.4	-0.12	0.12	0.45
32	-25.99	-26.4	0.7	-0.41	0.41	1.57
30	-26.27	-26.4	0.3	-0.13	0.13	0.48
28	-26.53	-26.9	0.6	-0.37	0.37	1.39
26	-26.77	-27.3	0.6	-0.53	0.53	1.99
24	-26.98	-27.7	0.3	-0.72	0.72	2.67
22	-27.17	-27.3	0.3	-0.13	0.13	0.47
20	-27.34	-27.3	0.1	0.04	0.04	0.16
18	-27.497	-27.4	0.4	0.10	0.10	-0.35

16	-27.632	-27.5	0.3	0.13	0.13	-0.48
14	-27.750	-27.3	0.6	0.45	0.45	-1.62
12	-27.851	-27.7	0.6	0.15	0.15	-0.54
10	-27.936	-27.6	0.7	0.34	0.34	-1.20
8	-28.004	-27.5	0.6	0.50	0.50	-1.80
6	-28.057	-27.7	0.6	0.36	0.36	-1.27
4	-28.095	-27.9	0.6	0.19	0.19	-0.69
2	-28.118	-28	0.1	0.12	0.12	-0.42

ΔX 標準差 $S=0.351518\text{cm}$

不確定度 $\Delta u_x = \frac{S}{\sqrt{36}} = 0.059 \text{ cm}$

2. 平視模式 -- 課本簡化式、實驗、理論數據百分誤差對照表

觀察角	簡化式 h/n(cm)	實驗-理論視深百分誤差(%)	簡化式-理論視深百分誤差(%)
$\Gamma(^{\circ})$	水深/折射率	(實驗視深-理論視深) / 理論視深	(實驗視深-簡化式) / 簡化式視深
74	-28.125	1.01	151.41
72	-28.125	4.83	126.80
70	-28.125	-1.17	107.42
68	-28.125	5.04	91.84
66	-28.125	1.88	79.08
64	-28.125	3.64	68.50
62	-28.125	-1.26	59.61
60	-28.125	-0.51	52.07
58	-28.125	2.52	45.62
56	-28.125	0.59	40.06
54	-28.125	0.97	35.23
52	-28.125	1.09	31.02
50	-28.125	1.41	27.33
48	-28.125	0.59	24.08
46	-28.125	-0.02	21.21
44	-28.125	-0.85	18.66
42	-28.125	2.22	16.39
40	-28.125	-0.78	14.37
38	-28.125	-0.34	12.56
36	-28.125	-0.59	10.95
34	-28.125	0.45	9.50

觀察角	簡化式 h/n(cm)	實驗-理論視深百分誤差(%)	簡化式-理論視深百分誤差(%)
32	-28.125	1.57	8.20
30	-28.125	0.48	7.04
28	-28.125	1.39	6.00
26	-28.125	1.99	5.07
24	-28.125	2.67	4.25
22	-28.125	0.47	3.51
20	-28.125	-0.16	2.86
18	-28.125	-0.35	2.28
16	-28.125	-0.48	1.78
14	-28.125	-1.62	1.35
12	-28.125	-0.54	0.98
10	-28.125	-1.20	0.68
8	-28.125	-1.80	0.43
6	-28.125	-1.27	0.24
4	-28.125	-0.69	0.11
2	-28.125	-0.42	0.03

3. 側視模式 -- 實驗、理論數據對照表

觀察角(°)	實際視深(cm)	理論視深(cm)	實際 x 位移(cm)	理論 x 位移(cm)	x 百分誤差(%)	視深百分誤差(%)
80	-0.49	-0.49	39.4	38.87	1.36	0.6
78	-0.95	-0.82	36.55	37.18	-1.7	16.4
76	-1.25	-1.25	34.55	35.3	-2.13	-0.05
74	-1.91	-1.79	33.65	33.28	1.12	6.5
72	-2.6	-2.44	31	31.16	-0.5	6.44
70	-3.5	-3.19	28.6	28.98	-1.3	9.6
68	-3.9	-3.04	27.4	26.78	2.32	-3.39
66	-3.8	-3.96	25.7	24.6	4.48	-3.27
64	-6.01	-5.96	22.1	22.46	-1.62	0.88
62	-7.2	-7.01	20	20.4	-1.96	2.72
60	-8.02	-8.1	17.5	18.42	-5.01	-1.04
58	-9.09	-9.23	16.9	16.55	2.11	-1.52
56	-10	-10.37	15.1	14.79	2.1	-3.6
54	-11.5	-11.52	12.8	13.15	-2.63	-0.21
52	-12.6	-12.67	11.1	11.62	-3.5	-0.56
50	-13.75	-13.8	9.7	10.22	-5.11	-0.39
48	-14.95	-14.92	8.6	8.94	-3.81	0.21
46	-15.8	-16	7.31	7.78	-5.98	-1.28

44	-17.1	-17.06	6.1	6.72	-9.24	0.24
42	-17.75	-18.08	5.1	5.77	-11.65	-1.8
40	-18.7	-19.05	4.9	4.92	-0.49	-1.84
38	-20.15	-19.98	3.9	4.17	-6.46	0.84
36	-20.85	-20.87	3.31	3.5	-5.47	-0.09
34	-21.65	-21.71	2.2	2.91	-24.51	-0.26
32	-22.1	-22.5	2.1	2.4	-12.55	-1.76
30	-22.5	-23.24	2.3	1.96	17.56	-3.17
28	-23.4	-23.93	1.5	1.57	-3.67	-2.2
26	-24.25	-24.57	1.1	1.25	-11.79	-1.29
24	-24.55	-25.16	0.9	0.97	-7.35	-2.41
22	-25.95	-25.7	0.2	0.74	-73.03	0.98
20	-26.75	-26.19	0	0.55	-100	2.14
18	-26.4	-26.63	0.3	0.4	-24.94	-0.9
16	-26.8	-27.03	0.3	0.28	7.6	-0.8
14	-27.2	-27.38	0.2	0.19	7.74	-0.6
12	-27.5	-27.68	0.1	0.12	-14	-0.6
10	-27.8	-27.93	0	0.07	-100	-0.5
8	-28	-28.13	0	0.03	-100	-0.5
6	-28.3	-28.29	0	0.01	-100	0
4	-28.5	-28.41	0	0	-100	0.3
2	-28.4	-28.48	0	0	-100	-0.3

4.側視模式 -- 簡化式、實驗、理論數據百分誤差對照表

觀察角	h/n	實-理視深百分誤差 (%)	h/n-理視深百分誤差 (%)
(°)	水深/折射率	實驗視深-理論視深 / 理論視深	(實驗視深-簡化式)/簡化式視深
80	-28.5	0.6	5751.08
78	-28.5	16.4	3391.94
76	-28.5	0.05	2178.8
74	-28.5	6.5	1489.17
72	-28.5	6.44	1066.7
70	-28.5	9.6	792.45
68	-28.5	3.39	605.99
66	-28.5	3.27	474.33
64	-28.5	0.88	378.39
62	-28.5	2.72	306.6
60	-28.5	1.04	251.66
58	-28.5	1.52	208.78
56	-28.5	3.6	174.74

54	-28.5	0.21	147.32
52	-28.5	0.56	124.93
50	-28.5	0.39	106.45
48	-28.5	0.21	91.04
46	-28.5	1.28	78.07
44	-28.5	0.24	67.07
42	-28.5	1.8	57.67
40	-28.5	1.84	49.6
38	-28.5	0.84	42.62
36	-28.5	-0.09	36.57
34	-28.5	0.26	31.3
32	-28.5	1.76	26.69
30	-28.5	3.17	22.65
28	-28.5	2.2	19.12
26	-28.5	1.29	16.01
24	-28.5	2.41	13.29
22	-28.5	0.98	10.9
20	-28.5	2.14	8.82
18	-28.5	-0.9	7.01
16	-28.5	-0.8	5.44
14	-28.5	-0.6	4.11
12	-28.5	-0.6	2.98
10	-28.5	-0.5	2.05
8	-28.5	-0.5	1.3
6	-28.5	0	0.73
4	-28.5	0.3	0.32
2	-28.5	-0.3	0.08

5. 平視與側視模式比較 -- 實驗數據對照表

觀察角(°)	平視 (cm)	△X (cm)	側視 (cm)	△X (cm)	觀察角(°)	平視 (cm)	△X (cm)	側視 (cm)	△X (cm)	觀察角 (°)	平視 (cm)	△X (cm)	側視 (cm)	△X (cm)
1	-25.9	-0.05	-26.4	0.35	31	-24.45	0	-21.05	2.25	61	-16.55	0	-6.9	18.15
2	-26.6	0.05	-26.3	0.3	32	-23.9	0	-20.6	2.1	62	-16.75	0	-6.5	18.8
3	-25.9	0	-26	-0.2	33	-24.05	-0.05	-20.65	2.55	63	-15.95	-0.05	-6.1	19.3
4	-25.9	-0.05	-26.2	-0.2	34	-24.3	0	-20.25	2.15	64	-15.35	0	-5.45	20.35
5	-26.2	0	-25.8	0	35	-23.95	0	-19.5	2.75	65	-15.3	0	-5.1	21.2
6	-25.85	-0.05	-25.95	-0.35	36	-23.6	0	-19.15	2.7	66	-14.6	0	-4.3	22.95
7	-26.3	-0.05	-25.6	0.15	37	-23.25	0	-18.7	3.4	67	-13.8	0	-4.1	23.85
8	-26	-0.05	-26	-0.35	38	-23.25	0	-18.4	3.45	68	-14.1	0	-3.75	24.35

9	-25.8	-0.05	-25.6	0.35	39	-23.6	0.05	-17.7	4.15	69	13.15	0.05	-3.4	25.75
10	-26.1	0	-25.7	0	40	-22.9	-0.05	-17.7	4.95	70	-12.4	-0.05	-2.9	26.3
11	-26.35	0.05	-25.75	0.2	41	-23.05	0	-16.95	4.4	71	12.55	0	-2.6	27.85
12	-25.8	-0.05	-25.3	-0.2	42	-22.1	0	-16.8	5.2	72	-11.8	0	-2.15	28.45
13	-25.95	-0.05	-25.2	-0.1	43	-22.3	0	-16.2	5.45	73	-10.9	0	-1.9	29.75
14	-25.7	0.05	-25.2	-0.05	44	-22.3	0	-15.5	6.2	74	-9.9	0	-1.5	30.5
15	-25.5	-0.05	-24.9	0.5	45	-22	0	-15.1	6.75	75	-9.7	0	-1.25	31.95
16	-25.95	0.05	-25	0.25	46	-21.3	0	-14.95	7.05	76	-9.7	0	-0.8	32.2
17	-25.25	0	-25	0.75	47	-21.3	-0.05	-14.4	7.45	77	-8.75	-0.05	-1.05	33.35
18	-25.3	0	-24.45	0.55	48	-20.9	-0.05	-13.6	8.05	78	-7.9	-0.05	-0.6	34.75
19	-25.3	0	-23.95	0.55	49	-20.9	0	-13.4	9.05	79	-7.4	0	-0.5	34.6
20	-25	0	-24.15	0.05	50	-20.2	0	-12.7	9.55	80	-7.1	0	-0.6	36.2
21	-25.6	0	-24	0.7	51	-20.7	0	-12.1	9.6	81	-6.2	0	-0.45	36.65
22	-24.8	-0.05	-23.65	0.6	52	-19.8	-0.05	-11.7	10.95	82	-5.65	-0.05	0	36.6
23	-25.2	-0.05	-23.2	0.65	53	-20.05	-0.05	-10.8	11.35	83	-4.9	-0.05	-0.05	38
24	-25.5	0	-23.3	0.65	54	-19.1	-0.05	-10.3	12.25	84	-3.75	-0.05	0.15	38.2
25	-25.1	0.05	-22.8	0.85	55	-19.05	0	-9.9	13	85	-3.55	0	-0.3	38.4
26	-25.25	-0.05	-22.8	0.55	56	-18.7	0	-9.5	13.7	86	-2.95	0	-0.1	38.65
27	-24.5	0	-22.5	1.2	57	-18.3	0	-8.7	14.6	87	-2.25	0	-0.1	38.8
28	-25.05	0	-22	1.45	58	-18.3	-0.05	-8.3	15.45	88	-0.85	-0.05	-0.05	39.85
29	-24.3	0	-21.6	1.3	59	-17.7	-0.05	-7.8	16.4	89	-0.85	-0.05	0.1	39.15
30	-24.45	-0.05	-21.55	2.1	60	-17.2	-0.05	-7.2	16.5					

6.視高實驗與理論數據

r	視高理論	視高
6	40.1729560	40.00
12	40.7218867	40.50
25	43.8825053	40.55
38	55.1926927	60.40
45	84.8528137	95.50

【評語】 051802

此實驗利用雷射光模擬人眼的視線，通過改變觀察角度，研究視深(眼睛的錯覺深度)的變化規律，並將實驗結果與教科書中的司乃耳定律比較，確認之間的差異性，亦即公式的可預測性。作者主要結論為：在觀察角小於 20 度時，實測結果與教科書中的簡化公式較為接近，誤差在 5%以內；當觀察角大於 20 度時，視深變化不再適用簡化公式，誤差逐漸增大。唯教科書的簡化公式原本就是假設角度小的情況，因此本實驗確實驗證此事實。對於角度大的情況，有實際應用於水下攝影、潛水觀測等生活上的潛力，鼓勵作者再作進一步的分析。

作品簡報

深深深深幾許

橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同



摘要

本實驗以程式控制雷射光束之觀察角及不同觀察姿勢探以討視深的變化，並與教科書的理論做比較，在改變觀察角度下，均證實物體正上方偏向 20° 的範圍內，教科書中的「簡化公式」誤差尚小，但發現觀察角度大於 20° 以上，觀察角越大則視深呈現多樣的變化，視深近似公式不再適用，建議應做修改或說明。

光經水折射後產生虛像在司乃耳理論下以數學偏微分計算，顯示視深(虛像)並非固定且與本實驗結果相同，甚至觀察角接近 90° ，視深呈急速趨於零或緩慢趨於零，此與觀察姿勢有關，視深比原來簡化公式複雜，虛像的位置隨著觀測角增加而快速向觀察者移動。並逆向實驗，若以水面下觀察地上物，證實理論亦成立，令人不可思議的現象盡在本研究中陸續被挖掘出。

壹、前言

一、研究動機

拿下令人窒息的口罩，期待的第一堂游泳課真如出娘胎般的喜悅。唉！高興太早，誰知沒有死在新冠肺炎，竟讓小流感束縛在游泳池的岸邊，只能無差別的「看三小」-人變小了、腿變短了，甚扭曲並拉近了距離，咦？忌妒的眼神「睨視」同學在水中如「沈浮子」般悠游自在，但滑稽瞬間映入眼，腿未免「太短了」，無詫異，但不可思議笑他「太短了」，「橫」看成嶺「側」成峯，遠近高低各不同，哈！好吧，也許這流感來得正是時候，莫怪老天爺關了我們游泳課悠游自在呢，祂留了一絲探究神遊的空間，讓我們來敲敲物理課的碗，眼見真的不為憑，站在岸邊斜看或蹲在岸前直視，看到的深淺變化如何？希望對水中折射形成的虛擬成像做個徹底的釐清。

二、實驗目的

- (一)利用平視與側視的觀察方式，並改變各種角度，找出眼睛的錯覺深度的變化規則。
- (二)在司乃耳定律的規範下、利用微分計算得視深的理論公式，做理論與實測結果之比較。
- (三)改變觀察的各種姿勢，顯示視深變化的多樣性。
- (四)利用光的可逆性，驗證本實驗結論亦可適用於水中生物看岸邊的捕掠食者其誤判的高度。

貳、研究設備及器材

一、實驗器材

- 1.水箱(100x20x20 cm)、鋼珠、直尺、平面鏡
- 2.可調焦距雷射兩支、水平儀四個、三腳架。
- 3.Arduino 開發板(控制鏡面)、藍芽模組、舵機組。
- 4.平板電腦(自製控制Arduino系統的app)

二、自製測量工具器材



(本圖由第一作者拍攝)
由舵機控制雷射轉動方向，以研究由平視漸變為側視觀測姿勢(可由前面螺絲調整雷射交會點)。



(本圖由第一作者拍攝)
舵機可轉動反射鏡，並利用光槓桿原理計算雷射光入射角度(即實驗的觀測角)。

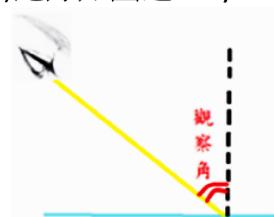


(本圖由第一作者拍攝)
測量視深位置的投影幕，在座標控制器上有一直角可定位雷射反射之交點，圖下方為裝有滑軌的水箱可改變待觀測物(鋼珠)之位置。

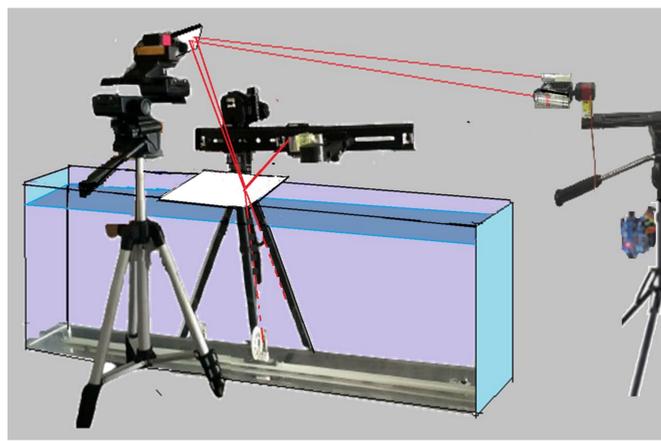
參、研究過程與方法

一、視深實驗步驟

- (1)校準雷射光束平行水平面。
- (2)以arduino程式控制雷射為平視模式(側視模式)。
- (3)另一arduino程式控制光槓桿反射鏡至待測角度。
- (4)調整水底鋼珠的位置，及兩雷射之焦距。
- (5)放上平面鏡，使雷射光經平面鏡反射後投影在座標控制器上的投影線，且聚焦於一點。
- (6)記錄如圖之 x 、 y 。



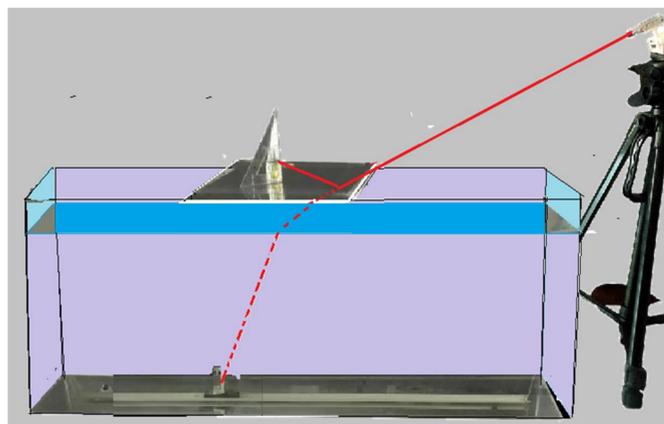
(本圖由第二作者繪製)
本研究定觀察角為視線與水面法線角



(本圖由指導教師繪製)
視深實驗裝置圖

二、視高實驗步驟

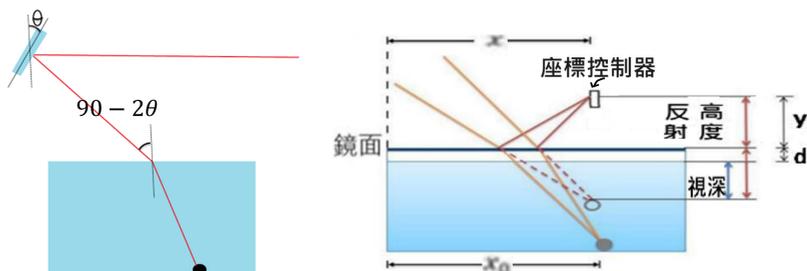
- (1)雷射光束瞄準水中左側標的。
- (2)放上平面鏡，使雷射光經平面鏡反射後投影三角板固定度 d 點上，並記錄三角板在鏡面的位置。
- (3)拿下平面鏡，使雷射光束對準水中右側標的。
- (4)將平面鏡放在原位置，使雷射光經平面鏡反射後投影三角板固定度 d 點上，並再記錄三角板在鏡面的位置。
- (5)調整水底鋼珠的位置，重複(1)~(4)。
- (6)改成側視模式重複(1)~(5)。(左、右標的改成上、下)



(本圖由指導教師繪製)
視高實驗裝置圖

三、研究理論探討

(一)光槓桿



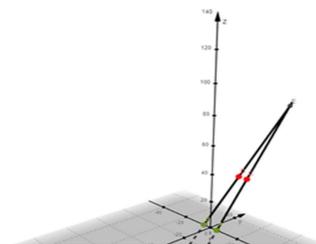
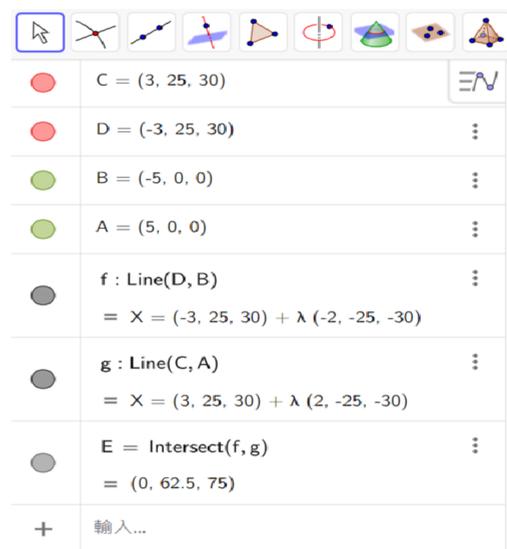
(本圖由第二作者繪製) (本圖由第二作者繪製)

(二)視深測量方法

- 1.視深=反射高度-鏡反射面與水面差
 $he=y-d$
- 2.水平偏移=鋼珠原位置-螢幕位置
 $\Delta x = x_0 - x$

(三)視高測量方法

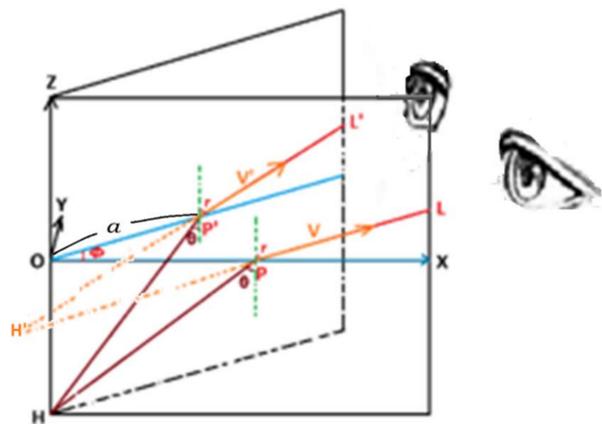
實驗所得雷射在水面的兩投射點座標分別與水中兩個標的物座標連線，利用數學軟體GGB推測兩視現在岸上的焦點即可得視高。



(本圖由第一作者利用GGB網路版做圖後截圖)

(三)、平視之視深原理探討

假設兩雷射光(兩視線)方程式為L、L'，水面為通過X-Y軸的水平面，則兩眼視線分別通過水平面P、P'。
(光有可逆性，雷射照到鋼珠，鋼珠發出的光也可被雷射眼看到)



(本圖由指導老師繪製)

假設視線L、L'在水面的投射點為P、P'，經折射後交於為物體實際位置H(0,0,-h)，則

$$P(a, 0, 0), P'(a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$$

$$\vec{V} = [\sin r, 0, \cos r] \text{ 左眼視線的方向}$$

$$\vec{V}' = [\sin r \cos \phi, \sin r \sin \phi, \cos r] \text{ 右眼視線的方向}$$

$$a = h \tan \theta$$

$$L: \begin{cases} x = a + \sin r \times t \\ y = 0 \\ z = \cos r \times t \end{cases}$$

$$L': \begin{cases} x = a \cos \phi + \sin r \cos \phi \times t' \\ y = a \sin \phi + \sin r \sin \phi \times t' \\ z = \cos r \times t' \end{cases}$$

求L、L'兩光線直線方程式的交點

$$\begin{cases} a + \sin r \times t = a \cos \phi + \sin r \cos \phi \times t' \\ 0 = a \sin \phi + \sin r \sin \phi \times t' \\ \cos r \times t = \cos r \times t' \end{cases}$$

$$t = t' = -\frac{a}{\sin r} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{a}{\tan r} \end{cases}$$

根據司乃耳定律

$$n \sin \theta = \sin r$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}}$$

$$z = -\frac{a}{\tan r} = -\frac{h \tan \theta}{\tan r} = -h \frac{\cos r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}}$$

$$x = 0$$

$$H'(0, 0, -\frac{h \cos r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}})$$

x = 0 表示虛像(視深)位置在原物體正上方。

$$\frac{d}{dy} \cot \gamma = \frac{\cot \gamma' - \cot \gamma}{dy}, \quad \frac{d}{dy} \cot \gamma = -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \quad * \text{參考資料1}$$

$$\text{得 } \cot \gamma' - \cot \gamma = -\frac{dy}{\sin^2 \gamma}$$

帶回1式得到

$$\Rightarrow x = h \frac{-\cot \gamma' \tan \theta' + \cot \gamma \tan \theta}{dy} \sin^2 \gamma$$

由司乃耳定律 $n \sin \theta = \sin \gamma$,

$$\sin \theta = \frac{\sin \gamma}{n} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}}$$

$$\text{令 } f(\gamma) = \cot \gamma \tan \theta = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}}$$

則x可寫成

$$x = -h \frac{(f(\gamma') - f(\gamma))}{dy} \sin^2 \gamma = -h \cdot f'(\gamma) \cdot \sin^2 \gamma$$

$$f'(\gamma) = -\frac{\sin \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin \gamma \cos^2 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{最後可得 } x = h \frac{\sin^3 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}} - h \frac{\sin^3 \gamma \cos^2 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

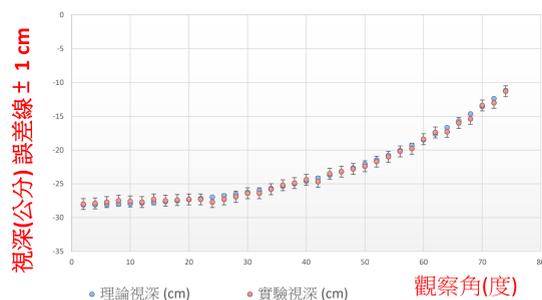
$$= h \frac{\sin^3 \gamma (n^2 - 1)}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow y = -h \frac{n^2 \cos^3 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{參考資料2}$$

肆、研究結果

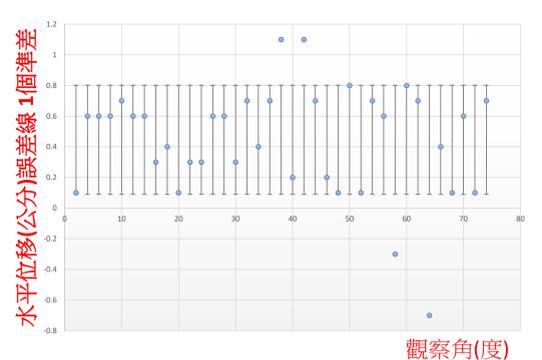
一、平視模式

平視模式-觀察角對視深的影響



(本圖由第二作者繪製)
觀察角接近90°時，視深呈急速趨於零。

平視模式-觀察角對水平位移的影響

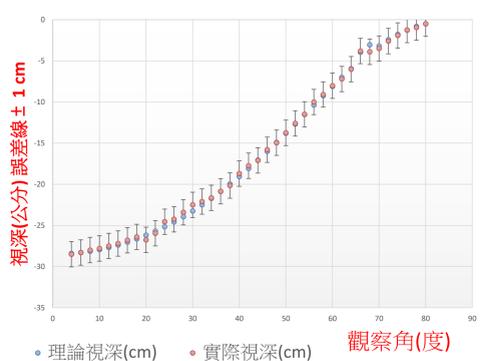


ΔX 標準差 $S=0.351518\text{cm}$
不確定度 $\Delta u_x = \frac{S}{\sqrt{36}} = 0.059\text{cm}$

(本圖由第二作者繪製)
虛像的位置在原物正上方偏離左右不到±0.6mm

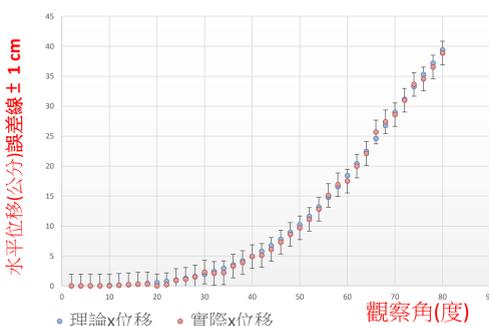
二、側視模式

側視模式-觀察角對視深的影響



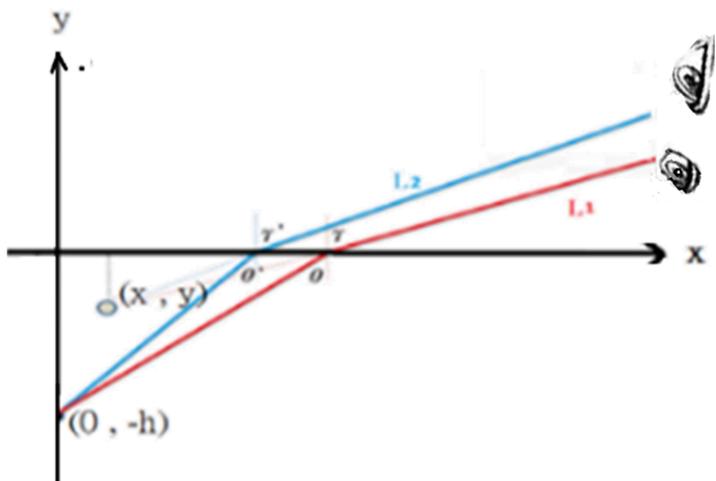
(本圖由第二作者繪製)
觀察角接近90°時，視深呈緩慢趨於零。

側視模式-觀察角對水平位移的影響



(本圖由第二作者繪製)
觀察角接近90°時，虛像的位置急速接近觀測者。

(四)側視之視深原理探討



(本圖由指導老師繪製)

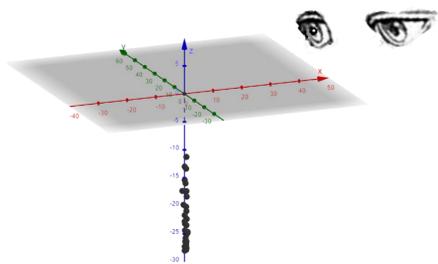
設實物位置(0,-h)，錯覺位置為(x,y)

$$\text{而點斜式 } L_1: \frac{y-0}{x-h \tan \theta} = \tan(90^\circ - \gamma) = \cot \gamma$$

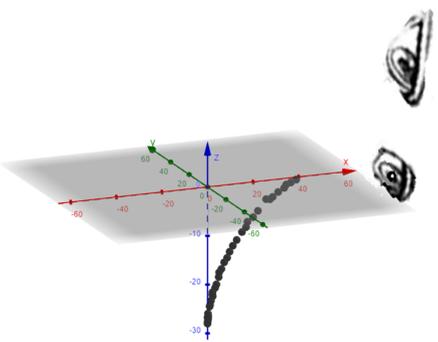
$$L_2: \frac{y-0}{x-h \tan \theta'} = \tan(90^\circ - \gamma') = \cot \gamma'$$

$$\text{移項可得 } y = \cot \gamma (x - h \tan \theta) = \cot \gamma' (x - h \tan \theta')$$

$$\Rightarrow x = \frac{h(\cot \gamma' \tan \theta' - \cot \gamma \tan \theta)}{\cot \gamma' - \cot \gamma} \dots \dots \text{ 1式}$$

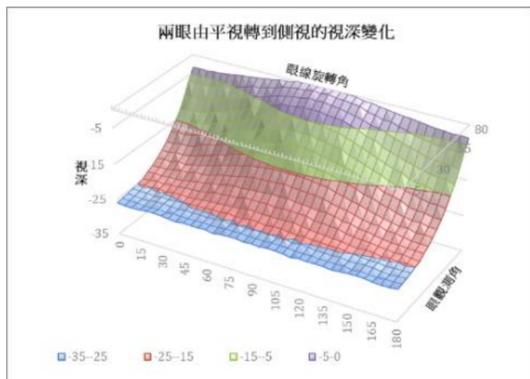


(本圖由第二作者繪製)
觀察者眼線保持水平
水中的幻影均在同垂直方向
隨著眼睛的高度降低水中幻影漸漸
貼近水面。

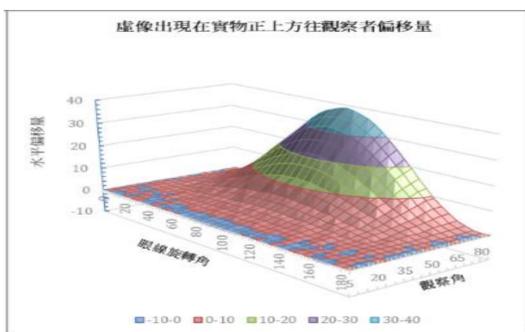


(本圖由第二作者繪製)
觀察者眼線旋轉至側
視水中的幻影除隨著
眼睛的高度降低水中
幻影漸漸貼近水面外
並向前接近觀察者。

三、由平視模式漸漸轉成側視模式，視深呈多樣的轉變。



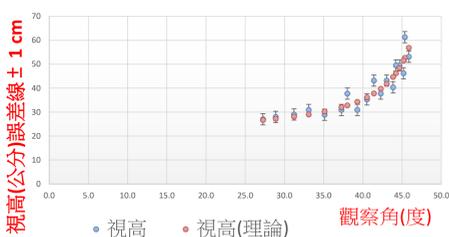
(本圖由指導老師繪製)
觀察者眼線旋轉由平
視到側視的過程視深
從急速趨向水面發生
了有規則的變化成緩
面趨近水面。



(本圖由指導老師繪製)
觀察者眼線旋轉由平
視到側視的過程虛像
的位置漸漸靠近觀察者。

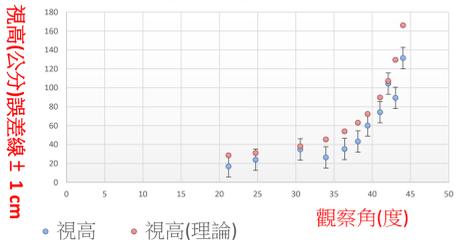
四、水中看岸上的物體所誤判的虛影高度，暫稱為「視高」

平視視高

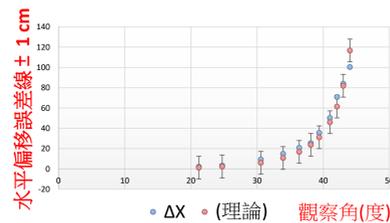


(本圖由第一作者繪製)
觀察者眼線水平觀看
岸上物體可視範圍只
有約45度，且視高變
化急遽，同樣也是在
原處往上變狹長。

側視視高



側視水平偏移



(本圖由第一作者繪製)

觀察者眼線側看岸上物體可視範圍也是只有約45度，且視高變化急遽，並同時遠離觀察者。

伍、討論

一、實驗中，觀察角在大於80度不易觀察到視深、小於20度時誤差大:

- (一)、觀察角過小時，折射角也會很小，因此只要有小誤差影響就會很大，
- (二)、觀察角過大時，水中物體的光已接近水的臨界角，光線的透射率極小(參考資料3)，穿透水面的光極少，不易測量。

二、以側視的方法，我們發現看到水中的像除了和課本預測結果相差很大，很顯然教科書所述完全無法預測在大角度的視深，還有一點科書完全沒提到，影像除了可能完全浮在水面而且會向觀察者靠近，甚至偏移距離大到比原實深還大，(我們使用的水槽只有40cm，水平偏移最大超過40cm。

三、大部分教科書採用的繪圖方式為側視，此種觀察方式在角度小時， h/n 的結果跟理論結果相差小，但隨觀察角越來越大，偏差可達到原本的50倍以上。

陸、結論

一、平視：

- (一)、隨著觀察角越來越大，虛像位置越來越淺，觀察角趨近於90度時，視深急速趨近於零，但水平方向並沒有位移，就在實物的正上方。
- (二)、課本中告訴我們在觀察角接近0度時，可代視深=實深/折射率，但幾度內會是差距最小的呢？數據推算出來在20度以內，實際視深跟用 h/n 算出的視深僅有5%以內誤差，而到達30度時就有10%以上的誤差了。

二、側視：

- (一)、隨著觀察角變大，虛像位置越來越淺，觀察角趨近於90度時，視深緩慢趨近於零，且水平向有位移，越來越急速靠近觀察者，這也莫怪不識水性又不信告示的溪邊戲水者，每逢暑假溺斃不少學生，遠處岸邊明明近在眼前，但是卻永遠到不了岸。
- (二)、我們的實驗80°以上無法繼續觀察這是因為物體在水中發出的光線當接近臨界角時透射率以乎為零(參考資料3)，這個也是我們平常生活中未發現水中生物竟可漂至表面的現象了。
- (三) 不管任何觀察姿勢平視或側視或介於中間的眼線轉角我們都無法用簡化的公式預測視深，強烈希望中學教材中能更正或提及我們研究的結果，也許不是誤導，但至少有利將來同學可以做更多有趣的現象觀察。

三、當我們的實驗完成了平視和側視察水中的物體如千變萬化之後，我們無法克服了數學的難題，直接找出介於兩種模式間的規則，也試圖用數學幾何和微分的技巧找出關係式，但是陷入了數學的複雜難解的困難，最後我們決定先由實驗測出這些存在的虛像位置，不管是視深或虛像水平沿觀察者快速移動，這些似乎存在有一定的規律性，甚至過程發生什麼事情？也許是我們忽略了什麼物理規則，等著我們加緊腳步做推演將兩種觀察模式聯繫起來，但是也許以後有別人會比我們更早發現它。

四、在實驗的終了前，我們要給這個研究做個完整的交代，我們覺得物理定律終歸需具有可逆性，所以我們反過來試著檢驗從水中看世界是否世界變大了呢？答案是肯定的，世界越大越讓我們覺得我們的視野太窄了，有些角落就是看不到，那句話猶言在耳：眼見不為憑，何況眼不見。

柒、參考資料

- 1.微積分/Ron Larson，Bruce H. Edwards. 歐亞書局 第七版 P9-25
- 2.徐國誠 (2004)成淵高中視深研究
檢自[https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564187381784d09345bf22/2000-232-04\(30-34\).pdf](https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564187381784d09345bf22/2000-232-04(30-34).pdf)
- 3.鄭邵家 (2022) 中央大學物理學系 光的偏振
檢自
http://generalphysicslab.phy.ncu.edu.tw/phy_lab/polarization.htm