

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第一名

051801

腔體共振與開孔流速的探討

學校名稱： 國立彰化高級中學

作者： 高二 吳炯毅	指導老師： 賴維銘
---------------	--------------

關鍵詞： 共振、氣流、頻率

得獎感言

在挫折中尋找，在偶然中領悟

如今回首科展這一路，至今仍然覺得不可思議。

可能有人能夠很順利地完成一份科展，並且一路過關斬將拔得頭籌。但對我而言，從選題到資料蒐集，從實驗到報告撰寫，無一不需要耗費大量的時間與精力。當身邊的朋友們在新春連假期間盡情遊山玩水時，我只能一邊埋首研究，一邊羨慕地翻看社交媒體上的照片；當大家在考前一週瘋狂k書時，我卻要在這巨大的焦慮感之下挑燈夜戰，為了趕在截止日期前交出一份完整的科展報告。那些深夜裡，面對電腦螢幕上不斷閃爍的游標，我也曾感受到無力感。然而克服這一切的那刻，得到的不僅僅是巨大的成就感，而是一個全新的、更加自信的自己。

雖然100%的努力未必總能帶來100%的回報，但這就是科展的魅力所在。偶然與挑戰並存，每個環節都充滿未知，也正因如此，許多偉大的發現往往誕生無心插柳時。這段旅程讓我明白，研究的過程本身就是最大的收穫。

最後，我要感謝一路支持我的每一個人。感謝指導老師在我遇到瓶頸時提供了寶貴的建議，成為我科展旅程中的一座明亮的燈塔；感謝教務處的老師每次都熱心地幫忙我處理報告提交的事宜；感謝我的家人，在我忙碌於研究時給予最大的包容與支持；最後，特別感謝所有評審教授的青睞與肯定。這份榮譽屬於大家，感謝你們的幫助與鼓勵！



與指導老師的合照



在展場黏貼海報

摘要

本研究探討腔體受聲音震動導致開口噴出氣流的現象。實驗以揚聲器播放聲音，使固定於其上的剛體錐形瓶共振，揚聲器與腔體之間並無直接接觸。通過改變聲音頻率、腔體參數（包括體積、瓶口截面積、瓶頸長度），以及揚聲器震動振幅與腔體內外氣壓，研究噴流流速的變化。

研究發現腔體內氣壓振幅超過臨界值時，腔體開口處會噴出一連串渦流環，根據拍攝的影像確認連續的渦流環組成的噴流即為合成氣流(synthetic jet)。噴流流速在聲音頻率與腔體共振頻率相同時達到峰值，並隨聲音頻率偏離共振頻率而急速下降。流速峰值頻率符合修正後的亥姆霍茲公式，且瓶頸長度越長，共振時合成氣流峰值流速越低。本研究為聲能轉動能方面提供新的研究途徑，並有進階研究的可能性。

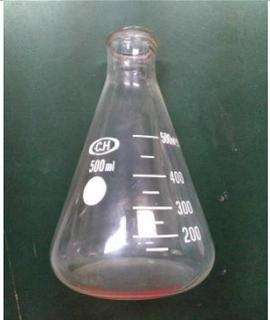
壹、研究動機

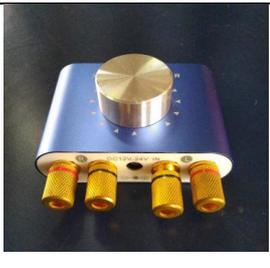
在一次實驗中，偶然發現手機在播放聲音時，出聲口會噴出一股氣流。當時覺得這個現象非常特別，經過查詢相關文獻後發現這個現象與腔體震動有關，然而關於腔體受聲音震動而導致開口噴出氣流的實驗研究卻不多，因此引起了我對這個現象進行實驗研究的興趣。

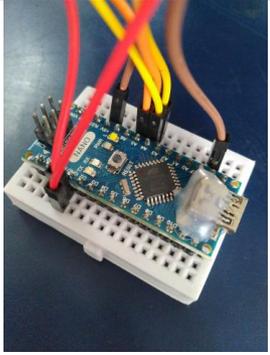
貳、研究目的

- 一、探討腔體共振時產生噴流原理
- 二、探討聲音頻率與噴流流速間關係
- 三、探討容器參數與噴流流速間的關係
- 四、探討揚聲器震動振幅、腔體內外氣壓與噴流流速間關係

參、研究設備及器材

編號	設備名稱	用途	圖示
1	玻璃錐形瓶	實驗本體	

2	塞子	透過不同塞子改變錐形瓶之瓶頸長度與瓶口口徑。	
3	揚聲器	播放聲音驅動錐形瓶噴出氣流	
4	可調式功率放大器	調整揚聲器撥出之聲音強度	
5	熱敏式風速儀	測量錐形瓶噴出氣流之速度	
6	腳架	架設錐形瓶於揚聲器上方	
7	高速攝影機	拍攝錐形瓶所噴出之氣流型態	

8	bmp280 溫濕壓感測 模組	測量錐形瓶內外壓力振幅	
9	Mpu 6050 加速度感測 模組	測量揚聲器鼓膜加速度	
10	arduino nano 板	接收 bmp280 回傳的訊號	
11	軟體 phyphox	聲音訊號輸出	
12	軟體 arduino IDE	編寫 arduino 模組軟體程式	
	軟體 Spectroid	測量容器共振頻率	

(以上照片為作者自行拍攝，軟體圖示取自 Google Play、Microsoft 官網)

壹、研究過程或方法

一、文獻探討

在查詢與腔體噴出氣流相關的資料時，近乎所有資料都表示此現象與腔體共振有關，而腔體共振可經由亥姆霍茲共振公式描述，以下為亥姆霍茲共振公式概述。

亥姆霍茲共振公式

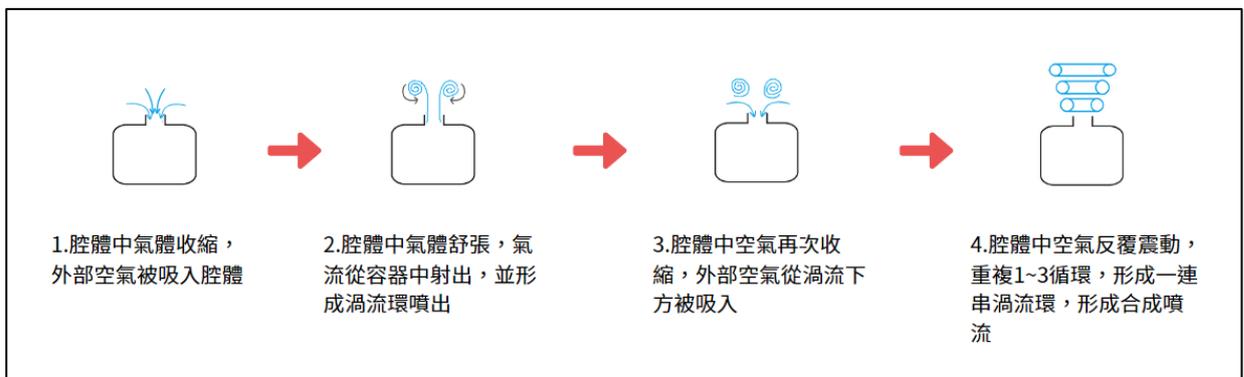
每個容器（腔體）都有本身的自然共振頻率，其與容器本身形狀有關。當一剛體容器共振時，容器內氣體的震動過程非常快速，因此可視為絕熱過程，根據絕熱過程之特性，可以推導出腔體共振之頻率公式：(f 為共振頻率；c 為音速；A 為瓶口截面積；V 為容器體積；L 為瓶頸頸長)

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{VL}}$$

然而僅有亥姆霍茲共振公式並不足以解釋為何腔體共振時會噴出一股氣流，因此在查詢許多中外論文研究後，我發現腔體噴出氣流的現象與合成氣流兩者在理論上有許多相似之處，以下是合成氣流之概述。

合成氣流

當腔體共振時，腔體內的氣體會進行周期性的收縮與舒張。在腔體內氣體收縮時，外部氣體會被吸入腔體中；而當氣體舒張時，則會從腔體開口噴出，形成渦流環。接著，腔體內的氣體再次收縮，此時渦流環尚未完全脫離瓶口，外部氣體因此被迫從渦流環下方進入腔體，使渦流環與開口分離，形成了環狀的渦流噴流。這樣的過程完成一周期循環。腔體的週期性震動會產生一系列連續的渦流環，而這些連續的渦流環組成的噴流即為合成氣流(synthetic jet)。



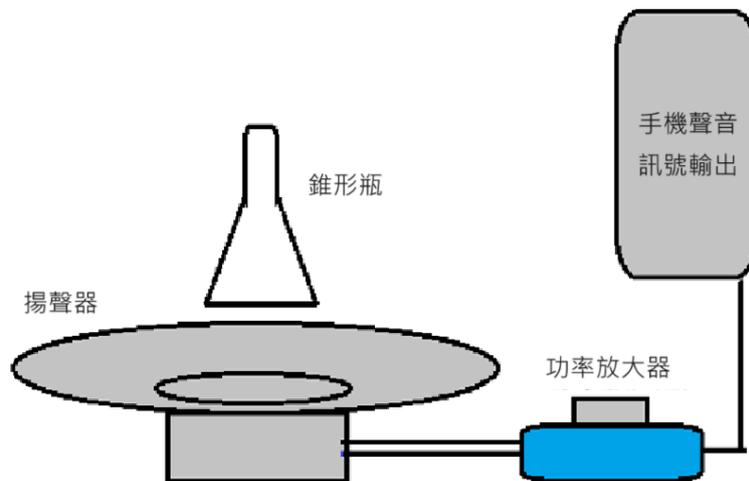
圖(一)合成氣流形成過程示意圖(作者自行繪製)

然而我發現關於合成氣流的研究中大部分都是使用合成氣流致動器(synthetic jet actuators)藉由震動膜直接改變腔體內的體積與氣壓，進而產生合成氣流，甚少有以聲音共振這種未接觸方式導致腔體中噴出合成氣流的研究。因此在本研究中，會著重探討腔體與聲音共振產生合成氣流。

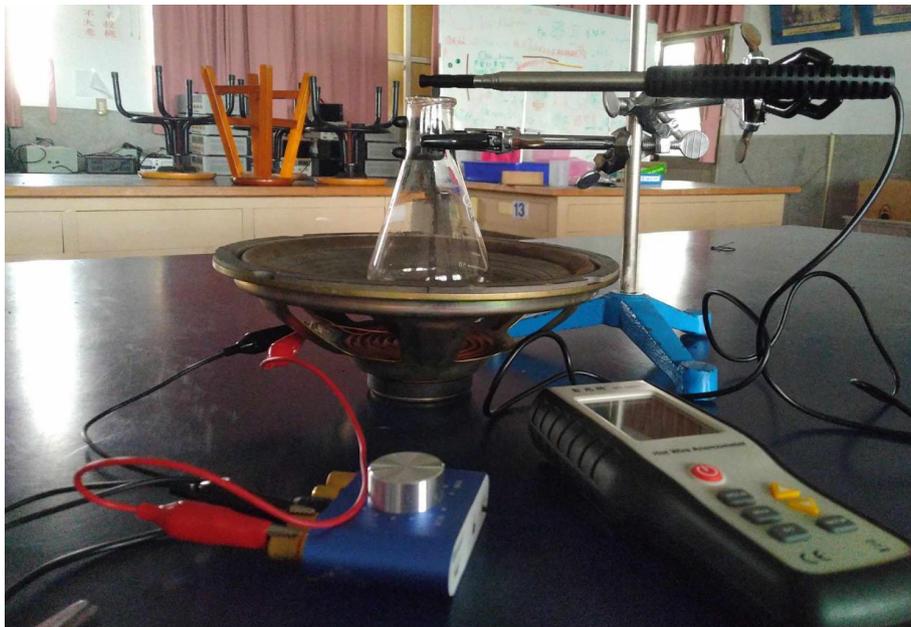
二、實驗裝置製作

- (一)、將揚聲器朝上放置於桌上
- (二)、將揚聲器連接至功率放大器與手機
- (三)、將玻璃錐形瓶固定於揚聲器上方

(四)、依實驗不同裝設不同感測儀器



圖(二)實驗裝置示意圖(作者自行繪製)



圖(三)實際實驗裝置(作者自行拍攝)

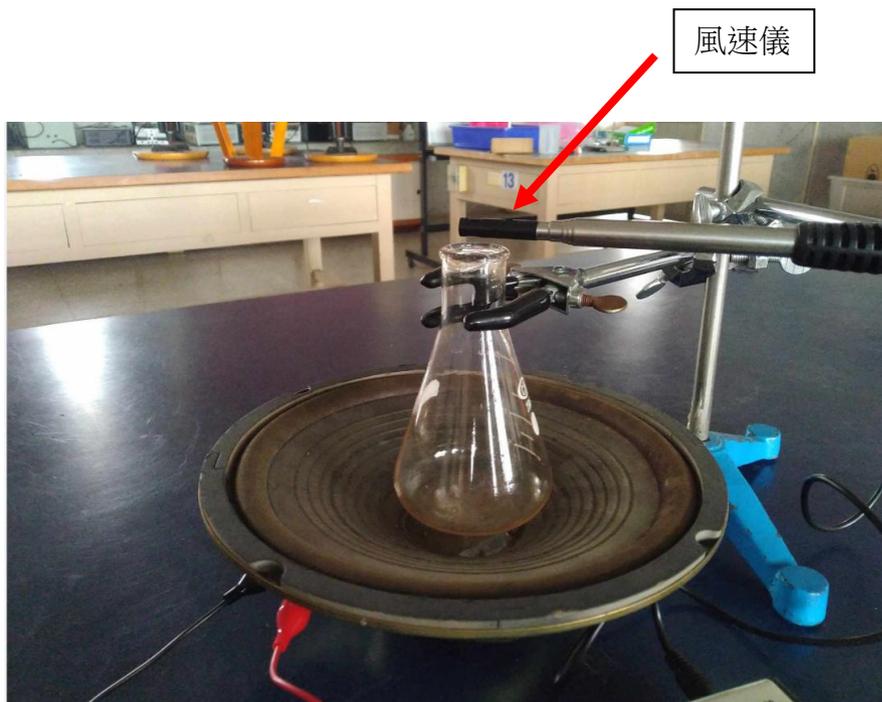
三、研究方法

(一)、氣流噴出型態觀察

1. 在腔體中充滿了煙霧，並在腔體旁撥放聲音使其共振。
2. 用高速攝影機拍攝腔體共振時煙霧流向。
3. 藉由所拍攝慢速影像觀察分析噴出氣流之型態。

(二)、改變聲音頻率探討噴出氣流流速與聲音頻率間關係

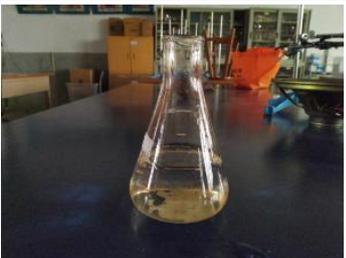
1. 架設風速儀於腔體開口處(圖四)
2. 改變揚聲器輸出聲音之頻率
3. 測量腔體噴出氣流的流速



圖(四)風速儀測量位置(作者自行拍攝)

(三)、改變亥姆霍茲方程式中參數並分析其與噴出氣流流速間關係

1. 於腔體開口處架設風速儀測量噴出氣流之流速
2. 改變亥姆霍茲方程中腔體體積 V 、瓶頸頸長 L 、瓶口截面積 A 三項變因(音速由於在實驗環境中改變甚小，所以本實驗暫不討論)
3. 因為腔體共振受到亥姆霍茲方程式中的變因所影響，因此在此實驗中我們會同時改變聲音頻率，分析三者間的關係。
4. 改變容器參數方式(照片為作者自行拍攝)

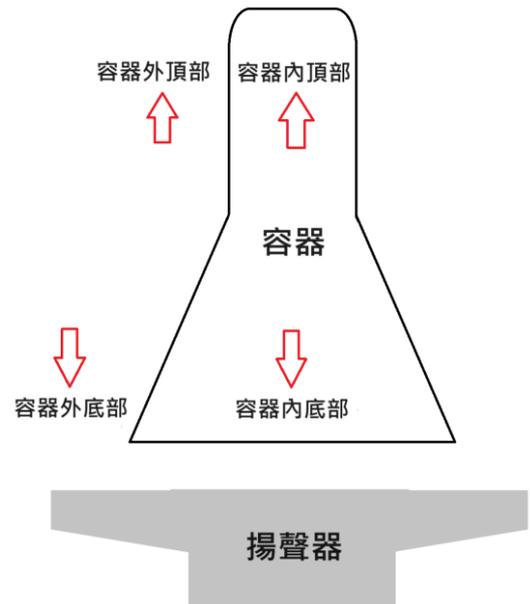
容器體積 V	在容器中裝水模擬體積變化	
瓶口截面積 A	製作許多完全相同形狀的塞子，將每個塞子中間都挖出不同口徑的孔洞來模擬瓶口截面積的變化	
瓶頸頸長 L	在瓶口塞入一個中間挖洞的塞子，透過吸管長度來模擬瓶頸頸長變化	

(四)、改變揚聲器震動振幅測量腔體內外氣壓與噴流流速

根據簡諧運動公式 $a=x\omega^2$

其中 a 為最大加速度、 x 為振幅、 ω 為角速度。揚聲器震動的振幅與其最大加速度成正比，因此可以通過測量揚聲器振膜的加速度振幅來代表其震動振幅。由於揚聲器震動振幅與氣壓及噴流流速密切相關，因此將三者置於同一實驗中進行討論。

1. 裝設感測器
 - (1) 裝設加速度感測器於揚聲器鼓膜
 - (2) 架設壓力感測模組於腔體內、外四點(如圖五)
 - (3) 架設風速儀於腔體開口處
2. 改變功率放大器輸出功率，測量揚聲器震動加速度振幅、腔體內外壓力振幅與腔體噴出氣流流速



圖(五)壓力感測器放置位置
(作者自行繪製)

四、研究結果

一、氣流噴出型態觀察

(一)、拍攝影像

藉由高速攝影機拍攝氣流噴出情況，以下為拍攝到的影像。(以下影像皆為作者自行拍攝)

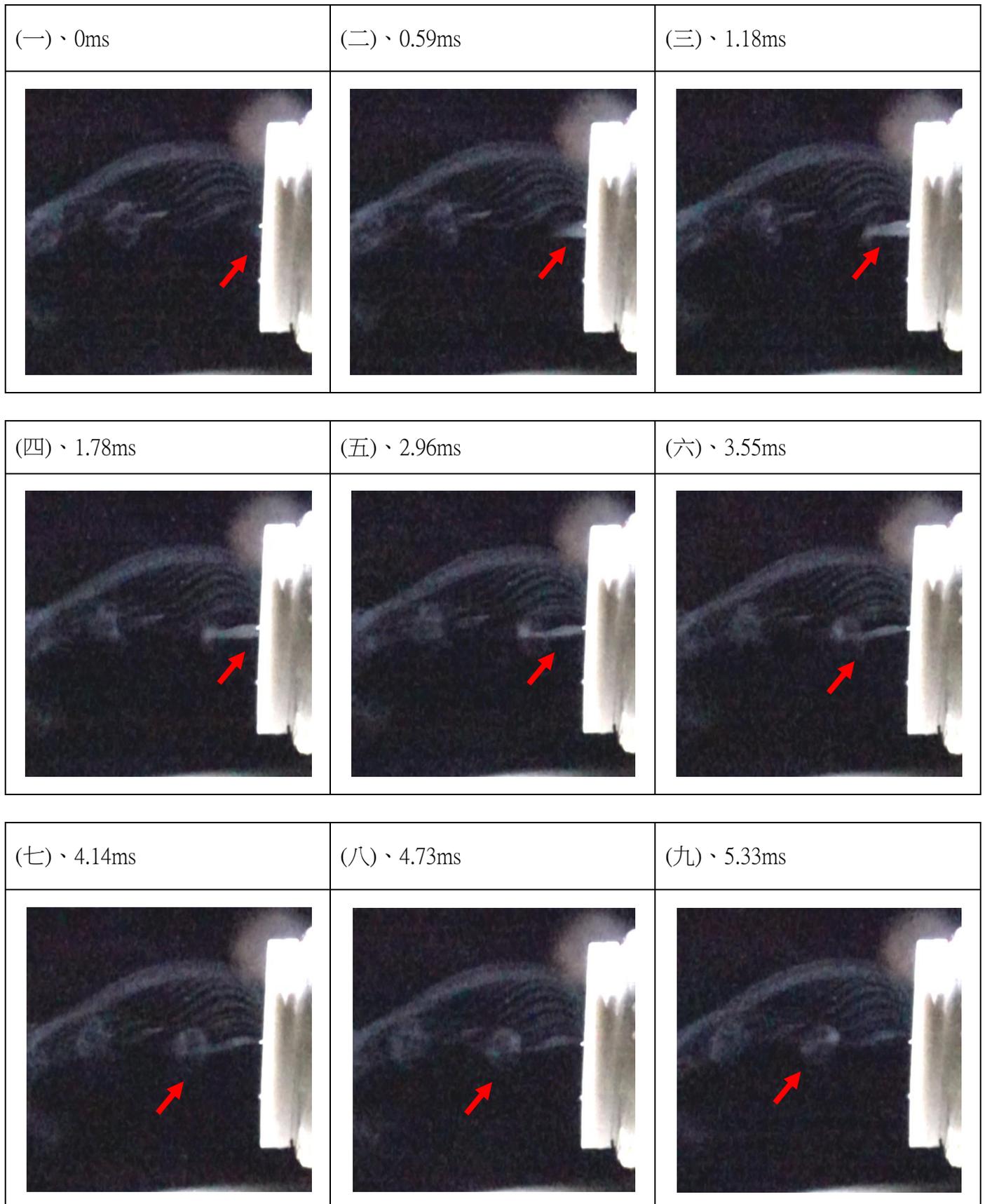


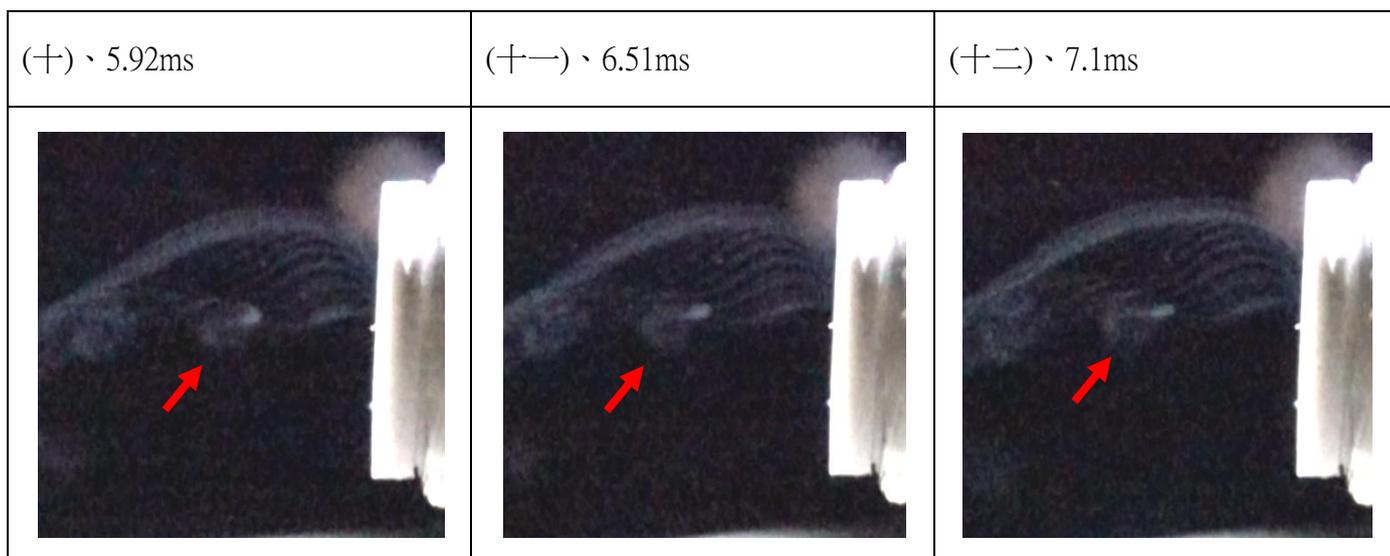
圖(六)合成氣流影像

觀察所拍攝到的影像，當腔體與聲音共振時，腔體開口處會噴出一串不連續的渦流環。為了解析此渦流環成因，以下我拍攝了渦流環一周期的形成型態。

(二)、氣流一周期內噴出型態

以下為 0 毫秒(ms)開始連續拍攝腔體開口處氣流噴出型態(紅色箭頭標示處為噴出氣流)





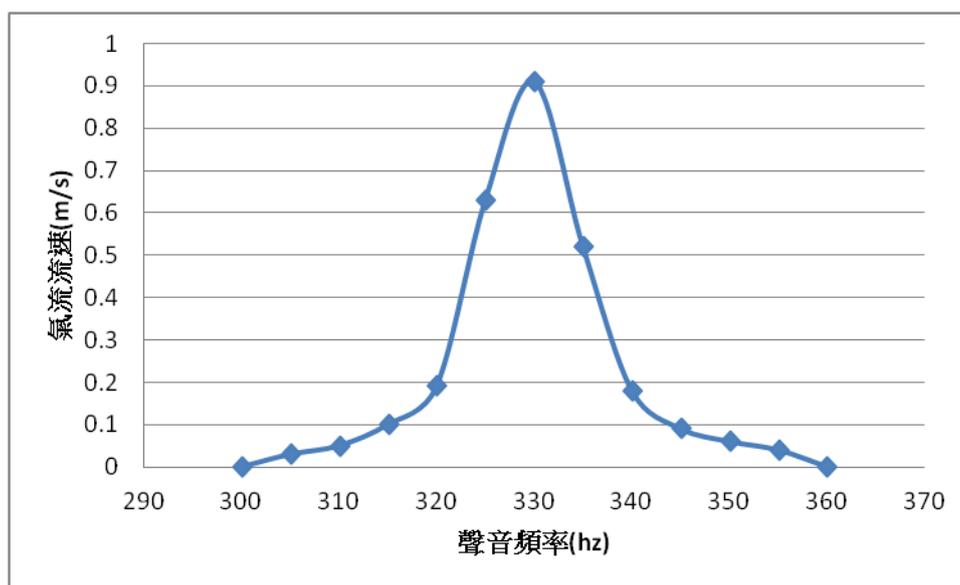
觀察所拍攝到的連續影像可發現，初始時氣流從開口處筆直噴出，隨後氣流尖端會向外捲起，形成蕈狀的噴流環，完成一個週期。後續將會進一步討論此噴流型態的意義與現象。

二、改變聲音頻率探討噴出氣流流速與聲音頻率間關係

本實驗使用兩個錐形瓶進行測量，以下暫稱錐形瓶 1、錐形瓶 2。

(一)、錐形瓶 1

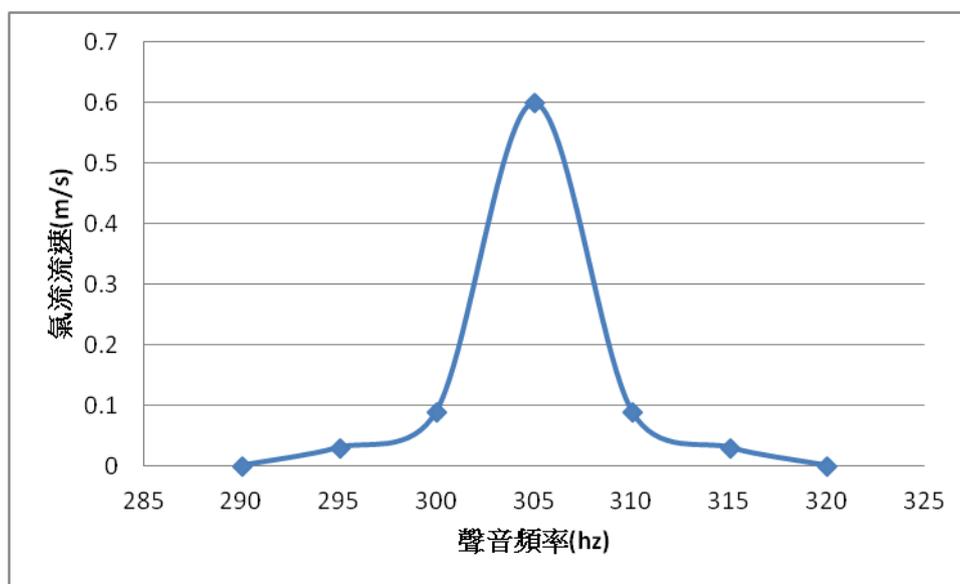
頻率(hz)	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360
流速(m/s)	0	0.03	0.05	0.1	0.19	0.63	0.91	0.52	0.18	0.09	0.06	0.04	0



圖(七)聲音頻率與氣流流速關係圖 1(作者使用 excel 自行繪製)

(二)、錐形瓶 2

頻率(hz)	290	295	300	305	310	315	320
流速(m/s)	0	0.03	0.09	0.6	0.09	0.03	0



圖(八)聲音頻率與氣流流速關係圖 2

(作者使用 excel 自行繪製)

由以上數據可以發現，當外界聲音頻率為某一特定值時，噴出氣流流速值達峰值，離此頻率越遠，流速會急速下降。後續將會進一步針對此特定頻率進行討論。

三、改變亥姆霍茲方程式中參數並分析其與噴出氣流流速間關係

(一)、改變腔體體積

1. 體積固定 270ml

頻率(hz)	290	295	300	305	310	315	320
流速(m/s)	0	0.03	0.09	0.6	0.09	0.03	0

2. 體積固定 220ml

頻率(hz)	325	330	335	340	345	350	355
流速(m/s)	0	0.04	0.15	0.62	0.11	0.03	0

3. 體積固定 170ml

頻率(hz)	365	370	375	380	385	390	395	400	405
流速(m/s)	0	0.04	0.08	0.27	0.74	0.19	0.08	0.04	0

4. 體積固定 120ml

頻率(hz)	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485
流速(m/s)	0	0.03	0.05	0.09	0.18	0.46	0.21	0.1	0.06	0.04	0.03	0

5. 體積固定 70ml

頻率(hz)	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610
流速(m/s)	0	0.03	0.04	0.06	0.1	0.12	0.09	0.05	0.03	0

6. 體積固定 20ml

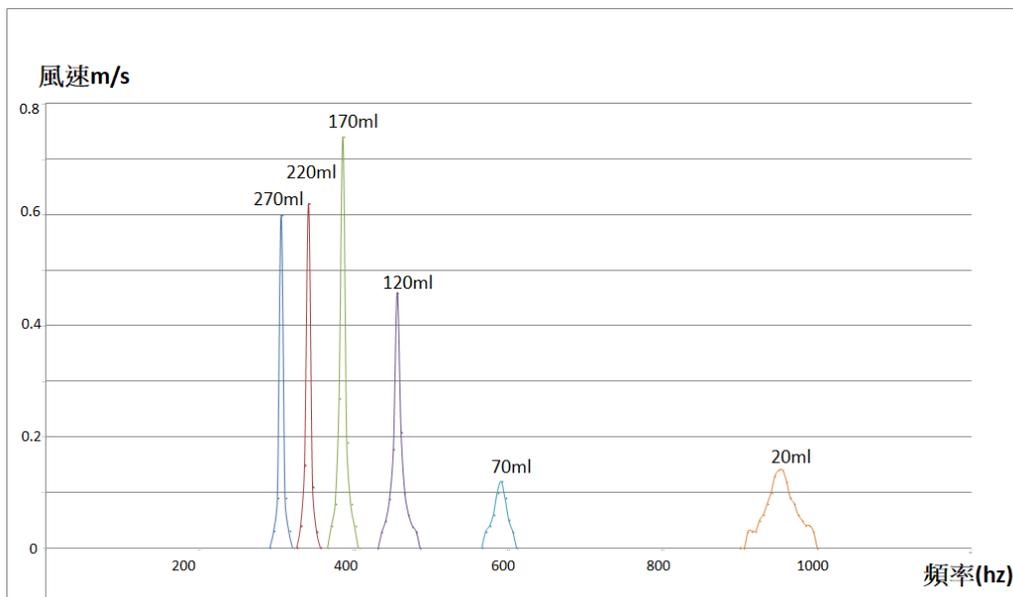
頻率(hz)	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945
流速(m/s)	0	0	0.03	0.03	0.03	0.05	0.06	0.08	0.1	0.13

950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
0.14	0.14	0.12	0.09	0.08	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0

7. 腔體體積與噴流流速峰值頻率關係

體積(ml)	20	70	120	170	220	270
最大流速對應之頻率(hz)	955	590	455	385	340	305

8. 以上數據所繪製之關係圖



圖(九)不同體積下聲音頻率與噴流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

(二)、改變瓶口口徑

1. 口徑固定 3mm，截面積 7.07mm^2

頻率(hz)	35	40	45	50	55	60	65	70
流速(m/s)	0	0.06	0.21	0.32	0.4	0.48	0.55	0.57

75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
0.59	0.54	0.48	0.38	0.29	0.21	0.14	0.09	0.05	0

2. 口徑固定 6mm，截面積 28.3mm^2

頻率(hz)	110	115	120	125	130	135	140	145	150
流速(m/s)	0	0.07	0.18	0.25	0.4	0.31	0.17	0.06	0

3. 口徑固定 9mm，截面積 63.6mm^2

頻率(hz)	160	165	170	175	180	185	190
流速(m/s)	0	0.08	0.18	0.25	0.23	0.18	0

4. 口徑固定 12mm，截面積 113.1mm^2

頻率(hz)	195	200	205	210	215	220	225	230
流速(m/s)	0	0.07	0.28	0.42	0.37	0.18	0.04	0

5. 口徑固定 15mm，截面積 176.7mm^2

頻率(hz)	220	225	230	235	240	245	250	255
流速(m/s)	0	0.03	0.07	0.2	0.28	0.09	0.04	0

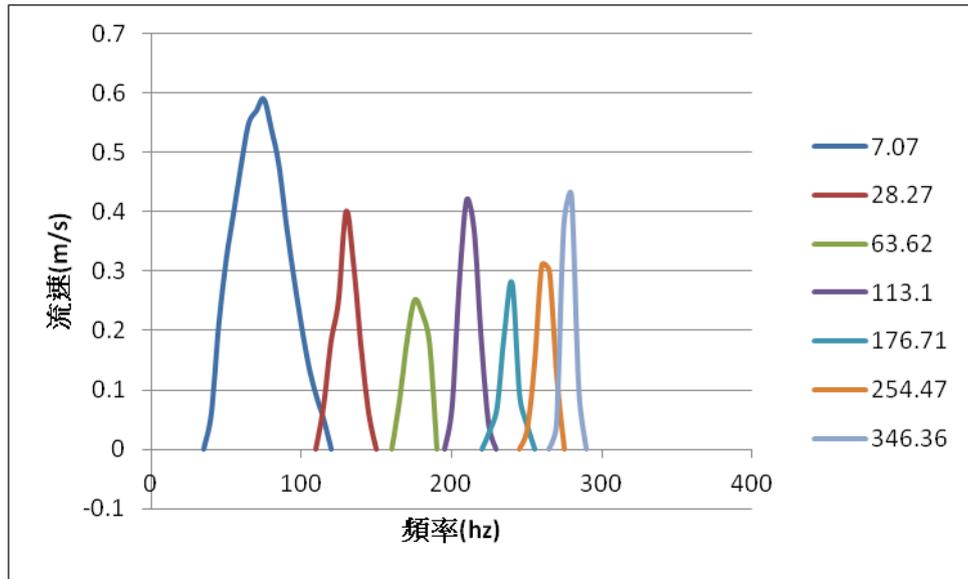
6. 口徑固定 18mm，截面積 254.5mm^2

頻率(hz)	245	250	255	260	265	270	275
流速(m/s)	0	0.03	0.14	0.31	0.3	0.12	0

7. 口徑固定 21mm，截面積 346.4mm^2

頻率(hz)	265	270	275	280	285	290
流速(m/s)	0	0.04	0.38	0.43	0.1	0

8. 以上數據所繪製之關係圖



圖(十)不同瓶口截面積下聲音頻率與噴流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

(三)、改變瓶頸頸長

1. 頸長固定 6cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70
流速(m/s)	0	0.1	0.22	0.1	0

2. 頸長固定 5.5cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80
流速(m/s)	0	0.04	0.07	0.19	0.2	0.07	0

3. 頸長固定 5cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85
流速(m/s)	0	0.04	0.13	0.32	0.22	0.07	0.04	0

4. 頸長固定 4.5cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
流速(m/s)	0	0.03	0.04	0.07	0.21	0.36	0.18	0.07	0.04	0

5. 頸長固定 4cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
流速(m/s)	0	0.04	0.11	0.3	0.36	0.21	0.09	0.06	0.03	0

6. 頸長固定 3.5cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85	90
流速(m/s)	0	0.06	0.14	0.29	0.43	0.21	0.09	0.04	0

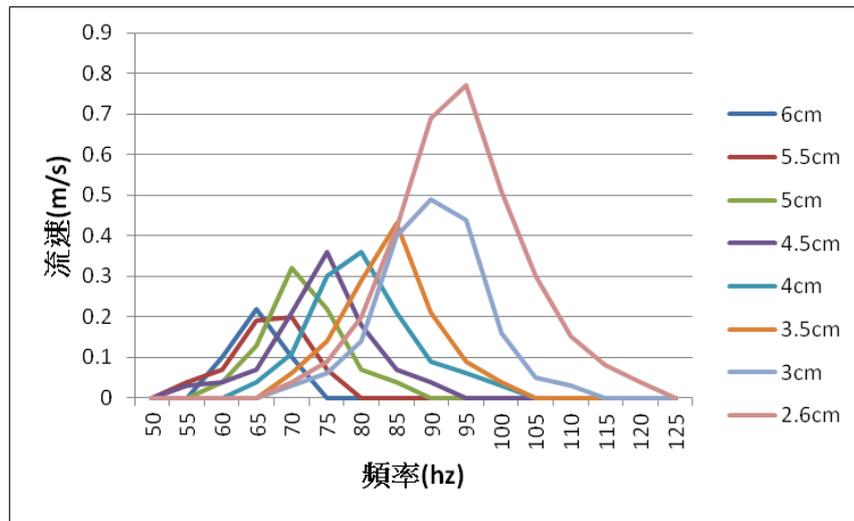
7. 頸長固定 3cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
流速(m/s)	0	0.03	0.06	0.14	0.4	0.49	0.44	0.16	0.05	0.03	0

8. 頸長固定 2.5cm

頻率(hz)	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
流速(m/s)	0	0.04	0.09	0.2	0.42	0.69	0.77	0.51	0.3	0.15	0.08	0.04	0

9. 以上數據所繪製之關係圖

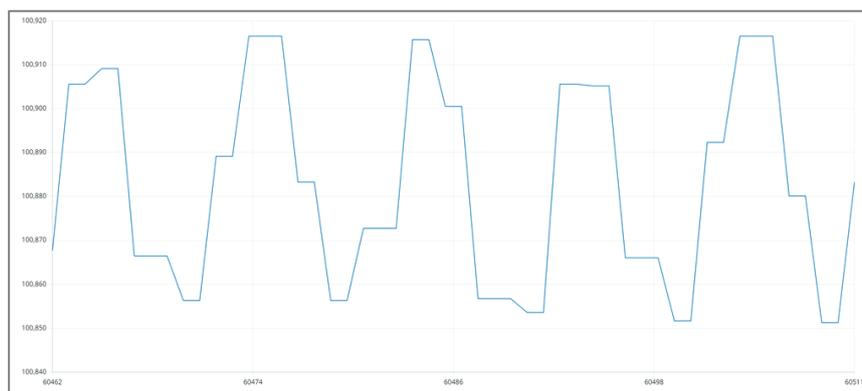


圖(十一)不同瓶頸頸長下聲音頻率與噴流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

四、改變揚聲器振幅觀察腔體內外氣壓與噴流流速變化

以下為經過壓力感測器所測得的時間與氣壓間關係圖



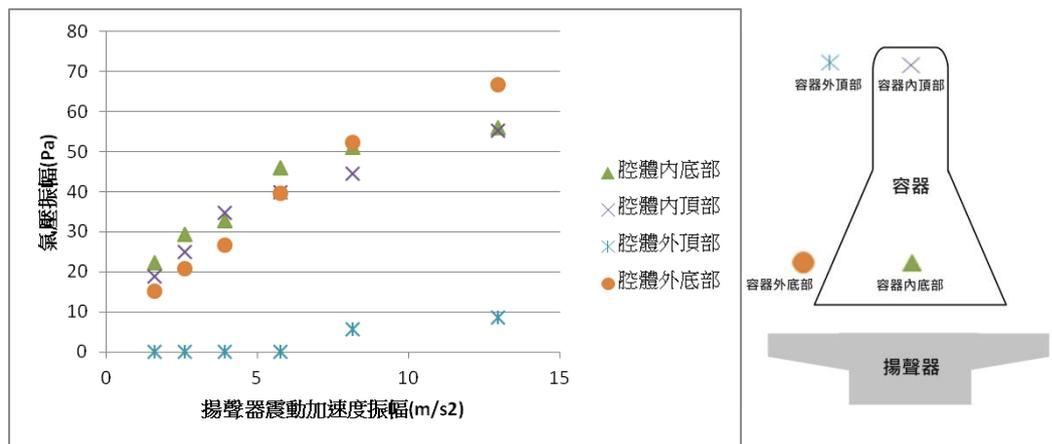
圖(十二)壓力與時間關係圖(橫軸為時間 ms，縱軸為壓力 Pa)

(數據來自 arduino IDE 的 serial plotter)

由圖(十二)可發現，氣體壓力隨時間上下週期性震盪，經計算後發現，其震盪頻率與揚聲器撥放聲音頻率相符，以下測量數據進一步探討其與揚聲器鼓膜加速度振幅、噴流流速間關係。其中*表示觀測值低於感測器誤差值。

加速度振幅(m/s ²)	1.6	2.6	3.9	5.75	8.15	12.95
腔體內底部 Δp (Pa)	22.33	29.48	32.85	46.11	51.13	56.11
腔體內頂部 Δp (Pa)	18.85	25.15	34.82	39.91	44.66	55.24
腔體外底部 Δp (Pa)	15.24	20.95	26.74	39.74	52.33	66.88
腔體外頂部 Δp (Pa)	*	*	*	*	5.81	8.69
噴流流速(m/s)	0	0.05	0.11	0.37	0.65	0.91

以下為根據此數據繪製成之關係圖：

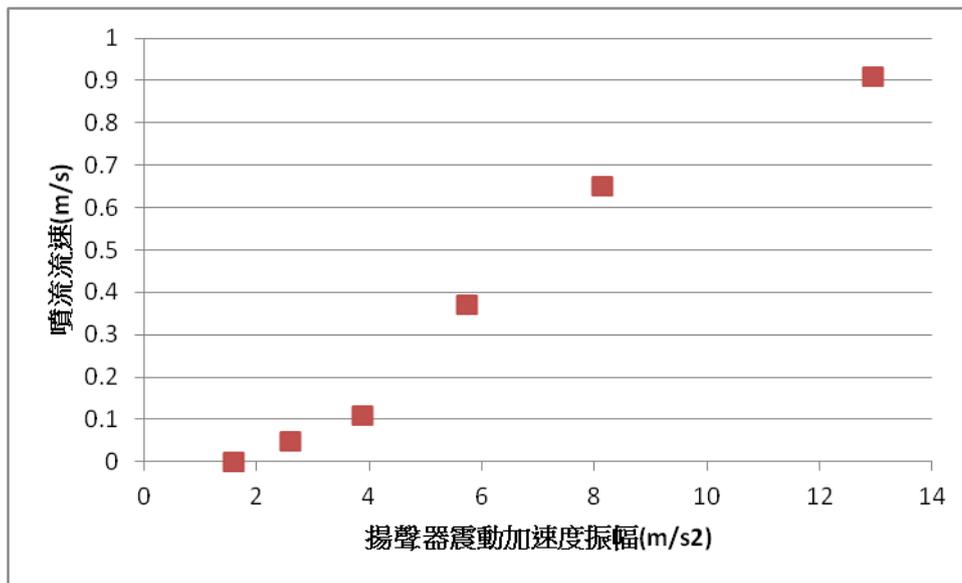


圖(十三)揚聲器鼓膜加速度振幅與氣壓振幅關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

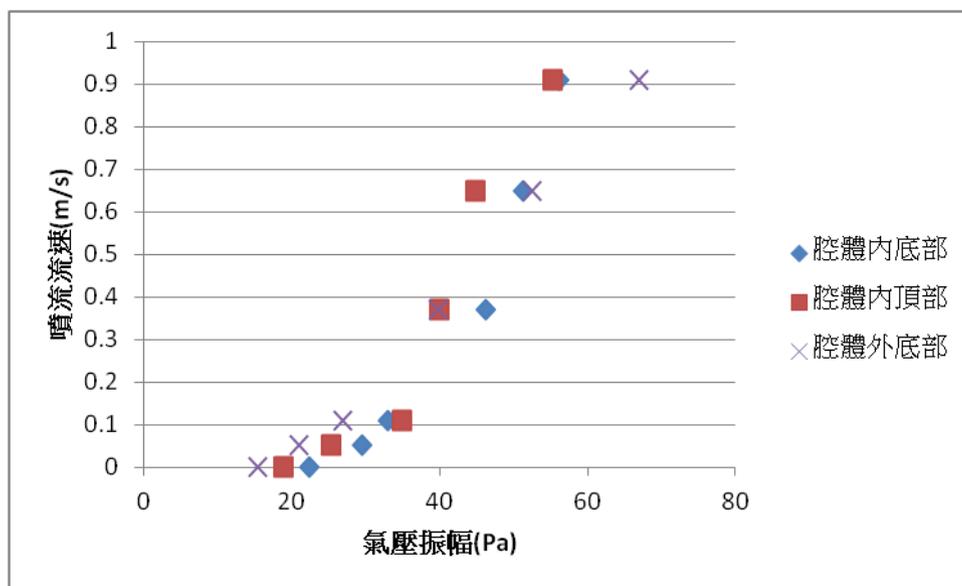
從圖(十三)可以觀察到，揚聲器震動加速度振幅與腔體內頂部、底部，以及腔體外底部這三個位置的氣壓振幅呈現正相關。然而，腔體外頂部的壓力振幅明顯低於其他三個位置。由四個位置的氣壓振幅觀測結果可知，腔體外的氣壓振幅會隨著與揚聲器距離的增加而逐漸減小，而腔體內的氣壓振幅在頂部與底部之間的差異不大。這可能是由於腔體外聲波能量隨距離增加而逐漸擴散，而腔體內空間較小，能量不易散失，因此各點所測得的氣壓振幅變化較小。因此在以下圖(十五)中不探討腔外頂部的壓力振幅。

圖(十四)、圖(十五)分別為揚聲器鼓膜加速度振幅、氣壓振幅與噴流流速間關係：



圖(十四)揚聲器鼓膜加速度振幅與噴流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)



圖(十五)氣壓振幅與噴出氣流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

從圖(十四)可見，揚聲器鼓膜加速度振幅與噴流流速在數據上呈正相關。由於鼓膜加速度振幅與噴流流速之間經歷了多次能量轉換，兩者之間的關係不如圖(十五)氣壓振幅與噴流流速之間的關係那麼直接。因此後續將進一步討論氣壓振幅與噴流流速之間的關係。

五、討論

一、合成氣流噴出型態

從拍攝到的連續影像中(圖十六)可以觀察到，氣流起初從開口處筆直噴出，隨後氣流前

端向外捲起，形成蕈狀的噴流環，完成一個週期。而從所錄製到噴出氣流與揚聲器同框的影片中，我們發現此氣流噴出週期與揚聲器鼓膜震動週期同步，因此合成氣流噴出頻率相當於聲音頻率。

根據此實驗，噴出氣流的機制與文獻中描述的合成氣流的噴出模式相符。因此，可以推斷當腔體受到聲音共振時噴出的氣流即為合成氣流。

圖(十六)合成氣流噴出過程(作者自行拍攝)



1. 氣體噴出腔體

2. 噴流尖端開始捲曲

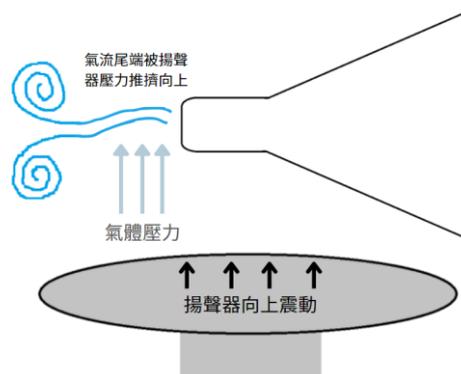
3. 末端脫離腔體，
形成渦流環

在分析合成氣流影像時，我們發現在渦流環噴出的主要通道上方有許多的長條狀的橫向噴流殘留，如(圖十七)。

在進一步分析後，我們發現在渦流環形成周期的後期，恰要進入下一個周期時，噴出的渦流環尾端的條狀氣流已經漸漸與渦流環脫離，但尚與腔體連接，此時揚聲器鼓膜由向下移動轉往向上移動，導致條狀氣流被下方的氣體向上方推擠，堆積於噴流主要通道上方，如圖(十八)。



圖(十七)噴流殘留
(作者自行拍攝)



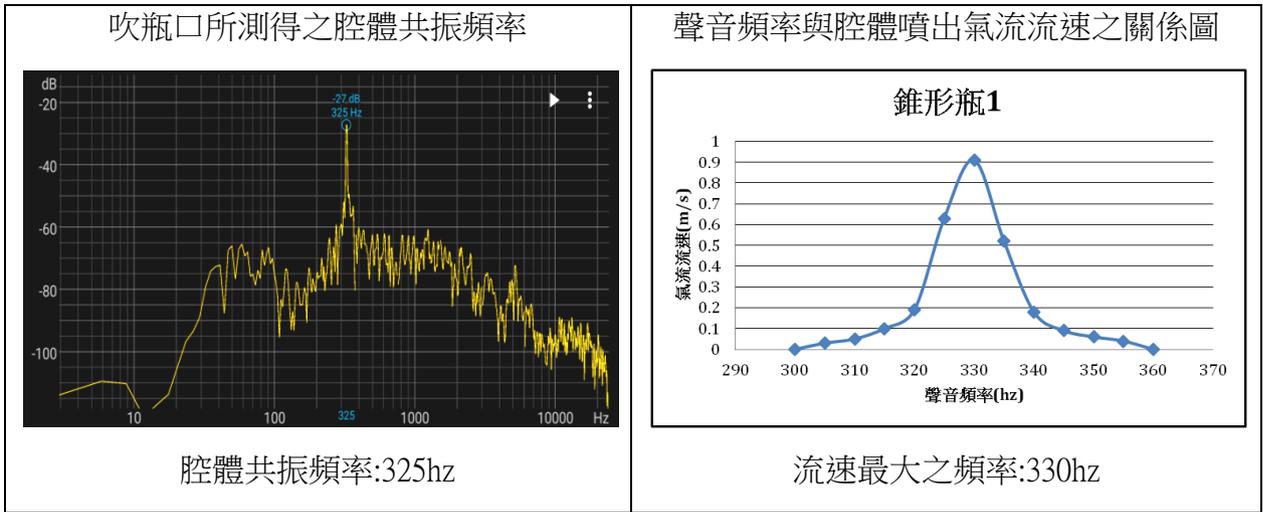
圖(十八)噴流殘留成因示意圖
(作者自行繪製)

二、噴出氣流流速與聲音頻率間關係

經實驗二的兩個數據結果，可以發現當外界聲音頻率為某一特定值時，噴出氣流流速值

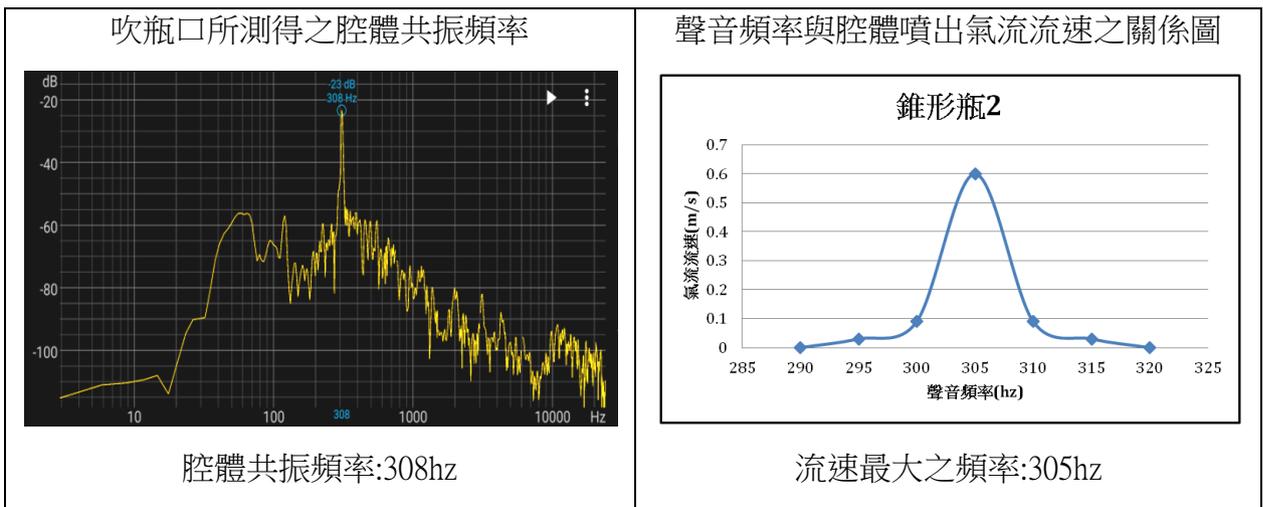
達峰值，離此頻率越遠，流速會急速下降。因此合理推測此頻率即是亥姆霍茲共振頻率(以下簡稱共振頻率)，為驗證此推論，我藉由在錐形瓶瓶口吹氣，測量共振頻率，並與實驗數據進行比對，來驗證此猜想，如下表。

(一)、錐形瓶 1



(左圖片來自 Spectroid、右圖片為作者使用 excel 自行繪製)

(二)、錐形瓶 2

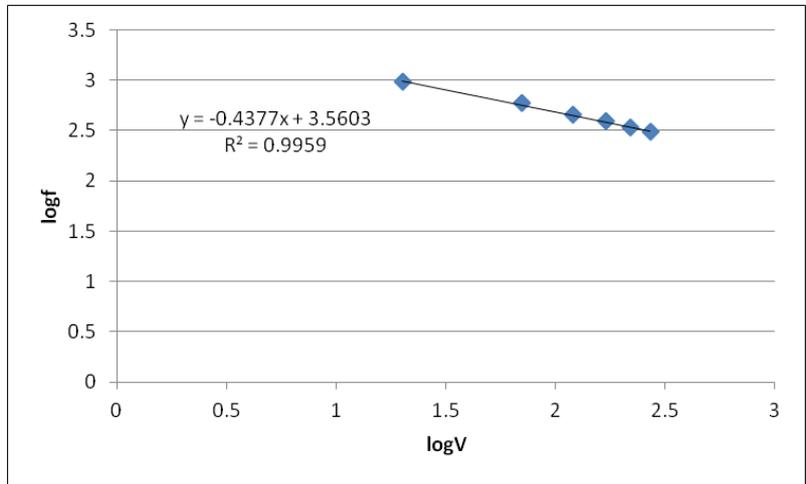


(左圖片來自 Spectroid、右圖片為作者使用 excel 自行繪製)

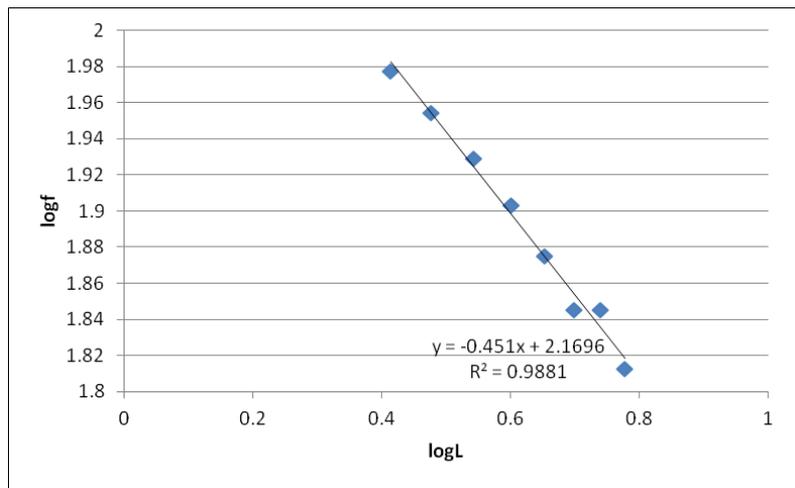
根據上表我們可以發現，噴流流速達峰值時所對應到的聲音頻率與腔體共振頻率吻合，在兩容器中測量兩者我們都得到相同的結果，因此合理推測，當外加聲音之頻率為腔體共振頻率時，噴流流速會達最大值。

三、容器參數與噴出氣流流速間關係

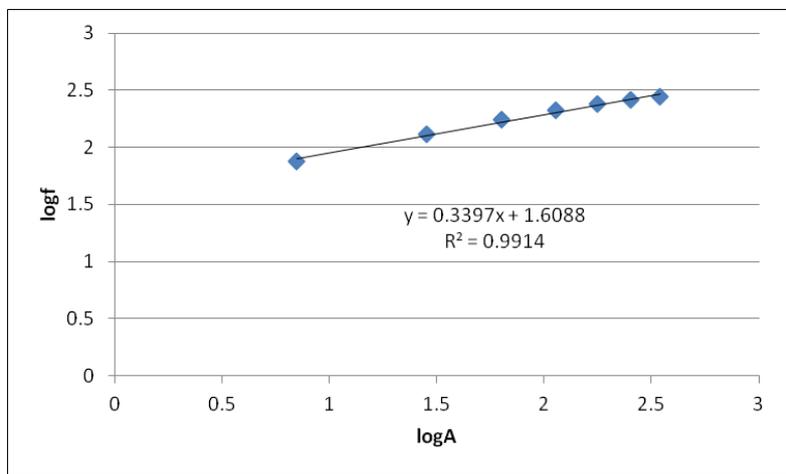
經實驗結果可看出，不同腔體參數下，皆可發現流速會在某頻率時出現峰值，根據上文所推得之結論，可知即為不同容器參數下的腔體共振頻率。為分析腔體各參數與共振頻率之關係，我們將流速峰值頻率分別與各個容器參數同取 log 作圖：



圖(十九) $\log(V)$ - $\log(f)$ 圖
(作者使用 excel 自行繪製)



圖(二十) $\log(L)$ - $\log(f)$ 圖
(作者使用 excel 自行繪製)



圖(二十一) $\log(A)$ - $\log(f)$ 圖
(作者使用 excel 自行繪製)

為分析腔體各參數與共振頻率之關係，我們將亥姆霍茲共振公式兩端同取 log：

$$\log f = \log c - \log(2\pi) + \frac{1}{2}\log A - \frac{1}{2}\log V - \frac{1}{2}\log L$$

由上式可知 $\log f \propto \frac{1}{2}\log A$ 、 $\log f \propto -\frac{1}{2}\log L$ 、 $\log f \propto -\frac{1}{2}\log V$

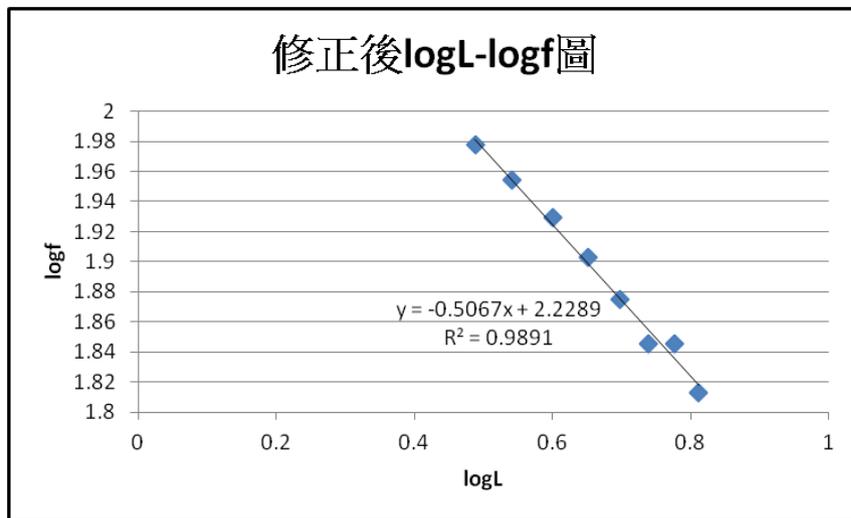
由圖表可看出 $\log(V)$ - $\log(f)$ 圖斜率值約為-0.44，接近公式中的理論值-0.5； $\log(L)$ - $\log(f)$ 圖斜率值為-0.45，接近公式中的理論值-0.5；然而 $\log(A)$ - $\log(f)$ 圖斜率值為 0.33，與理論值 0.5 有較大的偏差。我認為此現象非常有趣，經過文獻的查詢後，我發現亥姆霍茲公式中的頸長需要進行修正：

$$L = L_0 + 0.8D$$

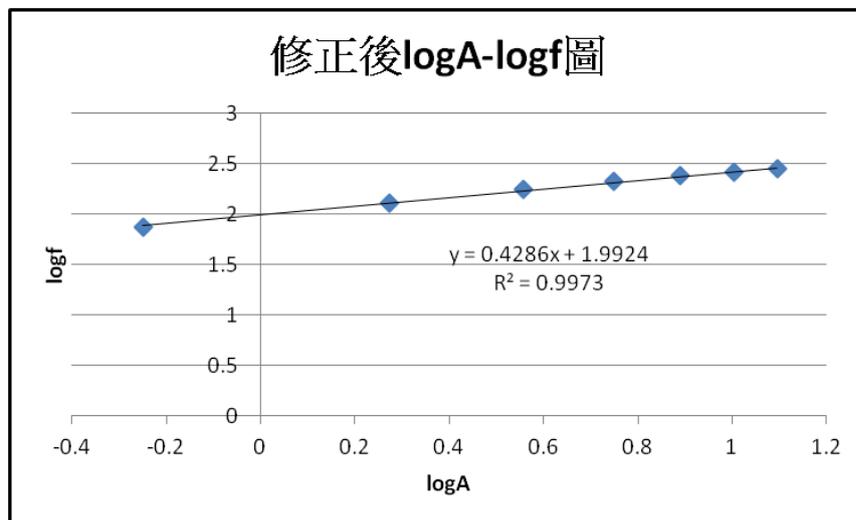
其中 L_0 為原始頸長； D 為瓶口直徑

$$\log f = \log c - \log(2\pi) + \frac{1}{2}\log A - \frac{1}{2}\log V - \frac{1}{2}\log(L_0 + 0.8D)$$

修正項涉及瓶頸頸長 L 與瓶口截面積 A ，以下是修正後的 $\log(L)$ - $\log(f)$ 、 $\log(A)$ - $\log(f)$ 圖：



圖(二十二) (作者使用 excel 自行繪製)

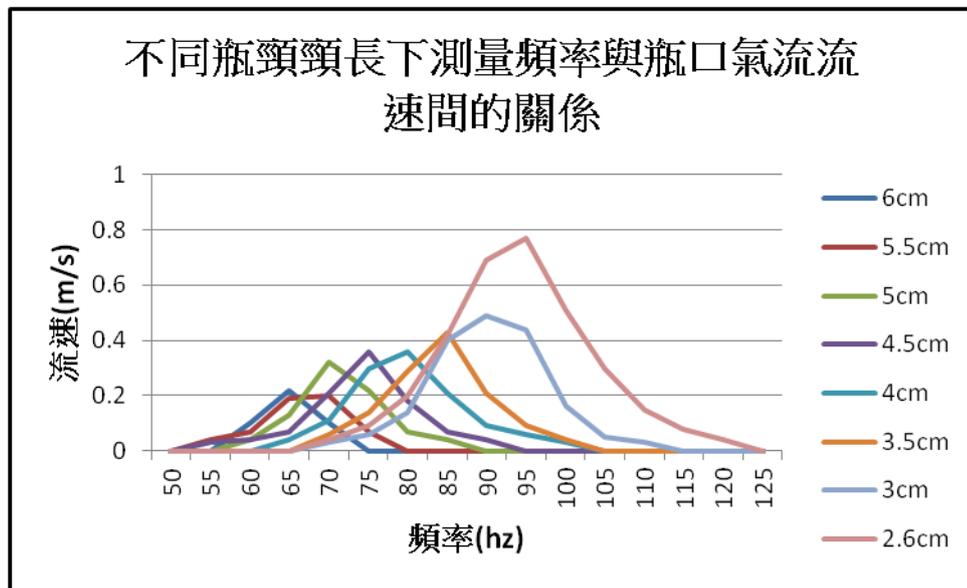


圖(二十三) (作者使用 excel 自行繪製)

由圖(二十二)、圖(二十三)可知，修正後 $\log(L) - \log(f)$ 圖斜率值為-0.51， $\log(A) - \log(f)$ 圖斜率值為 0.42，兩者皆更為接近公式中的理論值。

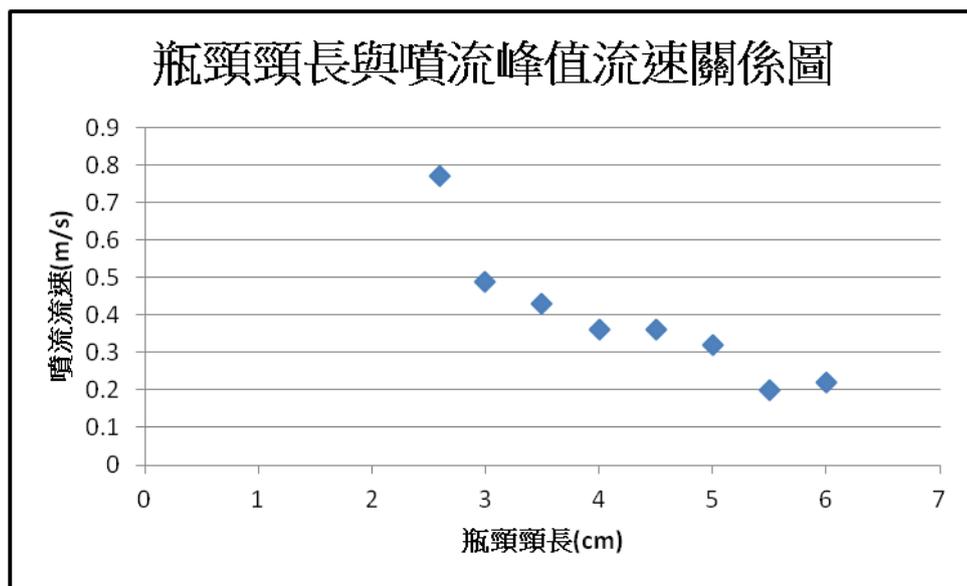
四、瓶頸頸長與共振時噴流流速間關係

前面的實驗結果中有提到，在不同的瓶頸頸長時，當外界聲音頻率達腔體共振頻率，合成氣流的流速會最大。然而在分析時我發現一個值得一提的現象。不同瓶頸長度的腔體儘管都處在共振頻率，開口噴出氣流的流速卻不同。



圖(二十四) (作者使用 excel 自行繪製)

根據圖(二十四)，我們可以發現，瓶頸長度越長，合成氣流的峰值流速越低。以下將瓶頸頸長與峰值噴流流速間關係圖。

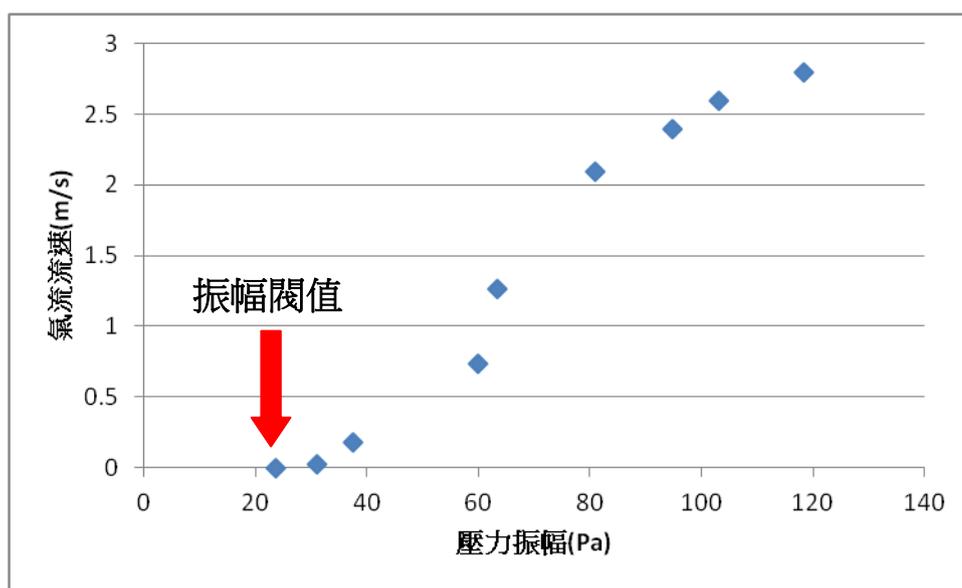


圖(二十五) (作者使用 excel 自行繪製)

從圖(二十五)中，可發現兩者大致呈現負相關，然而確切的數學關係無法很明確地看出。我們推測此現象的成因為，當瓶頸長度越長時，所推動的瓶頸內空氣分子越多，且瓶頸頸壁對空氣的黏滯力越大，導致所噴出的氣流流速相對較慢。

五、氣壓振幅與噴流流速間關係

由於從原數據中無法看出很明顯的趨勢，因此我用重新進行了一次實驗，測量了更廣泛的壓力振幅下噴流的變化。因為與腔體噴流最相關的氣壓測點是腔體內頂部與腔體外頂部兩個接近瓶口處的位置，而腔體外頂部氣壓振幅遠小於腔體內頂部，因此以下僅繪製腔體內頂部與噴流流速間關係圖：



圖(二十六)腔體內頂部氣壓振幅與噴出氣流流速關係圖

(作者使用 excel 自行繪製)

從以上數據可發現，當氣壓振幅較低時，瓶口並不會有合成氣流噴出。然而，當振幅達到一特定值(閾值)時，氣流會突然出現，根據實驗結果推測，當氣壓振幅過低時，瓶頸的空氣柱可能僅以單純的簡諧震盪模式前後震動，不會產生合成氣流噴出，需達到一定振幅閾值才能觸發合成氣流的產生。

從亦可從關係圖中發現，氣壓振幅低時，氣流流速會隨壓力振幅增加而急速上升，然而當壓力振幅較高的時候，氣流流速增加的幅度開始減緩。為了解釋此實驗結果，我查詢了相關的文獻，並進行推導。在沒有考慮阻尼力與摩擦力的理想情況下，瓶口內外壓差為唯一外力，以下設 T 為氣流噴出周期、 P_{in} 為腔內氣壓、 P_{out} 為腔外氣壓、 A 為瓶口截面積、 m 為噴出氣體質量、 v_0 為理想狀況下最終噴流流速，進行公式的推導，根據衝量動量原理：

$$\int_0^T (P_{in} - P_{out}) A dt = m v_0 \quad (1)$$

又開口外壓力變化近乎為零，故($P_{in} - P_{out}$)中僅要考慮腔內壓力變化，

以下我們設($P_{in} - P_{out}$)= ΔP ：

$$\int_0^T \Delta P A dt = m v_0 \quad (2)$$

又根據流體公式：

$$m = \int_0^T \rho A v dt \quad (3)$$

又根據文獻，式(2)、式(3)中之 ΔP 、 v 皆為正弦波，我們設兩正弦波皆僅與 t 相關：

$$P_{in} = P_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

$$v = v_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

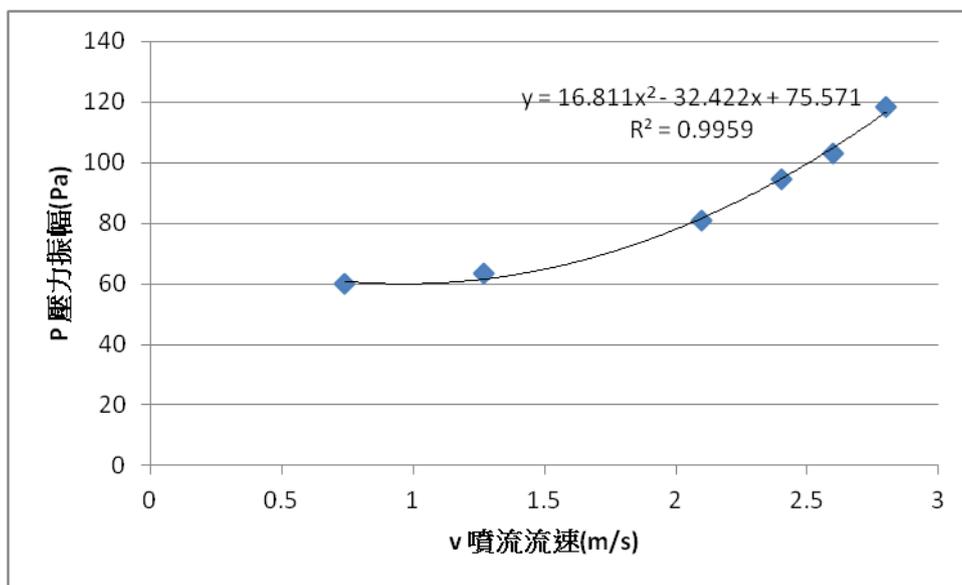
故式(2)可改寫為：

$$\int_0^T P_0 A \sin(\omega t) dt = \left(\int_0^T \rho A v_0 \sin(\omega t + \varphi) dt \right) v_0 \quad (6)$$

此處 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，經計算後可得：

$$P_0 = \rho (v_0)^2 \cos \varphi \quad (7)$$

從式(7)中可以推知 $P_0 \propto (v_0)^2$ ，其中 P_0 即為腔內頂部氣壓振幅、 v_0 即為理想狀況下最終噴流流速。



圖(二十七)氣壓振幅較大時 $P_0 \propto (v_0)^2$

(作者使用 excel 自行繪製)

圖(二十七)展示了從圖(二十六)中選取的較靠右方氣壓振幅較大的六個數據點，並經座標軸轉置後所得到的數據圖。從圖中可以粗略判斷，當氣壓振幅較高時，氣壓振幅與噴流流速之間的關係接近式(7)中理論的二次方曲線關係。

然而，在較低振幅時，兩者的關係與理論上存在較大的偏差。我們推測這種現象可能是因為在氣壓振幅較低時，式(7)中還涉及阻尼力和其他流體摩擦力，包括瓶頸處與氣體的

摩擦力、氣體噴出瓶口後與外部氣體碰撞所產生的摩擦力。由於這部分涉及更複雜的流體力學分析，目前尚無相關的理論模型與之匹配，因此需要進一步探討這一問題，值得持續研究。

六、結論

- 一、當容器與外界聲音共振時，容器開口處會噴出一連串不連續的渦流環，每個渦流環噴出頻率與外界聲音頻率相同，經實驗實證後，確認此噴流形式為合成氣流（synthetic jet）。
- 二、合成氣流流速會在外界聲音頻率與容器本身自然共振頻率相同（即容器共振）時出現峰值，而當外界聲音頻率偏離容器共振頻率時，氣流的流速會急速下降。
- 三、合成氣流流速峰值頻率(共振頻率)與容器參數(腔體體積、瓶口截面積、瓶頸頸長)間關係符合修正後亥姆霍茲公式，式中瓶頸頸長 L 應修正為 $L_0+0.8D$ ，其中 L_0 為原始頸長、 D 為瓶口直徑。
- 四、瓶頸長度越長，腔體共振時產生的合成氣流峰值流速越低，從數據中，可發現兩者大致呈現負相關，然而確切的物理關係無法很明確地看出。我們推測此現象的成因為，當瓶頸長度越長時，所推動的瓶頸內空氣分子越多，且瓶頸頸壁對空氣的黏滯力越大，導致所噴出的氣流流速相對較慢。
- 五、當腔體內氣壓振幅較低時，瓶口不會產生合成氣流。然而，當振幅達到某一臨界值(閾值)時，氣流突然出現。推測當氣壓振幅較低時，瓶頸處的空氣柱僅作簡諧震盪，無法形成合成氣流噴出。只有當振幅超過閾值後，才能觸發合成氣流的生成。關於此這部分研究的理論模型目前尚不明確，需進一步研究以闡明其機制。
- 六、在沒有考慮阻尼力與摩擦力的理想情況下，瓶口內外壓差是唯一的外力，且 $P_0 \propto (v_0)^2$ 。（其中 P_0 即為腔內頂部氣壓振幅、 v_0 即為理想狀況下最終噴流流速）。然而實驗數據顯示，當氣壓振幅較高時，氣壓振幅與噴流流速的關係近似於理論預測。然而，在較低振幅時，兩者的關係與理論上存在較大的誤差。這種誤差可能是由於在低振幅情況下，阻尼力和其他流體間的摩擦力（包括瓶頸處與氣體的摩擦力以及氣體噴出瓶口後與外部氣體碰撞所產生的摩擦力）影響所致。這些複雜的流體力學因素需要進一步研究，以建立更完善的理論模型來解釋此現象。

七、參考文獻資料

- 一、Amit Agrawal & Gunjan Verma ,(2008) “Similarity analysis of planar and axisymmetric turbulent synthetic jets” , International Journal of Heat and Mass Transfer, 51, pp. 6194-6198.
- 二、Gil, Paweł & Wilk, Joanna & Korzeniowski, Michał , (2021) “Helmholtz resonance frequency of the synthetic jet actuator” , Applied Sciences, Vol 11, Issue 12, p5666
- 三、吳佑焉. (2001). 彈性荷姆霍茲共振器之分析. 國立臺灣大學機械工程系
- 四、中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書，腔體共振之探討

【評語】 051801

此實驗的主要目的是探討腔體受聲音震動導致開口處噴出氣流的原理及其影響因素。作者藉由變化聲音頻率、容器參數、揚聲器震動振幅等因素，觀察噴出氣流的型態，並歸納出合成氣流形成的各階段的型態。作者發現，當腔體內氣壓振幅超過臨界值時，腔體開口處會噴出一連串渦流環，並以“合成氣流”解釋。這項研究清楚呈現聲能轉換為動能的一個清楚的案例，有進一步深入研究的潛力。未來可以流體力學方程式建立更完善的模型。

作品簡報

腔體共振與開孔流速的探討

摘要

當容器與外加聲音產生共振時，瓶口會噴出氣流。本實驗旨在探討氣流的形成機制，並透過改變腔體的體積、瓶頸長度、瓶口截面積以及外加聲波的頻率、振幅等變因，研究氣流流速與這些變因之間的關係。

研究動機

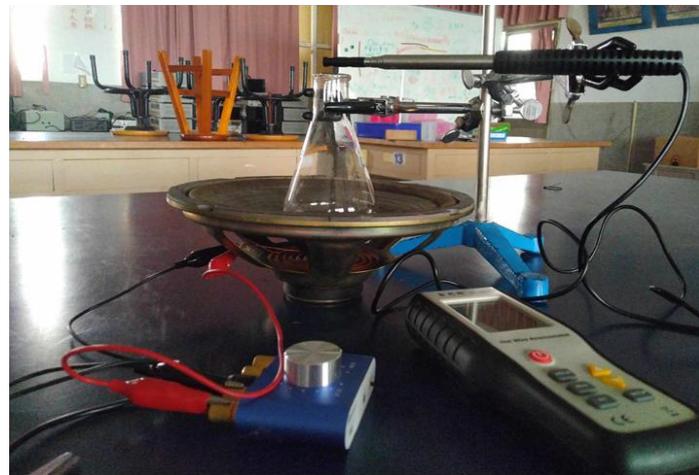
在一次實驗中，偶然發現手機在播放聲音時，出聲口會噴出一股氣流。當時覺得這個現象非常特別，經過查詢相關文獻後發現這個現象與腔體震動有關，然而關於腔體受聲音共振而導致開口噴出氣流的實驗研究卻不多，因此引起了我對這個現象進行實驗研究的興趣。

研究目的

1. 探討腔體共振時產生噴流原理
2. 探討聲音頻率與噴流流速間關係
3. 探討容器參數與噴流流速間關係
4. 探討腔體內外氣壓與噴流流速間關係

研究設備與器材

主要實驗裝置圖



測量設備：

高速攝影機、風速儀、arduino nano 板、bme280 溫濕壓感測模組

照片為作者自行拍攝

研究過程與方法

文獻探討

1. 亥姆霍茲共振公式

每個容器（腔體）都有其自然共振頻率，與容器形狀相關。當剛體容器共振時，容器內氣體的震動過程非常快速，因此可視為絕熱過程。根據絕熱過程特性，可推導出腔體共振的頻率公式： f 為共振頻率； c 為音速； A 為瓶口截面積； V 為容器體積； L 為瓶頸頸長

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{VL}}$$

亥姆霍茲共振公式並不完全適用於所有容器，在許多情況下此式需要經過修正。

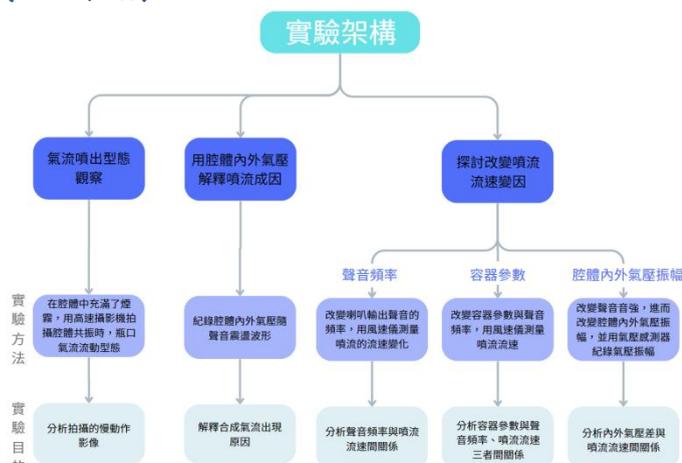
2. 合成氣流

腔體共振時，內部氣體周期性收縮與舒張。

在氣體收縮時，外部氣體被吸入；舒張時，氣體從開口噴出，形成渦流環。氣體再次收縮時，渦流環尚未脫離瓶口，外部氣體從渦流環下方進入，使渦流環與開口分離，形成環狀噴流。

腔體透過周期性震動產生連續渦流環，組成合成氣流（synthetic jet）。

實驗架構



作者自行繪製

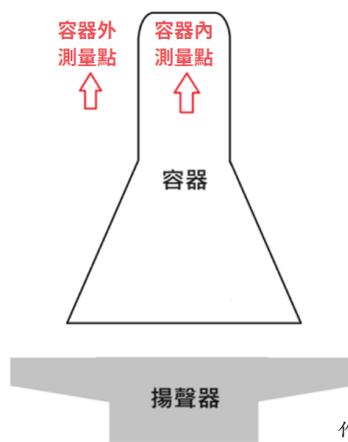
容器參數

本實驗中的容器參數包含容器體積 V 、瓶頸頸長 L 、瓶口截面積 A ，以下是改變三個參數的方法：

照片為作者自行拍攝

容器體積	在容器中裝水模擬體積變化	
瓶頸頸長	在瓶口塞入一個中間挖洞的塞子，透過吸管長度來模擬瓶頸頸長變化	
瓶口截面積	製作許多完全相同形狀的塞子，將每個塞子中間都挖出不同口徑的孔洞來模擬瓶口截面積的變化	

腔體內外壓力測量位置



作者自行繪製

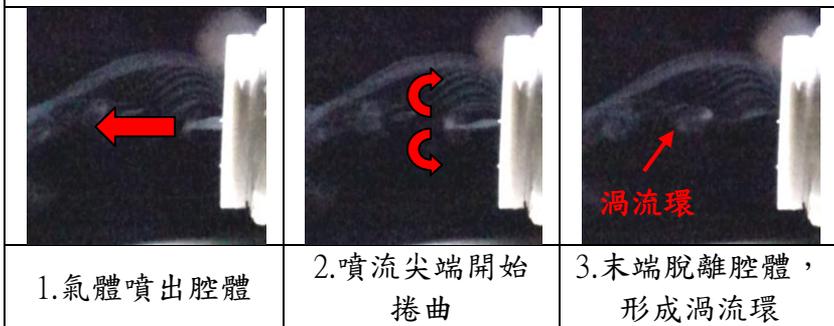
研究結果與討論

氣流噴出型態觀察

為了方便觀察氣流流向，我們在腔體中充滿了煙霧，接著用高速攝影機 (960fps) 拍攝腔體共振時噴出氣流的流向。



合成氣流噴出過程 影像為作者自行拍攝



根據此實驗，我們可以發現，腔體與外界聲音共振時，噴出氣流的機制與文獻中描述的合成氣流的噴出模式相符。因此，可以推斷，當腔體受到聲音共振時噴出的氣流即是合成氣流。(以上影像皆為作者自行拍攝)

以腔體內外壓力差解釋噴流原理

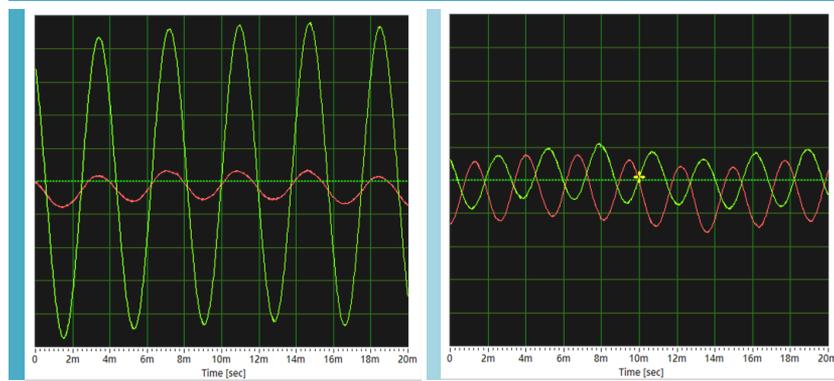
我們認為腔體內外的壓力差是腔體共振時產生合成氣流的原因，然而為了解釋出現壓力差的原因，我們提出兩種推論：

1. 腔體內外氣壓波的相位差導致出現壓力差
2. 腔體內外氣壓波的振幅差導致出現壓力差

為了分辨哪一個推論是正確的，我實際去測量了共振時與非共振時腔體內外的氣壓波動(橫軸為時間，綠線代表腔體內氣壓，紅線代表腔體外氣壓)

氣壓隨時間震盪圖

數據為作者自行觀測而得



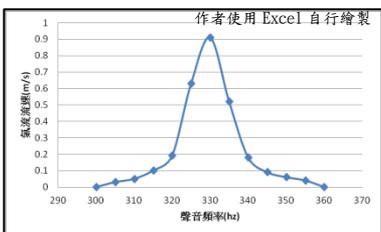
容器共振時

容器未共振時

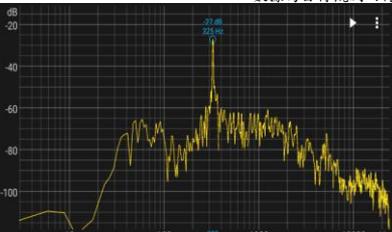
從以上數據可得發現，腔體共振時腔體內氣壓振幅遠大於腔體外氣壓振幅，且幾乎沒有相位差，而腔體未共振時內外氣壓振幅差距不大，且會出現相位差。從實驗結果可以看出，腔體共振時極大的內外氣壓振幅差是產生噴流的成因，而非兩者間的相位差。

聲音頻率與噴流流速間關係

聲音頻率與腔體噴出氣流流速之關係圖



吹瓶口所測得之腔體共振頻率

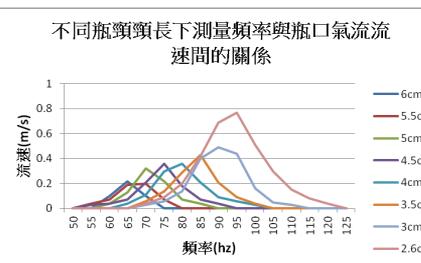
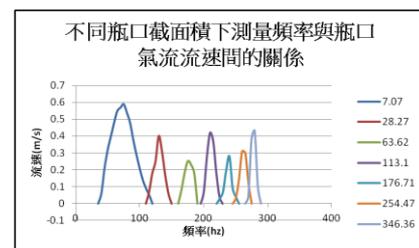
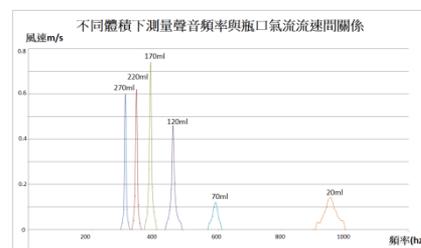


左上圖為外界聲音頻率值與瓶口噴出氣流流速值的作圖，可發現氣流流速值會在某一頻率時最高，約 330hz，離此頻率越遠，流速會急速下降。

右上圖為吹容器瓶口所測得之容器共振頻率，可發現此容器共振頻率在 325hz。

根據兩個數據我們可以發現，瓶口氣流的流速最大時所對應到的頻率與共振頻率吻合，在不同容器中測量兩者我們都得到相同的結果，因此合理推測，當外加聲音之頻率為容器共振頻率時，瓶口氣流的流速會達最大值。

不同容器參數下聲音頻率與噴流流速間關係



數據圖皆為作者使用 Excel 自行繪製

由以上三個數據可發現，不管在什麼容器參數下改變頻率，瓶口噴出氣流的流速都會在某頻率達到最大值。

我們可以看出，噴流速最大時的聲音頻率與容器的

體積、瓶頸頸長、瓶口截面積存在一特定關係。我們推測兩者間關係與亥姆霍茲共振公式有關(f 為共振頻率； c 為音速； A 為瓶口截面積； V 為容器體積； L 為瓶頸頸長)：

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{VL}}$$

我們可以將公式兩端同取 log，可得：

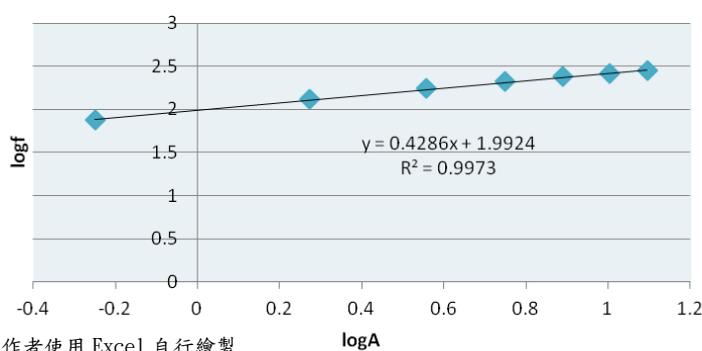
$$\log f = \log c - \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log A - \frac{1}{2} \log V - \frac{1}{2} \log L$$

我們可以發現， $\log f$ 會與 $\log A$ 、 $\log V$ 、 $\log L$ 呈線性關係，斜率分別為 0.5、-0.5、-0.5，我們重新將上方數據取 log 後作圖，圖中斜率如下表。

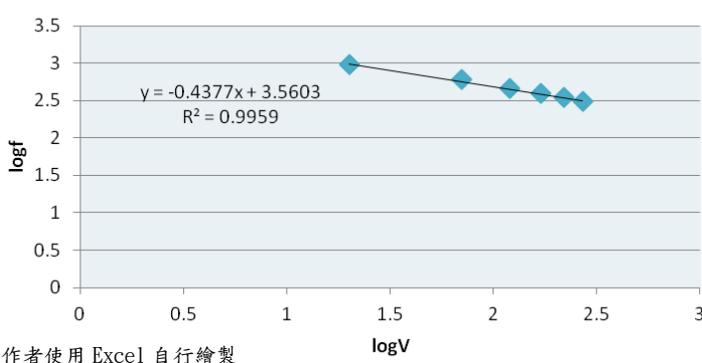
	logA-logf 圖	logV-logf 圖	logL-logf 圖
理想斜率	0.5	-0.5	-0.5
實際斜率	0.33	-0.44	-0.45

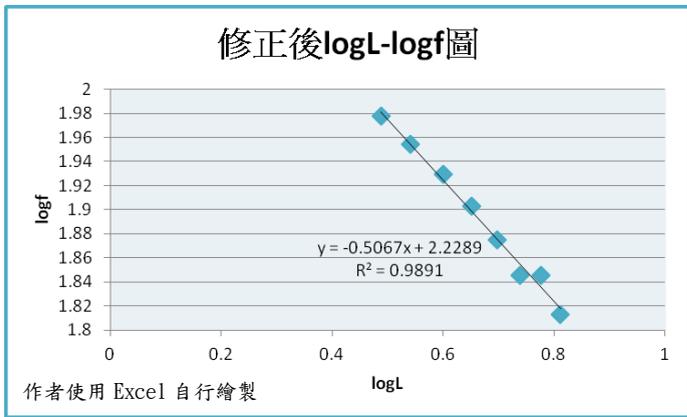
從數據中可看出 logA-logf 圖中的斜率出現較大偏差，經過查詢資料後，我發現公式中的 L 需經過修正， $L = L_0 + 0.8D$ ， D 為瓶口口徑，因此 A 與 L 兩者皆須進行修正。重新取 log 後作圖如下。

修正後 logA-logf 圖



logV-logf 圖

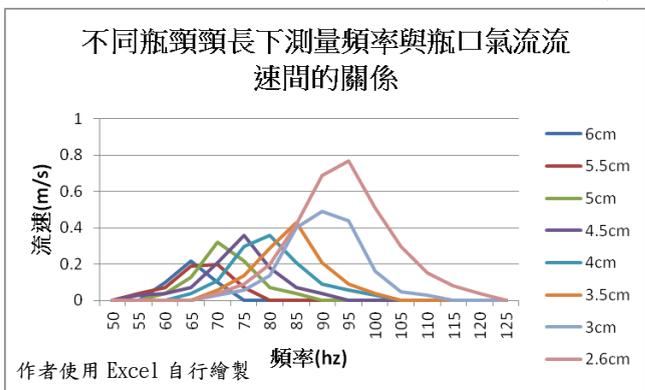




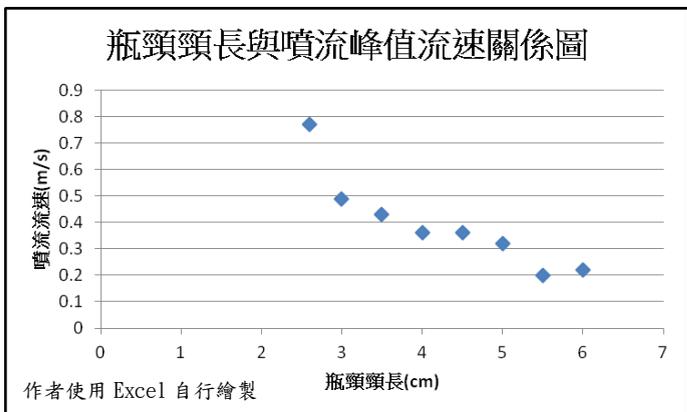
	logA-logf 圖(修正後)	logV-logf 圖	logL-logf 圖(修正後)
理想斜率	0.5	-0.5	-0.5
實際斜率	0.43	-0.44	-0.51

前後數據比對後，可見修正後 logA-logf、logL-logf 圖的斜率為 0.43、-0.51，兩者皆更為接近理論值。

瓶頸頸長對共振時噴流流速的影響



前面的實驗結果有提到，在不同的瓶頸頸長時，當外界聲音頻率達容器共振頻率，瓶口氣流的流速會最大。但在實驗中我們發現，不同頸長的容器儘管都處在共振頻率，容器開口噴出氣流的流速卻不同。

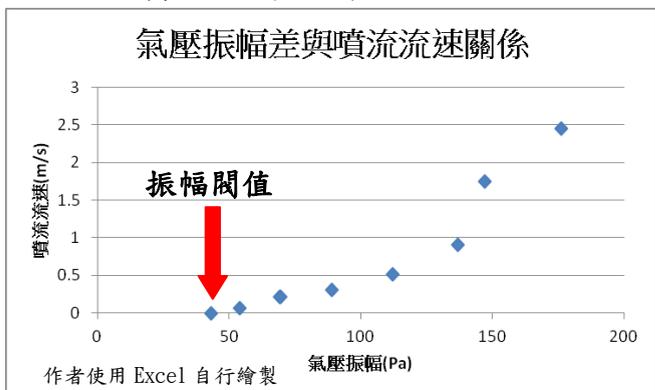


根據上圖，我們可以發現，瓶頸長度越長，共振頻率時瓶口噴出的氣流流速越低，兩者呈負相關。

我們推測此現象的原因是因為在相同的內外壓力差下，頸長越長時需要推動的空氣分子越多，氣流的流速因此就會變慢。

氣壓振幅差與噴流流速間關係

腔體內外的氣壓差是導致合成氣流產生的一大因素，以下實驗在容器共振時改變聲音強度，並使用氣壓感測器探討內外氣壓振幅差與噴流流速間關係。



從數據可發現，當氣壓振幅達到一特定值(閾值)時，合成氣流會突然出現，接著隨氣壓振幅上升持續增加。根據實驗結果推測，當氣壓振幅過低時，瓶頸的空氣柱可能僅以單純的簡諧震盪模式前後震動，不會產生合成氣流噴出，需達到一氣壓振幅閾值才能觸發合成氣流的產生。

氣流出現後，氣壓振幅與噴流流速間兩者之間呈現正相關，然而其中的物理意義卻不明朗，我們也自行推導過許多公式，但由於其中牽涉到許多複雜的能量損耗與流體摩擦力，最後沒有推導出一套理論模型。因此這部分值得持續進行研究。

結論

1. 當容器與外界聲音共振時，容器開口會噴出一連串渦流環，這種噴流形式稱為合成氣流 (synthetic jet)。
2. 腔體內外氣壓波在非共振時為非同相波，兩波振幅差距不大，然而在共振時兩者為同相波，且腔體內氣壓振幅遠大於腔體外氣壓振幅，造成內外極大氣壓差，進一步產生合成氣流噴出。
3. 當外界聲音頻率與容器共振頻率相同時，合成氣流流速達到峰值；偏離共振頻率時，流速急速下降。
4. 合成氣流的峰值流速頻率與容器參數 (腔體體積、瓶口截面積、瓶頸頸長) 之間的關係符合修正後的亥姆霍茲公式，瓶頸長度 L 應修正為 $L_0 + 0.8D$ ，其中 L_0 為原始頸長、 D 為瓶口直徑。
5. 瓶頸越長，腔體共振時合成氣流的峰值流速越低，推測是在相同的內外氣壓差下，頸長越長時需要推動的空氣分子越多所致
6. 當氣壓振幅達到某一臨界值(閾值)時，合成氣流會突然出現。推測當氣壓振幅較低時，瓶頸處的空氣柱僅做簡諧震盪，無法形成合成氣流噴出。只有當振幅超過閾值後，才能觸發合成氣流的生成，而噴流流速與氣壓振幅之間的關係需進一步進行研究解釋。

參考文獻

1. Amit Agrawal, Gunjan Verma, (2008) "Similarity analysis of planar and axisymmetric turbulent synthetic jets", International Journal of Heat and Mass Transfer, 51, pp. 6194-6198.
2. Gil, Paweł & Wilk, Joanna & Korzeniowski, Michał, (2021) "Helmholtz resonance frequency of the synthetic jet actuator", Applied Sciences, Vol 11, Issue 12, p5666
3. 吳佑焉. (2001). 彈性荷姆霍茲共振器之分析. 國立臺灣大學機械工程系
4. 中華民國第 50 屆中小學科學展覽會 作品說明書，腔體共振之探討